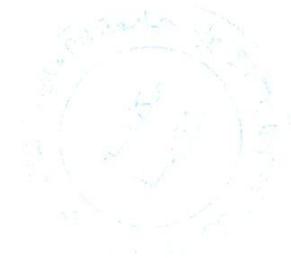


Université du 8 mai 1945 – Guelma
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Mécanique



Mémoire de fin d'étude

Présenté par : BATAH Bassam

Master

Option : Maintenance Industrielle

=====

Etude de l'amortissement dans les structures

=====

Sous la Direction de :

Pr. GUENFOUD Salah

Année universitaire 2012/2013

SOMMAIRE

13/2895

RESUME	1
INTRODUCTION GENERALE	2

CHAPITRE I

RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE SUR L'AMORTISSEMENT

1. Introduction :	3
2. Les différents types d'amortissement :	3
2.1. L'amortissement interne :	4
2.2. L'amortissement structural :	4
2.3. L'amortissement par fluides :	4
3. Mesure de l'amortissement :	5
3.1. Méthode de décrétement logarithmique :	7
3.2. Méthode de boucle hystérésis :	7
4. Synthèses des références bibliographiques :	9
5. Problématique :	12

CHAPITRE II

VIBRATION DES STRUCTURES A UN DEGRE DE LIBERTE

1. Introduction :	14
2. Vibration libre non amortie :	14
2.1. Vibration horizontale :	14
2.2. Vibration en Torsion :	17
2.3. Méthodes Energétiques pour l'analyse :	18
3. Vibration libre amortie :	19
3.1. Vibration avec amortissement visqueux :	19
3.2. Le décrétement Logarithmique A :	23
3.3. Vibration avec amortissement de Coulomb (frottement à sec) :	24
3.4. Vibration combinée entre amortissement visqueux et amortissement de Coulomb : ..	26
3.5. Vibration avec amortissement hystérétique :	26

3.6. Raideurs complexes :	27
4. Vibration Forcée :	28
4.1. Réponse d'une structure d'un amortissement visqueux à une excitation harmonique d'une amplitude constante :	29
4.2. Réponse d'une structure d'un amortissement visqueux supportée par une fondation et sollicitée par une excitation harmonique :	35
4.3. Isolation des vibrations :	36
4.4. Réponse d'une structure d'un amortissement de Coulomb à une excitation harmonique :	40
4.5. Réponse d'une structure d'un amortissement hystérique à une excitation harmonique d'une amplitude constante :	41
4.6. La méthode de réponse par étape :	42
5. Conclusion :	43

CHAPITRE III

VIBRATION DES STRUCTURES A PLUSIEURS DEGRES DE LIBERTE

1. Introduction :	44
2. Vibration des structures à deux degrés de liberté :	44
2.1. Vibration libre non amortie d'une structure à deux degrés de liberté:	44
2.2. Vibration forcée :	47
2.3. Structure avec amortissement visqueux :	50
3. Vibration des structures avec plus de deux degré de liberté :	53
3.1. La méthode de la matrice :	53
3.2. Systèmes à plus de deux degrés de liberté avec amortissement visqueux :	56
4. Conclusion :	56

CHAPITRE IV

MESURE DU FACTEUR DE L'AMORTISSEMENT D'UNE POUTRE

1. Introduction :	57
2. Evaluation expérimentale de la fréquence naturelle :	57
3. Mesure des fréquences naturelles d'une poutre métallique reposant sur deux appuis simples :	58

4. Détermination expérimentale du facteur de l'amortissement ζ de la poutre métallique reposant sur deux appuis simples.....	59
4.1. Méthode de la bande passante	59
4.2. Calcul du facteur de l'amortissement de la poutre métallique reposant sur deux appuis en utilisant sa première fréquence propre f_0	60
4.3. Calcul du facteur de l'amortissement de la poutre métallique reposant sur deux appuis en utilisant sa deuxième fréquence propre f_{11}	61
4.4. Calcul du facteur de l'amortissement de la poutre métallique reposant sur deux appuis en utilisant sa troisième fréquence propre f_{22}.....	61
5. Analyse modale	62
6. Evaluation du facteur de l'amortissement en utilisant la méthode de décrément logarithmique basant sur la réponse mesurée par l'analyseur de signal.....	64
7. Détermination expérimentale du coefficient de l'amortissement ζ de la poutre métallique encastree à ses extrémités	66
8. Conclusion	67
CONCLUSION GENERALE	69
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	70

RESUME

L'analyse dynamique des structures est nécessaire pour calculer leurs fréquences propres, leurs réponses à des différentes excitations, ainsi que de contrôler leurs vibrations en général. De ce fait, on peut savoir si une structure peut remplir sa fonction en service, c'est-à-dire connaître ses contraintes dynamiques, sa déformation et sa fatigue etc. Très souvent, la réponse dynamique d'une structure peut être maîtrisée efficacement en contrôlant son amortissement adéquatement. A noter qu'il existe plusieurs sources d'amortissement dans les structures et la façon la plus efficace de contrôler ce phénomène est sa compréhension pour les systèmes à un degré de liberté, les systèmes à plusieurs degrés de liberté et les systèmes continus. C'est pourquoi, ce travail de Master est consacré à l'étude des divers amortissements utilisés dans les différents systèmes. Les systèmes libres ou forcés à un degré de liberté non amortis ou avec amortissement visqueux, avec amortissement de Coulomb et avec amortissement hystérétique ont été étudiés par différentes méthodes avec beaucoup de détail et présentés avec des exemples. Les systèmes libres ou forcés à plusieurs degrés de liberté non amortis ou avec différents types d'amortissements ont été aussi étudiés par différentes méthodes et présentés avec des exemples. Des résultats empiriques ont été obtenus pour déterminer le facteur d'amortissement d'une poutre métallique avec différentes conditions aux limites à l'aide des expériences effectuées au laboratoire de vibration et acoustique. Enfin, une comparaison de la rigidité et de l'amortissement entre les valeurs calculées et celles issues des mesures est faite.

INTRODUCTION GENERALE

L'amortissement est le phénomène par lequel l'énergie mécanique est dissipée (en général, par la conversion de l'énergie cinématique en énergie thermique interne) dans des systèmes dynamiques. La connaissance du niveau d'amortissement dans le système dynamique est importante dans l'utilisation, l'analyse et l'essai du système. Par exemple, un dispositif soumis à des excitations externes et qui a de l'amortissement relativement faible, pourraient produire des mouvements nuisibles (conditions proches au phénomène de la résonance) lorsqu'il est soumis à des perturbations parasismique. Cet effet pourrait être généralisé pour tous types de structures ayant des amortissements faibles. Cet exemple montre que la connaissance de l'amortissement dans les différents dispositifs structurels est importante dans la conception et le fonctionnement mécanique de ces systèmes. Par conséquent, la nature et le niveau de l'amortissement des différentes composantes structurales doivent être connus afin de développer un modèle dynamique du système adéquat à sa mise en service. Il est aussi à signaler que la connaissance de l'amortissement dans les différents systèmes physiques est également importante afin d'imposer des contraintes environnementales dynamiques sur le système admissibles, c'est-à-dire le maximum d'excitation dynamique en condition de service. Enfin, la connaissance de l'amortissement d'un tel système peut être utile afin d'apporter des modifications de conception aboutissant au succès de sa mise en service après avoir été échoué lors du test des essais.

Dans la caractérisation d'amortissement d'un système dynamique, il est important, d'abord, de comprendre les mécanismes majeurs liés à la dissipation de l'énergie mécanique dans le système. Ensuite, un modèle approprié d'amortissement doit être choisi pour représenter la dissipation d'énergie associée. Enfin, les valeurs d'amortissement (paramètres de modèle) doit être déterminées, par exemple, le test du système consiste à surveiller la réponse du système durant le régime transitoire, durant le fonctionnement normal ou en utilisant les données déjà disponibles.

C'est pourquoi, ce travail de Master est consacré à l'étude des divers amortissements utilisés dans les différents systèmes dynamiques. Le premier chapitre est consacré à l'étude bibliographique faite dans le domaine des amortissements des différentes structures. Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des systèmes libres ou forcés à un degré de liberté non amortis ou avec différents types d'amortissements par de différentes méthodes. Le troisième chapitre est consacré à l'étude des systèmes libres ou forcés à plusieurs degrés de liberté non amortis ou avec différents types d'amortissements par différentes méthodes. Le quatrième chapitre est consacré à une étude expérimentale pour mesurer les fréquences propres d'un système continu en vue de déterminer leurs facteurs d'amortissement et par conséquent calculer leurs différentes grandeurs dynamiques. Le mémoire contient aussi un résumé, une introduction générale, conclusion générale et la liste des références bibliographiques utilisées.

CHAPITRE I

RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE SUR

L'AMORTISSEMENT

CHAPITRE I

RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE SUR L'AMORTISSEMENT

1.1.Introduction :

La vibration qui se produit dans la plupart des machines et des structures n'est pas souhaitable, non seulement en raison : des mouvements désagréables qui en résultent, le bruit et les contraintes dynamiques qui peuvent conduire à la fatigue et la défaillance de la structure, mais aussi en raison des pertes d'énergie et la diminution des performances qui accompagnent les vibrations. Il est donc essentiel de procéder à une analyse dynamique de n'importe quelle structure avant sa mise en service. En raison des effets indésirables des vibrations qui peuvent être survenus sur les systèmes dynamiques, il est essentiel que l'analyse des vibrations soit réalisée comme une partie intégrante de la conception du système même pour que des modifications puissent être prises facilement pour éliminer ou réduire les vibrations autant que possible. Dans ce contexte on introduit l'étude des amortissements dans les différents systèmes dynamiques en vue de maîtriser leurs vibrations.

2. Les différents types d'amortissement :

Plusieurs types d'amortissement sont originellement présents dans un système mécanique. Si le niveau d'amortissement qui est disponible de cette manière n'est pas suffisant pour le bon fonctionnement du système, alors des dispositifs d'amortissement extérieurs peuvent être ajoutés lors de la conception initiale ou lors de la modification de la conception ultérieure du système. Les trois principaux mécanismes d'amortissement connus sont :

- L'amortissement interne (de matériel) ;
- L'amortissement structural (au niveau des joints et des interfaces) ;
- L'amortissement fluide (par interactions fluide-structure)

2.1.L'amortissement interne :

L'amortissement interne des matériaux provient de la dissipation d'énergie associée à des défauts de microstructure, tels que les joints de grains et les impuretés; effets thermo élastiques causés par les gradients de température locaux résultant des contraintes non uniformes, comme dans une poutre vibrante, les effets des courants de Foucault dans les matériaux ferromagnétiques; mouvement des différents éléments constituant des métaux et le mouvement

de la chaîne dans les polymères. Plusieurs modèles ont été utilisés pour représenter la dissipation d'énergie causée par divers amortissements. Cette variété de modèles est principalement le résultat de la vaste gamme de matériaux d'ingénierie ; donc pas de modèle unique qui peut représenter de manière satisfaisante toutes les caractéristiques internes des amortissements de tous les matériaux. Toutefois, deux types généraux d'amortissements internes peuvent être identifiés : l'amortissement viscoélastiques et l'amortissement hystérétique.

2.2.L'amortissement structural :

L'amortissement structural est le résultat de la dissipation d'énergie mécanique par frottements dus aux mouvements entre les différentes composantes d'un système mécanique. Le comportement de dissipation d'énergie dépend des détails du système mécanique particulier. Par conséquent, il est extrêmement difficile d'élaborer un modèle généralisé d'analyse qui peut décrire d'une manière générale l'amortissement structural. La dissipation d'énergie causée par le frottement est généralement représentée par un modèle de frottement de Coulomb.

2.3.I'amortissement par fluides :

L'amortissement par fluide est généré par la traînée (résistance) visqueuse produite par les effets de l'interaction de la couche limite à l'interface fluide-structure, et par la traînée de pression produite par des effets de turbulence d'écoulement résultant au couplage de différents matériaux.

Une classification abrégée des amortissements est donnée dans le tableau suivant :

DAMPING CLASSIFICATION		
Type of Damping	Origin	Typical Constitutive Relation
Internal damping	Material properties	Viscoelastic $\sigma = E\varepsilon + E^* \frac{d\varepsilon}{dt}$
		Hysteretic $\sigma = E\varepsilon + \frac{\tilde{E}}{\omega} \frac{d\varepsilon}{dt}$
Structural damping	Structural joints and interfaces	Structural deformation $f = c q \operatorname{sgn}(\dot{q})$
		Coulomb $f = c \operatorname{sgn}(\dot{q})$
		General interface $f = \begin{cases} f_s & \text{for } v = 0 \\ f_{sb}(v) \operatorname{sgn}(v) & \text{for } v \neq 0 \end{cases}$
Fluid damping	Fluid-structure interactions	$f_d = \frac{1}{2} c_d \rho \dot{q}^2 \operatorname{sgn}(\dot{q})$

En résumé, l'amortissement Interne (original dans le matériau) est le résultat de la dissipation de l'énergie mécanique dans le matériau en raison de divers processus microscopiques et macroscopiques. L'amortissement structural est causé par la dissipation de l'énergie mécanique obtenue à partir de mouvements relatifs entre les différents éléments dans une structure mécanique qui présente des points communs de contact, des joints ou des supports. L'amortissement fluide provient de la dissipation de l'énergie mécanique obtenue à partir des forces de traînée (résistance) et les interactions dynamiques associées quand le système mécanique ou l'une de ses composants se déplacer dans un fluide.

Deux grands types d'amortisseurs externes peuvent être ajoutés à un système mécanique dans le but d'améliorer ses caractéristiques de dissipation d'énergie. Ils sont les suivants :

- L'amortisseur passif

- L'amortisseur actif

Les amortisseurs passifs sont des dispositifs qui dissipent l'énergie par une sorte de mouvement, sans avoir besoin d'une alimentation externe. Les amortisseurs actifs ont des motorisations qui ont besoin de sources externes d'énergie. Ils sont commandés de manière à contrôler le mouvement du système qui a besoin d'amortissement.

Enfin, les amortisseurs peuvent être considérés comme contrôleurs de vibration et dans le présent travail, l'accent sera mis sur les deux premiers types d'amortissement présents dans différents systèmes mécaniques.

3. Mesure de l'amortissement :

Il est souhaitable que toutes les structures doivent posséder suffisamment d'amortissement pour que leur réponse à des excitations attendues soit acceptable. L'augmentation de l'amortissement dans une structure réduira sa réponse à une excitation donnée. Donc l'amortissement d'une structure engendre une réduction des vibrations et du bruit, ainsi que les contraintes dynamiques dans la structure ce qui est bénéfique pour la résistance à la fatigue. Toutefois, il convient de noter que l'augmentation de l'amortissement dans une structure n'est pas toujours facile et peut être coûteux. Certaines structures ont besoin de posséder suffisamment d'amortissement pour que leur réponse à des excitations internes soit contrôlée: par exemple, les machines-outils doivent avoir des amortissements adéquats pour que la réponse à des excitations internes qui se produisent lors de l'usinage soit amortie de sorte que l'outil de coupe génère un bon état de surface et précis pendant des vitesses de coupe élevées. D'autres structures telles que des cheminées et des ponts doit posséder aussi des amortissements pour que leur réponse à des excitations externes ne provoquent pas de contraintes dynamiques importantes susceptibles de

provoquer une défaillance dans la structure. Les amortissements doivent être aussi considérés dans les automobiles, les bâtiments, les navires etc. pour que la transmission du bruit soit amortie. Avant d'envisager des méthodes pour augmenter l'amortissement dans une structure, il est nécessaire de pouvoir mesurer adéquatement l'amortissement structural.

L'amortissement peut être représenté par différents paramètres (tels que la capacité d'amortissement spécifique, facteur de perte, facteur Q, et le rapport d'amortissement) et des modèles (comme visqueux, hystérétique, structurel ou fluide). Avant d'essayer de mesurer dans un système l'amortissement, il faut la représentation d'un modèle qui sera bien caractérisé par la nature de la dissipation de l'énergie mécanique dans le système. Ensuite, décrire les différents paramètres du modèle intervenant dans la mesure de l'amortissement.

Il est extrêmement difficile de développer un modèle réel et convenable pour amortir les vibrations dans une pièce complexe dont ses équipements fonctionnent dans des conditions différentes. Une difficulté majeure se pose parce qu'il est pratiquement difficile d'isoler les différents types d'amortissement présentant dans une même pièce (par exemple, interne, structurel ou fluide) à partir d'une mesure globale. En outre, les mesures d'amortissement doivent être effectuées dans des conditions de fonctionnement réelles pour être plus réalistes. Si un type d'amortissement (par exemple, amortissement par fluide) est éliminé lors de la mesure réelle, alors cette dernière ne représente pas les conditions réelles de fonctionnement. Cette élimination sans doute nous ne permet pas de savoir les possibles effets d'interaction entre les différents types d'amortissements réellement existent dans la structure. De ce fait, l'ensemble d'amortissements présents dans un système n'est pas sensiblement égale à la somme des valeurs individuelles des différents amortissements quand ils agissent de façon indépendante. Une autre limitation du calcul des valeurs d'amortissements équivalents (autre défaut) se pose lorsqu'on utilise des données expérimentales parce qu'on suppose que le modèle est linéaire pour simplifier le comportement dynamique du système. En revanche, si le système est fortement non linéaire, une erreur importante peut être introduite dans l'estimation d'amortissement. Néanmoins, il est de souhaitable de supposer que le comportement visqueux est linéaire lors de l'estimation de l'amortissement à partir des données expérimentales.

Il existe deux façons par lesquelles les mesures d'amortissement peuvent être formulées: l'utilisation d'un enregistrement du temps de réponse et en utilisant une fonction de réponse en fréquence du système pour estimer la mesure de l'amortissement.

3.1.Méthode de décrémentation logarithmique :

C'est peut-être la méthode de réponse temporelle la plus populaire qui est utilisée pour mesurer l'amortissement. Lorsque le système oscillant avec amortissement visqueux est excité par une excitation initiale, la réponse prend une forme décroissante dans le temps.

3.2.Méthode de boucle hystérésis :

Pour un système amorti, le cycle de la force en fonction du déplacement produit un cycle d'hystérésis. En fonction des caractéristiques élastiques et inertielles du matériau et d'autres conditions, la forme de la boucle d'hystérésis change. Mais le travail effectué par les forces conservatrices dans un cycle complet du mouvement sera égal à zéro. Par conséquent, le travail net réalisé sera égal à l'énergie dissipée par l'amortissement seulement.

Il y a aussi d'autres méthodes de réponse temporelle qui sont mentionnées dans le tableau, ci-dessous, à savoir la méthode du procédé de réponse indicielle, la méthode du facteur de grossissement et la méthode de la bande passante.

Le tableau suivant résume les différentes méthodes de mesure d'amortissement :

DAMPING MEASUREMENT METHODS

Method	Measurements	Formulas
Logarithmic decrement method	A_i = first significant amplitude; A_{i+r} = amplitude after r cycles	Logarithmic decrement $\delta = \frac{1}{r} \ln \frac{A_i}{A_{i+r}} \text{ (per cycle)}$ $\frac{\delta}{2\pi} = \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \text{ (per radian)}$ or, $\zeta = \frac{1}{\sqrt{1+(2\pi\delta)^2}}$ For low damping $\zeta = \frac{\delta}{2\pi}$ $\zeta = \frac{A_i - A_{i+1}}{\pi(A_i + A_{i+1})}$
Step response method	M_p = first peak value normalized r.t. steady-state value; PO = percentage overshoot (over steady-state value)	$M_p = 1 + \exp\left[\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right]$ $PO = 100 \exp\left[\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right]$
Hysteresis loop method	ΔU = area of displacement-force hysteresis loop; x_0 = maximum displacement of the hysteresis loop; k = average slope of the hysteresis loop	Hysteretic damping constant $h = \frac{\Delta U}{\pi x_0^2}$ Loss factor $\eta = \frac{h}{k}$ Equivalent damping ratio $\zeta = \frac{h}{2k}$
Magnification factor method	Q = amplification at resonance, w.r.t. zero-frequency value	$Q = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$ For low damping $\zeta = \frac{1}{2Q}$
Bandwidth method	$\Delta\omega$ = bandwidth at $1/\sqrt{2}$ of resonant peak (i.e., half-power bandwidth); ω_r = resonant frequency	$\zeta = \frac{\Delta\omega}{2\omega_r}$

4. Synthèses des références bibliographiques :

L'auteur de la référence [1] a concentré son travail sur l'étude des amortissements linéaires visqueux et non-visqueux des systèmes vibrants à plusieurs degrés de liberté.

Une des principales limitations de la masse et de la rigidité de l'amortissement proportionnel vient du fait que la variation arbitraire des facteurs d'amortissement par rapport à la fréquence de vibration ne peut pas être modélisée avec précision. Cependant, les résultats expérimentaux suggèrent que les facteurs d'amortissement peuvent varier avec la fréquence. Dans ce contexte, un nouveau modèle généralisé de l'amortissement proportionnel est proposé dans la référence [2] pour obtenir la matrice de variation des facteurs d'amortissement avec grande précision.

Le travail apporté dans la référence [3] est consacré à l'élaboration de méthodologies pour l'identification des modèles généraux d'amortissement responsables de la dissipation d'énergie dans une structure vibrante. Dans ce travail, l'auteur considère que le modèle de l'amortissement est visqueux ; quoique dans des circonstances réelles le modèle d'amortissement de la structure est non-visqueux. Une méthode est présentée pour obtenir une matrice d'amortissement de format complexe en matière d'amortissement et de fréquences naturelles et que cette méthode peut prédire la localisation spatiale de l'amortissement avec une bonne précision, et aussi donner des indications sur le mécanisme exact de l'amortissement.

Dans la référence [4], l'auteur a étudié les conséquences de l'utilisation de l'amortissement de type Rayleigh dans l'analyse des structures inélastiques. Il a proposé un modèle type de cet amortissement pour contrôler ce problème.

Une étude sur la réponse dynamique d'une poutre cantilever sollicitée par une force constante est présentée dans la référence [6] pour illustrer l'effet de l'utilisation des modèles visqueux et non visqueux des amortissements.

Le travail de la référence [7] décrit une nouvelle méthode structurale d'amortissement qui permet la fabrication des outils conçus pour maximiser la rigidité dynamique des structures. Cette méthode est une couche viscoélastique d'amortissement qui est très flexible et économique tout en offrant un excellent amortissement pour un large type de structures.

Un modèle d'équation différentielle partielle d'une poutre avec une masse pointe à son extrémité libre est utilisé pour étudier l'amortissement en matériau composite est apporté dans la référence [8].

Une synthèse complète sur les vibrations avec plus de compréhension des éléments de la vibration et plus de discussion analytique, un examen plus approfondi des sources d'amortissement et une plus grande gamme d'exemples et de problèmes sont données dans [9]. Il est noté aussi dans cette référence la modélisation mathématique et l'analyse des vibrations des structures en détail. La référence a fourni également une introduction à certaines des excellentes avancées spécialisées sur la vibration des systèmes dynamiques, ainsi que les paramètres

structurels qui peuvent être modifiés pour atteindre les performances souhaitées dynamiques, notamment, les mécanismes et les méthodes de control des amortissements structuraux.

Le but de l'étude apportée dans la référence [10] est de réaliser une synthèse de l'analyse d'amortissement des matériaux stratifiés, stratifiés avec des couches viscoélastiques intercalées et matériaux sandwich.

Les analyses dynamiques linéaires des structures soumises à des forces ou des mouvements imposés nécessitent d'ajouter des caractéristiques d'amortissement mécanique aux caractéristiques de rigidité et de masse du modèle. Dans ce contexte, le modèle d'amortissement visqueux et le modèle d'amortissement hystérétique (dit aussi "amortissement structural") pour l'analyse harmonique des matériaux viscoélastiques sont étudiés dans la référence [11].

Une analyse est présentée dans la référence [12] de l'effet d'amortissement sur les faibles fréquences propres des systèmes dynamiques linéaires.

Dans la référence [13], l'auteur étudie la conséquence de l'utilisation de l'amortissement proportionnelle de Rayleigh dans l'analyse des systèmes structuraux inélastiques. La discussion est présentée théoriquement, ainsi que par exemple à travers l'analyse d'une simple structure de cinq étages. Il est montré dans ce travail que lorsque la matrice d'amortissement est fonction de la rigidité tangente, mais les constantes de proportionnalité de Rayleigh sont basés sur la rigidité initiale, une amplification significative de l'amortissement se produit. Enfin, des recommandations sont données pour la réalisation d'analyse lorsque l'amortissement artificiel est éliminé ou contrôlé.

Un détail d'informations et de formules analytiques, numérique et expérimentales sur les techniques, les outils et les données pour l'analyse, la conception, le suivi et le control des vibrations, le bruit et l'acoustique est donné dans la référence [14]. Dans cette référence aussi sont données des techniques sur la suppression des vibrations, les amortissements, la conception et le control des vibrations, la conception du système et la suppression du bruit acoustique.

La modélisation, l'analyse et la mesure des amortissements mécaniques de type (viscoélastique, hystérétique, structurel fluide, visqueux de l'interface, de frottement de Coulomb et de Stribeck) sont faites dans la référence [15].

La question concernant la description des caractéristiques des amortissements inhérents aux structures réelles est abordée dans la référence [16]. Une discussion sur les mécanismes responsables de la perte d'énergie et les aspects pratiques de la mesure lorsque les paramètres sont non seulement non linéaires mais aussi lorsque les réponses sont non stationnaires et obtenus à partir des immeubles de grande hauteur. La conclusion présentée est particulièrement utile pour la mesure des caractéristiques des amortissements destinés à ce type de structures.

Une méthode efficace est décrite pour la modélisation par éléments finis des structures contenant un matériau viscoélastique est donnée dans la référence [17]. Des comparaisons sont données entre les résultats obtenus par cette méthode et par l'expérience. Dans ce travail aussi,

les résultats sont exprimés en termes de fréquences, rapports d'amortissement modaux pour plaques, poutres simples et des structures ayant la forme d'anneau.

La présentation d'une étude expérimentale sur les effets d'amortissement d'un traitement d'une couche contrainte amortie d'un panneau incurvé est donnée dans la référence [18] où il est déduit que l'atténuation des vibrations du panneau courbe est obtenu en attachant des correctifs couche de contrainte amorties aux endroits optimaux.

Dans la référence [19], une étude analytique et expérimentale est présentée pour le cas de l'amortissement d'une plaque rectangulaire renforcée par de fibres composites stratifiés.

Un résumé bien détaillé sur les vibrations et l'acoustique avec leur formulation analytique et expérimentale est donné dans la référence [20]. Dans cette référence beaucoup d'exemples d'application théoriques et pratiques sont aussi apportés.

L'illustration de la manière dont les mécanismes de frottement interne responsables de l'amortissement hystérétique dans les solides peuvent conduire à de graves erreurs d'interprétation est discutée dans la référence [21].

La puissance de la transformée de Fourier rapide est illustrée dans la référence [22] pour la mesure de l'amortissement d'un système oscille avec plusieurs modes.

Dans la référence [24], les auteurs ont montré que parmi les divers mécanismes d'amortissement qui sont généralement rencontrés dans une structure, seul le type "visqueux" représente une perte d'énergie. Par conséquent, un modèle linéaire d'un système mécanique vibrant se rapporte uniquement à un amortissement visqueux est donné.

Une nouvelle approche appliquée est décrite dans la référence [25] qui considère les différents modes d'amortissements constitutifs des sous-structures et cette approche permet aussi de proposer un modèle synthétisé d'amortissement du système couplé. Cette nouvelle approche, appelée « équivalent de l'amortissement structural (ESD) », est basée sur l'amortissement structural et fait usage de l'amortissement qui est l'équivalence d'un amortissement modal visqueux et un amortissement modal structural.

Une nouvelle méthode pour mesurer l'amortissement, expérimentalement et théoriquement, dans les systèmes mécaniques de type arbre tournant est présentée dans la référence [26].

Une approche alternative à la méthode modale pour estimer directement les matrices de masse, de rigidité et d'amortissement d'un modèle dynamique est explorée dans la référence [27].

Le travail donné dans la référence [28] décrit la formulation de base pour le mécanisme de l'amortissement dans les structures de matériaux en couches et soudés afin d'améliorer de façon significative leur stabilité dynamique.

Une méthode développée apportée dans la référence [29] pour la détermination des paramètres des amortissements des plaques orthotropes élastiques.

L'étude investiguée dans la référence [30] rend compte pour mieux comprendre les différents types d'amortissements utilisés dans des grands catamarans à grande vitesse, à savoir les ondes faisant amortissement, amortissement visqueux et amortissement acoustique.

Afin d'atténuer les ondes structurelles dans les poutres utilisées dans le chemin de fer, un système d'amortissement (masse-ressort) qui est fixé en continu le long de la longueur de la poutre est considéré et étudié dans la référence [31].

Les auteurs de la référence [33] sont intéressés à comprendre les effets à long terme d'un amortissement de modèle non linéaire en matière du paramètre du temps avec une attention particulière pour des applications spécifiques.

Le travail apporté dans la référence [34] traite une étude expérimentale sur les caractéristiques d'amortissement des structures remplies de boules. Les expériences montrent que les caractéristiques d'amortissement sont nettement affectées par la taille de la boule, et la capacité d'amortissement est améliorée par la méthode d'emballage de la boule.

Une méthode d'analyse permettant d'estimer les amortissements modaux est introduite et des discussions analytiques sur la dépendance du mode d'amortissement avec les considérations énergétiques sont données dans la référence [35]. Il est conclu dans cette étude que l'amortissement modal de pont à haubans est très dépendant des caractéristiques de couplage des formes de mode, et que cela pourrait être causé par la distribution d'énergie de déformation modale, ce qui est différent pour les différents modes.

Enfin, l'efficacité d'amortissement du système de revêtement a été discutée dans le travail présenté dans la référence [36] où le modèle de Reuss et l'équation de Hashin-shtrickman sont considérés. Les résultats théoriques montrent que, pour un système de revêtement, il existe une épaisseur optimale de la couche de revêtement afin d'obtenir le meilleur équilibre entre la résistance et la capacité d'amortissement. Cette étude a montré aussi que l'agrandissement de la différence de modules entre la couche de revêtement et la structure permettra d'améliorer à la fois la rigidité et d'amortissement du système de revêtement.

5. Problématique :

L'analyse des vibrations des structures est nécessaire pour calculer les fréquences propres de la structure et la réponse due à une excitation quelconque. Avant de tenter de réduire les niveaux de vibration d'une structure en étudiant son amortissement, tous les efforts devraient être faits pour réduire l'excitation à la source. Il doit être admis que les structures ne doivent pas exposer à de force de fréquence proche de la fréquence propre de la structure pour éviter de grandes amplitudes de vibration, ainsi que de grandes contraintes dynamiques, de bruit et de fatigue,

phénomène de résonance, ce qui également va empêcher la structure de remplir sa fonction recherchée.

Cependant, des vibrations structurales causées par des sources d'excitations externes ne peuvent être contrôlées que par un amortissement. De ce fait, dans ce travail on va essayer d'étudier les différents amortissements, leurs effets sur les dommages structuraux et sur la réponse vibratoire des structures, les différentes mesures des amortissements structuraux, la source d'amortissement, l'énergie de dissipation dans l'amortissement d'où l'intégrité et l'utilité d'une structure peut être maximisée et entretenue.

CHAPITRE II

VIBRATION DES STRUCTURES A UN DEGRE DE LIBERTE

CHAPITRE II

VIBRATION DES STRUCTURES A UN DEGRE DE LIBERTE

1. Introduction :

Un système à un degré de liberté est le cas le plus simple à analyser, car une seule coordonnée est suffisante pour décrire le mouvement du système complètement. Certains systèmes réels peuvent être modélisés de cette façon, car leur vibration peut être décrite par une seule coordonnée, bien que ces systèmes puissent vibrer dans d'autres directions si tellement sont excités, comme par exemple le pendule de l'horloge. Il convient également de noter que le modèle à un degré de liberté d'un système complexe peut souvent être utilisé lorsqu'on effectue l'analyse d'un mode particulier de vibration. Des exemples réels des structures qui peuvent être analysées par un modèle à un seul degré de liberté on note le balancement des hauts bâtiments reposant sur des sols élastiques et la vibration transversale des ponts.

Pour être en mesure d'analyser un système à un degré de liberté, telle analyse est essentielle dans l'étude dynamique des structures simple ou complexes, il est nécessaire de procéder à la théorie classique faite dans ce domaine. C'est pourquoi ce chapitre est consacré aux détails des vibrations libres et forcées des systèmes à un degré de liberté sans et avec amortissements de différents types.

2. Vibration libre non amortie :

2.1. Vibration horizontale :

Si un corps rigide (fig. 1) est déplacé sur une distance x_0 , horizontalement et puis relâché, les diagrammes des mouvements horizontaux x du corps sont indiqués dans la fig. 2 (a) et (b).

La force utile est toujours dans le sens positif des x , alors que \ddot{x} sera considéré comme négatif. La masse du corps est supposée constante, mais pas toujours, par exemple dans le cas de la masse du réservoir de carburant d'une fusée. La rigidité du ressort k est supposée constante et il est supposé que la masse du ressort est négligeable par rapport à la masse du corps.

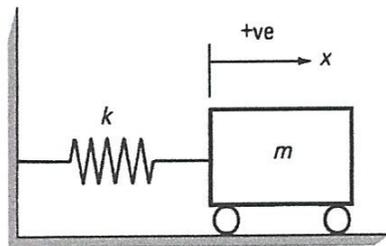


Fig. 1 : Modèle à un seul degré de liberté

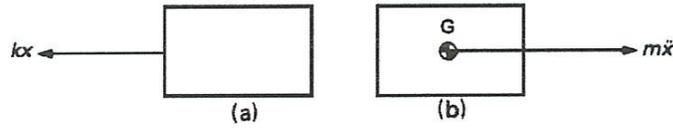


Fig. 2 : (a) force appliquée (b) force effective

L'équation du mouvement du système (fig. 1) qui est connue comme l'équation du mouvement harmonique simple est donné par [9] :

$$m\ddot{x} = -kx \quad \text{ou} \quad \ddot{x} + \left(\frac{k}{m}\right)x = 0 \quad (1)$$

Sa solution est donnée par :

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (2)$$

Les paramètres A et B sont des constantes qui peuvent être trouvées en considérant les conditions initiales, et ω est la pulsation du mouvement. En substituant (2) dans (1), on obtient :

$$-\omega^2(A \cos \omega t + B \sin \omega t) + \left(\frac{k}{m}\right)(A \cos \omega t + B \sin \omega t) = 0$$

Puisque $(A \cos \omega t + B \sin \omega t) \neq 0$ (sinon y aura aucun mouvement), on trouve que :

$$\omega = \sqrt{k/m} \text{ rad/s, alors}$$

$$x = A \cos \sqrt{k/m} t + B \sin \sqrt{k/m} t$$

Pour $x = x_0$ à $t = 0$, on trouve que $x_0 = A \cos 0 + B \sin 0 \Rightarrow x_0 = A$

Pour $\dot{x} = 0$ à $t = 0$, on trouve : $-A\sqrt{k/m} \sin 0 + B\sqrt{k/m} \cos 0 = 0$, donc $B = 0$;

La solution finale pour ce type de conditions initiales est :

$$x = x_0 \cos \sqrt{k/m} t \quad (3)$$

La fréquence de vibration, f est donnée par :

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad \text{ou} \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ (Hz)} \quad (4)$$

Le graphe de ce type de mouvement (formule 3) est représenté dans la Fig. 3.

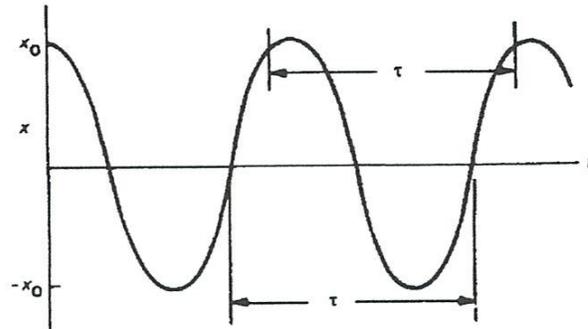


Fig. 3 : Mouvement harmonique simple

La période d'oscillation, τ , est le temps pris pour un cycle complet et donné par :

$$\tau = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{m/k} \quad (\text{Seconde}).$$

L'analyse de la vibration d'un corps à vibrer seulement dans la direction verticale y peut être réalisée d'une manière similaire à celle de l'horizontal.

On constate que pour un système donné, la fréquence de vibration est la même pour la vibration du corps que dans la direction horizontale ou verticale.

Remarque :

Parfois plus d'un ressort agit dans un système vibrant. Le ressort est généralement considéré comme un élément élastique de raideur constante peut prendre plusieurs formes dans la pratique, par exemple, il peut être une bobine de fil, bloc de caoutchouc, poutre ou air bag. Les ressorts combinés peuvent être remplacés dans l'analyse par un seul ressort de raideur équivalente.

Ressorts connectés en série :

Le système des trois ressorts représentés dans la Fig. 4.a. peut être remplacé par un système avec un seul ressort de raideur équivalente Fig. 4.b.

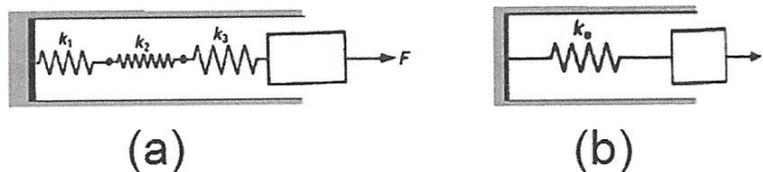


Fig.4 : Système des ressortes en série

Si on applique une force F sur l'extrémité libre la masse, alors le déplacement δ est le même dans les deux cas (a) et (b) de la fig. 4.

$$\delta = \frac{F}{k_e} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} + \frac{F}{k_3} \quad \text{Donc:} \quad \frac{1}{k_e} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{k_i}$$

Donc, l'inverse de la raideur équivalente des ressorts en série est obtenu en faisant la somme de l'inverse de la raideur de chaque ressort.

Ressorts connectés en parallèle :

Le système des trois ressorts présentés dans la fig. 5.a peut être remplacé par un système d'un seul ressort fig. 5.b.

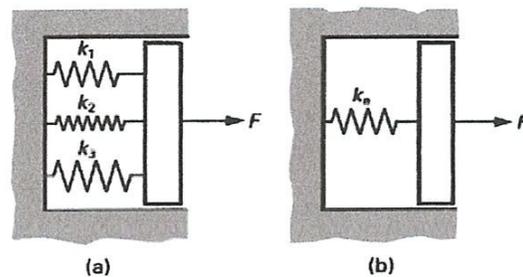


Fig. 5 : Systèmes des ressorts en parallèle

Puisque le déplacement δ doit être le même dans les deux cas, alors la somme des forces exercées sur chaque ressort doit être égale à la force exercée sur le ressort équivalent.

$$F = \delta k_1 + \delta k_2 + \delta k_3 = \delta k_e \quad \text{donc} \quad k_e = \sum_{i=1}^3 k_i$$

Donc, la rigidité équivalente des ressorts reliés en parallèle est obtenue en sommant les raideurs de chaque ressort.

2.2. Vibration en Torsion :

L'équation du mouvement angulaire θ d'un corps libre (fig. 6) est donnée par [9] :

$$I\ddot{\theta} = -k_T\theta \Leftrightarrow I\ddot{\theta} + k_T\theta = 0$$

Il s'agit d'une forme similaire à l'équation (1), qui est le mouvement simple harmonique de fréquence : $f = \left(\frac{1}{2\pi}\right)\sqrt{k_T/I}$ (Hz).

La rigidité à la torsion de l'arbre k_T , est égale au couple appliqué $k_T\theta$ divisé par l'angle de torsion θ .

Donc $k_T = \frac{GJ}{l}$ pour un arbre de section circulaire.

G : module de rigidité du matériau de l'arbre, J : second moment d'inertie autour de l'axe de rotation, l : longueur de l'arbre.

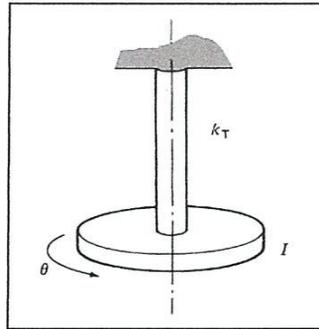


Fig. 6 : Modèle de vibration en torsion à un degré de liberté

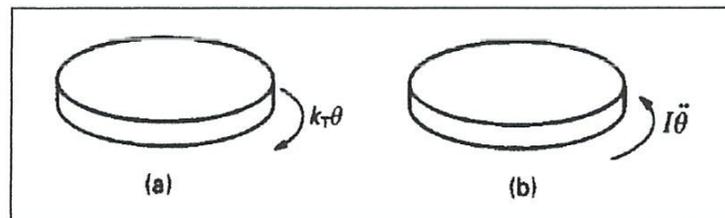


Fig. 7 : (a) le couple appliqué, (b) le couple effectif

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{GJ/lI} \text{ Hz}$$

$$\theta = \theta_0 \cos \sqrt{GJ/lI} t \text{ pour } \theta = \theta_0 \text{ et } \dot{\theta} = 0 \text{ à } t = 0$$

Si l'arbre n'a pas un diamètre constant, il peut être remplacé par un arbre équivalent.

Par exemple, une tige de section circulaire comprenant une longueur l_1 de diamètre d_1 et une longueur l_2 de diamètre d_2 peut être remplacée par une tige de longueur l donnée par :

$$l_e = l_1 + \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 l_2$$

Il convient de noter que les techniques d'analyse des vibrations en torsion sont très similaires au cas des vibrations horizontales.

2.3. Méthodes Energétiques pour l'analyse :

Pour la vibration libre non amortie l'énergie totale dans le système est constante tout au long du cycle. Par conséquent, l'énergie potentielle maximale V_{max} , est égale à l'énergie cinétique maximale T_{max} , bien que ces maximas se produisent à différents moments au cours du cycle de vibration.

$$T + V = \text{constante}$$

$$\text{Donc } \frac{d}{dt}(T + V) = 0$$

L'application de cette méthode dans le cas d'un corps de masse m attachée à un ressort de raideur k lorsque le corps est déplacé d'une distance x de sa position d'équilibre aboutit aux expressions suivantes :

$$\text{Energie de déformation (potentielle) dans le ressort est : } V = \frac{1}{2}kx^2$$

$$\text{Energie cinétique de la masse est : } T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = 0$$

Donc $m\ddot{x} + kx = 0$, d'où l'on peut tirer l'expression :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \text{ qui est l'équation (1)}$$

La méthode énergétique peut être utilisée dans l'analyse vibratoire des systèmes continus comme les poutres.

3. Vibration libre amortie :

Toutes les structures réelles dissipent l'énergie quand ils vibrent. L'énergie dissipée est souvent très faible, de sorte que l'analyse non amortie est parfois réaliste, mais quand cette énergie est significative dans son effet, l'amortissement doit être inclus dans l'analyse. L'énergie est dissipée généralement par les frottements, par exemple le cas qui se produit au niveau du raccordement entre les différents éléments d'une même structure. Il est souvent difficile d'élaborer un modèle d'amortissement exact, car de nombreux mécanismes d'amortissements peuvent fonctionner dans une même structure différemment. Cependant, chaque type d'amortissement peut être analysé et puisque dans de nombreux systèmes dynamiques un seul type d'amortissement est dominant, il est préférable d'analyser le système dynamique en tenant compte de tous ses amortissements. Les types d'amortissements les plus connus sont : visqueux, frottement à sec et hystérésis.

3.1. Vibration avec amortissement visqueux :

L'amortissement visqueux est une forme courante d'amortissements qui se trouve dans de nombreux systèmes d'ingénierie, tels que les instruments et les amortisseurs (shock absorbers). La force d'amortissement visqueux est proportionnelle à la puissance de la vitesse et il s'oppose toujours au mouvement de sorte que la force d'amortissement est une fonction linéaire continue

de la vitesse. Puisque l'analyse de l'amortissement visqueux conduit à un traitement mathématique simple, les analystes font rapprocher parfois les types d'amortissement les plus complexes au type visqueux.

Considérons un modèle à un degré de liberté avec amortissement visqueux fig. 8.

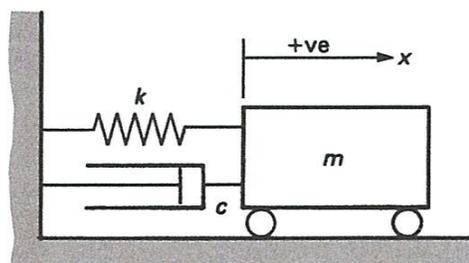


Fig.8 : Modèle à un seul degré de liberté avec amortissement visqueux

Le seul élément inconnu dans le système est l'amortisseur visqueux de facteur c . Ce facteur signifie la force d'amortissement $c\dot{x}$ nécessaire pour déplacer le corps à une vitesse \dot{x} .

L'équation du mouvement est [9] :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (5)$$

Cette équation du mouvement se rapporte à tout le cycle. A noter que les déplacements vers la gauche de la position d'équilibre sont négatifs et les vitesses et les accélérations passant de droite à gauche sont également négatives (fig. 9).



Fig.9 : (a) Force appliquée, (b) force effective

L'équation (5) est une équation différentielle de deuxième ordre qui peut être résolue en prenant une solution de la forme [9] $x = Xe^{st}$. En remplaçant cette solution dans l'équation (5), on obtient :

$$(ms^2 + cs + k)Xe^{st} = 0$$

$Xe^{st} \neq 0$ (sinon ne ya pas de mouvement), donc :

$$ms^2 + cs + k = 0$$

Considérons que les racines de cette équation sont s_1 et s_2 , alors

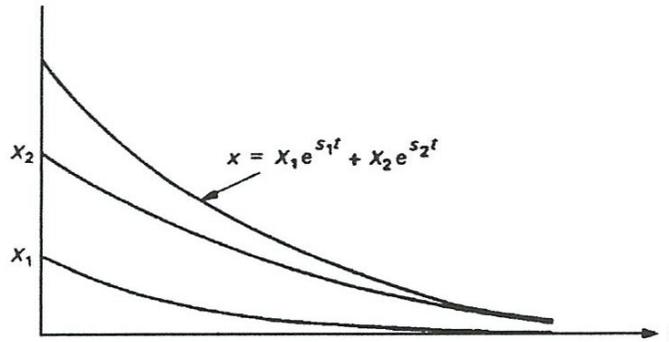


Fig. 11 : Décroissance de la vibration du système d'amortissement visqueux lorsque $\zeta > 1$

3.2. Le décrement Logarithmique Λ :

Un moyen pratique de déterminer l'amortissement dans un système dynamique consiste à mesurer le taux de décroissance de l'oscillation. Il n'est généralement pas satisfaisant de mesurer ω_v et ω car à moins que $\zeta > 0.2$, $\omega_v \approx \omega$.

Le décrement logarithmique Λ est le logarithme naturel (népérien) du rapport de deux amplitudes successives dans la même direction, fig. 12.

$$\Lambda = \ln \frac{X_I}{X_{II}}$$

X_I et X_{II} sont deux amplitudes successives et comme :

$$x = X e^{-\zeta \omega t} \sin(\omega_v t + \phi)$$

$$\text{Et si : } X_I = X e^{-\zeta \omega t}, \quad X_{II} = X e^{-\zeta \omega (t + \tau_v)}$$

où τ_v est la période de l'oscillation amortie.

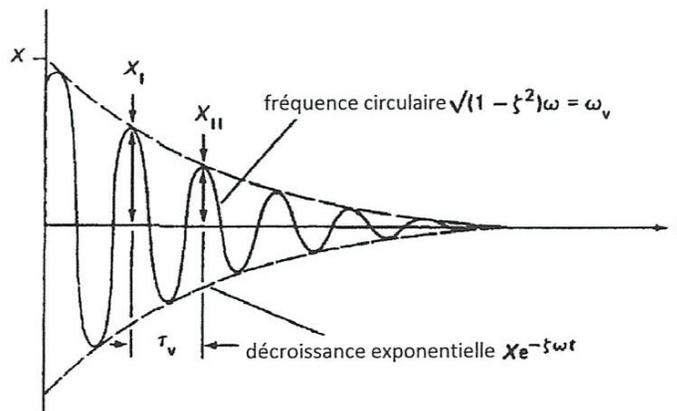


Fig.12 : La décroissance de vibration

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ rad/s}$$

Remarque :

L'intégrale particulière peut être trouvée en utilisant l'opérateur D, donc l'équation (7) devient

$$(D^2 + \omega^2)x = \frac{F_d}{m}$$

$$x = \left(\frac{1}{\omega^2}\right) \left[1 + \frac{D^2}{\omega^2}\right]^{-1} \frac{F_d}{m} = [1 - (D^2/\omega^2) + \dots] F_d/m \omega^2 = F_d/k$$

Les conditions initiales sont $x = x_0$ et $\dot{x} = 0$ à $t = 0$. En remplaçant dans l'équation (8) on trouve :

$$A = 0 \text{ et } B = x_0 - F_d/k$$

L'équation (8) devient :

$$x = \left(x_0 - \frac{F_d}{k}\right) \cos \omega t + \frac{F_d}{k} \tag{9}$$

À la fin du demi cycle de droite à gauche : $\omega t = \pi$ et $x_{(t=\pi/\omega)} = -x_0 + \frac{2F_d}{k}$.

Autrement dit, il ya une réduction de l'amplitude de $2F_d/k$ par demi-cycle.

En tenant compte de la symétrie du cycle, et pour le mouvement allant de gauche à droite, la force de frottement agit dans le sens opposé au mouvement, alors ce dernier est réduit de $4F_d/k$ par cycle.

Cette oscillation continue jusqu'à ce que l'amplitude du mouvement est si petite et que la force maximale du ressort est incapable de vaincre la force de frottement F_d . La manière de décroissance d'oscillation est représentée dans la fig. 14 où l'oscillation cesse lorsque $|x| = F_d/k$. La zone où $x = \pm F_d/k$ est appelée la zone morte.

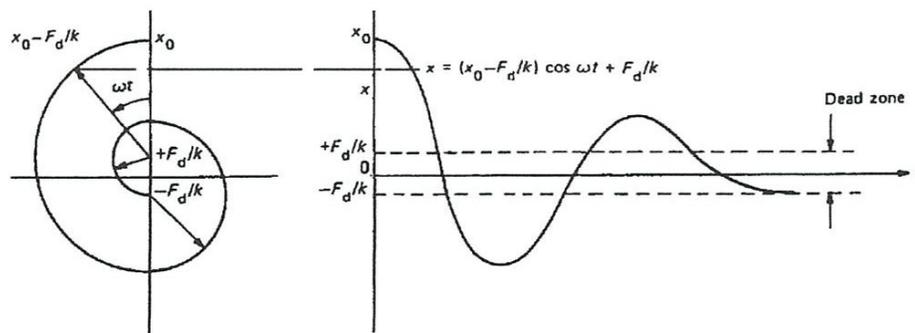


Fig.14 : La décroissance de vibration d'un système avec un amortissement de Coulomb

Pour déterminer la fréquence d'oscillation, nous réécrivons l'équation du mouvement (7) comme suit : $m\ddot{x} + k(x - (F_d/k)) = 0$

Posons $x' = x - (F_d/k)$ et $\ddot{x}' = \ddot{x}$, on obtient :

$m\ddot{x}' + kx' = 0$, d'où la fréquence d'oscillation $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$ (Hz). Cela signifie que la fréquence de l'oscillation ne dépend pas de la force du frottement de Coulomb.

3.4. Vibration combinée entre amortissement visqueux et amortissement de Coulomb :

Les vibrations libres des structures dynamiques avec amortissement visqueux sont caractérisées par une décroissance exponentielle de l'oscillation, alors que les structures avec amortissement de Coulomb leurs vibrations libres possèdent une décroissance linéaire de l'oscillation. De nombreuses structures réellement ont ces deux formes d'amortissement, de sorte que leur décroissance de vibration est une combinaison de fonctions exponentielles et linéaires.

3.5. Vibration avec amortissement hystérétique :

Les expériences sur l'amortissement qui se produit dans des matériaux solides et des structures qui ont été soumis à de contraintes cycliques ont montré que la force d'amortissement est indépendante de la fréquence. Cette amortissement interne est appelé amortissement hystérétique. L'analyse des systèmes et des structures ayant ce type d'amortissement nécessite que la force d'amortissement $c\dot{x}$ soit divisée par la fréquence d'oscillation ω . Donc l'équation du mouvement devient : $m\ddot{x} + \frac{c}{\omega}\dot{x} + kx = 0$

Cependant, il a été observé à partir d'expériences réalisées sur de nombreux matériaux et de structures qui sous soumis à une force harmonique entraîne des déformations avec un angle α . Ainsi, pour une déformation harmonique $\varepsilon = \varepsilon_0 \sin vt$, avec v comme fréquence d'excitation, la contrainte induite est : $\sigma = \sigma_0 \sin(vt + \alpha)$, alors :

$$\sigma = \sigma_0 \cos \alpha \sin vt + \sigma_0 \sin \alpha \cos vt = \sigma_0 \cos \alpha \sin vt + \sigma_0 \sin \alpha \sin \left(vt + \frac{\pi}{2} \right)$$

Le premier élément de contrainte est en phase avec la déformation ε , alors que le second est en quadrature avec ε et $\frac{\pi}{2}$. Posons $j = \sqrt{-1}$, on obtient :

$$\sigma = \sigma_0 \cos \alpha \sin vt + j\sigma_0 \sin \alpha \sin vt$$

On peut donc formuler un module complexe E^* :

$$E^* = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \cos \alpha + j \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \sin \alpha = E' + jE''.$$

Avec E' est la composante en phase ou module de conservation, et E'' et la composante en quadrature ou le module de Perte.

Le facteur de perte η , qui est une mesure d'amortissement hystérétique dans une structure, il est égal à $\frac{E''}{E'}$, c'est-à-dire, $\eta = \frac{E''}{E'} = \tan \alpha$.

Il n'est généralement pas possible de séparer la rigidité de la structure de ses amortissements hystérétiques et donc dans un modèle mathématique ces quantités doivent être considérées ensemble.

La raideur complexe k^* est donnée par $k^* = k(1 + j\eta)$, avec k est la raideur statique et η est le facteur de perte d'amortissement hystérétique.

3.6. Raideurs complexes :

Dans la plupart des structures réelles, il n'est pas possible de séparer les effets de rigidité et d'amortissement parce que ce sont des propriétés inhérentes qui sont souvent couplées. Ces propriétés sont considérées ensemble et sous forme d'une rigidité complexe. Les modèles mathématiques des structures nécessitent donc que ces propriétés à prendre en considération soient sous forme d'une rigidité complexe. La raideur complexe $k^* = k(1 + j\eta)$, avec k raideur statique, $j = \sqrt{-1}$ et η facteur de perte d'amortissement hystérétique.

La fig.15. présente un modèle à un degré de liberté avec amortissement hystérétique c_H .

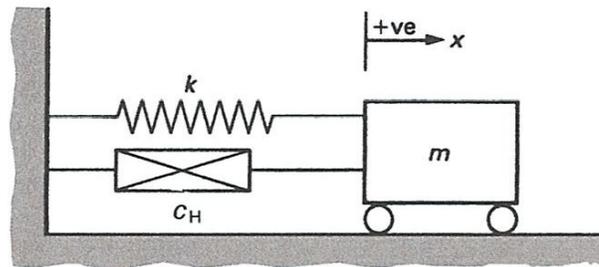


Fig.15 : Système à un degré de liberté avec amortissement hystérétique

L'équation de mouvement pour ce type d'amortissement est [9] :

$$m\ddot{x} + \frac{c_H}{\omega}\dot{x} + kx = 0$$

Si $x = X e^{j\omega t}$, on trouve que $\dot{x} = j\omega x$, ou encore : $\left(\frac{c_H}{\omega}\right)\dot{x} = j c_H x$.

Donc l'équation du mouvement devient :

$$m\ddot{x} + (k + j c_H)x = 0$$

$$k + j c_H = k \left(1 + \frac{j c_H}{k}\right) = k(1 + j\eta) = k^*$$

Donc : $m\ddot{x} + k^*x = 0$

On dit que, l'effet combiné de la résistance élastique et hystérétique au mouvement peut être représenté comme une raideur complexe k^* . Une série de valeurs de η pour certains matériaux courants d'ingénierie sont données dans le tableau suivant [14] :

Le matériau	Le facteur de perte
Aluminium pur	0.00002 - 0.002
Alliage d'aluminium-dural	0.0004 - 0.001
Acier	0.001 - 0.008
Plomb	0.008 - 0.014
Fonte	0.003 - 0.03
Alliage de cuivre au manganèse	0.05 - 0.1
Caoutchouc naturel	0.1 - 0.3
Caoutchouc dur	1.0
Verre	0.0006 - 0.002
Béton	0.01- 0.06

4. Vibration Forcée :

Beaucoup de structures réelles sont soumises à des excitations périodiques. Cela peut être produit dans des machines à cause de la rotation de leurs composantes et équipements, dans des tours à cause des effets de vent ou au niveau des fondations tremblées. Généralement, les contraintes dynamiques, le bruit, la fatigue et les autres effets sont tenus à des niveaux acceptables même pour de très faibles amplitudes de vibration causées par des forces d'excitation.

Certaines forces périodiques sont harmoniques et si elles ne sont pas harmoniques, elles peuvent être représentées comme harmoniques sous forme d'une série de fonctions harmoniques en utilisant des techniques d'analyse de Fourier. On va se focaliser uniquement sur l'étude en dynamique des structures et systèmes soumis à des excitations harmoniques. Les excitations non périodiques tels que le choc, l'impulsion aléatoire, explosion ne sont pas considérées.

4.1. Réponse d'une structure d'un amortissement visqueux à une excitation harmonique d'une amplitude constante :

Dans le système représenté dans la fig. 16, le corps de masse m est relié par un ressort et un amortisseur visqueux et soumis à une force harmonique de fréquence circulaire ν et d'amplitude F .

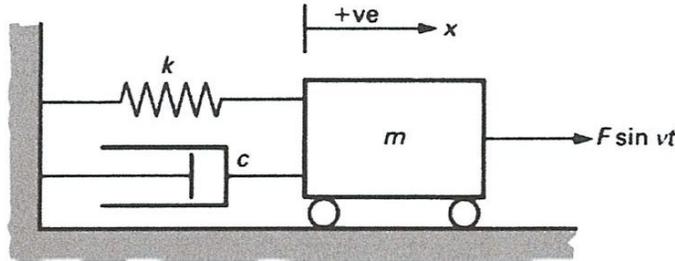


Fig.16 : Model à un degré de liberté d'un système forcé avec amortissement visqueux

L'équation de mouvement pour ce système est [9] :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F \sin \nu t \quad (10)$$

La solution de l'équation différentielle : $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ (vu précédemment) est sous forme de la vibration initiale qui meurt avec le temps.

Le mouvement continu est donné par la solution particulière.

La solution de l'équation différentielle (10) peut être donnée sous forme :

$$x = X \sin(\nu t - \phi),$$

$$\dot{x} = X\nu \cos(\nu t - \phi) = X\nu \sin\left(\nu t - \phi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\ddot{x} = -X\nu^2 \sin(\nu t - \phi) = X\nu^2 \sin(\nu t - \phi + \pi)$$

L'équation (10) devient :

$$mX\nu^2 \sin(\nu t - \phi + \pi) + cX\nu \sin\left(\nu t - \phi + \frac{\pi}{2}\right) + kX \sin(\nu t - \phi) = F \sin \nu t$$

Un diagramme de vecteurs de ces forces peut illustrer (fig. 17)

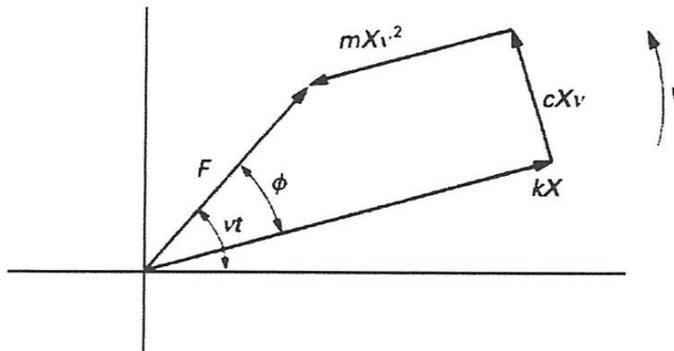


Fig. 17 : Diagramme de vecteurs de forces

Du diagramme fig. 17

$$F^2 = (kX - mXv^2)^2 + (cXv)^2$$

$$X = F / \sqrt{(k - mv^2)^2 + (cv)^2}$$

(11)

$$\tan \phi = \frac{cXv}{(kX - mXv^2)} = \frac{cv}{(k - mv^2)}$$

Donc la solution d'équilibre de l'équation (10) est :

$$x = \frac{F}{\sqrt{(k - mv^2)^2 + (cv)^2}} \sin(vt - \phi)$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{cv}{k - mv^2}\right)$$

La solution complète comprend le mouvement transitoire donné par la fonction complémentaire [9] :

$$x = Ae^{-\zeta\omega t} \sin(\sqrt{1 - \zeta^2}\omega t + \alpha)$$

La fig. 18 représente le mouvement combiné.

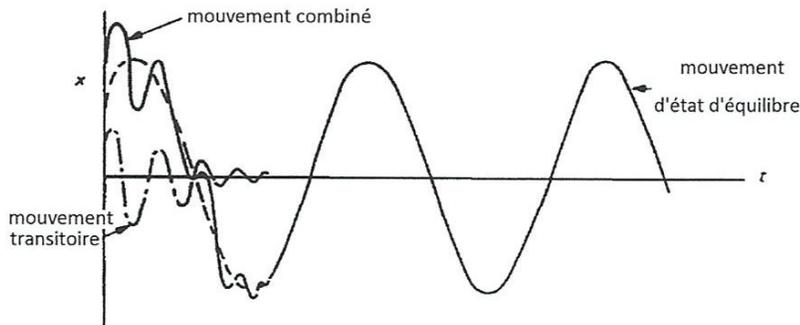


Fig. 18 : Vibration forcée avec mouvement combiné

L'équation (11) peut s'écrire sous une forme plus convenable si nous mettons $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $X_s = \frac{F}{k}$, alors :

$$\frac{X}{X_s} = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\frac{\nu}{\omega})^2]^2 + [2\zeta\frac{\nu}{\omega}]^2}} \quad (12)$$

$$\phi = \arctan \left[\frac{2\zeta(\nu/\omega)}{1 - (\nu/\omega)^2} \right]$$

Le rapport X/X_s est connu comme le facteur d'amplification dynamique, parce que X_s est la déformation statique du système sous une force constante F , et X c'est l'amplitude dynamique.

On considère des différentes valeurs du rapport de fréquence ν/ω , pour tracé X/X_s et ϕ en fonction de la fréquence pour différentes valeurs de ζ (fig. 19. et fig. 20).

L'effet du rapport de fréquence sur le diagramme des vecteurs des forces est représenté dans la fig. 21.

L'importance de la vibration provient principalement des grandes valeurs de X/X_s connues lorsque le rapport de fréquences ν/ω a une valeur proche de l'unité. C'est-à-dire la force peut produire une grande amplitude de vibration. Le phénomène connu sous le nom de résonance se produit lorsque la fréquence d'excitation est égale à la fréquence propre, autrement dit lorsque $\nu/\omega = 1$.

La valeur maximale de X/X_s se produit effectivement à des valeurs de $\nu/\omega \approx 1$. Donc $(\nu/\omega)_{(X/X_s)_{max}} = \sqrt{1 - \zeta^2} \approx 1$ pour de petites valeurs de ζ ,

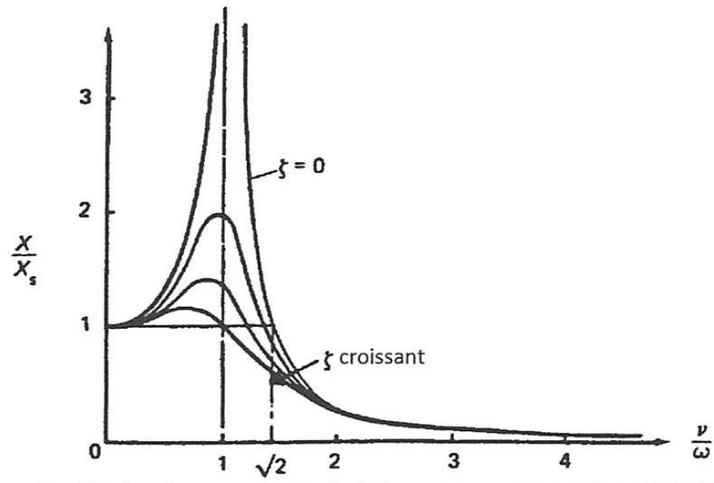


Fig. 19 : La réponse amplitude-fréquence pour le système de la Fig. 16

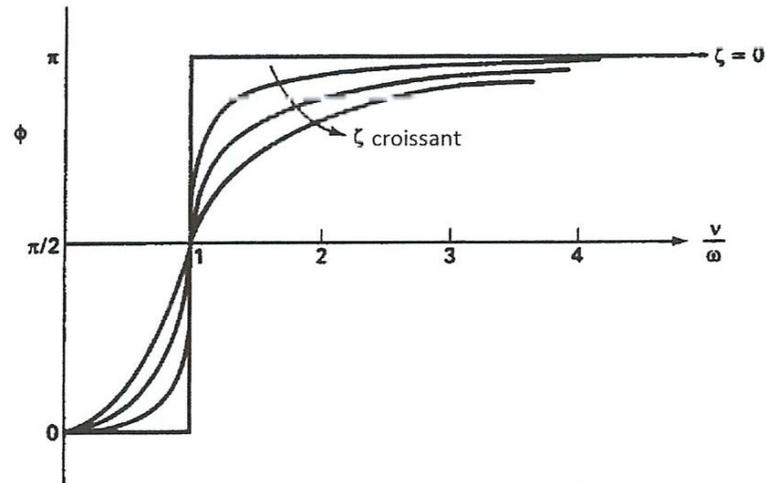


Fig. 20 : La réponse phase-fréquence pour le système de la Fig. 16

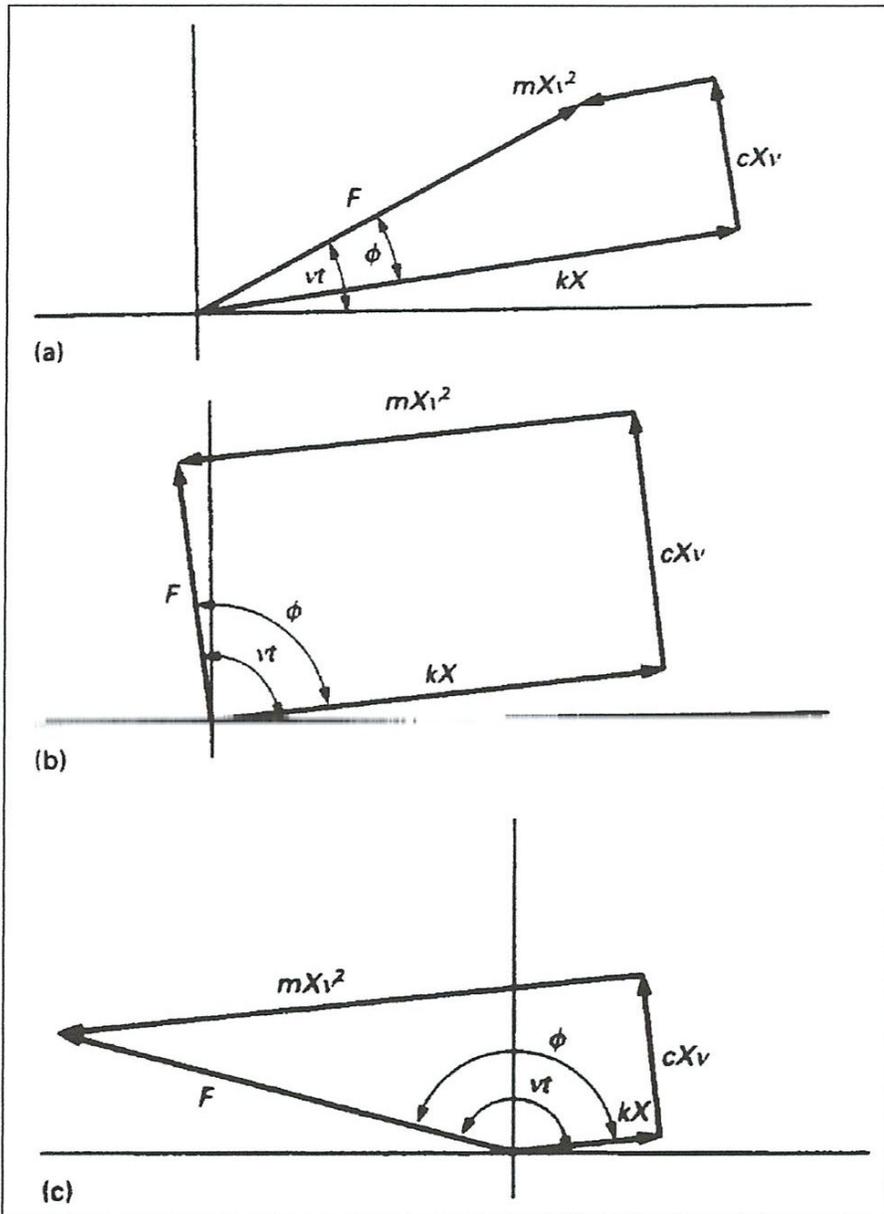


Fig. 21 : Diagrammes vectoriels des vibrations forcées : (a) $v/\omega \ll 1$ la force d'excitation sensiblement égale à la force du ressort; (b) $v/\omega = 1$ la force d'excitation égale à la force d'amortissement, et la force d'inertie égal à la force du ressort; (c) $v/\omega \gg 1$, la force d'excitation à peu près égale à la force d'inertie

$$(X/X_s)_{max} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Pour les petites valeurs de ζ , $(X/X_s)_{max} \approx 1/2\zeta$, qui représente la valeur relatives à $v/\omega = 1$. Donc $1/2\zeta$ est une mesure de l'amortissement visqueux dans un système et connue sous le nom de facteur Q .

Pour un corps asymétrique de masse m_r à un rayon effectif r et en rotation avec une vitesse angulaire ν , la force d'excitation est donc : $m_r r \nu^2$. Si cette force est appliquée dans un système à un degré de liberté tel que celui illustré dans la fig. 16, la composante de la force dans la direction du mouvement est : $m_r r \nu^2 \sin \nu t$, et l'amplitude de vibration prend la forme suivante :

$$X = \frac{(m_r/m)r(\nu/\omega)^2}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta\frac{\nu}{\omega}\right]^2}} \quad (13)$$

La valeur de ν/ω pour X maximum trouvée en différenciant l'équation (13) est donnée par $(\nu/\omega)_{Xmax} = \frac{1}{\sqrt{1-2\zeta^2}}$

qui est le pic de la courbe de réponse qui se produit lorsque $\nu > \omega$, fig. 22.

En outre, on trouve :

$$X_{max} = (m_r/m)r / (2\zeta\sqrt{1-\zeta^2})$$

on peut constaté que loin de la condition de résonance ($\nu/\omega = 1$), la réponse du système n'est pas fortement affecté par l'amortissement, sauf si celui arrive à être grand. Comme dans la plupart des systèmes mécaniques, l'amortissement est généralement faible ($\zeta < 0,1$), donc ce dernier est souvent négligeable lors de l'évaluation de la fréquence pour l'amplitude maximale, ainsi que la réponse en fréquence-amplitude issue de la condition de résonance.

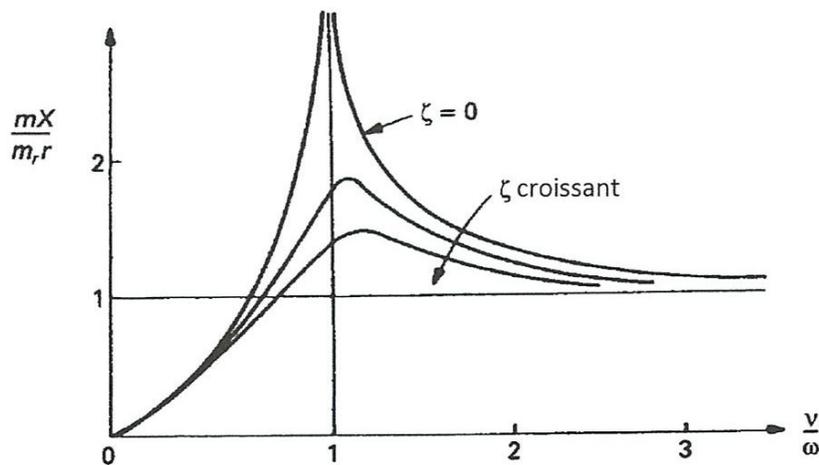


Fig. 22 : Réponse amplitude-fréquence avec due à une excitation harmonique asymétrique

On constate d'après les figures 19, 21 et 22 que la réponse du système aux basses fréquences ($\ll \omega$) dépend de la raideur et dans la région de résonance la réponse dépend de l'amortissement, alors que pour les hautes fréquences ($\gg \omega$) la réponse est régie par la masse du système. Il est

très important donc de comprendre ce phénomène lorsqu'on essaie de réduire la vibration d'une structure. Par exemple, l'application de l'amortissement aura peu d'effet si l'excitation et la réponse fréquentielle sont dans une région bien loin de la résonance, comme celle contrôlée par la masse de la structure.

4.2. Réponse d'une structure d'un amortissement visqueux supportée par une fondation et sollicitée par une excitation harmonique :

Le système considéré est représenté dans le fig. 23. La fondation est soumise à des vibrations harmoniques $A \sin vt$ et le problème posé est de déterminer la réponse x exprimant les mouvements du corps de masse m .

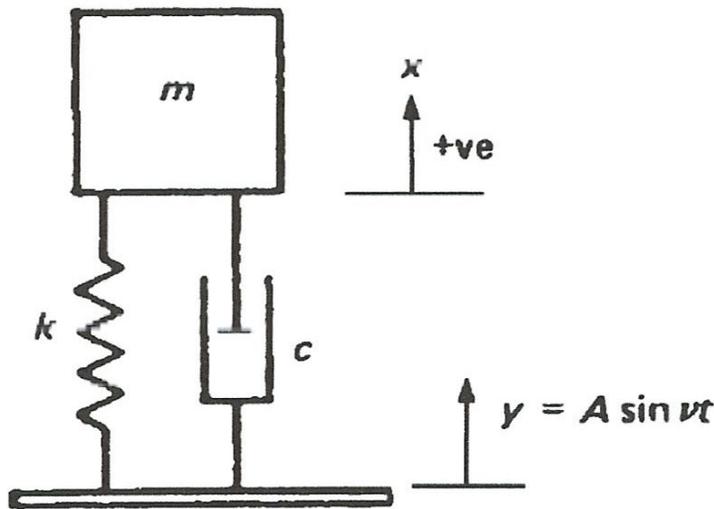


Fig. 23 : Modèle d'un corps supporté par une fondation avec un amortissement visqueux et soumis à une excitation harmonique

L'équation du mouvement est [9] :

$$m\ddot{x} = c(\dot{y} - \dot{x}) + k(y - x) \quad (14)$$

Si le déplacement du corps est relative à la de fondation, cela nous permet de définir l'entité u donnée par : $u = x - y$, et l'équation (14) devient

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{y} = mv^2 A \sin vt$$

Cette équation est semblable à l'équation (10) donc la solution peut être écrite donnée sous la forme suivante :

$$u = \frac{A(v/\omega)^2}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{v}{\omega}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta\frac{v}{\omega}\right]^2}} \sin\left(vt - \arctan\left[\frac{2\zeta(v/\omega)}{1 - (v/\omega)^2}\right]\right)$$

Si le mouvement absolu de corps est demandé, l'équation (14) prend la forme :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{y} + ky = cAv \cos vt + kA \sin vt = A\sqrt{k^2 + (cv)^2} \sin(vt + \alpha)$$

Ici $\alpha = \arctan\left(\frac{cv}{k}\right)$

Du résultat précédent on trouve :

$$x = \frac{A\sqrt{k^2 + (cv)^2}}{\sqrt{(k - mv^2)^2 + (cv)^2}} \sin(vt - \phi + \alpha)$$

La transmissibilité du mouvement est définie comme le rapport entre l'amplitude de vibration du corps et l'amplitude de la vibration de la fondation.

$$\text{Transmissibilité du mouvement} = \frac{X}{A} = \frac{\sqrt{1 + \left(2\zeta\frac{v}{\omega}\right)^2}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{v}{\omega}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta\frac{v}{\omega}\right]^2}}$$

4.3. Isolation des vibrations :

Les forces dynamiques produites par les machines sont souvent très importantes. Cependant, la force transmise à la fondation ou à la structure du support peut être réduite en utilisant des supports flexibles avec de bonnes propriétés ou alternativement une machine peut être isolée de la vibration de fondation en utilisant des supports flexibles corrects. La fig. 24 montre le modèle de telles structures.

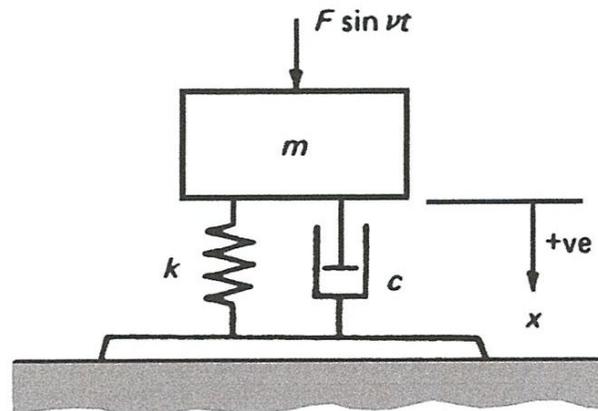


Fig. 24 : Système à un degré de liberté lié à une fondation

La force transmise vers la fondation est la somme des forces du ressort et celle de l'amortissement. Donc la force transmise = $c\dot{x} + kx$ et l'amplitude de la force transmise F_T est donné par :

$$F_T = \sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}$$

Le rapport de transmission de la force ou la transmissibilité, T_r est donné par :

$$T_r = \frac{F_T}{F} = \frac{X\sqrt{k^2+(c\omega)^2}}{F}$$

Puisque : $X = \frac{F/k}{\sqrt{[1-(\frac{\nu}{\omega})^2]^2 + [2\zeta\frac{\nu}{\omega}]^2}}$, alors l'expression de T_r devient :

$$T_r = \frac{\sqrt{1+(2\zeta\frac{\nu}{\omega})^2}}{\sqrt{[1-(\frac{\nu}{\omega})^2]^2 + [2\zeta\frac{\nu}{\omega}]^2}}$$

C'est pourquoi la force et les transmissibilités du mouvement sont les mêmes.

Les effets de ν/ω sur T_r sont représentés dans la fig. 25. C'est clair qu'une bonne isolation $\nu/\omega > \sqrt{2}$, d'où une faible valeur de ω est nécessaire ce qui implique une faible raideur, donc , un support flexible. Dans la pratique ce phénomène n'est pas toujours acceptable où une certaine raideur minimale est généralement nécessaire afin de répondre aux critères d'exploitation.

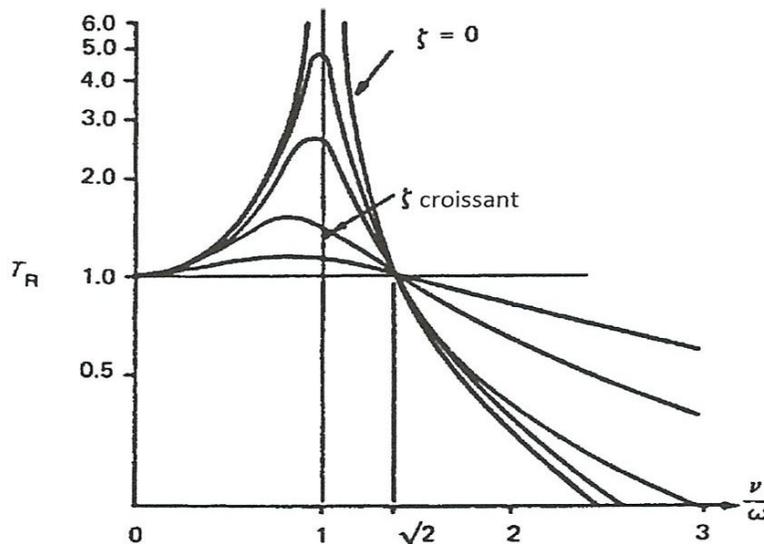


Fig. 25 : Réponse du rapport Transmissibilité-Fréquence

Il est particulièrement important d'être en mesure d'isoler les sources de vibration, car des vibrations peuvent être transmises facilement aux alentours où de graves problèmes de bruit

peuvent être apparus. Théoriquement, les isolateurs à faible rigidité sont souhaitables pour donner une basse fréquence propre. Cependant, cela aboutit à des isolateurs qui sont très flexibles et par conséquent des problèmes de stabilité peuvent survenir. Le système doit être fixé de façon rigide à un grand bloc qui augmente efficacement sa masse de telle sorte que les isolateurs rigides peuvent être utilisés. Le centre de masse du système combiné est également diminué, ce qui donne une meilleure stabilité. Pour la meilleure réponse d'un système combiné, ce dernier peut être conçu avec amortisseurs contrôlant les grandes amplitudes.

Il existe quatre types de matériaux à ressort souvent utilisés pour montages élastiques et isolateurs de vibrations: air, métal, caoutchouc et liège. Les ressorts pneumatiques peuvent être utilisés pour des suspensions à très basse fréquence ($\ll 1$ Hz), tandis que les ressorts métalliques ne peuvent être utilisés que pour des fréquences de supérieure (environ 1,3 Hz). Aussi les ressorts métalliques peuvent transmettre des fréquences élevées. Cependant, les patins en caoutchouc ou en feutre sont souvent utilisés pour empêcher le contact métal sur métal, c'est-à-dire entre le ressort et la structure. Le caoutchouc peut être utilisé dans le cisaillement ou dans la compression, mais rarement dans la tension. Il est important de déterminer la rigidité dynamique d'un isolateur en caoutchouc parce que ce elle est généralement beaucoup plus grande que la rigidité statique. Aussi le caoutchouc possède quelques amortissements propres bien que cela puisse être sensible à l'amplitude, à la température et aux fréquences naturelles de plus de 5 Hz. Le liège est un des plus anciens matériaux utilisés pour l'isolation des vibrations. Il est habituellement utilisé en compression ou pour des fréquences naturelles de plus de 25 Hz.

Exemple :

Une machine de masse m génère une force de perturbation exprimée par : $F \sin \nu t$. Pour réduire la force transmise au support de la structure, la machine est montée sur un ressort de raideur k et un amortisseur. Comparer l'efficacité de ce système d'isolation avec l'amortissement visqueux et hystérétique.

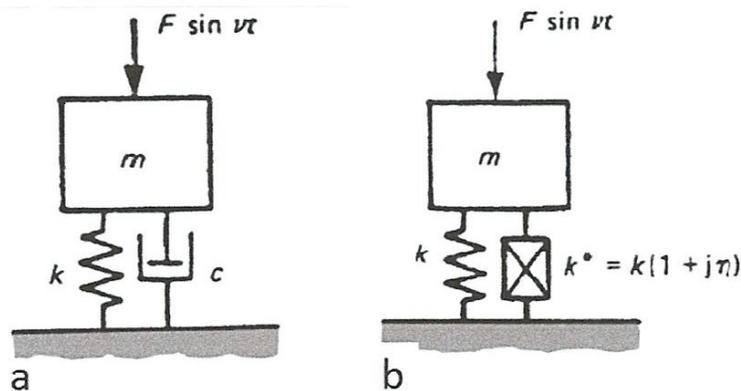


Fig. 26 : a) Système avec amortissement visqueux. b) Système avec amortissement hystérétique

On a :

$$T_r = \frac{F_T}{F} = \frac{\sqrt{1+(2\zeta\frac{v}{\omega})^2}}{\sqrt{[1-(\frac{v}{\omega})^2]^2 + [2\zeta\frac{v}{\omega}]^2}} \quad (15.a)$$

Posons : $\eta = \frac{cv}{k} = 2\zeta\frac{v}{\omega}$. Donc

$$T_r = \frac{F_T}{F} = \frac{\sqrt{1+\eta^2}}{\sqrt{[1-(\frac{v}{\omega})^2]^2 + \eta^2}} \quad (15.b)$$

L'efficacité de ces isolateurs peut être comparée en utilisant ces expressions pour T_r . Les résultats sont présentés dans le tableau ci-dessous :

Les différents cas de T_r	Isolateur d'amortissement visqueux (15.a)	Isolateur d'amortissement hystérique (15.b)
La valeur de T_r pour $v = 0^+$	1	1
Le rapport de fréquence à la résonance	1	1
La valeur de T_r à la résonance	$\frac{\sqrt{1+(2\zeta)^2}}{2\zeta} \approx \frac{1}{2\zeta}$	$\frac{\sqrt{1+\eta^2}}{\eta} \approx \frac{1}{\eta}$
La valeur de T_r pour $v/\omega = \sqrt{2}$	1	1
Rapport de fréquence v/ω pour l'isolation	$> \sqrt{2}$	$> \sqrt{2}$
Haute fréquence, $v/\omega \gg 1$ atténuation de T_r	$\frac{2\zeta}{v/\omega}$	$\frac{1}{(v/\omega)^2}$

On peut constater que les effets de l'isolement sont les mêmes pour les isolateurs visqueux et hystériques, sauf à des taux élevés de fréquence. De ce fait, l'amortissement hystérique donne beaucoup mieux l'atténuation de T_r . A ces fréquences, il est préférable de découpler les isolateurs visqueux amortis en attachant des petits ressorts ou des douilles en caoutchouc à chaque extrémité.

4.4. Réponse d'une structure d'un amortissement de Coulomb à une excitation harmonique :

L'équation du mouvement de ce système (fig. 27) est non linéaire parce que la constante de la force de frottement toujours oppose au mouvement [9] :

$$m\ddot{x} + kx + F_d = F \sin \nu t$$

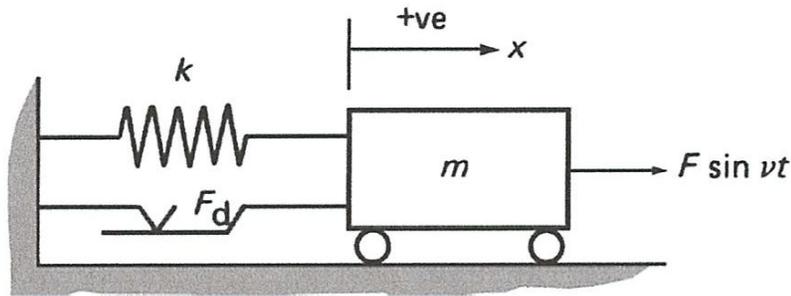


Fig. 27 : Modèle d'un système à un seul degré de liberté avec amortissement de Coulomb

Si F_d , est grande par rapport à F , un mouvement discontinu se produira, mais dans la plupart des structures F_d est généralement faible de sorte qu'une solution approchée continue est valide. La solution approximative est obtenue en linéarisant l'équation du mouvement, ce qui peut être fait en exprimant F_d en fonction d'un facteur d'amortissement visqueux équivalent c_d :

$$c_d = \frac{4F_d}{\pi \nu X}$$

La solution de l'équation linéarisée du mouvement donne l'amplitude X du mouvement comme suite [9] :

$$X = \frac{F}{\sqrt{(k-m\nu^2)^2 + (c_d\nu)^2}} = \frac{F}{\sqrt{(k-m\nu^2)^2 + \left(\frac{4F_d}{\pi X}\right)^2}}$$

C'est-à-dire :

$$\frac{X}{X_s} = \frac{\sqrt{1 - (4F_d/\pi F)^2}}{1 - (\nu/\omega)^2}. \text{ Avec } X_s = \frac{F}{k}.$$

Cette expression est satisfaisante pour les petites forces d'amortissement, si $4F_d/\pi F < 1$, c'est pourquoi il ne faut pas que : $F_d > (\pi/4)F$.

À la résonance l'amplitude n'est pas limitée par l'amortissement de Coulomb.

4.5. Réponse d'une structure d'un amortissement hystérique à une excitation harmonique d'une amplitude constante :

Le modèle d'un système à un degré de liberté avec amortissement hystérique et soumis à une excitation harmonique est présenté dans la fig. 28.

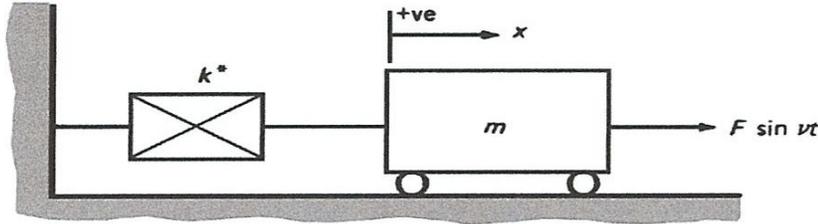


Fig. 28 : Modèle d'un système forcé à un degré de liberté avec amortissement hystérique

L'équation du mouvement de ce système est [9] :

$$m\ddot{x} + k^*x = F \sin vt$$

Avec : $k^* = k(1 + j\eta)$,

La solution de l'équation du mouvement est [9] :

$$x = \frac{F \sin vt}{(k - mv^2) + j\eta k}$$

C'est-à-dire :

$$\frac{x}{x_s} = \frac{1}{\sqrt{(1 - (v/\omega)^2)^2 + \eta^2}}$$

Ce résultat peut également être obtenu à partir de l'analyse d'un système avec un amortissement visqueux par la substitution de c par $\eta k / v$, c'est-à-dire : $c = \eta k / v$.

Il faut noter que si $c = \eta k / v$, à la résonance : $c = \eta \sqrt{km}$; donc : $\eta = 2\zeta = 1/Q$. Alors : $Q = \frac{1}{\eta}$.

Si une structure est fabriquée d'un matériau pour lequel $\eta = 0.02$, le facteur $Q = \frac{1}{0.02} = 50$ à prévoir. Pour un acier avec $\eta = 0.005$, $Q = 1/0.005 = 200$ et pour le fer moulé avec $\eta = 0.01$, $Q = 100$.

Remarque :

Dans la pratique les valeurs de Q sont très inférieures à celles qui se calculent et souvent les valeurs du facteur Q sont 10 fois moins par rapport à celles calculées [9]. De ce fait, les amortissements supplémentaires qui se trouvent dans les structures proviennent des articulations

entre les différentes composantes de la structure. L'amortissement de joint est souvent la forme la plus importante de l'amortissement dans une structure et maintient la réponse dynamique à des niveaux acceptable.

4.6. La méthode de réponse par étape :

C'est une méthode de réponse temporelle, pour unité de masse, qui concerne les systèmes linéaires d'un seul degré de liberté sollicités par des excitations externes. Si une unité d'étape d'une excitation harmonique est appliquée sur un système à un degré de liberté régi par l'équation différentielle suivante [14] :

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega\dot{x} + \omega^2x = \omega^2u_0\cos(\omega t) \quad (16)$$

Sa réponse temporelle est donnée par [13] :

$$x(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi) \quad (17)$$

Avec $\phi = \cos \zeta$.

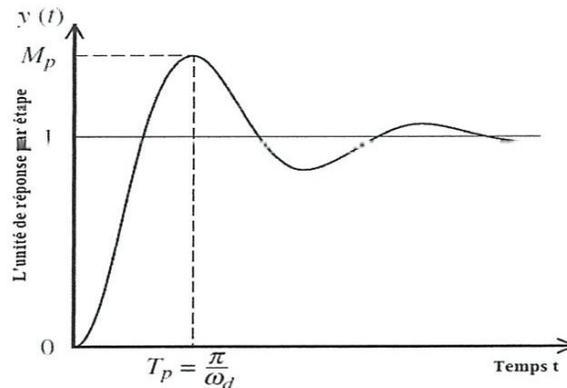


Fig. 29 : La réponse par étape d'un oscillateur simple

La courbe d'une réponse typique par étape est représentée dans la fig. 29. Le temps au premier pic T_p est donné par :

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}\omega} \quad (18)$$

La réponse au temps de pic (valeur de pic), M_p est donné par :

$$M_p = 1 + e^{-\zeta\omega T_p} = 1 + e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad (19)$$

Le pourcentage de dépassement (PO) est par :

$$PO = (M_p - 1)100\% = 100e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad (20)$$

Si un des paramètres : T_p , M_p ou PO est connu à partir d'un enregistrement de réponse par étape, le facteur d'amortissement correspondant ζ peut être calculé en utilisant la relations appropriée des formules suivantes :

$$\zeta = \sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{T_p\omega}\right)^2} \quad (21)$$

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\left[\frac{\ln(M_p - 1)}{\pi}\right]^2}}} \quad (22)$$

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\left[\frac{\ln(PO/100)}{\pi}\right]^2}}} \quad (23)$$

Il convient de noter que lors de la détermination de M_p , la courbe de réponse devrait être normalisée à une valeur unitaire de l'état d'équilibre. Sinon, le résultat est valide que pour le système à un degré de liberté, ainsi que pour des excitations modales des systèmes multi degré de liberté.

5. Conclusion :

Les vibrations des structures peuvent être sous différentes formes, à savoir : libres, forcées, avec ou sans amortissement. Toutes ces formes concernant les systèmes à un seul degré de liberté ont été étudiées dans ce chapitre avec plus de détail donné aux différents types d'amortissements utilisés (visqueux, de Coulomb, hystérétiques ou avec amortissements combinés). Les systèmes avec tous ces types d'amortissements en vibration libre ou forcée due aux excitations harmoniques sont vus. L'isolation de vibration des structures aussi a été vue avec un exemple illustrant l'efficacité d'utilisation des isolateurs visqueux ou hystérétiques. On constate d'après cette étude détaillée que la vibration des systèmes aux basses fréquences dépend de la raideur k et dans la région de résonance dépend de l'amortissement, alors qu'aux hautes fréquences dépend de la masse du système. Donc, il est très important de comprendre ce phénomène lors de l'étude vibratoire des structures.

Enfin, ce chapitre représente la base de l'étude dynamique des systèmes multi degré de liberté qui font l'objet du chapitre suivant, ainsi que les systèmes continus.

CHAPITRE III

VIBRATION DES STRUCTURES A PLUSIEURS DEGRES DE LIBERTE

Alors les équations du mouvement de ce système sont :

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k(x_1 - x_2), \text{ pour la première masse} \quad (1)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) - k_2 x_2, \text{ pour la deuxième masse} \quad (2)$$

Les équations (1) et (2) peuvent être résolues pour les fréquences naturelles et par conséquent pour les formes propres en adoptant la forme suivante :

$$x_1 = A_1 \sin(\omega t + \psi) \text{ et } x_2 = A_2 \sin(\omega t + \psi)$$

Cela suppose que x_1 et x_2 oscillent avec la même fréquence ω et sont en phase ou en opposition de phase. C'est une condition suffisante pour que ω peut considérée une fréquence propre.

On remplace la solution dans les équations (1) et (2), on obtient :

$$-m_1 A_1 \omega^2 \sin(\omega t + \psi) = -k_1 A_1 \sin(\omega t + \psi) - k(A_1 - A_2) \sin(\omega t + \psi)$$

$$-m_2 A_2 \omega^2 \sin(\omega t + \psi) = k(A_1 - A_2) \sin(\omega t + \psi) - k_2 A_2 \sin(\omega t + \psi)$$

Étant donné que ces solutions sont réalistes pour toutes les valeurs de t , alors :

$$A_1(k_1 + k - m_1 \omega^2) + A_2(-k) = 0 \quad (3)$$

$$A_1(-k) + A_2(k_2 + k - m_2 \omega^2) = 0 \quad (4)$$

A_1 et A_2 peuvent être éliminés en écrivant :

$$\begin{bmatrix} k_1 + k - m_1 \omega^2 & -k \\ -k & k_2 + k - m_2 \omega^2 \end{bmatrix} = 0. \quad (5)$$

C'est la matrice donnant l'équation caractéristique des fréquences. Alternativement, on peut écrire des équations (3) et (4) :

$$\left. \begin{aligned} A_1/A_2 &= k/(k_1 + k - m_1 \omega^2) \\ A_1/A_2 &= (k_2 + k - m_2 \omega^2)/k \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Donc :

$$k/(k_1 + k - m_1 \omega^2) = (k_2 + k - m_2 \omega^2)/k, \text{ ou encore :}$$

$$(k + k_1 - m_1 \omega^2)(k_2 + k - m_2 \omega^2) - k^2 = 0 \quad (7)$$

La solution de l'équation (7) donne les fréquences propres du système de la fig. 1. Les déformées propres correspondant se déterminent par le remplacement de ces fréquences dans (6).

Considérons le cas où : $k_1 = k_2 = k$, et $m_1 = m_2 = m$, l'équation de fréquence devient :

$$(2k - m\omega^2)^2 - k^2 = 0; \text{ Donc :}$$

$$m^2\omega^4 - 4mk\omega^2 + 3k^2 = 0 \rightarrow (m\omega^2 - k)(m\omega^2 - 3k) = 0$$

Après résolution on trouve :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ (rad/s)} \text{ et } \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}} \text{ (rad/s)}$$

$$\text{Si } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ (rad/s), alors } (A_1/A_2)_{\omega=\sqrt{k/m}} = +1,$$

$$\text{Si } \omega = \sqrt{\frac{3k}{m}} \text{ (rad/s), alors } (A_1/A_2)_{\omega=\sqrt{3k/m}} = -1,$$

Cela donne les modes propres correspondant aux fréquences propres ω_1 et ω_2 . Donc, le premier mode propre de vibration libre se produit à la fréquence $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$ Hz et $A_1/A_2 = 1$, c'est-à-dire les masses se déplacent en phase l'une par rapport à l'autre et avec la même amplitude comme si elles sont connectées par une liaison rigide fig. 3. Le deuxième mode propre de vibration libre se produit à la fréquence $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3k}{m}}$ Hz et $A_1/A_2 = -1$, c'est-à-dire, les masses se déplacent en opposition de phase l'une par rapport à l'autre et avec la même amplitude fig. 3.

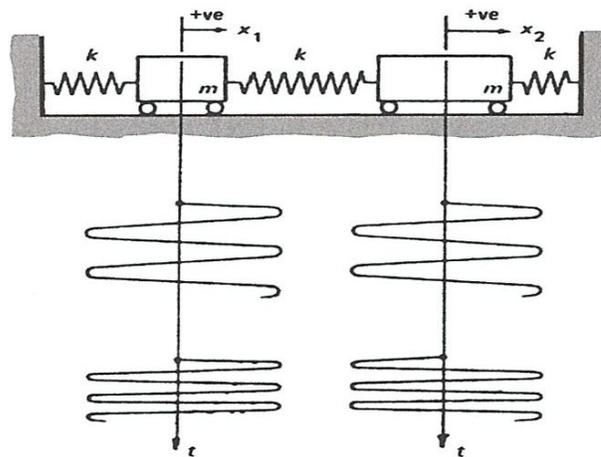


Fig. 3 : Les modes propres d'un système à deux degrés de liberté

Les deux modes de vibration libre peuvent être écrits :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^I = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}^I \sin(\omega_1 t + \psi_1) \text{ et } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{II} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}^{II} \sin(\omega_2 t + \psi_2)$$

Comme chaque solution satisfait l'équation du mouvement, la solution générale est :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}^I \sin(\omega_1 t + \psi_1) + \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}^{II} \sin(\omega_2 t + \psi_2)$$

Où A_1, A_2, ψ_1, ψ_2 paramètres à trouver des condition initiale. Par exemple si :

$$x_1(0) = X \text{ et } x_2(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0,$$

$$\text{Et à rappélé que } \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}, (A_1/A_2)_{\omega_1} = +1, (A_1/A_2)_{\omega_2} = -1,$$

On peut écrire :

$$x_1 = \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \psi_1\right) + \sin\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \psi_2\right) \text{ et } x_2 = \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \psi_1\right) - \sin\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \psi_2\right)$$

Remplaçons les conditions initiales $x_1(0) = X$ et $x_2(0) = 0$, on trouve :

$$X = \sin(\psi_1) + \sin(\psi_2) \text{ et } 0 = \sin(\psi_1) - \sin(\psi_2)$$

Donc :

$$\sin(\psi_1) = \sin(\psi_2) = X/2$$

Les conditions restantes donnent : $\cos(\psi_1) = \cos(\psi_2) = 0$, par conséquent :

$$x_1 = (X/2) \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + (X/2) \sin\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right) \text{ et } x_2 = (X/2) \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) - (X/2) \sin\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right)$$

Autrement dit, le mouvement de chaque masse a deux composantes harmoniques.

2.2. Vibration forcée :

L'excitation harmonique de vibration dans une structure peut être générée sous forme de certaines façons. Par exemple, par une machines tournantes déséquilibrée ou dans le cas de l'excitation périodique contenant une composante harmonique troublante. Un modèle à deux degré de liberté d'une structure excitée par une force harmonique $F \sin vt$ est représenté dans la fig. 4. L'amortissement est supposé négligeable. La force à une amplitude constante et une fréquence $(v/2\pi)$ Hz.

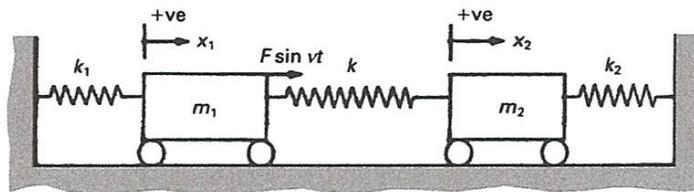


Fig. 4 : Système à deux degré de liberté avec excitation forcée

L'équation du mouvement est :

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k(x_1 - x_2) + F \sin vt \quad \text{et} \quad m_2 \ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) - k_2 x_2$$

Comme il l'amortissement est négligeable, les mouvements sont en phase ou en opposition de phase avec la force d'excitation de sorte que les solutions suivantes peuvent être utilisées :

$$x_1 = A_1 \sin(vt) \quad \text{et} \quad x_2 = A_2 \sin(vt).$$

En remplaçant ces solutions dans les équations du mouvement, on obtient :

$$A_1(k_1 + k - m_1 v^2) + A_2(-k) = F$$

$$A_1(-k) + A_2(k_2 + k - m_2 v^2) = 0$$

Donc :

$$A_1 = \frac{F(k_2 + k - m_2 v^2)}{\Delta}, \quad A_2 = \frac{Fk}{\Delta}.$$

Avec :

$$\Delta = (k_2 + k - m_2 v^2)(k + k_1 - m_1 v^2) - k^2$$

$\Delta = 0$ est l'équation de la fréquence.

Par conséquent, la réponse du système forcé est déterminée.

Exemple

Une remorque à deux roues motrices est posée sur une surface ondulée de telle façon que le mouvement vertical de la roue peut être considérée comme sinusoïdale, le pas des ondulations est de 5 m. La rigidité combinée des pneus est de 170 kN/m et celle du ressort principal est de 60 kN/m, les masses ont les valeurs de 400 kg et de 500 kg (fig.5). Trouver les vitesses critiques de la remorque en (km/h) ? Et leur amplitude de vibration ? La remorque est tirée à une vitesse de 50 km/h et que l'amplitude des ondulations A_3 est de 0,1 m.

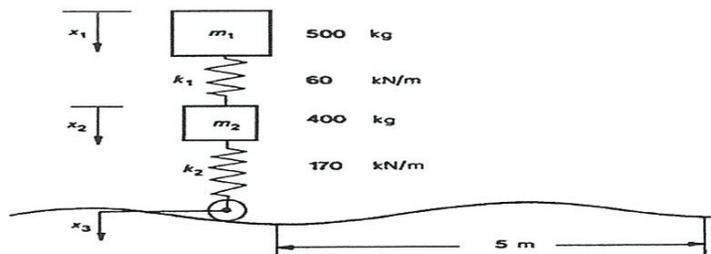


Fig. 5 : Exemple d'un système à deux degré de liberté

Les équations du mouvement sont :

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1(x_1 - x_2) \text{ et } m_2 \ddot{x}_2 = k_1(x_1 - x_2) - k_2(x_2 - x_3)$$

Considérons que :

$$x_1 = A_1 \sin \omega t, x_2 = A_2 \sin \omega t \text{ et } x_3 = A_3 \sin \omega t, \text{ alors :}$$

$$A_1(k_1 - m_1\omega^2) + A_2(-k_1) = 0 \text{ et } A_1(-k_1) + A_2(k_1 + k_2 - m_2\omega^2) = k_2 A_3$$

L'équation de fréquence est :

$$(k_1 + k_2 - m_2\omega^2)(k_1 - m_1\omega^2) - k_1^2 = 0$$

Cette équation se simplifie en :

$$m_1 m_2 \omega^4 - (m_1 k_1 + m_1 k_2 + m_2 k_1) \omega^2 + k_1 k_2 = 0$$

Application numérique :

$$0.2\omega^4 - 139\omega^2 + 10200 = 0$$

Les racines de cette équation sont :

$$\omega = 16.3 \text{ rad/s et } \omega = 20.78 \text{ rad/s, donc : } f = \frac{16.3}{2\pi} = 2.59 \text{ Hz et } f = \frac{20.78}{2\pi} = 3.3 \text{ Hz}$$

Pour une vitesse v (km/h), ou $v/3.6$ (m/s), la fréquence sera $v/(3.6*5)$ (Hz), c'est pourquoi les vitesses critiques sont :

$$\frac{v}{3.6*5} = f = 2.59 \rightarrow v = 3.6 * 5 * 2.59 = 46.6 \text{ m/s} = 167.83 \text{ km/h}$$

$$\frac{v}{3.6*5} = f = 3.3 \rightarrow v = 3.6 * 5 * 3.3 = 59.4 \text{ m/s} = 213.84 \text{ km/h}$$

De l'équation du mouvement, on peut écrire:

$$A_1 = \left(\frac{k_1 k_2}{(k_1 - m_1 \omega^2)(k_1 + k_2 - m_2 \omega^2) - k_1^2} \right) A_3 = \frac{10200}{0.2\omega^4 - 139\omega^2 + 10200} A_3$$

Maintenant si la remorque est tirée à une vitesse de $v = 50 \text{ km/h}$, alors la fréquence sera :

$$\omega = \frac{2*\pi*50}{3.6*5} = 17.45 \text{ rad/s}$$

D'où : $A_1 = -0.749 A_3 = -0.749 * 0.1 = 0.075 \text{ m}$ qui représente l'amplitude de vibration de la remorque.

2.3. Structure avec amortissement visqueux :

Si une structure possède un amortissement de nature visqueuse, l'amortissement peut être modélisé de manière similaire à ce que dans le système représenté dans la Fig. 5.

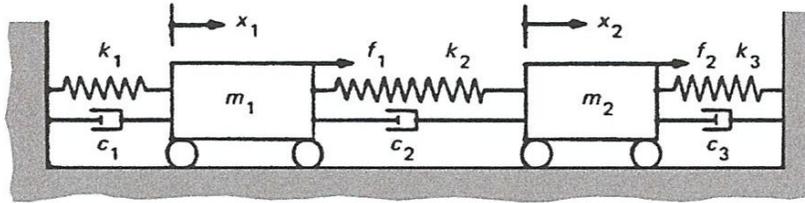


Fig. 6 : Système forcé à deux degré de liberté avec amortissement visqueux

Les équations du mouvement pour ce modèle sont :

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2(x_1 - x_2) + c_1 \dot{x}_1 + c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = f_1$$

$$m_1 \ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) + k_3 x_2 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - c_3 \dot{x}_2 = f_2$$

Une solution de la forme $x_1 = A_1 e^{st}$ et $x_2 = A_2 e^{st}$ peut être supposée, où l'opérateur de Laplace pour ce cas est égal à : $a + jb$, $j = \sqrt{-1}$. a et b sont des réelles. Chaque solution contient une composante harmonique de fréquence b , et une composante de décroissance de vibration d'un facteur d'amortissement a . En substituant ces solutions dans les équations du mouvement, on obtient :

$$s^4 + \alpha s^3 + \beta s^2 + \gamma s + \delta = 0$$

α, β, γ , et δ des coefficients réels.

Cette équation peut posséder quatre racines et donc quatre valeurs de s peuvent être obtenues. En général, les racines forment deux paires conjuguées complexes, tels que : $a_1 \pm jb_1$, et $a_2 \pm jb_2$. Celles-ci représentent des solutions de la forme $x = \text{Re}(X e^{at} \cdot e^{jbt}) = X e^{at} \cos bt$ c'est le cas du mouvement harmonique des masses et décroît exponentiellement avec le temps. Les paramètres du système déterminent l'amplitude de la fréquence et le taux de décroissance.

Il est souvent recommandé de tracer ces racines sur un plan complexe comme le montre la fig. 7. Ceci est connu comme le s -plan.

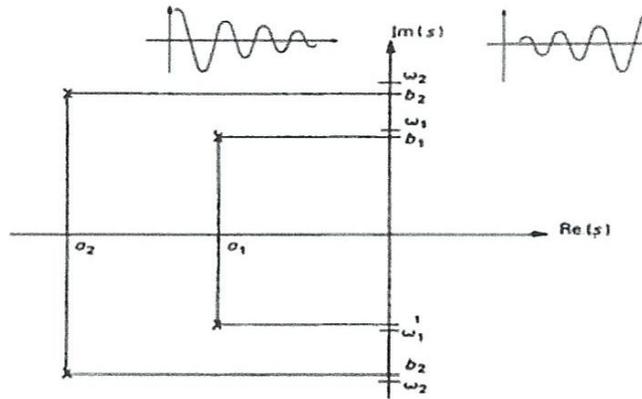


Fig. 7 : s-plan

Pour un léger amortissement les fréquences propres sont approximativement données par :
 $\omega_1 \approx b_1$ et $\omega_2 \approx b_2$.

La partie droite de s-plan contient des racines avec exponentiel positif et dans ce cas le mouvement grandit avec le temps et donc il est instable. La partie gauche contient des racines avec exponentiel négatif et dans ce cas le mouvement décroît avec le temps et donc il est stable.

Exemple :

Considérons un système amorti à deux degrés de liberté, fig. 8. Trouver les équations du mouvement et déterminer les fréquences propres et la réponse des modes principaux. Examiner tous les cas possibles pour différentes racines de l'équation caractéristique ?

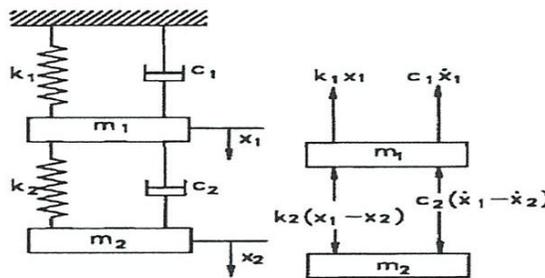


Fig. 8 : Système amorti à deux degrés de liberté.

L'équilibre des forces nous permet d'écrire :

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k_2 (x_1 - x_2) - c_1 \dot{x}_1 - c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2). \quad (1)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = k_2 (x_1 - x_2) + c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2). \quad (2)$$

Supposons que les solutions sont sous la forme : $x_1 = X_1 e^{st}$. Alors :

$$\begin{bmatrix} m_1 s^2 + (c_1 + c_2)s + (k_1 + k_2) & -(c_2 s + k_2) \\ -(c_2 s + k_2) & (m_2 s^2 + c_2 s + k_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

L'équation caractéristique de cette matrice est :

$$m_1 m_2 s^4 + [m_1 c_2 + m_2 (c_1 + c_2)] s^3 + [m_1 k_2 + m_2 (k_1 + k_2) + c_1 c_2] s^2 + (k_1 c_1 + k_2 c_2) s + k_1 k_2 = 0 \quad (4)$$

Cette équation devra avoir quatre racines. Puisque toutes les constantes physiques m_i , k_i , et c_i sont positives et comme tous les signes l'équation sont positifs, donc il n'y a aucune possibilité d'avoir racine positive. C'est pourquoi, les possibilités suivantes sont possibles : (1) les quatre racines sont des complexes de deux paires conjugués ; (2) les quatre racines sont réelles négatives ; (3) deux racines réelles négatives et les deux autres conjuguées complexes.

$$\begin{cases} s_1 = -p_1 + iq_1, s_2 = -p_1 - iq_1 \\ s_3 = -p_2 + iq_2, s_4 = -p_2 - iq_2 \end{cases} \quad (5)$$

p_1, p_2, q_1 , et q_2 des réels positifs

Les deux première racines donnent la solution suivante :

$$x_1 = X_{11} \exp[(-p_1 + iq_1)t] + X_{12} \exp[(-p_1 - iq_1)t] = e^{-p_1 t} (X_{11} e^{iq_1 t} + X_{12} e^{-iq_1 t})$$

$$x_1 = A_{11} e^{-p_1 t} \sin(q_1 t + \phi_{11}) \quad (6)$$

et

$$x_2 = X_{21} \exp[(-p_1 + iq_1)t] + X_{22} \exp[(-p_1 - iq_1)t]$$

$$x_2 = A_{21} e^{-p_1 t} \sin(q_1 t + \phi_{21}). \quad (7)$$

Ces deux solutions représentent un mouvement oscillatoire avec des amplitudes qui décroissent exponentiellement. De la même manière on trouve les deux autres solutions pour les racines S_3 et S_4 . Combinons les quatre racines, on obtient les solutions générales suivantes :

$$x_1 = A_{11} e^{-p_1 t} \sin(q_1 t + \phi_{11}) + A_{12} e^{-p_2 t} \sin(q_2 t + \phi_{12})$$

$$x_2 = A_{21} e^{-p_1 t} \sin(q_1 t + \phi_{21}) + A_{22} e^{-p_2 t} \sin(q_2 t + \phi_{22})$$

$A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, \phi_{11}, \phi_{21}, \phi_{12}$, et ϕ_{22} paramètres à déterminer. Avec l'utilisation de l'équation. (3), pour chaque racine, on peut trouver quatre relations. Quatre autres relations peuvent être trouvées en utilisant les conditions initiales : $x_1(0), x_2(0), \dot{x}_1(0)$ et $\dot{x}_2(0)$. Par conséquent, toutes les constantes seront déterminées.

Pour le second cas, où les quatre racines sont réelles et négatives, alors le mouvement n'est pas oscillatoire et les déplacements des masses se dégradent de façon exponentielle. Ce cas est similaire au cas sur-amorti.

Enfin, pour le troisième cas, où les deux racines sont réelles et négatives et les deux autres sont une paire de complexes conjugués, les solutions générales sont :

$$x_i = A_i e^{-pt} \sin(qt + \phi_i) c_i e^{-s_3 t} + d_i e^{-s_4 t}$$

Ces constantes se déterminent de la même manière du premier cas.

3. Vibration des structures avec plus de deux degré de liberté :

L'analyse des vibrations des systèmes à plusieurs degrés de liberté se fait de la même manière que pour les systèmes à deux degrés de liberté. Cependant, la méthode devient encore compliquée pour ces systèmes et donc on a recours à des méthodes numériques pour résoudre l'équation des fréquences propres et par conséquent déterminer les modes propres correspondant.

3.1. La méthode de la matrice :

La méthode de matrice pour l'analyse des systèmes à plusieurs degrés de liberté est un moyen pratique afin de gérer plusieurs équations du mouvement. En outre, des informations spécifiques sur une structure telle que la plus petite fréquence propre peut être obtenue sans procéder à une analyse complète et détaillée. La méthode de la matrice d'analyse est particulièrement importante, car elle constitue la base de nombreuses solutions informatiques à des problèmes de vibration. La méthode peut être mieux démontrée au moyen d'un exemple.

Exemple :

Soit une structure modélisée par un système à trois degrés de liberté, fig. 6. Déterminer la fréquence propre la plus élevée de vibration libre et la forme du mode propre correspondant ?

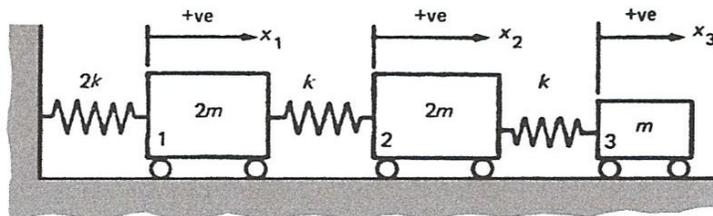


Fig. 8 : Système à trois degrés de liberté

Les équations du mouvement sont :

$$2m\ddot{x}_1 + 2kx_1 + k(x_1 - x_2) = 0$$

$$2m\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) + k(x_2 - x_3) = 0$$

$$m\ddot{x}_3 + k(x_3 - x_2) = 0$$

Si : x_1 , x_2 et x_3 prennent la forme : $X \sin \omega t$ et $\lambda = m\omega^2/k$, alors ces équations peuvent être écrites sous la forme suivante :

$$\frac{3}{2}X_1 - \frac{1}{2}X_2 = \lambda X_1,$$

$$-\frac{1}{2}X_1 + X_2 - \frac{1}{2}X_3 = \lambda X_2,$$

$$-X_2 + X_3 = \lambda X_3,$$

C'est-à-dire

$$\begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix}$$

Ce que l'on peut noter :

$$[S]\{X\} = \lambda\{X\}$$

Avec $[S]$ est la matrice du système, $\{X\}$ est le vecteur du système et le λ est une quantité scalaire.

Cette équation matricielle peut être résolue par un procédé d'itérations. Cette procédure nécessite de supposer un vecteur initial $\{X\}$ que l'on multiplie par la matrice $[S]$. Le résultat obtenu sera normalisé en divisant ses termes par le plus grand terme. La procédure sera répétée jusqu'à ce que les amplitudes stabilisent à un modèle défini. La convergence tend toujours à la plus grande valeur de λ et au vecteur correspondant. Comme $\lambda = m\omega^2/k$, cela signifie que la fréquence propre la plus grande est déterminée. Proposons le vecteur initial suivant :

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

Donc :

$$\begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ -2.5 \\ 3 \end{Bmatrix} = 3 \begin{Bmatrix} 0.67 \\ -0.83 \\ 1.00 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.67 \\ -0.83 \\ 1.00 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.415 \\ -1.665 \\ 1.83 \end{Bmatrix} = 1.83 \begin{Bmatrix} 0.77 \\ -0.91 \\ 1.00 \end{Bmatrix}$$

Après plusieurs itérations, on arrive à :

$$\begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix} = 2 \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Cela veut dire que $\lambda = 2$ et comme $\omega^2 = \lambda k/m = \frac{2k}{m}$. λ représente la valeur propre de $[S]$, et le vecteur $\{X\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ représente le vecteur propre correspondant de $[S]$. Le vecteur propre représente la forme du mode propre.

Donc la plus grande valeur de la magnitude est $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{2k/m}$ Hz, et la forme du mode propre associé est : $\{X\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$.

Remarque :

Si la plus basse fréquence propre qui est demandée, dans ce cas on procède au suivant :

Multiplions le système $[S]\{X\} = \lambda\{X\}$ par : $\lambda^{-1}[S]^{-1}$. On obtient : $[S]^{-1}\{X\} = \lambda^{-1}\{X\}$.

L'itération de cette équation donne la plus grande valeur de λ^{-1} et par conséquent, la plus basse fréquence propre.

Alternativement, la plus basse valeur propre peut être obtenue de la matrice de flexibilité. La matrice de flexibilité est écrite en termes de coefficients d'influence. Le coefficient d'influence α_{pq} d'un système est la déformation (ou la rotation) dans la point p due a une unité de force (ou de moment) appliquée dans un point q . Donc, la force qui est appliquée sur chaque masse est le produit de sa masse avec son accélération :

$$X_1 = \alpha_{11} 2mX_1\omega^2 + \alpha_{12} 2mX_2\omega^2 + \alpha_{13} mX_3\omega^2$$

$$X_2 = \alpha_{21} 2mX_1\omega^2 + \alpha_{22} 2mX_2\omega^2 + \alpha_{23} mX_3\omega^2$$

$$X_3 = \alpha_{31} 2mX_1\omega^2 + \alpha_{32} 2mX_2\omega^2 + \alpha_{33} mX_3\omega^2$$

Ou encore :

$$\begin{bmatrix} 2\alpha_{11} & 2\alpha_{12} & \alpha_{13} \\ 2\alpha_{21} & 2\alpha_{22} & \alpha_{23} \\ 2\alpha_{31} & 2\alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{m\omega^2} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix}$$

Les coefficients d'influence sont calculés en appliquant une unité de force ou de moment à chaque masse à son tour. Comme la même unité de force agit entre le support et son point d'application, le déplacement du point d'application de la force est la somme des extensions des

ressorts étendus. Les déplacements de tous les points au-delà du point d'application de la force sont identiques :

Donc :

$$\alpha_{11} = \alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{21} = \alpha_{31} = \frac{1}{2k}$$

$$\alpha_{22} = \alpha_{23} = \alpha_{32} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{k} = \frac{3}{2k}$$

$$\alpha_{33} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k} = \frac{5}{2k}$$

L'itération entraîne la valeur propre $k/(m\omega^2)$ à converger vers la plus grande valeur, et donc la plus basse fréquence propre est trouvée. Les autres fréquences naturelles de système peuvent être trouvées par l'application de la relation d'orthogonalité entre les principaux modes de vibration.

3.2.Systèmes à plus de deux degrés de liberté avec amortissement visqueux :

L'étude de ce type de systèmes est la même étude concernant les systèmes à deux degrés de liberté où le nombre d'équations du mouvement est supérieur à 2, ainsi que la taille des matrices de masse $[m]$, d'amortissement $[c]$ et de rigidité différents $[k]$ est aussi supérieure à 2. Bien évidemment, la formulation mathématique et les manipulations numériques des systèmes d'équations de taille supérieure est plus compliquée que les systèmes binaires.

4. Conclusion :

Les vibrations des systèmes, à plusieurs degrés de liberté, libres et forcés avec ou sans amortissements ont été étudiées dans ce chapitre avec beaucoup de détail. Les systèmes à deux degrés de liberté ont été abordés avec plus de détail à commencer des équations du mouvement, leur résolution, la détermination de leurs fréquences et modes propres et leurs réponses sans ou avec la présence de l'amortissement. Quelques exemples d'application sont donnés. Les systèmes à plus de deux degrés de liberté amortis ou non amortis ont aussi vu avec détail, notamment la méthode de la matrice permettant de déterminer les fréquences propres, les modes propres et les réponses de ces systèmes. A noter que plus le nombre de degré de liberté de systèmes dynamiques augment, plus leur étude se complique et devient difficile, analytiquement ou numériquement.

CHAPITRE IV

MESURE DU FACTEUR DE

L'AMORTISSEMENT D'UNE POUTRE

CHAPITRE IV

MESURE DU FACTEUR DE L'AMORTISSEMENT D'UNE POUTRE

1. Introduction :

L'amortissement présent dans les structures peut être considéré comme étant un amortissement inhérent qui se produit naturellement dans la structure ou un amortissement construit spécialement et ajouté à la structure pour contrôler sa vibration. De ce fait, tous les matériaux se dissipent un peu d'énergie lors de la déformation cyclique ou lors de la vibration. Ce phénomène est donc lié à des mécanismes associés à la reconstruction interne comme la dislocation moléculaire et les changements de contraintes aux joints de grains. Ces effets d'amortissement ne sont pas linéaires et variables d'un matériau à un autre de telle sorte que l'analyse de ces mécanismes d'amortissement est très difficile. Toutefois, des mesures expérimentales sur le comportement des échantillons de matériaux peuvent être effectuées pour déterminer le coefficient d'amortissement qui se produit dans une structure donnée. Donc ce chapitre est consacré à une analyse modale expérimentale qui est également effectuée afin de mesurer le coefficient d'amortissement d'une poutre métallique avec différentes conditions aux limites et de le comparer aux valeurs analytiques.

2. Evaluation expérimentale de la fréquence naturelle :

Il est possible d'évaluer les fréquences naturelles d'un système mécanique réel à partir de résultats expérimentaux. Les différents spectres sont obtenus en balayant les fréquences à l'intérieur d'une certaine plage. Ces spectres permettent d'évaluer la fréquence naturelle du système et puis déterminer les différentes grandeurs physiques en utilisant les formules appropriées. La fig. 1 montre les équipements expérimentaux utilisés pour effectuer les essais de mesure des fréquences propres d'une poutre métallique avec différentes conditions aux limites. Il s'agit d'un analyseur du signal de vibration SAUT2035 lié à la poutre métallique par de capteurs.

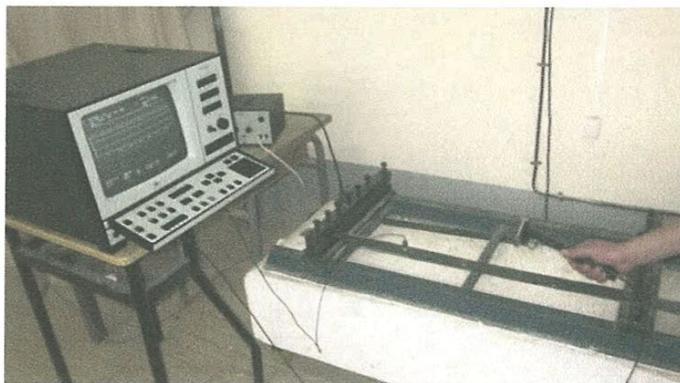


Fig. 1 : Dispositif utilisé pour la mesure des fréquences propres d'une poutre métallique

3. Mesure des fréquences naturelles d'une poutre métallique reposant sur deux appuis simples :

Soit une poutre métallique reposant sur deux appuis simples est reliée à l'analyseur du signal SAUT2035 par un capteur est excitée par un marteau de choc qui est lié aussi de son coté à l'analyseur de vibration, fig. 1. Le spectre obtenu représentant la fonction du transfert de Fourier (FFT) des amplitudes de l'accélération de la poutre en fonction des fréquences est illustré dans la fig. 2 et fig. 3.

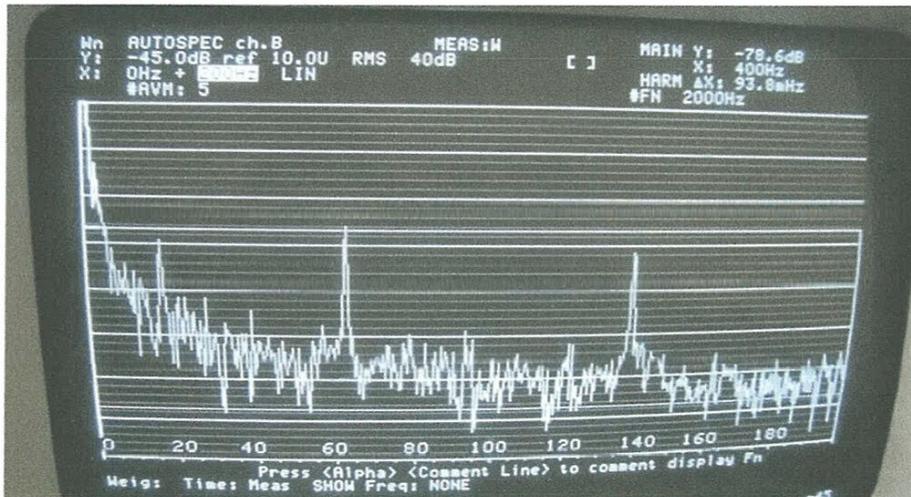


Fig. 2 : Spectre mesuré par l'analyseur de signale représentant FFT des amplitudes de l'accélération en fonction des fréquences d'une poutre métallique reposant sur deux appuis simples

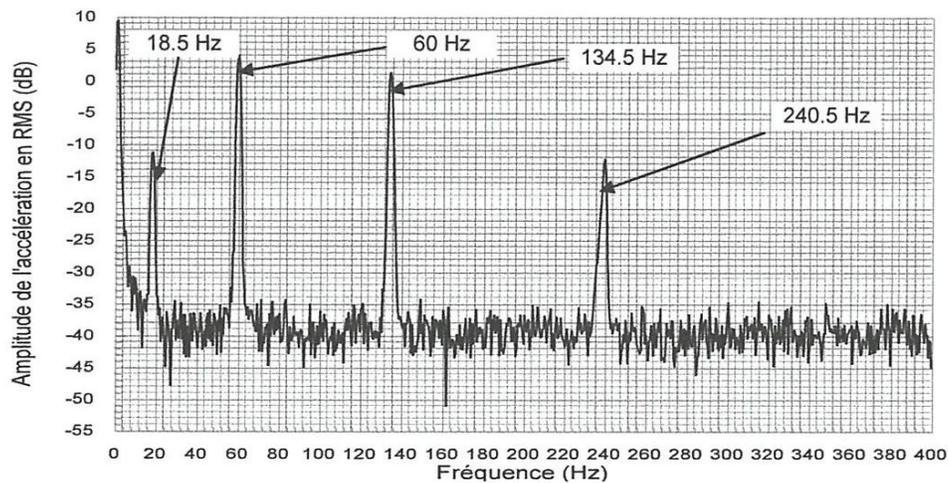


Fig. 3 : Spectre montrant les pics des fréquences propres d'une poutre métallique reposant sur deux appuis simples

D'après fig. 3, les pics des premières quatre fréquences propres sont bien indiqués où l'on peut facilement lire et donc déterminer leurs valeurs qui sont respectivement :

$$f_1 = 18.5 \text{ Hz}, f_2 = 60 \text{ Hz}, f_3 = 134.5 \text{ Hz}, f_4 = 240.5 \text{ Hz}.$$

Les caractéristiques géométriques et mécaniques de la poutre métallique sont :

$$\rho = 7800 \text{ kg/m}^3 ; E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2 ; b = 39.5 \text{ mm} ; h = 5 \text{ mm} ; \ell = 850 \text{ mm}$$

4. Détermination expérimentale du facteur de l'amortissement ζ de la poutre métallique reposant sur deux appuis simples

4.1. Méthode de la bande passante

Pour pouvoir mesurer le facteur de l'amortissement ζ , d'une poutre métallique reposant sur deux appuis simples, expérimentalement on utilise la méthode de la bande passante de description suivante.

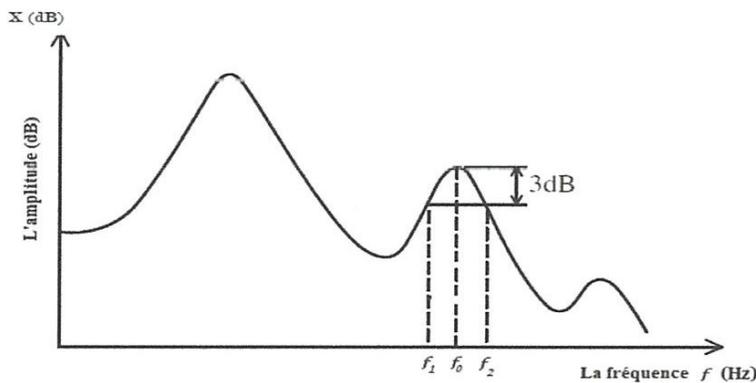


Fig.4 : Méthode de la bande passante pour mesurer le facteur de l'amortissement

Pour chaque pic de fréquence propre de la poutre métallique reposant sur deux appuis simple, qui se trouve dans le spectre obtenu par l'analyseur de signal (fig. 1), on effectue le suivant :

On mesure la valeur de la fréquence propre qui représente la coordonnée du maximum du graphe et on l'a note comme étant f_0 et puis les valeurs situant à gauche et à droite de f_0 on les note f_1 et f_2 . Ces valeurs représentent les coordonnées des points du graphe d'ordonnées égales à l'ordonnée du pic du graphe moins 3 dB (fig. 4). Finalement, la valeur du facteur d'amortissement est donnée par la formule suivante en pourcentage :

$$\zeta = \left(\frac{f_2 - f_1}{2f_0} \right) \times 100 .$$

L'avantage de cette méthode est qu'elle permet de déterminer plusieurs valeurs du facteur de l'amortissement pour une même structure. C'est-à-dire pour chaque fréquence propre, on

détermine la valeur du facteur de l'amortissement et que cette valeur est différente des autres valeurs déterminées par d'autres fréquences propres. A noter que la valeur du facteur de l'amortissement est inversement proportionnelle à la valeur de la fréquence propre. Autrement-dit, plus que la valeur de la fréquence propre augmente, la valeur du facteur de l'amortissement diminue.

4.2. Calcul du facteur de l'amortissement de la poutre métallique reposant sur deux appuis en utilisant sa première fréquence propre f_0

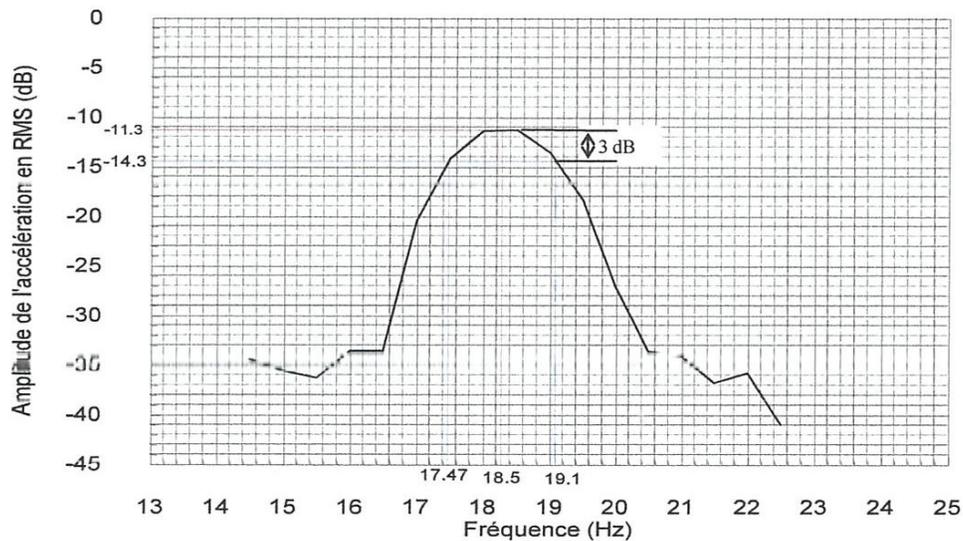


Fig. 5 : Agrandissement du pic de la première fréquence propre f_0 issu de la fig. 3

Comme le montre la fig. 5, la valeur de f_0 est 18.5 Hz. Cette valeur est la coordonnée du maximum du graphe sur l'axe des fréquences et son ordonnée sur l'axe des amplitudes ayant la valeur de -11.3 dB . La projection de nouveau de l'amplitude de valeur : $-14.3 \text{ dB} = -11.3 - 3$ sur le graphe donnera deux points et la projection de ces deux points sur l'axe des fréquences donne les valeurs de f_1 et f_2 qui sont respectivement : 17.47 Hz et 19.1 Hz. Donc la valeur du facteur de l'amortissement est :

$$\zeta = \left(\frac{f_2 - f_1}{2f_0} \right) = \left(\frac{19.1 - 17.47}{2(18.5)} \right) = 0.044 = 0.044 \times 100 = 4.4 \%$$

4.3. Calcul du facteur de l'amortissement de la poutre métallique reposant sur deux appuis en utilisant sa deuxième fréquence propre f_{11}

Comme le montre la fig. 6, la valeur de f_{11} est 60 Hz. Cette valeur est la coordonnée du maximum du graphe sur l'axe des fréquences et son ordonnée sur l'axe des amplitudes ayant la valeur de 4 dB . La projection de nouveau de l'amplitude de valeur : $1 \text{ dB} = 4 - 3$ sur le graphe

donnera deux points et la projection de ces deux points sur l'axe des fréquences donne les valeurs de f_1 et f_2 qui sont respectivement : 59.3 Hz et 60.75 Hz. Donc la valeur du facteur de l'amortissement est :

$$\zeta = \left(\frac{f_2 - f_1}{2f_{11}} \right) = \left(\frac{60.75 - 59.3}{2(60)} \right) = 0.012 = 0.012 \times 100 = 1.2 \%$$

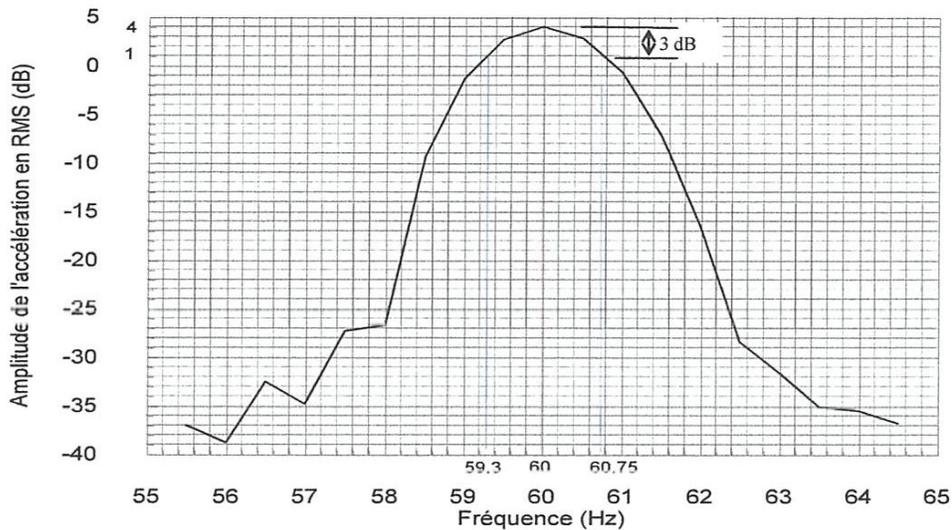


Fig. 6 : Agrandissement du pic de la deuxième fréquence propre f_{11} issu de la fig. 3

4.4. Calcul du facteur de l'amortissement de la poutre métallique reposant sur deux appuis en utilisant sa troisième fréquence propre f_{22}

Comme le montre la fig. 7, la valeur de f_{22} est 134.5 Hz. Cette valeur est la coordonnée du maximum du graphe sur l'axe des fréquences et son ordonnée sur l'axe des amplitudes ayant la valeur de 1.3 dB. La projection de nouveau de l'amplitude de valeur : $-1.7 \text{ dB} = 1.3 - 3$ sur le graphe donnera deux points et la projection de ces deux points sur l'axe des fréquences donne les valeurs de f_1 et f_2 qui sont respectivement : 133.8 Hz et 135.4 Hz. Donc la valeur du facteur de l'amortissement est :

$$\zeta = \left(\frac{f_2 - f_1}{2f_{22}} \right) = \left(\frac{135.4 - 133.8}{2(134.5)} \right) = 0.0059 = 0.0059 \times 100 = 0.59 \%$$

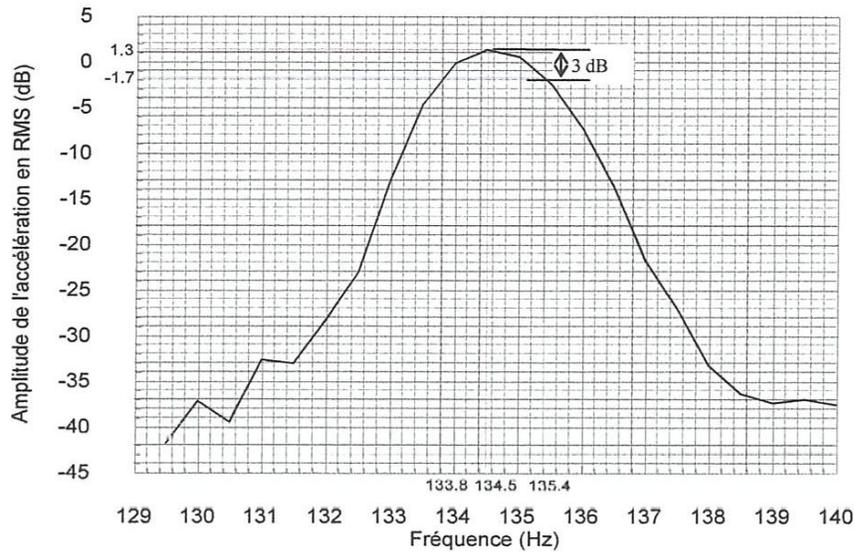


Fig. 7 : Agrandissement du pic de la troisième fréquence propre f_{22} issu de la fig. 3

5. Analyse modale

En vue de comparer les valeurs du facteur d'amortissement obtenues expérimentalement avec les résultats théoriques, nous procédons dans ce paragraphe à l'analyse modale [32].

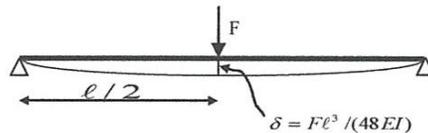


Fig. 8 : Déflexion d'une poutre reposant sur deux appuis simples due à une force concentrée appliquée à son centre

On sait que le déplacement maximal d'une poutre reposant sur deux appuis simples causé par une force concentrée F appliquée à son centre, selon les lois de la théorie d'élasticité, est :

$\delta = F\ell^3 / (48EI)$. La rigidité de la poutre dans ce cas est : $k = F / \delta$, ce qu'on peut écrire :

$$k = (48EI) / \ell^3.$$

Application numérique

$$k = \frac{48EI}{\ell^3} = \frac{48 \times 2 \times 10^{11} \times \frac{39.5 \times 5^3 \times 10^{-12}}{12}}{(0.85)^3} = 6431.92 \text{ N/m}.$$

Les caractéristiques modales pour les poutres continues sont [32,23] :

La masse modale de la poutre reposant sur deux appuis simples est donnée par l'expression suivante :

$$M_i = m \int_0^\ell \phi_i^2 dx = m \int_0^\ell \left(\sin \frac{i\pi x}{\ell} \right)^2 dx$$

$$M_i = \rho S \int_0^\ell \left(\sin \frac{i\pi x}{\ell} \right)^2 dx = \frac{\rho S \ell}{2} ; \text{ avec } m = \rho S$$

Application numérique :

$$M_i = \frac{\rho S \ell}{2} = \frac{7800 * 39.5 * 5 * 850 * 10^{-9}}{2} = 0.654713 \text{ kg}$$

La rigidité modale de la poutre reposant sur deux appuis simples est donnée par l'expression suivante :

$$k_i = EI \int_0^\ell \frac{d^4 \phi_i}{dx^4} \phi_i dx = EI \int_0^\ell \left(\frac{i\pi}{\ell} \right)^4 \left(\sin \frac{i\pi x}{\ell} \right)^2 dx = \frac{EI}{2} \ell \left(\frac{i\pi}{\ell} \right)^4 = M_i \omega_i^2$$

$$\omega_i = \left(\frac{i\pi}{\ell} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$$

Application numérique :

$$k_i = \frac{EI}{2} \ell \left(\frac{i\pi}{\ell} \right)^4 = \frac{2 * 10^{11} * \frac{39.5 * 5^3 * 10^{-12}}{12}}{2} (0.85) \left(\frac{3.14}{0.85} \right)^4 = 6526.32 \text{ N/m}$$

$$k_i = M_i \omega_i^2 = 0.654713 * (2 * \pi * 15.8902)^2 = 6526.33 \text{ N/m}$$

$$k = \frac{48EI}{\ell^3} = \frac{48 * 2 * 10^{11} * \frac{39.5 * 5^3 * 10^{-12}}{12}}{(0.85)^3} = 6431.92 \text{ N/m}$$

On constate bien que la valeur de la rigidité de la poutre reposant sur deux appuis simples est pratiquement la même calculée par les différentes formules de la méthode modale, alors que il y a une légère différence avec celle calculée par la théorie d'élasticité.

L'amortissement modal de la poutre reposant sur deux appuis simples est donné par l'expression suivante :

$$C_i = c \int_0^\ell \phi_i^2 dx = c \int_0^\ell \left(\sin \frac{i\pi x}{\ell} \right)^2 dx = \frac{1}{2} c \ell = 2\zeta_i \omega_i M_i = 2\zeta_i \sqrt{k_i M_i}$$

Application numérique :

Pour la première fréquence propre de la poutre :

$$C_i = 2\zeta_i \omega_i M_i = 2 * 0.044 * 2 * \pi * 15.8902 * 0.654713 = 5.75231 \text{ Ns/m}$$

$$c = 2 \times \frac{c_i}{\varphi} = 2 * \frac{5.75231}{.85} = 13.5348 \text{ Ns/m, par unité de longueur.}$$

Pour la deuxième fréquence propre de la poutre :

$$c = 2\zeta\sqrt{k\rho\ell S} = 2 \times 0.012 \times \sqrt{10291.1 \times 7800 \times 0.85 \times 197.5 \times 10^{-6}} = 2.786 \text{ Ns/m}$$

Pour la troisième fréquence propre de la poutre :

$$c = 2\zeta\sqrt{k\rho\ell S} = 2 \times 0.00594 \times \sqrt{10291.1 \times 7800 \times 0.85 \times 197.5 \times 10^{-6}} = 1.38 \text{ Ns/m}$$

On constate que l'amortissement de la poutre reposant sur deux appuis est inversement proportionnel à la valeur de la fréquence propre de la poutre, c'est-à-dire l'amortissement diminue avec l'augmentation de la fréquence propre.

6. Evaluation du facteur de l'amortissement en utilisant la méthode de décrétement logarithmique basant sur la réponse mesurée par l'analyseur de signal

Rappelons la réponse libre d'un système faiblement amorti ($\zeta \ll 1$), fig. 9, suite à l'imposition de conditions initiales est [Ann] :

$$x(t) = X e^{-\zeta\omega t} \sin(\omega\sqrt{1-\zeta^2}t + \phi)$$

$x(t)$ atteint un maximum. Appelons x_1 et x_n les valeurs de $x(t)$ mesurées au sommet de la 1^{ère} et de la n ^{ième} crête positive, respectivement. Nous obtenons donc le décrétement logarithmique δ :

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= X e^{-\zeta\omega t_1} \\ x_n &= X e^{-\zeta\omega \left[t_1 + \frac{2\pi(n-1)}{\omega_d} \right]} \end{aligned} \right\} \rightarrow \delta = \ln\left(\frac{x_1}{x_n}\right) = \frac{2\pi(n-1)\omega}{\omega_d}$$

Pour un système très faiblement amorti ($\zeta \ll 1$), alors: $\delta = \ln\left(\frac{x_1}{x_n}\right) = 2\pi(n-1)\zeta$.

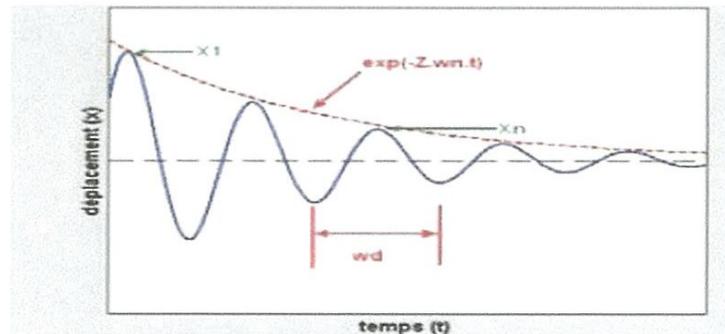


Fig. 9 : Réponse libre amortie

Les réponses de la poutre métallique reposant sur deux appuis simples suites à une excitation causée par des chocs de différentes amplitudes sont enregistrées par l'analyseur du signal et elles sont illustrées dans la fig. 10.

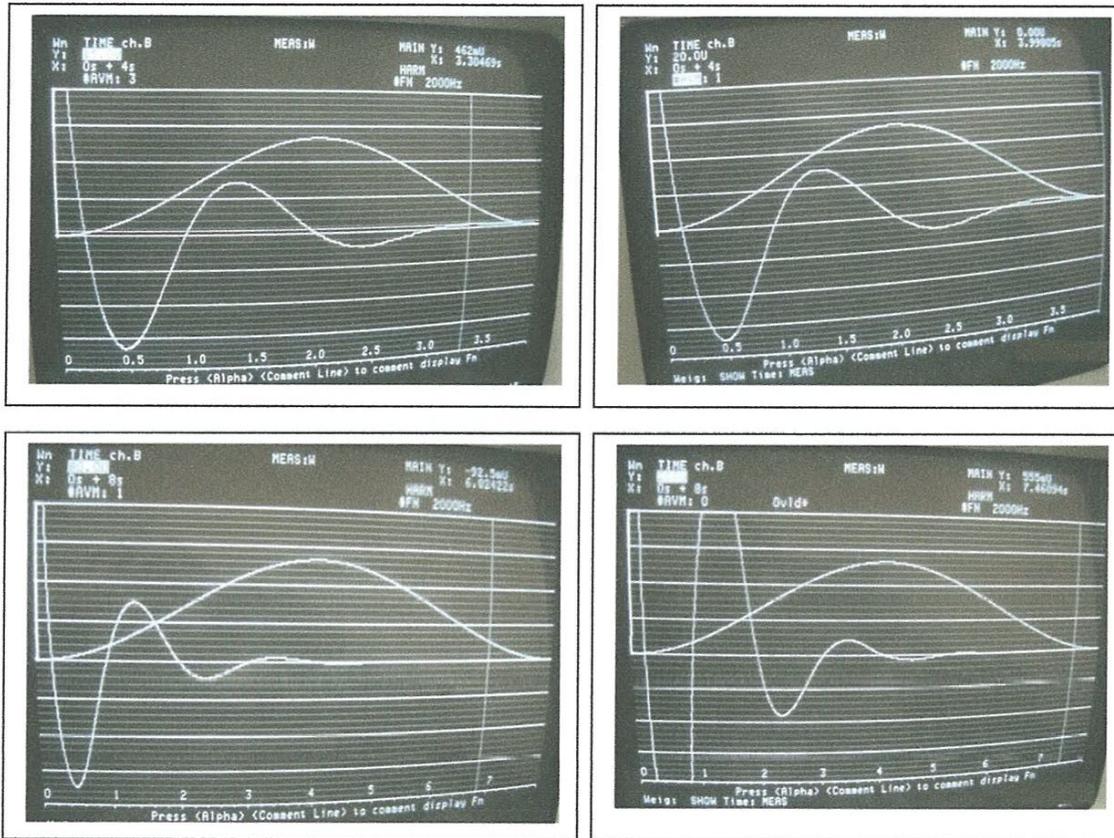


Fig. 10 : Différentes réponses amorties d'une poutre métallique reposant sur deux appuis simples dues à une excitation choque

La mesure des valeurs de $x(t)$ au sommet des crêtes positives et négatives successivement sont données dans ce tableau :

Réponse	Valeur de x_1	Valeur de x_2	Valeur de x_3	Valeur de x_4	Valeur de x_5
1	40.8	-12.5	5.46	-1.57	0.37
2	39.3	-17.2	7.49	-2.13	0.64
3	122	-69.3	30.1	-8.6	2.22
4	1520	-645	298	-89.3	22.5

Application numérique :

$$\text{La formule à utilisée est : } \delta = \ln\left(\frac{x_1}{x_n}\right) = 2\pi(n-1)\zeta \rightarrow \zeta = \frac{\ln(x_1/x_n)}{2\pi(n-1)}$$

$$\zeta = \frac{\ln(x_1/x_n)}{2\pi(n-1)} = \frac{\ln(40.8/5.46)}{2\pi(2-1)} = 0.32 ; \zeta = \frac{\ln(x_1/x_n)}{2\pi(n-1)} = \frac{\ln(40.8/0.37)}{2\pi(3-1)} = 0.374$$

$$\zeta = \frac{\ln(x_1/x_n)}{2\pi(n-1)} = \frac{\ln(39.3/7.49)}{2\pi(2-1)} = 0.264 ; \zeta = \frac{\ln(x_1/x_n)}{2\pi(n-1)} = \frac{\ln(39.3/0.64)}{2\pi(3-1)} = 0.327$$

$$\zeta = \frac{\ln(x_1/x_n)}{2\pi(n-1)} = \frac{\ln(122/30.1)}{2\pi(2-1)} = 0.223 ; \zeta = \frac{\ln(x_1/x_n)}{2\pi(n-1)} = \frac{\ln(122/2.22)}{2\pi(3-1)} = 0.319$$

$$\zeta = \frac{\ln(x_1/x_n)}{2\pi(n-1)} = \frac{\ln(1520/298)}{2\pi(2-1)} = 0.259 ; \zeta = \frac{\ln(x_1/x_n)}{2\pi(n-1)} = \frac{\ln(1520/22.5)}{2\pi(3-1)} = 0.335$$

Soit une moyenne de :

$$\zeta = \frac{0.32 + 0.374 + 0.264 + 0.327 + 0.223 + 0.319 + 0.259 + 0.335}{8} = 0.3026 = 30.26\%$$

On constate bien que ces valeurs calculées par la méthode du décrément logarithmique sont presque 10 fois plus supérieures par rapport aux valeurs mesurées par la méthode de la bande passante. Cela confirme exactement la remarque faite dans le chapitre 2 et dans laquelle il est mentionné le suivant [9] : « Dans la pratique les valeurs de $Q = 1/(2\zeta)$ sont très inférieures à celles qui se calculent et souvent les valeurs du facteur Q sont 10 fois moins par rapport à celles calculées ».

7. Détermination expérimentale du coefficient de l'amortissement ζ de la poutre métallique encastree à ses extrémités

Pour la même poutre, mais de conditions aux limites différentes, c'est-à-dire bi-encastree, on fait la même chose et bien évidemment uniquement les valeurs des fréquences propres qui changent et par conséquent les valeurs du facteur de l'amortissement se changent aussi. Le spectre obtenu pour ce cas, en utilisant l'analyseur du signal et en appliquant la même manière, est illustré dans les fig. 11 et fig. 12.

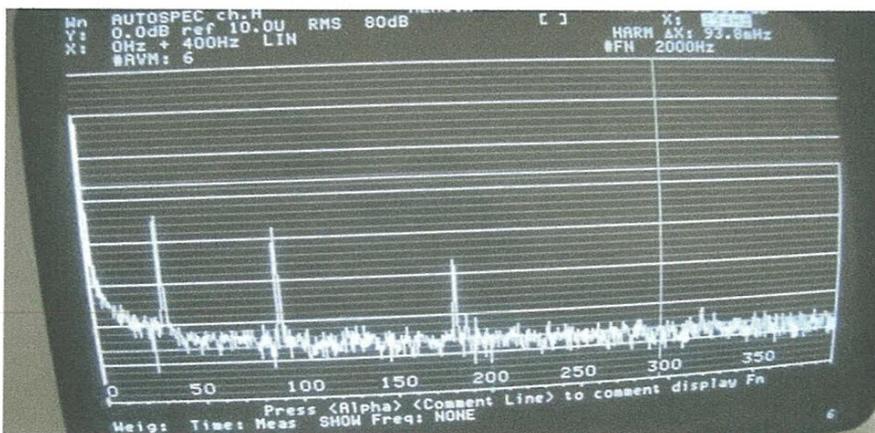


Fig. 11 : Spectre de la poutre métallique bi-encastree

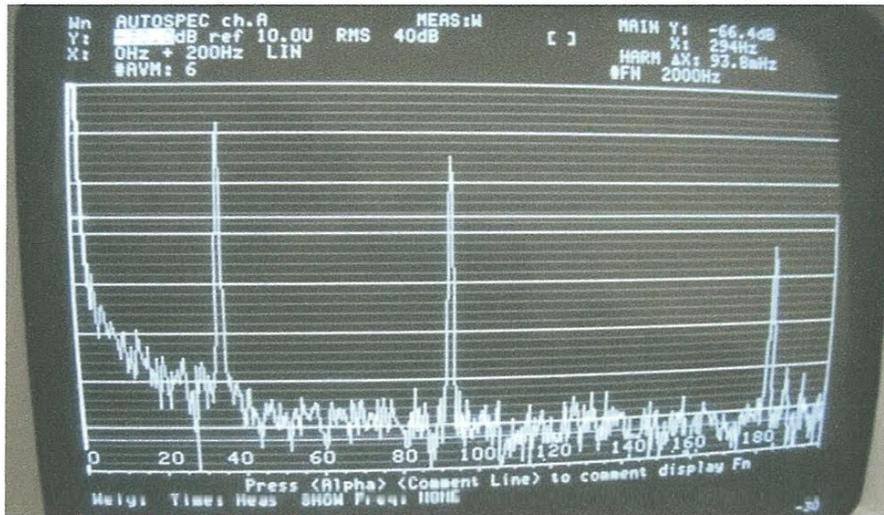


Fig. 12 : Spectre zoomé de la poutre métallique bi-encastée

D'après fig. 12, les pics des premières trois fréquences propres sont bien indiqués où l'on peut facilement lire et donc déterminer approximativement leurs valeurs qui sont respectivement :

$$f_1 = 33.5 \text{ Hz}, f_2 = 94 \text{ Hz}, f_3 = 183 \text{ Hz}.$$

Les valeurs du facteur de l'amortissement en fonction des valeurs des fréquences propres de la poutre métallique avec ce type de conditions aux limites se fait de la même manière que pour le cas précédent et après évaluation approximative, on a :

Pour $f_1 = 33.5 \text{ Hz}$, on trouve :

$$\zeta = \left(\frac{f_{12} - f_{11}}{2f_1} \right) = \left(\frac{34.7 - 32.4}{2(33.5)} \right) = 0.034 = 0.034 \times 100 = 3.4 \%$$

Pour $f_2 = 94 \text{ Hz}$, on trouve :

$$\zeta = \left(\frac{f_{22} - f_{21}}{2f_2} \right) = \left(\frac{95.1 - 93.1}{2(94)} \right) = 0.0106 = 0.0106 \times 100 = 1.06 \%$$

Pour $f_3 = 183 \text{ Hz}$, on trouve :

$$\zeta = \left(\frac{f_{32} - f_{31}}{2f_3} \right) = \left(\frac{183.9 - 182.2}{2(183)} \right) = 0.0046 = 0.0046 \times 100 = 0.46 \%$$

8. Conclusion

Ce chapitre est consacré au calcul du facteur de l'amortissement à partir des fréquences propres d'une poutre métallique, de différentes conditions aux limites, mesurées par l'analyseur de signal. Le couplage de la méthode de la bande passante et le spectre obtenu expérimentalement permet

de déterminer plusieurs valeurs du facteur d'amortissement ζ en fonction de la fréquence propre de la structure et par conséquent savoir l'information que l'amortissement d'une structure n'est pas une grandeur physique constante. Cette expérience nous a permis de confirmer que dans la pratique les valeurs de $Q = 1/(2\zeta)$ sont très inférieures à celles qui se calculent.

CONCLUSION GENERALE

Les études prises dans ce mémoire de Master sont focalisées sur les différentes méthodes fondamentales pour l'analyse dynamique des systèmes amortis ou non amortis à un degré de liberté, à plusieurs degrés de liberté et continus.

Plus de détail apporté dans le deuxième chapitre concernant les différents types d'amortissements (visqueux, de Coulomb, hystérétiques ou avec amortissements combinés) utilisés dans les structures en vibration libre ou forcée due aux excitations harmoniques. L'isolation de vibration des structures aussi a été vue avec un exemple illustrant l'efficacité d'utilisation des isolateurs visqueux ou hystérétiques. La dynamique des systèmes à plusieurs degrés de liberté en vibration libre ou forcée avec ou sans amortissements est donnée le troisième. Cette étude dynamique est présentée avec plus de détail à commencer des équations du mouvement, leur résolution, la détermination de leurs fréquences et modes propres, ainsi que leurs réponses. Plusieurs exemples d'application des différentes méthodes sont aussi donnés. Des expériences sur des structures continues (poutre métallique de différentes conditions aux limites) ont été effectuées pour avoir des spectres à l'aide de l'analyseur de signal permettant de calculer le facteur d'amortissement. Les valeurs du facteur de l'amortissement calculées à partir des fréquences propres données par le spectre permettent de calculer la rigidité et l'amortissement de la structure. Le couplage de la méthode de la bande passante et le spectre permet de déterminer plusieurs valeurs du facteur d'amortissement ζ en fonction de la fréquence propre de la structure et par conséquent savoir l'information que l'amortissement d'une structure n'est pas une grandeur physique constante. Cette expérience nous a permis de confirmer que dans la pratique les valeurs du taux d'amortissement sont très inférieures à celles qui se calculent. On constate d'après cette étude détaillée que la vibration des systèmes aux basses fréquences dépend de la raideur k et dans la région de résonance dépend de l'amortissement, alors qu'aux hautes fréquences la vibration dépend de la masse du système. Donc, il est très important de comprendre ce phénomène lors de l'étude vibratoire des structures.

Enfin, ce travail représente la base des études dynamiques en vue de contrôler les vibrations des systèmes multi degré de liberté et des systèmes continus exposés à des excitations non harmoniques.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Adhikari S. Damping models for structural vibration. A dissertation submitted to the University of Cambridge for the Degree of Doctor of Philosophy, 2000 Cambridge. http://www-g.eng.cam.ac.uk/dv_library/theses
- [2] Adhikari S. Damping modelling using generalized proportional damping. *Journal of Sound and Vibration* 293 (2006), 156 -170.
- [3] Adhikari S., Woodhouse J. Identification of damping: part 1, viscous damping. *Journal of Sound and vibration* (2001) 243(1), 43-61.
- [4] Alipour A., Zareian F. Study Rayleigh damping in structures; Uncertainties and treatments. The 14 th World Conference on Earthquake Engineering. October 2008, Beijing, China
- [5] Annie R. Théorie des vibrations des systèmes continus. MEC4100 / MEC4110 – Laboratoires de génie mécanique, Septembre 2006.
- [6] Arun M. et al. Modeling of in-structure damping. Proceedings of the Ninth Pacific Conference on Earthquake Engineering Building an Earthquake-Resilient Society, April, 2011, Auckland, New Zealand, <http://db.nzsee.org.nz/2011/Session1.htm>
- [7] Bamberg E., Slocum A. Concrete-based constrained layer damping. *Journal of the international societies for precision engineering and nanotechnology* 26 (2002) 430–441.
- [8] Banks H.T., Inman D.J. On damping mechanisms in beams. Contractor Report- 383904 ICASE Report No, 89-64, September 1989, Hampton, Virginia.
- [9] Beards C. E. et al. Structural vibration: analysis and damping. Arnold, New York, 1996.
- [10] Berthelot J.M. et al. Damping analysis of composite materials and structures. *Composite Structures* 85 (2008) 189–204.
- [11] Boyere E. Modélisation de l'amortissement en dynamique linéaire. Code_Aster, 2009.
- [12] Caughey T. K., O'killy M. E. J. Effect of damping on the natural frequencies of linear dynamic systems. *The journal of the acoustical society of America* volume 33, number II, November 1961.
- [13] Charney F. A., Asce F. Unintended Consequences of Modeling Damping in Structures. *Journal of structural engineering ASCE*, April 2008.

[14] De Silva C.W. Vibration damping, control, and design. Taylor & Francis Group, LLC, 2007.

[15] De Silva C.W. Vibration Damping. Frank Kreith and RoopMahajan - Series Editors

[16] Jeary A. P. The description and measurement of nonlinear damping in structures. Journal of Wind Engineering elsevier and Industrial Aerodynamics 59 (1996) 103-114.

[17] Johnson C. D., Kienholz D. A. Prediction of damping in structures with viscoelastic materials. CSA Engineering, Inc, Palo Alto, CA 94306

[18] Kumar N., Singh S.P. Experimental study on vibration and damping of curved panel treated with constrained viscoelastic layer. Composite Structures 92 (2010) 233–243, 2009 Elsevier Ltd.

[19] OHTA Y. Analytical and experimental study for damping of laminated composite plates. Proceedings of the XI th International Congress and Exposition June 2008, Orlando, Florida USA .

[20] Pascal J.C. vibrations et acoustique 1. ENSIM, Université du Maine,2007-2008.

[21] Randall D. Damping Theory. Frank Kreith and RoopMahajan - Series Editors

[22] Randall D. Experimental Techniques in Damping. Frank Kreith and Roop Mahajan - Series Editors.

[23] Rezaiguia A. Comportement vibratoire et acoustique d'un pont de la chaussée lors du passage d'un véhicule. Thèse de doctorat, Université de Annaba 2008.

[24] Richardson M., Potter R. Viscous structural damping in modal analysis. 46th Shock and Vibration Symposium, October 1975.

[25] Rittweger A. et al. The new approach for damping modelling in the coupled dynamic load analysis for the Ariane 5 acoustic booster mode load cases. Acta Astronautica 81 (2012) 466–477.

[26] Rodríguez M.M. Analysis of structural damping. Master Thesis 2006. University of Technology Lulea, Sweden. <http://epubl.ltu.se/1402-1617/2006/006/index.html>

[27] Shye K., Richardson M. Mass, stiffness, and damping matrix estimates from structural measurements, IMAC V April 1987 San Jose, California.

[28] Singh B., Nanda B.K. Identification of damping mechanism in layered and welded structures, *International Journal of Mechanical Sciences* 63 (2012) 37–47.

[29] Talbot J. P., Woodhouse J. The vibration damping of laminated plates. Cambridge University Engineering Department, 1997.

[30] Thomas G. et al. The vibratory damping of large high-speed catamarans. *Marine Structures* 21 (2008) 1–22.

[31] Thompson D.J. The theory of a continuous damped vibration absorber to reduce broad band wave propagation in beams. ISVR Technical Memorandum No 968 January 2007.

[32] Timoshenko S. P., Gere D. J. *Mechanics of Materials*. IZDATELSTVO, Moscou, 1976, pages 550.

[33] Vazquez J.L. The nonlinearly damped oscillator. *ESAIM* February 2003, Vol. 9, 231-246.

[34] Wakasawa Y. et al. Damping capacity improvement of machine structures by close packing with balls. *International Journal of Machine Tools & Manufacture* 42 (2002) 467-472.

[35] Yamaguchi H., Ito M. Mode-dependence of structural damping in cable-stayed bridges. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 72 (1997) 289-300.

[36] Yu L. et al. Damping efficiency of the coating structure. *International journal of solids and structures* 42(2 005) 3045–3058.