

M/531.637

Université du 8 mai 1945 – Guelma
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Mécanique



Mémoire de fin D'études
Pour l'obtention du diplôme de Master

Option : Maintenance Industrielle

Présenté par : Ghaoui housseyn

=====

***Etude par la méthode d'homogénéisation
d'un palier hydrodynamique rugueux en
régime turbulent***

=====

Sous la Direction de

Dr Ellagounne Salah

Année universitaire 2011/2012

Etude par la méthode d'homogénéisation d'un palier hydrodynamique rugueux en régime turbulent

13/2896

Résumé

La théorie de la lubrification hydrodynamique fondée par Osborne Reynolds en 1886 est basée sur plusieurs hypothèses parmi lesquelles les surfaces formant les contacts sont parfaitement lisses et le régime d'écoulement du lubrifiant s'écoulement entre ces surfaces est laminaire. Cependant, il a été montré que dans le cas des paliers de machines tournantes modernes fonctionnant dans des conditions sévères (charge et vitesse élevées), ces hypothèses sont mises en défaut. La prise en compte des effets de la rugosité des surfaces et de la turbulence est alors indispensable pour une meilleure prédiction des performances d'un palier hydrodynamique.

L'approche adoptée dans ce mémoire est basée sur l'étude par la méthode d'homogénéisation d'un palier rugueux en régime turbulent.

Le développement multi-échelle de la pression conduit à une cascade d'équations aux dérivées partielles gouvernant un problème local et un problème global dont les solutions sont les fonctions périodiques et la pression homogénéisée.

Les études de simulation sont effectuées en considérant des rugosités isotropes distribuées de façon périodique sur toute la surface du coussinet pour différentes valeurs du nombre sans dimension de Taylor.

Mots clés : Lubrification hydrodynamique/ Rugosité de surface/ Ecoulement laminaire/Ecoulement turbulent/ Méthode d'homogénéisation

ملخص

تستند نظرية التشحيم الهيدروديناميكي التي أسسها العالم الفيزيائي اوزبون رينولدز في عام 1886 على افتراضات عدة من بينها أن سطوح الأجسام المتصلة لمساء وان سيلان زيت التشحيم بين السطوح يتم بطريقة معتدلة وغير مضطربة، إلا انه تبين أن في حالة المحامل المستعملة في الآليات العصرية تشتغل في ظروف قاسية.

حيث في هذه الحالة كل هذه الافتراضات تعتبر غير مقبولة، وبالتالي يجب الأخذ بعين الاعتبار الحالة الحقيقية للسطوح الصناعية وكذا الاضطرابات الناتجة عن السيلان من اجل تنبؤ أحسن للخصائص الهيدروديناميكية للمحامل. المنهج المعتمد في هذه المذكرة يعتمد على تطبيق طريقة التجانس على معادلة رينولدز المضطربة مستمدة من معادلات الحركية للسوائل النيوتونية.

الكلمات المفتاحية :

التشحيم الهيدروديناميكي/ السطوح الخشنة/ السيلان المعتدل/ السيلان المضطرب/ طريقة التجانس/ الطريقة المباشرة.

SOMMAIRE

Etude bibliographique CHAPITRE I

Théorie de la lubrification hydrodynamique & Caractérisation géométrique des surfaces industrielles

| | |
|---|----|
| I.1 Introduction..... | 1 |
| I.2 Différents régimes de lubrification..... | 3 |
| I.3 Caractéristiques de fonctionnement du palier..... | 5 |
| I.4 Les différents types des paliers | 6 |
| I.5 Description des surfaces | 7 |
| I.5.1 Défauts de SURFACE | 7 |
| I.6 mesure des défauts de l'état de surface..... | 8 |
| I.6.1 Topographie des surfaces..... | 9 |
| I.6.2 Microscopie à force atomique (AFM) | 9 |
| I.6.3 Microscopie d'interférence | 10 |
| I.7 Caractérisation des surfaces : Principaux paramètres statistiques | 11 |
| I.8 Défaut de rugosité..... | 13 |
| I.9 Modélisation de la rugosité des surfaces | 14 |
| I.10 Méthodes d'analyse des contacts rugueux lubrifiés | 17 |
| I.10.2 Méthode stochastique | 17 |
| I.10.3 Méthode directe | 18 |
| I.10.4 Méthode d'homogénéisation..... | 18 |

| | |
|----------------------|----|
| I.4 Conclusion | 19 |
|----------------------|----|

CHAPITRE II Théorie des paliers hydrodynamiques en régime turbulent

| | |
|--|----|
| II.1 Introduction | 20 |
| II.2 Equations de Reynolds | 24 |
| II.2.1 Equation de continuité pour un fluide incompressible..... | 24 |
| II.3 Approche de Boussinesq | 27 |
| II.3.1 Modèle de Prandtl..... | 27 |
| II.3.2 Modélisation statistique de la turbulence | 28 |
| II.4 Equations de Reynolds pour un écoulement en film mince | 32 |
| II.5 approche basée sur des considérations empiriques | 32 |
| II.5 .Transition entre les différents régimes | 36 |
| II.5.1 Transition entre le régime laminaire et le régime des tourbillons de Taylor..... | 37 |
| II.5.2 Transition entre le régime des tourbillons de Taylor et le régime turbulent | 38 |
| II.6.Conclusion..... | 39 |

Chapitre III Homogénéisation de l'équation de Reynolds turbulente

| | |
|--|----|
| III.1 Introduction..... | 40 |
| III.2 Homogénéisation de l'équation de Reynolds turbulente | 41 |
| III.3 Caractéristiques hydrodynamiques homogénéisées..... | 45 |
| III.4 Algorithme d'homogénéisation..... | 45 |
| III.5 Conclusion..... | 47 |

Chapitre IV Etude du comportement statique d'un palier hydrodynamique rugueux

| | |
|---|----|
| IV.1 Description d'un palier hydrodynamique | 48 |
| IV.2. Equations géométriques du film | 50 |

| | |
|--|----|
| IV.2.1. Cas du palier lisse | 50 |
| IV.2.1.2. Cas du palier rugueux | 50 |
| IV.2.2. Equation de Reynolds turbulente pour un palier cylindrique | 51 |
| IV.3 Solution homogénéisée | 52 |
| IV.4 Etude paramétrique | 54 |
| IV.4.1 Effets de la rugosité de surface sur le profil de pression hydrodynamique en régimes laminaire et turbulent | 53 |
| IV.4.2 Effets de la rugosité de surface sur la portance hydrodynamique du palier en régimes laminaire et turbulent | 58 |
| IV.5 Conclusion | 47 |

Introduction générale

Un système mécanique est constitué d'un ensemble de pièces liées entre elles qui sont en mouvement les unes par rapport aux autres. Ces pièces sont séparées partiellement ou complètement par un film lubrifiant afin d'éviter tout risque d'avarie dû à une usure trop rapide ou un grippage.

Les pièces mécaniques manufacturées sont limitées par des surfaces qui ne sont jamais parfaites. En effet, elles présentent des défauts de nature géométrique et physico-chimique résultant du procédé de fabrication utilisé et du matériau constituant ces pièces.

Les défauts géométriques qui sont des défauts de forme et de rugosité sont dus principalement aux vibrations relatives entre l'outil et la pièce usinées ainsi qu'à la rigidité de la machine outil.

Sur le plan industriel, l'étude de l'influence de ces défauts présents sur la surface des pièces sur le comportement des contacts lubrifiés est indispensable tant pour prévoir les conditions de fonctionnement que pour estimer la durée de vie des mécanismes. Ainsi, la détermination théorique des performances d'un contact lubrifié dépend d'une caractérisation rigoureuse des surfaces formant le contact surtout lorsque les conditions de fonctionnement du contact sont sévères (charge et vitesse élevées).

La théorie de la lubrification HD fondée par Osborne Reynolds en 1886 est basée sur plusieurs hypothèses simplificatrices parmi lesquelles les surfaces sont supposées parfaitement lisses et le régime d'écoulement est laminaire. Dans la littérature technique, plusieurs investigateurs ont montré que de telles hypothèses sont peu réalistes surtout pour l'étude des contacts sévèrement chargés fonctionnant avec de faibles épaisseurs de film et lubrifiés à l'aide de fluides de faible viscosité .

Dans les systèmes mécaniques lubrifiés en régime hydrodynamique ou élasto-hydrodynamique (EHD), l'épaisseur du film lubrifiant h est censée d'une part être plus grande que la hauteur des aspérités et d'autre part elle doit être très faible devant la longueur d'onde de la rugosité λ (rugosité de Reynolds); c'est-à-dire $h \ll \lambda$. Dans ces conditions, l'équation de

Reynolds peut être appliquée pour décrire le comportement hydrodynamique des contacts rugueux. En revanche, lorsque $\lambda \ll h$ (rugosité de Stokes), les approches de la mécanique des fluides numérique CFD (Computational Fluid Dynamics) basée sur la résolution des équations de Navier-Stokes doivent être utilisées.

Plusieurs méthodes ont été proposées dans la littérature pour l'étude des effets des rugosités de surface sur les performances des contacts hydrodynamiques, à savoir : la méthode stochastique, la méthode directe et plus récemment la technique d'homogénéisation.

A travers cette étude, notre contribution sera de mettre en place un modèle numérique qui prend en considération les effets de la rugosité de surface et de la turbulence sur les performances hydrodynamiques d'un palier cylindrique, à savoir : la pression, la capacité de charge, la force de frottement, le débit et l'angle de calage, en utilisant une nouvelle technique de calcul dite technique d'homogénéisation que l'on développera ultérieurement. Pour conserver le caractère stationnaire de l'équation de Reynolds, nous considérons que la surface stationnaire (le coussinet) du contact est rugueuse tandis que la surface mobile (l'arbre) est parfaitement lisse.

Dans le premier chapitre de ce mémoire, nous présentons une synthèse de l'étude bibliographique effectuée sur la Théorie de la lubrification hydrodynamique et caractérisation géométrique des surfaces technologiques (industrielles) ainsi que les différentes méthodes d'analyse proposées dans la littérature technique pour l'étude des contacts lubrifiés en régime hydrodynamique dont les surfaces sont rugueuses.

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation de la théorie de la lubrification hydrodynamique en régime turbulent supposant que les surfaces antagonistes sont séparées par un film fluide newtonien très mince.

Le troisième chapitre est dévolu à l'homogénéisation des équations de Reynolds modifiées écrites en régimes turbulent.

Enfin, Le quatrième chapitre est réservé au traitement numérique des différentes EDPs décrivant problèmes homogénéisés, Etude du comportement statique d'un palier hydrodynamique rugueux nous avons mis en évidence les effets non négligeables de l'amplitude de la rugosité ainsi que la turbulence sur certaines performances hydrodynamiques du palier.

CHAPITRE I

Etude bibliographique

I.1 Introduction

Dans ce chapitre, une étude bibliographique sur la caractérisation géométrique des surfaces technologiques et la théorie de la lubrification HD nous nous intéresserons à l'étude des contacts hydrodynamiques en supposant que les surfaces antagonistes sont séparées par un film fluide très mince,

Les paliers hydrodynamiques ; qui équipent la plupart des machines de grande puissance, le jeu entre l'arbre coussinet permet la création d'un film d'huiles s'interpose entre les surfaces métalliques et qui réduit les frottements à cause de la rotation de l'arbre, l'huile est entraînée dans un mouvement tourbillonnant. Ce phénomène est la cause d'une vibration à la fréquence égale à la moitié de la fréquence de rotation de l'arbre

L'Organes de liaison entre parties fixes et les parties en rotation d'une machine, les machines, les paliers, qu'ils soient hydrodynamiques ou à roulement, sont eux-mêmes la cause de vibrations spécifiques.

La modélisation des rugosités et les techniques de mesure des défauts de rugosité. la seconde partie est dévolue à la description des différentes méthodes d'analyse proposées dans la littérature technique pour l'étude des contacts lubrifiés dont les surfaces sont rugueuses. Ces méthodes se classent en trois catégories, à savoir : la méthode stochastique, la méthode directe et la méthode dite d'homogénéisation.

La lubrification est une science qui s'intéresse à l'étude des phénomènes d'interaction entre deux corps en contact entre lesquels est intercalé un troisième corps appelé lubrifiant qui peut être fluide, solide ou semi-solide. Selon la nature du lubrifiant utilisé.

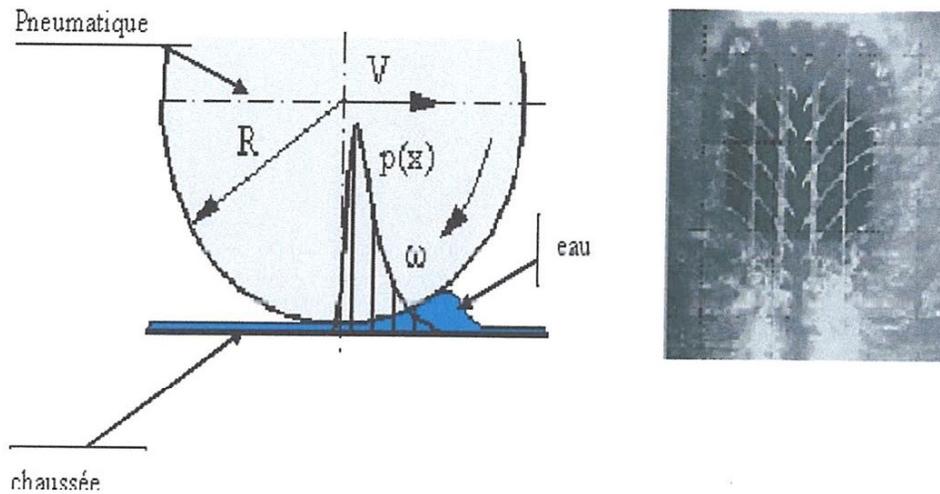


Fig I.1. Exemple de contact hydrodynamique : Pneumatique-Chaussée

I.2 Différents régimes de lubrification [1]

Il est commode de présenter les différents régimes de lubrification à partir de la courbe de variation du frottement en fonction de la vitesse. Quelque soit le contact lubrifié à basse pression ou à haute pression (contacts rencontrés dans les engrenages et les roulements), cette courbe dite courbe de Stribeck (1902) a toujours la même allure (Fig I.2). On distingue trois zones qui correspondent chacune à un type de lubrification dont la nature dépend aussi de la pression régnant dans le contact.

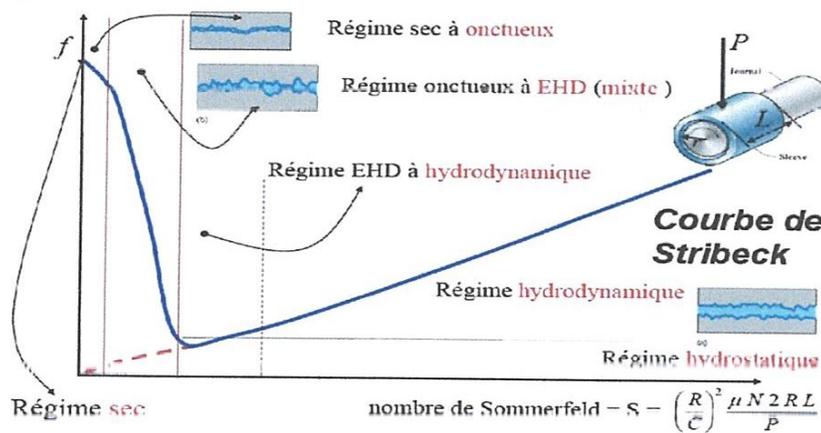


Fig I.2. diagramme stribeck

- **Contacts à basse pression**

- **Lubrification limite :**

Le graissage limite ou onctueux est le régime où le film lubrifiant est rompu et que seules des molécules de lubrifiant adsorbées aux surfaces métalliques réduisent le frottement, mais sans pouvoir empêcher les aspérités des surfaces de venir en contact, et de créer des microsoudures suivies d'arrachements de métal.

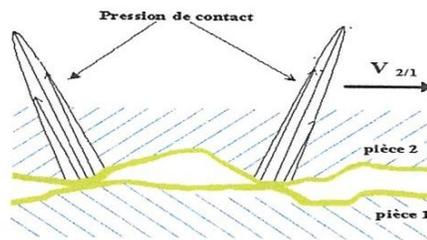


Fig. I.3 Schéma d'un contact lubrifié en régime limite ou onctueux.

- Lubrification mixte :

Il s'agit d'un régime de transition dans lequel la lubrification hydrodynamique ou fluide prend progressivement de l'importance et tend à séparer les surfaces qui restent encore en contact sur une partie de leurs aspérités

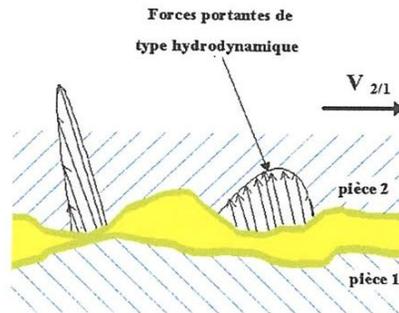


Fig. I.4 Schéma d'un contact lubrifié en régime mixte.

- Lubrification hydrodynamique ou fluide :

La lubrification hydrodynamique est le régime où un film lubrifiant sépare complètement les surfaces en mouvement et empêche par conséquent tout contact solide entre elles (Figs I.3).

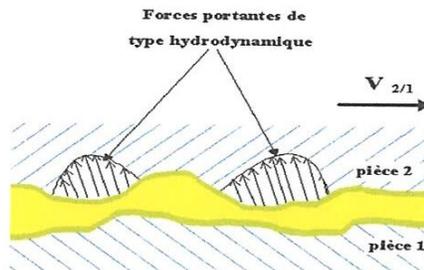


Fig. I.5 Schéma d'un contact lubrifié en régime hydrodynamique ou fluide.

- **Contacts à haute pression (jusqu'à 3GPa)**

Ce sont les contacts hertziens lubrifiés rencontrés dans certains éléments de machines tels que les roulements et les engrenages.

- Zone (I)

Cette zone correspond à la lubrification extrême pression (EP), les surfaces sont protégées par des films formés par réaction chimique des additifs EP contenus

dans l'huile et activés par les pressions, les contraintes de cisaillement et les températures existants dans le contact. Le coefficient de frottement est de 0.02 à 0.2.

- Zone (II)

C'est la zone de transition entre la lubrification extrême pression et la lubrification élasto-hydrodynamique (EHD) qui correspond à la zone (III) du diagramme de Stribeck figure I.2.

- Zone (III)

La lubrification EHD concerne les contacts lourdement chargés pour lesquels la pression engendrée dans le film lubrifiant est suffisamment élevée pour déformer élastiquement les surfaces et modifier le comportement rhéologique du lubrifiant. Ce type de contact correspond au contact entre les bagues et les éléments roulants d'un palier de roulement à billes ou à rouleaux. Dans ce type de lubrification, on est en présence de deux effets :

- Effet hydrodynamique;
- Effet des déformations élastiques des solides formant le contact.

Le coefficient de frottement est de 10^{-2} à 8×10^{-2} .

En régime isotherme, la lubrification élasto-hydrodynamique est gouvernée par les équations suivantes :

- Equation de Reynolds pour déterminer la pression dans le film lubrifiant;
- Equations de l'élasticité linéaire pour calculer les déformations élastiques des surfaces;
- Lois de variation viscosité-pression pour déterminer la variation de la viscosité du fluide en fonction de la pression

I.3 Caractéristiques de fonctionnement du palier

Il n'existe pas de théorie complète qui permette de calculer les caractéristiques de fonctionnement d'un palier hydrodynamique en régime des turbulents de Taylor [2].

Cependant, des prima et Stuart à partir de l'étude sur la stabilité de l'écoulement entre deux cylindre la charge et le couple de frottement d'un palier long fonctionnant à faible excentricité et juste au-delà transition qui marque la fin du régime laminaire .par ailleurs constantinescu , pan et ont proposé une méthode empirique basée sur la théorie applicable en régime turbulent .cette méthode permet de calculer les caractéristiques d'un palier fonctionnant en régime du tourbillons.

A température constante la valeur du nombre Sommerfeld qui caractérise la portance du palier est peu différente en régime des tourbillons de Taylor de celle calculée en régime laminaire ainsi, si la température du palier peut être contrôlée, le changement de régime n'affectera que peu la portance

I.4 Les différents types des paliers

Les paliers sont des organes de machines utilisés pour guider les arbres en rotation, ils déterminent la position d'une pièce mobile par rapport aux autres pièces d'un mécanisme. Avec les différents types des paliers sont :

(Palier hydrodynamique, Paliers de roulements, Paliers lisse (FigI.6), Palier fluide, Palier hydrostatique, Palier magnétiques....etc.)



Palier lisse hydrodynamique



Palier à roulement

I.6 Exemple de différent type des paliers

I.5 Description des surfaces

L'étude des surfaces revêt de l'importance dans un grand nombre d'applications industrielles. Par exemple, dans les procédés de fabrication par injection, le fini de surfaces du moule est un facteur important qui gouverne la qualité de la pièce. Dans certaines applications technologiques, les qualités des surfaces doivent être meilleures pour garantir le bon fonctionnement du système (par exemple, le cas des pièces de frottement, d'étanchéité, de précision...). En effet, l'usure d'un joint dynamique ou d'une garniture mécanique est souvent fonction de l'état géométrique de la surface sur laquelle il vient se frotter.

En tribologie, la caractérisation, la métrologie et la simulation numérique des surfaces rugueuses constituent une étude préalable et indispensable avant d'effectuer une approche déterministe ou stochastique des contacts lubrifiés. Les techniques de caractérisation ont pour but de décrire la microtopographie des surfaces afin de mieux comprendre leurs propriétés fondamentales.

I.5.1 Défauts de SURFACE

La norme NF E 05-515 distingue six ordres de défauts de surface, du plus grand au plus petit : [3]

- ✓ Écart de forme (échelle macroscopique) : défaut de planéité, de rectitude, de circularité,
- ✓ Ondulation (échelle macroscopique) : l'écart entre les crêtes est compris entre 0,5 et 2,5 mm ;
- ✓ Stries et sillons (défauts périodiques ou pseudopériodiques, échelle microscopique) : l'écart entre les crêtes est inférieur ou égal à 0,5 mm ;
- ✓ Défauts localisés (échelle microscopique) : marque d'outil, arrachement, fente, piqure, ... ;
- ✓ Structure cristalline (échelle mésoscopique) ;
- ✓ Réseau cristallin (échelle nanoscopique) ;

La rugosité concerne les défauts d'ordre 3 et 4 : défaut d'une largeur inférieure à 0,5 mm (500 μ m), périodiques (stries, sillons) ou localisés.

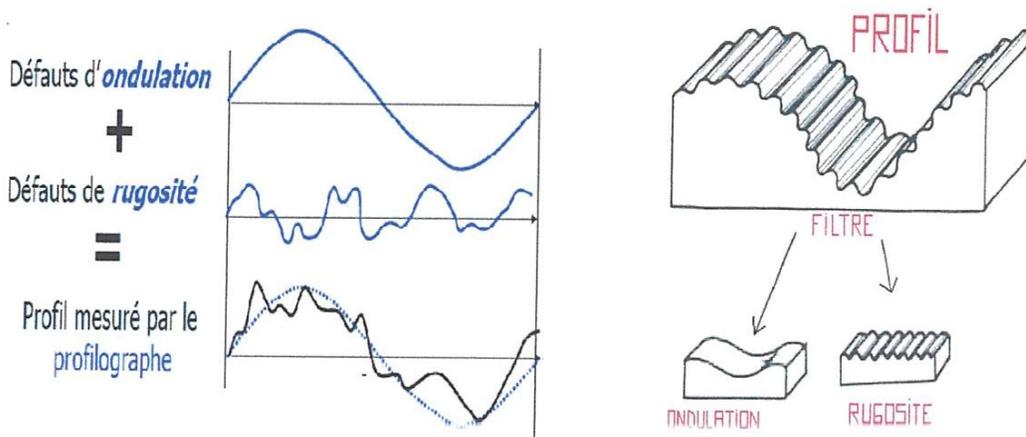
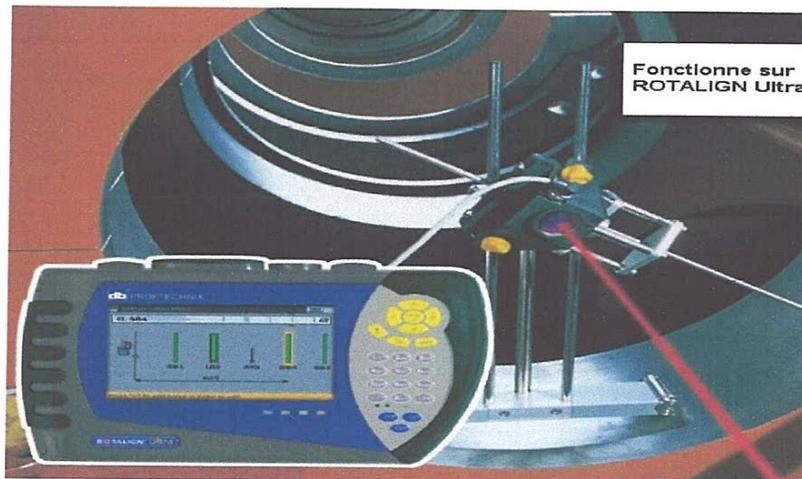


Fig. I.7 Schématisation d'un profil mesuré par le profilographe.

I.6 mesure des défauts de l'état de surface

L'étude des états de surface remonte aux années 30, avec le développement des appareils de mesure de profil.



FigI.8 Fonction sur Rotalign Ultra

Après 1950, les premiers appareils analogiques ont fait leur apparition et permirent de mesurer quelques paramètres. Les années 70 ont vu l'apparition de

nouveaux moyens informatiques et électroniques qui permirent de définir un plus grand nombre de paramètres caractérisant l'état de surface.

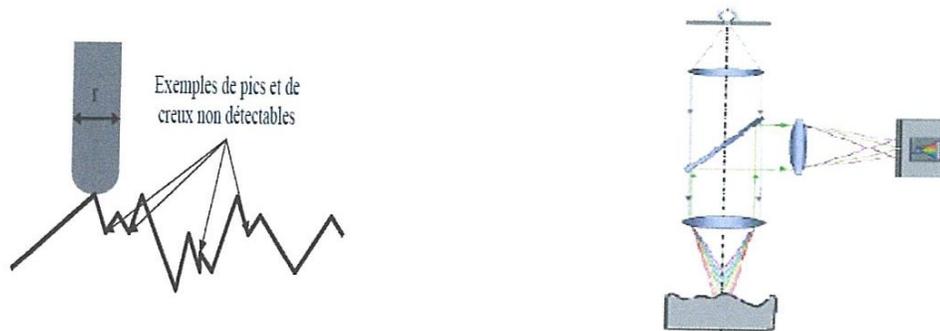


FIG I.9 La qualité d'une mesure profil métrique Capteur confocal chromatique

I.6.1 Topographie des surfaces

Le profilographe mesure et enregistre les variations de hauteur d'une surface sur une ligne. Les paramètres mesurés à partir de ces enregistrements ne valent ainsi que sur une ligne. Cependant, les surfaces existent en trois dimensions. Pour les caractériser en trois dimensions, il faut utiliser une technique de mesure autre que le profilographe (optique, par exemple) figure I.10

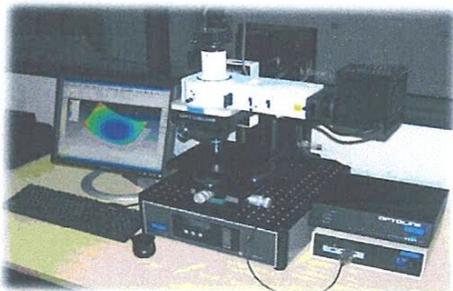


Fig. I.10 station Topographie des surfaces



Rugosimètre sans fil W5

I.6.2 Microscopie à force atomique (AFM)

La MFA (Atomic Force Microscopy, en anglais) mesure la surface à l'aide d'une pointe silicone extrêmement aiguë avec un rayon d'incurvation de quelques dizaines de nanomètres offrant une plage de résolution en nanomètres. Cette

technique extrêmement précise est utilisée pour des surfaces avec des détails et textures extrêmement fines (moins de 5 microns).

La figure I.11 montre un instrument MFA numérique.

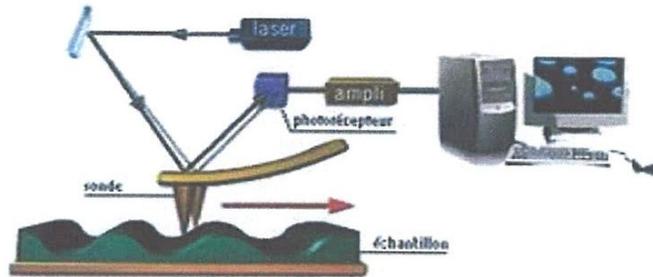


Fig. I.11 Microscope à force atomique (AFM).

I.6.3 Microscopie d'interférence

Il s'agit d'une technique optique utilisant l'interférométrie pour déterminer la distance de l'objectif à la surface de l'échantillon. En variant la hauteur des lentilles optiques au dessus de l'échantillon et en enregistrant les franges d'interférences, une carte en hauteur est construite par l'ordinateur figure I.5.

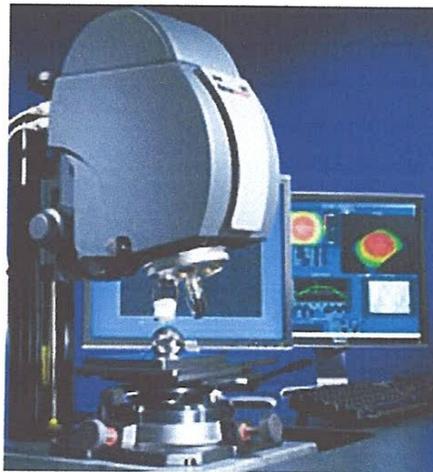


Fig. I.12 Photographie d'un microscope d'interférences

I.7 Caractérisation des surfaces : Principaux paramètres statistiques

La norme ISO 4287 recense l'ensemble des paramètres géométriques et statistiques existants dans l'analyse des états de surfaces. Cette norme définit au moins 19 caractéristiques statistiques pour caractériser les surfaces.

Les paramètres statistiques les plus connus sont sans doute les coefficients R_a et R_q , qui sont définis pour une longueur de base sur une ligne de référence. La ligne de référence sépare les crêtes et les creux d'un profil de la surface en deux catégories : ceux situés au dessus de la ligne de référence, et ceux situés en dessous. Les paramètres statistiques sont toujours calculés à partir de la ligne de référence sur une longueur caractéristique appelée longueur de base.

- **Définition de R_a et R_q**

- R_a est la moyenne des valeurs absolues des déviations y_i du profil par rapport à la ligne de référence arithmétique, soit :

$$R_a = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |y_i|$$

La ligne de référence arithmétique (ou ligne centrale) est la ligne qui divise le profil en délimitant, à l'intérieur de la longueur de base, des aires égales de part et d'autre de cette ligne.

- R_q est la moyenne *RMS* (*Random Mean Square*) des déviations du profil par rapport à la ligne de référence des moindres carrés, soit :

$$R_q = RMS = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i^2 \right)^{1/2}$$

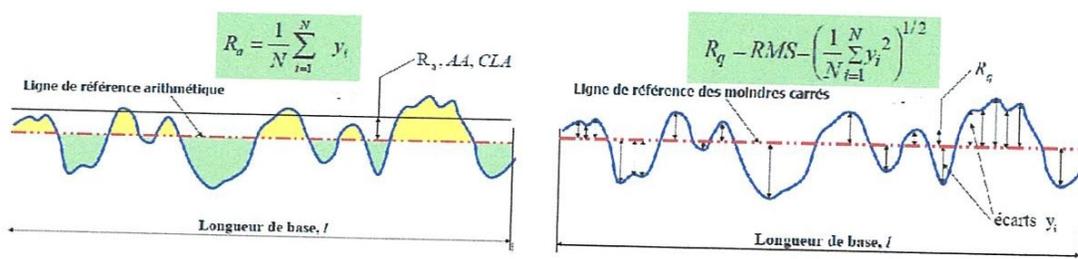


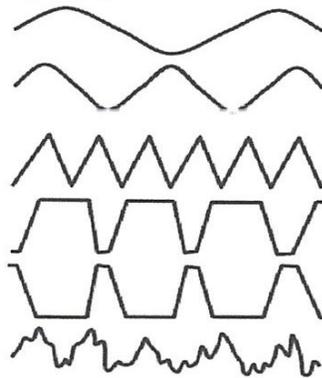
Fig I.13 Profil de rugosité sur lequel est défini R_a, R_q

La ligne de référence des moindres carrés

(où ligne moyenne) est la ligne qui divise le profil en délimitant, à l'intérieur de la longueur de base, une valeur minimale de la somme des carrés des aires entre les crêtes et les creux.

Les valeurs R_a et R_q sont très proches l'une de l'autre. Malheureusement, beaucoup d'ingénieurs ne spécifient qu'une ou l'autre de ces valeurs pour caractériser le fini de surface. Ni l'un ni l'autre de ces paramètres ne sont en réalité suffisants. En effet, plusieurs formes de profil d'allure différente peuvent avoir des valeurs R_a ou R_q très voisines. Par exemple, les profils de la figure I.5 ont la même valeur R_a et R_q , mais ils présentent un comportement totalement différent en frottement et en usure.

Tous ces profils ont la même valeur de R_a et R_q



R_a ou R_q caractérisent la hauteur des irrégularités mais pas la forme.



R_a et R_q sont insuffisants pour bien caractériser les surfaces en tribologie.

Fig. I.14 Exemple de 6 profils différents ayant les même R_a et R_q

I.8 Défaut de rugosité

La rugosité est l'un des défauts de forme introduite pendant la fabrication. [3]
Les défauts de rugosité possèdent une grande influence sur les fonctions des surfaces.



FIG I.15 Défauts de rugosité

L'état d'elle dépend en effet des caractéristiques très diverses telles que :

- Le frottement de glissement et de roulement,
- La résistance au matage, l'étanchéité,
- La résistance à l'écoulement des fluides,
- La facilité d'accrochage des revêtements,
- La résistance aux efforts alternés

Une coupe longitudinale ou transversale d'une surface réelle donne un profil sur lequel on relevé des défauts de plusieurs ordres de grandeur.

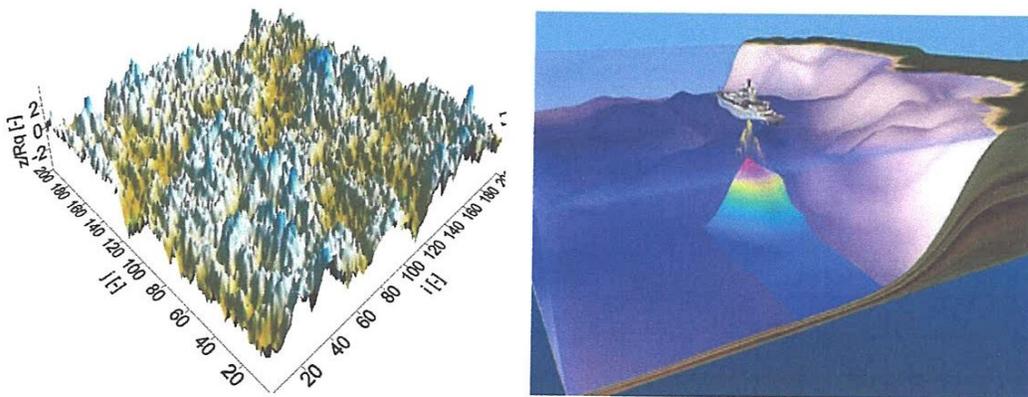


Fig.1.16 surface rugueuse générée numériquement

I.9 Modélisation de la rugosité des surfaces

La hauteur d'une surface rugueuse peut être considérée comme une variable aléatoire à deux dimensions $z(x,y)$ où z se mesure à partir du plan moyen de la surface. La densité de probabilité de cette variable par l'examen de sa courbe représentative et de celles de ses moments centrés, permet d'illustrer certains aspects de la rugosité tels que la dispersion ou l'asymétrie (moments d'ordre 3 et 4). En adoptant la notation indicielle, les principaux paramètres de la caractérisation statistique des surfaces s'expriment :

- **Hauteur de la surface moyenne**

$$\langle z_{ij} \rangle = \frac{1}{NM} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M z_{ij} \quad (I.1)$$

où N et M sont respectivement le nombre de points suivant les directions x et y et $z_{ij} = z(x_i, y_j)$

Il est à préciser que la moyenne des hauteurs de la surface est supposée nulle (surface normalisée) ; c'est à dire : $\langle z_{ij} \rangle = 0$

- **Ecart type quadratique**

Le calcul de l'écart-type quadratique de la distance des hauteurs de rugosité S_q permet d'évaluer l'intervalle de variation de la hauteur de rugosité. Il est préféré à l'écart arithmétique moyen S_a du fait de son usage fréquent en statistique :

$$S_q = \sigma = \left(\frac{1}{NM} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M z_{ij}^2 \right)^{1/2} \quad (I.2)$$

Par définition, l'écart-type d'une distribution statistique est la racine carrée de son moment centré calculé à l'ordre 2 :

$$m_k = \frac{1}{NM} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (z_{ij} - \langle z_{ij} \rangle)^k \quad (I.3)$$

Ces moments sont à l'origine de deux nouveaux termes décrivant la distribution statistique, le paramètre d'asymétrie SSk (Skewness) et le paramètre d'étalement SKu (Kurtosis) :

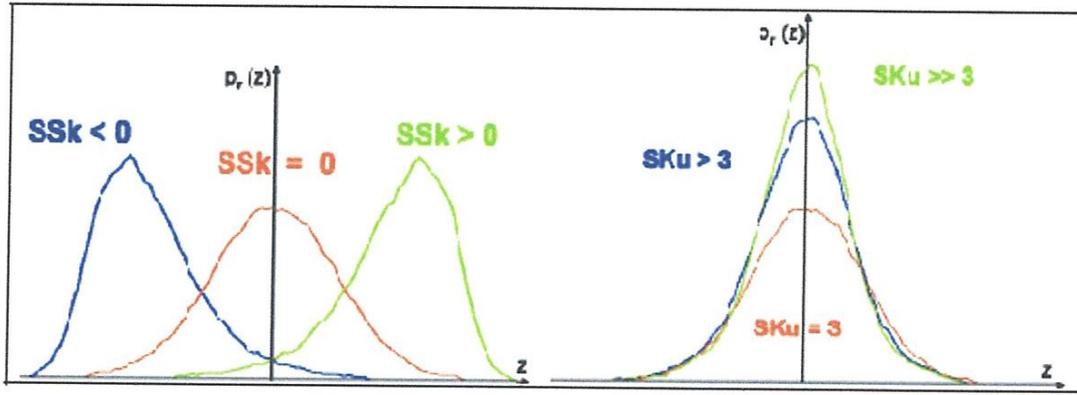
$$SSk = \frac{m_3}{S_q^3} = \frac{1}{NM} \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M z_{ij}^3}{S_q^3} \quad (I.4)$$

$$SKu = \frac{m_4}{S_q^4} = \frac{1}{NM} \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M z_{ij}^4}{S_q^4} \quad (I.5)$$

Dans cette nouvelle notation, la lettre initiale S indique que le paramètre considéré se rapporte à une surface rugueuse et non à un simple profil.

Les deux paramètres SSk et SKu sont utilisés pour définir la forme et l'agencement de la rugosité d'une surface. Toute distribution gaussienne possède un coefficient d'asymétrie nul et un coefficient d'étalement égal à 3. Une valeur nulle du paramètre SSk indique que la distribution est symétrique figure I.17. Dans le contexte des surfaces rugueuses, cela signifie que les vallées et les pics (sommets) sont répartis de manière égale de part et d'autre du plan moyen ; c'est le cas des surfaces de forme sinusoïdale. Une valeur négative du paramètre SSk est caractéristique d'une surface présentant plus de vallées que de pics figure I.17. Autrement dit, une valeur positive de ce paramètre signifie que la surface présente moins de vallées que de pics.

La valeur de SKu renseigne sur l'aplatissement de la courbe de distribution des hauteurs figure I.17. Lorsque les motifs de la rugosité (pics, vallées) sont larges et leur extrémité peu éloignée du plan moyen, alors $SKu < 3$ et la distribution est reserrée autour de la valeur médiane. En revanche, si les pics pointus et les vallées étroites et profondes prédominent, alors $SKu > 3$ et la distribution est plus large que la distribution normale. En général, les paramètres d'asymétrie et d'étalement varient simultanément.



a) Paramètre d'asymétrie (skewness) b) Paramètre d'étalement (kurtosis)

Fig. I.17 Variations de la distribution statistique des hauteurs d'une surface rugueuse pour différentes valeurs des paramètres d'asymétrie et d'étalement.

Il est intéressant de noter que les surfaces rugueuses gaussiennes ou non peuvent être générées numériquement figures I.13 en faisant généralement appel à des séries harmoniques de la forme :

$$z_{ij} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m a_{kl} [\cos(\omega_k x_i + \phi_k) \cos(\omega_l y_j + \phi_l)] \quad (I.6)$$

Dans cette équation, a_{kl} est un terme d'amplitude, ω_k et ω_l désignent les pulsations spatiales, ϕ_k et ϕ_l sont des déphasages introduits pour donner un caractère aléatoire aux hauteurs z .

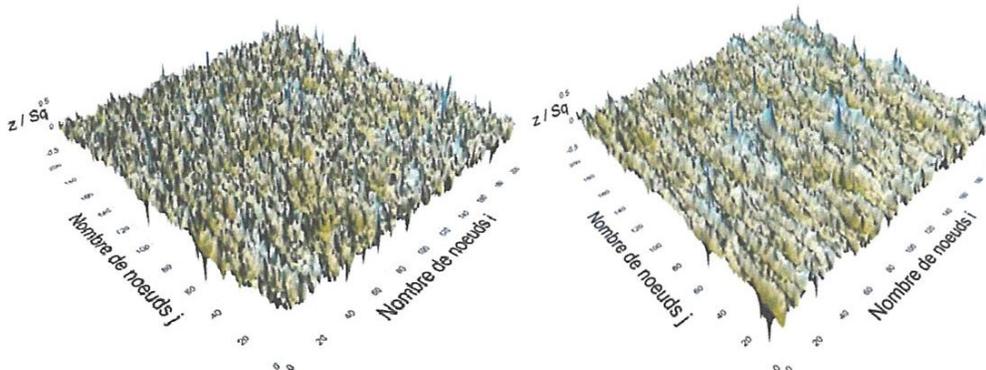


Fig. I.18 Exemples de surfaces anisotropes générées automatiquement.

I.10 Méthodes d'analyse des contacts rugueux lubrifiés [4]

La théorie de lubrification hydrodynamique classique fondée par Osborne Reynolds en 1886 est principalement basée sur l'hypothèse de surfaces parfaitement lisses. Cependant, il a été montré qu'une telle hypothèse est peu réaliste surtout pour l'étude des contacts lubrifiés sévèrement chargés fonctionnant avec de faibles épaisseurs de film.

Dans les systèmes mécaniques lubrifiés en régime hydrodynamique ou élasto-hydrodynamique (EIID) tels que les paliers, les butées, les garnitures mécaniques d'étanchéité, les engrenages et les roulements, l'épaisseur du film lubrifiant h est censée d'une part être plus grande que la hauteur des aspérités et d'autre part elle doit être très faible devant la longueur d'onde de la rugosité (rugosité de Reynolds); c'est-à-dire $h \ll \lambda$. Dans ces conditions, l'équation de Reynolds peut être appliquée pour décrire le comportement hydrodynamique des contacts rugueux.

Plusieurs méthodes ont été proposées dans la littérature pour l'étude des effets des rugosités de surface sur les performances des contacts hydrodynamiques, à savoir les méthodes stochastiques et les méthodes déterministes (directes). Par comparaison aux modèles stochastiques, les modèles déterministes permettent de prendre en compte de manière plus réaliste la texture et la microtopographie des surfaces dans les études de simulation.

I.10.1 Méthode stochastique

Le concept stochastique a été introduit pour la première fois par Tzeng et Saibel en 1967 pour l'étude de l'influence d'une rugosité transversale sur les performances d'un patin incliné bidimensionnel.

L'approche stochastique est basée sur l'introduction de facteurs d'écoulement dans l'équation de Reynolds et d'une rugosité aléatoire sur les surfaces en contact. La génération de rugosité se fait suivant une loi gaussienne. Cette approche stochastique

connaît des limites. En effet, seule une description globale est possible, on ne peut avoir accès aux informations locales. Ainsi, deux profils de rugosités différents mais possédant les mêmes propriétés statistiques conduiront aux mêmes répartitions de pression.

I.10.2 Méthode directe

Ce type d'analyse est basé sur une résolution numérique directe de l'équation de Reynolds et une description de profils de surfaces simplifiées, en prenant par exemple un profil modélisé par une fonction périodique ou des profils réels figure. Il n'est plus nécessaire de connaître les paramètres statistiques relatifs au type de rugosité. Au lieu de considérer des facteurs de flux dans l'équation de Reynolds, on l'utilise sous la forme classique. C'est dans l'équation de l'épaisseur du film où sont prises en compte les rugosités.

L'approche directe permet de prendre en compte la variance la plus réaliste des rugosités. Les travaux effectués avec ce type d'approche sont basés sur l'application de l'équation de Reynolds et montrent qu'une description précise de la rugosité est une donnée importante. Elle permet d'obtenir des informations locales telles que les variations rapides locales de la pression. Cependant, cette approche nécessite un espace mémoire important et de grands efforts de calcul car il faut raffiner au maximum le maillage pour pouvoir décrire les plus petites ondulations de la rugosité.

I.10.3 Méthode d'homogénéisation

La méthode d'homogénéisation dite aussi méthode de moyennisation est une théorie mathématique qui inclut l'étude des équations aux dérivées partielles à coefficients à oscillation rapide. Depuis quelques décennies, cette méthode a été utilisée avec succès pour le traitement des problèmes ayant trait, par exemple, à l'élasticité des milieux anisotropes tels que les matériaux composites. En revanche, cette méthode n'est pas fréquemment utilisée dans le domaine de la tribologie. Récemment, plusieurs auteurs se sont intéressés à l'application du concept d'homogénéisation dans les études de simulation des problèmes de lubrification par

fluides compressibles et incompressibles dont le comportement peut être newtonien ou non newtonien .

L'approche d'homogénéisation consiste à réécrire le problème posé en deux autres :

- Un problème local gouverné par 3 équations aux dérivées partielles du second ordre dont les inconnues sont les fonctions périodiques locales.
- Un problème homogénéisé régi par une équation aux dérivées partielles dont l'inconnue est la pression homogénéisée supposée nulle sur la frontière du domaine global.

La difficulté majeure de cette technique réside dans le découplage des deux problèmes à partir du problème global. Les coefficients du problème homogénéisé dépendent de la solution locale et ne peuvent être calculés qu'après traitement du problème local.

I.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons tout d'abord présenté différents régimes de lubrification et différents types de paliers et l'état géométrique des surfaces industrielles ainsi que les paramètres statistiques couramment employés pour caractériser la rugosité des surfaces tout en évoquant quelques techniques de mesure topographique permettant de les obtenir. L'évaluation de la texture et de la topographie des surfaces mécaniques, qui est un domaine en expansion, est primordiale pour déterminer leurs propriétés tribologiques.

Les différentes méthodes d'analyse des contacts lubrifiés rugueux, il ressort que la méthode d'homogénéisation s'avère être une alternative intéressante à la méthode directe spécifiquement dans le cas de rugosités périodiques car elle ne nécessite qu'une allocation mémoire réduite. De plus, elle présente des résultats plus réalistes comparés à ceux issus des approches stochastiques. Par comparaison à la méthode directe décrite précédemment, la technique d'homogénéisation ne nécessite pas un maillage très fin pour prendre en compte l'effet de la rugosité car cette dernière est prise en compte pendant la résolution des problèmes locaux.

CHAPITRE II

Théorie des paliers hydrodynamiques en régime turbulent

II.1 Introduction

Le chapitre précédent suppose qu'à l'intérieur du fluide en écoulement les forces d'inertie sont négligeables devant les forces de viscosité et de pression. Dans le cas d'un palier hydrodynamique, ces forces deviennent prépondérantes lorsque la viscosité cinématique du fluide est faible (eau, mercure,....), les jeux de fonctionnement importants ou la vitesse linéaire de l'arbre en rotation élevée. C'est le cas des paliers lisses des grandes turbomachines modernes dont le diamètre peut dépasser un mètre, c'est aussi le cas des paliers de certaines pompes de centrales nucléaires. Lorsque les forces d'inertie atteignent une certaine valeur, elles modifient la structure de l'écoulement qui devient graduellement turbulent figure II.1.

En effet, lorsque le nombre de Reynolds, qui est le rapport des forces d'inertie aux forces de viscosité exercées sur une particule de fluide, augmente le régime d'écoulement devient non laminaire ou turbulent.

Dans le cas des paliers hydrodynamiques, on rencontre également un autre régime non laminaire appelé régime des tourbillons de Taylor qui est un régime de transition. La turbulence est un mouvement irrégulier dans lequel les différentes propriétés de l'écoulement telles que la vitesse et la pression varient de façon aléatoire en fonction du temps et de l'espace. Il est à noter que la turbulence est parfois utile dans certaines applications technologiques car elle favorise les processus de mélange (chambre de combustion d'un moteur à combustion interne,....) ainsi que les transferts de chaleur et/ou de masse.

En général, un écoulement turbulent peut être caractérisé par les propriétés suivantes :

- L'écoulement est tridimensionnel (3-D) et instationnaire
- Le vecteur vitesse varie de façon aléatoire en module et en direction
- L'écoulement contient un grand nombre de tourbillons de tailles très variées.

En régime d'écoulement turbulent, les équations de Navier-Stokes décrivant le mouvement d'un fluide réel (visqueux) sont toujours valables. On se limitera au cas d'un palier lubrifié par un fluide incompressible en écoulement isotherme et stationnaire. [5]

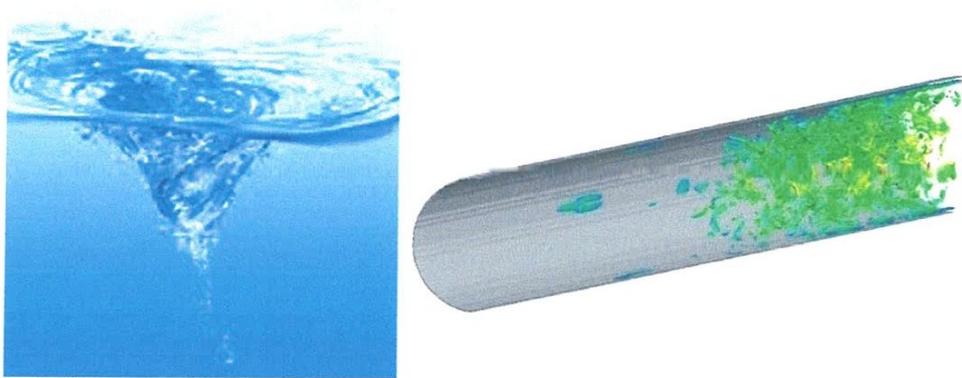


Fig. II.1 Exemples d'écoulements turbulents

Le régime turbulent n'a pas à proprement parlé une définition spécifique, il est surtout défini par rapport au régime laminaire [6]

Le régime laminaire présente un écoulement organisé. Le régime turbulent présente un écoulement désorganisé, irrégulier dans le temps et dans l'espace.

L'écoulement turbulent est non prédictible : une petite modification entraîne de grands changements ultérieurs

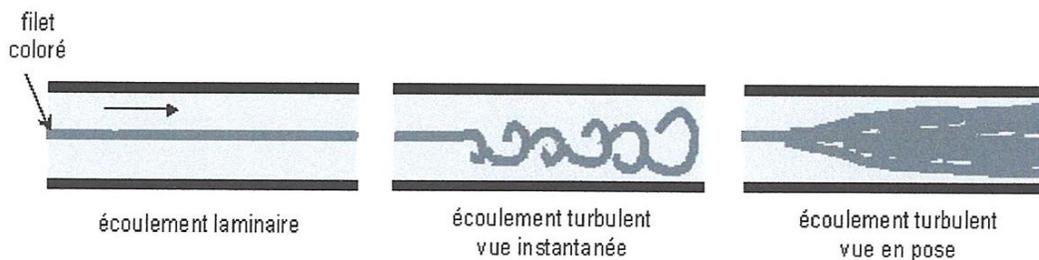


Fig. II.2 Les différents régimes de l'écoulement

L'étude de l'écoulement des fluides peut être arrangée en une séquence allant du plus simple au plus compliqué :

Écoulement sans frottement (Euler) \Rightarrow écoulement visqueux laminaire (Navier Stokes) \Rightarrow écoulement turbulent (Reynolds).

La même séquence a été suivie historiquement. C'est au début des **années 50** que l'étude des écoulements turbulents a connu un important développement. Pourtant la plupart des écoulements qui se produisent dans la nature et dans les applications techniques est turbulente. Les recherches ont permis d'avancer d'une façon très importante dans la compréhension et la description des écoulements turbulents, mais les problèmes sont tellement compliqués qu'on est loin de les avoir résolus de façon satisfaisante.

Les champs d'applications sont très nombreux :

- \rightarrow Atmosphère
- \rightarrow Océans
- \rightarrow Hydraulique : écoulement dans les paliers, rivières, fleuves, écoulement dans les pipelines.

La turbulence est une caractéristique de l'écoulement et non du fluide. En conséquence la dynamique de la turbulence est la même pour tous les fluides, liquides ou gazeux. Puisqu'il n'y a pas de solution générale des équations de **Navier-Stokes**, il n'y a pas de solution générale aux problèmes des écoulements turbulents.

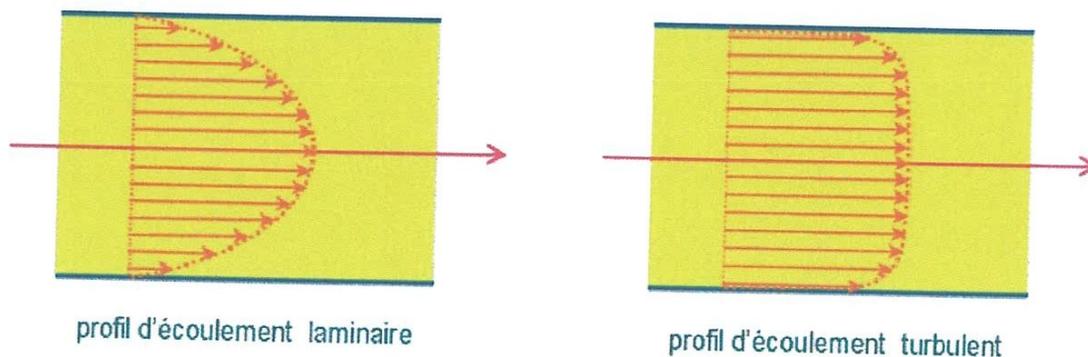


Fig. II .3 Profil de l'écoulement

Avant de voir toutes les implications pour la turbulence de la décomposition de Reynolds en une partie moyenne et une partie fluctuante, on rappelle les équations de la mécanique des fluides.

La turbulence étant un phénomène aléatoire, toute grandeur physique $u(x_1, x_2, x_3, t)$ qui décrit l'écoulement figure II.4, présente une fluctuation $u'(x_1, x_2, x_3, t)$ qui, si l'écoulement est stationnaire, se situe autour d'une valeur moyenne $\bar{u}(x_1, x_2, x_3)$. On aura donc : [5]

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = \bar{u}(x_1, x_2, x_3) + u'(x_1, x_2, x_3, t) \quad (\text{II.1})$$

tel que $u' \ll u$

$$u = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \int_t^{t+T} g dt \right) \quad (\text{II.2})$$

et

$$u' = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \int_t^{t+T} g' dt \right) = 0$$

La décomposition (II.1) qui est due à Osborne Reynolds, ainsi que la définition de la valeur moyenne selon (II.2) s'appliquent donc uniquement pour les écoulements qui sont en moyenne stationnaires.

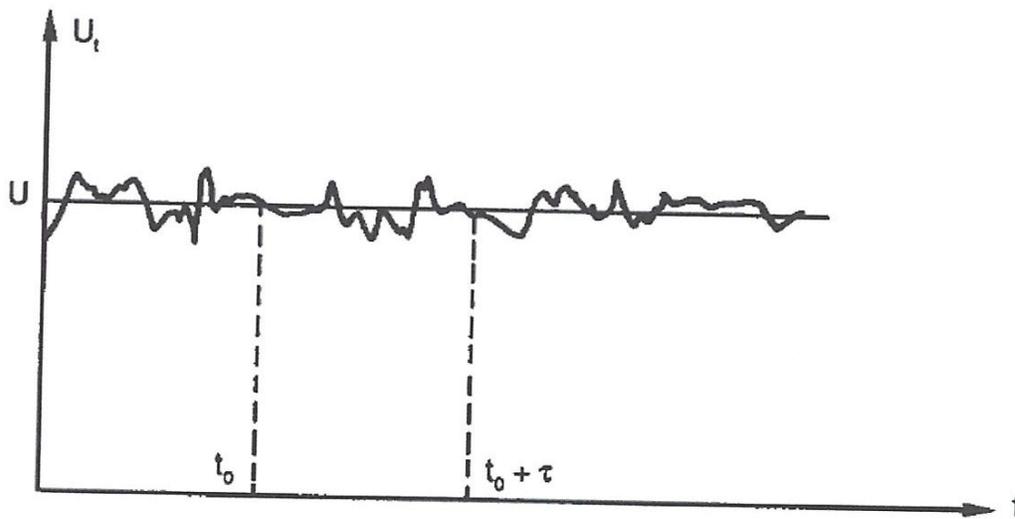


FIG.II.4 Enregistrement de vitesse en régime turbulent.

II.2 Equations de Reynolds

On considère l'écoulement turbulent d'un fluide newtonien et incompressible

($\rho = \rho_0 = \bar{\rho}$) en régime permanent ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$). En régime turbulent, on a deux écoulements séparés : moyen et de fluctuation ou d'agitation. On se propose de déterminer les équations du mouvement moyen :

II.2.1 Equation de continuité pour un fluide incompressible

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{II.3})$$

où $i=1, 2, 3$

En prenant la moyenne, on obtient :

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \bar{u}'_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{II.4})$$

II.2.2 Equations dynamiques ponctuelles

Les équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\rho_0 \gamma_i = \rho_0 f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (\text{II.5})$$

$$\text{où: } \gamma_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) - u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j)$$

en vertu de l'équation. (II.3)

et $\tau_{ij} = 2\mu D_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ qui est le tenseur des contraintes ou tensions

visqueuses.

En prenant la moyenne des équations (II.5), on trouve :

$$\rho_0 \bar{\gamma}_i = \rho_0 \bar{f}_i - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j}$$

Soit :

$$\rho_0 \bar{Y}_i = \rho_0 \bar{f}_i - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\tau}_{ij} - \rho_0 \overline{u'_i u'_j}) \quad (\text{II.6})$$

$$\text{Avec } \bar{\gamma}_i = \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_j}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_i u'_j})$$

$$\text{Posons : } \tau_{ij}^* = \bar{\tau}_{ij} - \rho_0 \overline{u'_i u'_j} = \bar{\tau}_{ij} + \tau_{ij}^{(t)}$$

τ_{ij}^* est le tenseur des contraintes totales incluant les contributions dues à la viscosité du fluide et à la turbulence, $\bar{\tau}_{ij}$ le tenseur des contraintes visqueuses dues à la viscosité du fluide et $\tau_{ij}^{(t)} = -\rho_0 \overline{u'_i u'_j}$ le tenseur de Reynolds regroupant les tensions de turbulence.

Dans un système cartésien et en utilisant la notation classique, on a :

- **Contraintes totales**

$$\tau_{xx}^* = 2\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \rho_0 \bar{u}'^2 ; \tau_{xy}^* = \mu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) - \rho_0 \overline{u'v'}$$

$$\tau_{yy}^* = 2\mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \rho_0 \bar{v}'^2 ; \tau_{yz}^* = \mu \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) - \rho_0 \overline{v'w'}$$

$$\tau_{zz}^* = 2\mu \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} - \rho_0 \bar{w}'^2 ; \tau_{zx}^* = \mu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) - \rho_0 \overline{u'w'}$$

- **Composantes du tenseur de Reynolds**

$$\tau_{ij}^{(t)} = -\rho_0 \tau_{ij}^{(t)} \begin{pmatrix} \overline{u'^2} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{u'v'} & \overline{v'^2} & \overline{v'w'} \\ \overline{u'w'} & \overline{v'w'} & \overline{w'^2} \end{pmatrix}$$

Les contraintes ou tensions de Reynolds sont des quantités mesurables.

Par conséquent, les équations de Reynolds s'écrivent :

$$\rho_0 \bar{Y}_i = \rho_0 \bar{f}_i + \frac{\partial \tau_{ij}^*}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} \quad (\text{II.7})$$

En tout, on a quatre équations (trois équations de Reynolds (II.7) + l'équation de continuité (II.4)) et dix inconnues : $\bar{u}_i, \bar{p}, \tau_{ij}^{(t)}$; $i, j = 1, 2, 3$

Nous voyons donc que dans le cas d'un mouvement moyen, les équations dynamiques et l'équation de continuité sont absolument analogues aux équations dynamiques et à l'équation de continuité dans le cas d'un mouvement laminaire à condition d'ajouter aux tensions visqueuses les tensions de turbulence.

Remarque

- en régime laminaire: $\bar{p} = p, \bar{u}_i = u_i$ et $\rho_0 \overline{u'_i u'_j} = 0$.
- en général, $|\rho_0 \overline{u'_i u'_j}| \gg |\bar{\tau}_{ij}| \rightarrow \tau^*_{ij} \approx -\rho_0 \overline{u'_i u'_j} = \tau_{ij}(t)$
- les fluctuations superposées au vecteur vitesse moyen sont (3-D) même si l'écoulement moyen est mono ou (2-D). Donc, la turbulence est toujours (3-D)
- on définit l'intensité de la turbulence par l'expression :

$$(u'^2 + v'^2 + w'^2)^{\frac{1}{2}}$$

Cette même expression élevée au carré et multipliée par $\frac{\rho_0}{2}$ exprime l'énergie cinétique de la turbulence, notée k

L'apparition des tensions de Reynolds dans les équations du mouvement pose un problème de « fermeture » car on obtient plus d'inconnues que d'équations. On dit alors que l'on a un système d'équations « ouvert ». Pour fermer le système d'équations, il faut élaborer un modèle de turbulence dont le but serait le développement d'équations supplémentaires pour les tensions de Reynolds.

La littérature nous propose plusieurs modèles de turbulence. Les modèles les plus utilisés sont ceux de Boussinesq, de Prandtl et le modèle k, ε ... etc, Ces modèles sont des modèles semi-empiriques basés sur des résultats expérimentaux.

II.3 Approche de Boussinesq

En 1877, Boussinesq a proposé le premier modèle mathématique de la turbulence. La relation entre les tensions de Reynolds et le gradient de la vitesse moyenne est de la forme :

$$\tau_{ij}^{(t)} = -\rho_0 \overline{u'_i u'_j} = \rho_0 \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{II.8})$$

Le tenseur de contraintes s'écrit alors :

$$\sigma_{ij} = -\bar{p} \delta_{ij} + \mu \left(1 + \frac{\nu_t}{\nu} \right) \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{II.9})$$

Cette équation est analogue à l'équation constitutive pour un écoulement laminaire. Dans l'équation (II.9), μ est la viscosité moléculaire et ν_t la viscosité turbulente ou viscosité tourbillonnaire (the eddyviscosity) qui ne dépend pas des propriétés du fluide. ν_t est reliée à des quantités mesurables de l'écoulement turbulent.

II.3.1 Modèle de Prandtl

Prandtl exprime ν_t sous la forme :

$$\nu_t = l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \quad (\text{II.10})$$

où l est dénommée longueur de mélange de Prandtl (mixing length) figure III.4. La valeur absolue est introduite afin d'assurer $\nu_t \geq 0$.

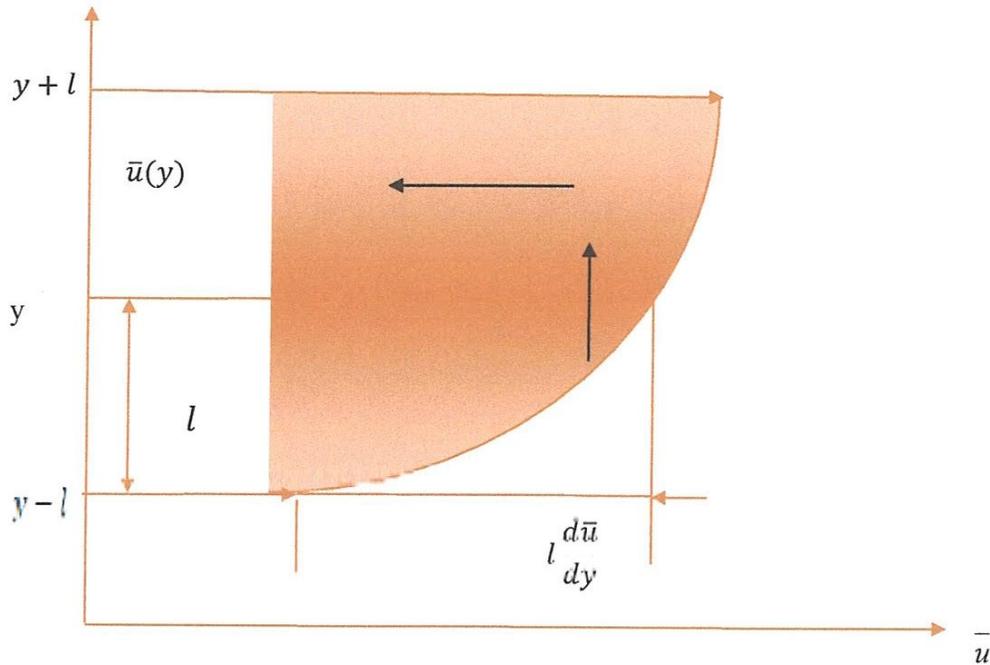


Fig. II.5 Longueur de mélange l .

II.3.2 Modélisation statistique de la turbulence [7]

- **Modèle à deux équations de transport**

- ✓ **Le modèle $k - \varepsilon$ standard**

La turbulence c'est une deux équations de transport. En définissant une échelle de longueur de turbulence

$$\ell = \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}$$

Ce modèle met l'accent sur les mécanismes affectant l'énergie cinétique turbulente en se basant sur la modélisation de deux équations de transport. La première est celle de l'énergie cinétique turbulente k et la deuxième est son taux de dissipation visqueuse ε . Ainsi, la viscosité dynamique turbulente est calculée par:

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

✓ Le modèle $k.\varepsilon$ RNG

Le modèle $k.\varepsilon$ RNG a été dérivé en utilisant une technique statistique appelée **Re** Normalisation Group (utilisé en mécanique quantique). Il inclut les améliorations suivantes:

- Dispose d'un terme additionnel dans l'équation de ε , qui améliore la précision pour les écoulements avec des contraintes rapides (changements de directions soudains).
- Inclue l'effet du tourbillonnement sur la turbulence afin d'accroître la précision pour les écoulements tourbillonnaires.
- Utilise un dispositif pour prendre en compte les effets des bas nombres de Reynolds, contrairement au modèle standard qui est un modèle basé sur des nombres de Reynolds élevés.

Avec ce modèle, la viscosité turbulente est calculée à l'aide de l'une des équations suivantes:

Nombres de Reynolds faibles:

$$\left| d\left(\frac{p^2 k}{\sqrt{\varepsilon} u}\right) = 1.72 \frac{g}{g^3 - 1 + C_v} dg \right.$$
$$\left| \text{avec } \nu = \frac{u_{eff}}{u} \varepsilon t \mu_{eff} = u + u_t \right.$$

Nombres de Reynolds élevés :

$$u_t = \rho c \mu \frac{k^e}{\varepsilon}$$
$$\text{avec } C_\mu = 0.085$$

✓ Le modèle $k.\varepsilon$ Réalisable

Le dernier modèle de la famille $k.\varepsilon$ diffère du modèle standard principalement par deux choses importantes:

Une nouvelle formulation pour la viscosité turbulente;

Une nouvelle équation pour le taux de dissipation.

Le terme "**Réalisable**" ou réalisable signifie que le modèle satisfait certaines contraintes mathématiques sur les contraintes de Reynolds, logiques avec la physique des écoulements turbulents. Ainsi, ce modèle prédit avec plus de précision le taux de propagation des jets. Il procure aussi des performances supérieures dans les écoulements impliquant la rotation, les couches limites sous de forts gradients de pression adverses, la séparation et les recirculations.

Elle est fonction de la déformation moyenne, des taux de rotation, de la vitesse angulaire de la rotation du système et des champs de la turbulence (k, ε).

$$c\mu = \frac{1}{A_0 + A_s \frac{KU^*}{\varepsilon}}$$

$$U^* = \sqrt{\delta_{ij} \delta_{ij}}$$

$$A_0 = 4.04, A_s = \sqrt{6 \cos \theta}, \theta = \frac{1}{3} \cos^{-1}(\sqrt{6w}), w = \frac{\delta_{ik} \delta_{jk} \delta_{ki}}{U^*} \varepsilon \delta_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$$

✓ Le modèle (k- ω)

C'est un modèle empirique similaire au **modèle k- ε** , avec deux équations de transport, une équation adaptée de **k** et une équation du taux de dissipation spécifique qui s'apparente au rapport de ε par **k**. Après plusieurs années de perfectionnement, ce modèle offre à présent un avantage pour la prédiction des écoulements cisailés libres. Il prend aussi en compte les effets des faibles nombres de Reynolds, de la compressibilité, des jets de

Différentes configurations (plan, radial, ...etc.). Pour ces raisons, il convient particulièrement aux écoulements internes.

La viscosité turbulente est calculée en combinant **k** et ω comme suit:

$$\mu_t = \alpha^* \frac{\rho k}{\omega}$$

Avec α^* un coefficient qui apporte une correction à la viscosité turbulente à bas nombres de Reynolds en l'atténuant en quelque sorte.

✓ **Modèle SST ($k \cdot \omega$)**

Le modèle SST (Shear Stress Transport) ou transport des contraintes de cisaillement turbulentes, est dérivé du modèle $k \cdot \omega$ Standard. Ce modèle combine la robustesse et la précision de la formulation du modèle $k \cdot \omega$) Dans la région proche de la paroi avec le modèle $k \cdot \varepsilon$ et toutes ses qualités citées plus haut pour les écoulements libres loin de la paroi. Ce modèle inclue les améliorations suivantes:

- Une fonction de combinaison est multipliée à la fois au modèle Standard $k \cdot \omega$ et au modèle $k \cdot \varepsilon$. Cette fonction commutera entre les valeurs "zéro" ou "un" suivant que l'on soit dans la région proche de la paroi, pour activer le modèle $k \cdot \omega$ standard ou dans la région loin de la paroi, pour activer le modèle $k \cdot \varepsilon$.
- La définition de la viscosité turbulente est modifiée pour prendre en compte le transport des contraintes de cisaillement turbulentes, dont voici une forme simplifiée:

✓ **Modèle aux tensions de Reynolds RSM**

C'est le modèle le plus élaboré que propose le code de calcul. En abandonnant l'hypothèse d'une viscosité turbulente isotrope, le modèle de turbulence des contraintes de Reynolds (RSM: Reynolds Stress Model) ferme les équations RANS en résolvant l'ensemble des équations de transport des contraintes de Reynolds avec une équation pour le taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente ε .

Cette procédure introduit cinq équations de transport additionnelles pour les problèmes bidimensionnels (7 pour le cas 3D) et là aussi la viscosité turbulente est calculée comme pour le modèle Standard

Ce modèle prend en compte les effets des courbures des lignes de courant, les tourbillonnements, la rotation et les changements rapides du taux de déformation, mais d'une manière plus rigoureuse que tous les autres modèles

II.4 Equations de Reynolds pour un écoulement en film mince

En plus des hypothèses classiques de la mécanique des films minces (forces massiques négligées, fluide iso visqueux, ...), on pose que les gradients, par rapport à x_1 et x_3 , des tensions de Reynolds $u'_i u'_j$ sont négligeables devant ceux par rapport à x_2 (coordonnée dirigée suivant l'épaisseur du film). Dans ces conditions, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} &= \mu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(-\rho_0 \overline{u'_i u'_2} \right) \quad i=1,3 \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(-\rho_0 \bar{u}_2'^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

En intégrant, la deuxième équation du système (II.10), on obtient :

$$\bar{p}(x_1, x_2, x_3, t) = -\rho_0 \bar{u}_2'^2 + p_{II}(x_1, x_3, t) = p_I(x_1, x_2, x_3, t) + p_{II}(x_1, x_3, t)$$

Les équations (II.10) indiquent que les vitesses moyennes du fluide \bar{u}_1 et \bar{u}_3 sont

influencées par les gradients de pression moyens $\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_3}$ et par conséquent

$\frac{\partial p_{II}}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial p_{II}}{\partial x_3}$, car $\frac{\partial p_I}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial p_I}{\partial x_3}$ sont de l'ordre de h/L (L étant une longueur

caractéristique du contact) par rapport aux autres termes des équations (II.10). Le terme p_I peut être négligé tant pour la distribution de vitesse que la distribution de pression puisque la pression est importante aux limites où $u'_2 = p_I = 0$. Par conséquent

$\bar{p} = p_{II}(x_1, x_3, t)$ qui est indépendante de la variable x_2 ; c'est-à-dire le gradient selon

l'épaisseur du film $\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_2}$ est identiquement nul.

Il reste donc :

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} = \mu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_3^2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(-\rho_0 \overline{u'_i u'_3} \right) \quad (\text{II.11})$$

$i=1$ et 3

II.5 approche basée sur des considérations empiriques

A partir de relations empiriques, de nombreux chercheurs ont tenté de déterminer le fonctionnement d'un palier en régime turbulent. C.W. Ng et C.H.T. Pan

présentent une approche qui débouche sur des résultats plus satisfaisants. Cette théorie est basée sur la notion de viscosité turbulente (eddy viscosity) ν_t introduite par Boussinesq et permettant de relier les tensions de Reynolds aux taux de déformation de l'écoulement moyen par les relations écrites en utilisant la notation classique :

$$\begin{aligned} -\overline{u'v'} &= \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \\ -\overline{v'w'} &= \nu_t \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

Où $(x, y, z) \equiv (x_1, x_2, x_3)$; $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \equiv (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$ et $(u', v', w') \equiv (u'_1, u'_2, u'_3)$

Les contraintes totales τ_{xy}^* et τ_{yz}^* s'écrivent alors, dans le cas où seuls les gradients de vitesse moyenne par rapport à y sont importants :

$$\tau_{xy}^* = \mu \left(1 + \frac{\nu_t}{\nu} \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad \text{et} \quad \tau_{yz}^* = \mu \left(1 + \frac{\nu_t}{\nu} \right) \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \quad (\text{II.13})$$

Dans la littérature, il existe plusieurs relations permettant d'exprimer la viscosité turbulente. En général, on utilise la relation empirique de Reichardt:

$$\frac{\nu_t}{\nu} = k \left(y^+ - \delta^+ \text{th} \left(\frac{y^+}{\delta^+} \right) \right) \quad \text{avec} \quad k=0,4 \quad \text{et} \quad \delta^+ = 10,7 \quad (\text{II.14})$$

y^+ coordonnée réduite définie à partir des lois universelles de variation de vitesse moyenne au voisinage d'une paroi:

Ces relations permettent de calculer les contraintes de cisaillement à l'intérieur du film en fonction du gradient de vitesse. Dans le cadre de la théorie des films minces, les gradients de vitesse sont donnés par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} &= \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho_0 \overline{u'v'} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(1 + \frac{\nu_t}{\nu} \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} &= \frac{\partial \tau_{yz}^*}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} - \rho_0 \overline{v'w'} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(1 + \frac{\nu_t}{\nu} \right) \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

A partir de ces équations et compte tenu des conditions aux limites Ng et Pan déterminent les vitesses moyennes :

$$\begin{aligned}\bar{u} &= \frac{1}{\mu} \left[\tau_{xy}(h/2) \int_0^y \frac{dy'}{1 + \frac{V_t}{\nu}} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \int_0^y \frac{(y' - h/2) dy'}{1 + \frac{V_t}{\nu}} \right] \\ \bar{w} &= \frac{1}{\mu} \left[\tau_{yz}(h/2) \int_0^y \frac{dy'}{1 + \frac{V_t}{\nu}} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \int_0^y \frac{(y' - h/2) dy'}{1 + \frac{V_t}{\nu}} \right]\end{aligned}\quad (\text{II.16})$$

Où $\tau_{xy}(h/2)$ et $\tau_{yz}(h/2)$ sont des constantes d'intégration à déterminer à partir des conditions limites pour $y=h$.

Ces expressions reportées dans l'équation de continuité permettent après intégration à travers le film d'obtenir, en régime permanent, l'équation de Reynolds turbulente :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h^3}{\mu} G_{x_1} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h^3}{\mu} G_{x_2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_2} \right) = \frac{V}{2} \frac{\partial h}{\partial x} \quad (\text{II.17})$$

Dans l'équation (II.17), G_{x_1} et G_{x_2} sont deux fonctions qui dépendent non seulement de l'épaisseur du film et du nombre de Reynolds local de l'écoulement, mais aussi des gradients de pression circonférentiel et axial. Ng et Pan obtiennent les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned}G_{x_1} &= \int_0^1 d\bar{y} \int_0^{\bar{y}} \frac{1/2 - \eta}{f_c(\eta)} \left(1 - \frac{g_c(\eta)}{f_c(\eta)} \right) d\eta \\ G_{x_2} &= \int_0^1 d\bar{y} \int_0^{\bar{y}} \frac{1/2 - \eta}{f_c(\eta)} d\eta\end{aligned}\quad (\text{II.18})$$

où les fonctions f_c et g_c sont définies par les relations suivantes :

$$f_c(\eta) = 1 + k \left(\eta h_c^+ - \delta^+ t h \left(\eta \frac{h_c^+}{\delta^+} \right) \right) \text{ et } g_c(\eta) = \frac{k}{2} \eta h_c^+ t h^2 \left(\eta \frac{h_c^+}{\delta^+} \right)$$

avec $\eta = \frac{y}{h}$ variable sans dimension, $h_c^+ = \frac{h}{\nu} \sqrt{|\tau_c|}$ qui est la tension turbulente de

Couette tel que $|\tau_c| = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2}$.

Dans une analyse comportant moins d'hypothèses restrictives H. G. Elrod, G. W. Ng obtiennent les fonctions suivantes :

$$G_{x_1} = J(1) \frac{\bar{I}}{I(1)} - \bar{J} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{\bar{I}}{I(1)} \frac{hV}{\nu}}{\frac{h^3}{\mu\nu} \frac{\partial p}{\partial x}} \quad (\text{II.19})$$

$$G_{x_3} = J(1) \frac{\bar{I}}{I(1)} - \bar{J}$$

où $I(\eta) = \int_0^\eta \frac{d\eta}{1 + \frac{V_t}{\nu}}$; $J(\eta) = \int_0^\eta \frac{\eta d\eta}{1 + \frac{V_t}{\nu}}$, et \bar{I} et \bar{J} sont respectivement les moyennes de 0 à

1 de $I(\eta)$ et $J(\eta)$.

En considérant séparément les écoulements suivant x_1 et x_3 , Constantinescu démontre que, compte tenu de la sous couche laminaire, les vitesses sont des fonctions quasi-linéaires des gradients de pression. Il propose alors pour les fonctions G_{x_1} et G_{x_3} :

- Ecoulement de Poiseuille dû au gradient de pression:

$$G_{x_1} = G_{x_3} = \frac{6,8}{\left(\frac{V_m h}{\nu}\right)^{0,681}} \text{ où } V_m = \sqrt{u_m^2 + w_m^2} : \text{ vitesse moyenne du fluide} \quad (\text{II.20})$$

- Ecoulement de Couette dû à la vitesse de rotation:

$$\begin{aligned} G_{x_1} &= \frac{1}{(12 + 0,0136 \mathfrak{R}_h^{0,9})} \\ G_{x_3} &= \frac{1}{(12 + 0,0043 \mathfrak{R}_h^{0,96})} \\ \mathfrak{R}_h &= \frac{Vh}{\nu} \end{aligned} \quad (\text{II.21})$$

En régime laminaire, les relations (II.21) deviennent :

$$G_{x_i} = \frac{1}{12}, i = 1, 3$$

Il convient de noter que par des approches différentes, Constantinescu en 1959 , et Ng et Pan en 1964 obtiennent la même équation (II.17). Les valeurs numériques des coefficients G_{x_1} et G_{x_3} qui s'expriment en fonction de paramètres différents sont très voisines suivant que l'on utilise le modèle de Constantinescu ou d'Elrod .

Les expressions (II.21) pourraient être utilisées jusqu'à des nombres de Reynolds de l'ordre de 5×10^4 et permettraient de déterminer avec une certaine précision les caractéristiques d'un palier fonctionnant en régime turbulent. Pour une meilleure prédiction des performances d'un palier hydrodynamique, il faut connaître avec plus de précision les fonctions de turbulence G_{x_i} . Pour cela, on préfère pratiquement les lois empiriques de viscosité turbulente à la notion périmée de longueur de mélange, mais rien d'affirmer que ces lois déterminées pour des écoulements de grandes dimensions, soient toujours valables dans le cas des films minces. Il faut donc mesurer dans un film turbulent les différentes caractéristiques de la turbulence telles que les tensions de Reynolds, le profil des vitesses à l'aide d'anémomètres ainsi que l'intensité de la turbulence.

II.5 .Transition entre les différents régimes [8]

Entre le régime turbulent, qui existe dans les paliers pour des nombres de Reynolds ou de Taylor élevés, et le régime laminaire, on distingue trois types d'écoulements :

- 1) les forces d'inertie ou centrifuges sont faibles, mais non négligeables devant les forces de viscosité. Le comportement des paliers qui fonctionnent dans ces conditions ne peut plus être décrit par la théorie laminaire classique ;
- 2) les forces d'inertie sont du même ordre que les forces de viscosité. Il se produit alors à l'intérieur du film un écoulement secondaire communément connu sous le nom de tourbillons de Taylor (Taylor'svortices);

- 3) les forces d'inertie sont importantes devant les forces de viscosité. Autrement dit, le nombre de Reynolds de l'écoulement, qui exprime le rapport des forces d'inertie aux forces de viscosité agissant sur une particule de fluide, dépasse de loin certaines valeurs dites critiques. Dans ces conditions, on atteint le régime turbulent.

II.5.1 Transition entre le régime laminaire et le régime des tourbillons de Taylor

Depuis les travaux de G. I. Taylor, on sait que pour un écoulement entre deux cylindres coaxiaux tournants (cas d'un palier non chargé), les tourbillons se développent dans le film lorsque le nombre de Taylor moyen défini par :

$$T_m = \frac{\rho_0 V C}{\mu} \sqrt{C/R} = \Re_m \sqrt{C/R} \quad (\text{II.22})$$

atteint la valeur de 41,2. Ce nombre sans dimension exprime le rapport des forces centrifuges aux forces de viscosité agissant sur une particule de fluide. Cette valeur donne dans le cas du palier non chargé la transition entre le régime laminaire et le régime des tourbillons de Taylor. Dans l'expression du nombre de Taylor, ρ_0 et μ représentent la masse volumique et la viscosité dynamique du fluide en écoulement, V la vitesse linéaire de l'axe (arbre) en rotation, C le jeu radial, R le rayon du palier et \Re_m le nombre de Reynolds moyen de l'écoulement. L'apparition de ces tourbillons figure II.2 qui forment des tores régulièrement superposées suivant l'axe de rotation du palier est liée aux forces d'inertie engendrées par la rotation de l'arbre. Précisons que dans le cas où l'alésage (coussinet) est en rotation autour d'un arbre fixe, les instabilités de Taylor n'existent pas. Dans le cas du palier chargé, c'est-à-dire pour un écoulement entre deux cylindres excentrés, il a été remarqué que le nombre de Taylor critique au-delà duquel la transition entre le régime laminaire et le régime des tourbillons de Taylor se produit varie avec l'excentricité relative. Malgré de nombreuses études expérimentales qui avaient pour but de déterminer la valeur du nombre de Taylor critique en fonction de l'excentricité relative, il est encore difficile, pour un jeu relatif C/R donné, de connaître avec précision la variation du nombre de Taylor critique en fonction de l'excentricité relative $T_c(\varepsilon)$ tel que $\varepsilon=e/C$. Il est donc nécessaire, pour déterminer la transition, d'effectuer des essais expérimentaux dans les conditions réelles de fonctionnement d'un palier hydrodynamique.

Selon Frêne, la transition entre le régime laminaire et le régime des tourbillons de Taylor dans un palier chargé s'effectue localement dès que le nombre de Taylor local défini par :

$$T_h = \frac{\rho_0 V h}{\mu} \sqrt{h/R} = \Re_h \sqrt{h/R} \quad (\text{II.23})$$

atteint la valeur critique donnée par la relation semi-empirique :

$$T_c = 63,3\varepsilon^2 - 38\varepsilon + 41,2 \quad (\text{II.24})$$

II.5.2 Transition entre le régime des tourbillons de Taylor et le régime turbulent

On admet que le régime turbulent peut être établi dans un palier chargé lorsque le nombre de Taylor local atteint la valeur de $2T_c$.

A partir de l'équation de Reynolds turbulente (II.17) et des relations (II.21), on est en mesure de calculer la pression engendrée dans le film et la charge que peut supporter un palier en régime turbulent. Pour le calcul de la force ou du couple de frottement, on utilisera pour la contrainte de cisaillement pariétale, l'expression suivante :

$$\tau_{xy}(y=0, h) = \mp \frac{h}{2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \frac{\mu V}{h} (1 + 0,00129 \Re_h^{0,94}) \quad (\text{II.25})$$

Par ailleurs, les vitesses moyennes de l'écoulement se calculent par :

$$\begin{aligned} u_m &= -\frac{h^2}{\mu} G_{x_1} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} + \frac{V}{2} \\ w_m &= -\frac{h^2}{\mu} G_{x_2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_2} \end{aligned} \quad (\text{II.26})$$

Les composantes du vecteur débit volumique suivant les directions x et z peuvent se calculer, dans une section du palier, à partir des vitesses moyennes par une simple intégration.

On remarque ainsi que les performances hydrodynamiques (pression, capacité de charge, angle de calage, force ou couple de frottement, débits, ...) d'un palier en régime turbulent peuvent être déterminées en utilisant les mêmes méthodes de calcul qu'en régime laminaire.

II.6 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la présentation de la théorie de la lubrification hydrodynamique en régime turbulent, à partir des équations décrivant un écoulement turbulent, une équation de Reynolds turbulente permettant d'étudier le comportement des paliers hydrodynamiques fonctionnant en régime turbulent pour des nombres de Reynolds allant jusqu'à 50000. L'intégration de cette équation moyennant certaines conditions limites permet de calculer la répartition de la pression dans le palier.

Dans le chapitre suivant, nous appliquerons le processus d'homogénéisation à l'équation de Reynolds turbulente.

Chapitre III

Homogénéisation de l'équation de Reynolds turbulente

III.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous appliquons le processus d'homogénéisation pour l'analyse théorique du problème de lubrification hydrodynamique dans les contacts rugueux fonctionnant en régime turbulent tels que les paliers fluides. Nous supposons, par hypothèse, que la surface stationnaire du contact (coussinet) est rugueuse tandis que la surface mobile (arbre) est parfaitement lisse. Cette hypothèse nous permettra d'utiliser les équations de Reynolds turbulente dérivées sans la prise en considération du terme transitoire figurant dans le second membre des équations. Pour pouvoir appliquer la technique d'homogénéisation, nous supposerons d'autre part que la distribution des rugosités est périodique sur toute la surface stationnaire du contact. Nous montrons que le processus d'homogénéisation des équations de Reynolds (2-D) conduit à la résolution de deux problèmes, à savoir :

- un problème local (échelle microscopique) gouverné par trois équations aux dérivées partielles (EDPs) du second ordre dont les inconnues sont des fonctions périodiques locales;
- un problème global (échelle macroscopique) régi par une équation aux dérivées partielles dont l'inconnue est la pression homogénéisée.

III.2 Homogénéisation de l'équation de Reynolds turbulente

En utilisant la notation vectorielle, l'équation de Reynolds écrite en régime turbulent (II.17) dont l'inconnue est la pression hydrodynamique p peut s'écrire dans le cas d'un fluide iso visqueux sous la forme suivante [10]

$$\vec{\nabla} \cdot (\underline{\underline{G}} \vec{\nabla} p) = \frac{\mu}{2} \vec{\nabla} \cdot (h \vec{U}) \quad (\text{III.1})$$

$$\text{Avec } \underline{\underline{G}} = \begin{bmatrix} G_{11} & 0 \\ 0 & G_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^3 G_{x_1} & 0 \\ 0 & h^3 G_{x_2} \end{bmatrix}; \quad \vec{U} = \begin{Bmatrix} U_1 + U_2 \\ W_1 + W_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V \\ 0 \end{Bmatrix}$$

G_{x_i} étant les fonctions de turbulence définies par les relations (II.21) et $V = \omega R$ la vitesse linéaire de l'arbre suivant la direction x_1 .

En notation matricielle, l'équation (III.1) s'écrit :

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_1} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \right\rangle \begin{bmatrix} G_{11} & 0 \\ 0 & G_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x_1} \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} \end{Bmatrix} = \frac{\mu}{2} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \right\rangle \begin{Bmatrix} V \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.2})$$

Pour homogénéiser l'équation de Reynolds écrite en régime turbulent (III.1), nous utilisons le même développement asymptotique de la pression.

En limitant le développement de la pression p à l'ordre 1, c'est-à-dire $p_\varepsilon(x_1, x_2, y_1, y_2) = p_0(x_1, x_2) + \varepsilon p_1(x_1, x_2, y_1, y_2)$, l'équation de Reynolds (III.1) prend la forme suivante :

$$(\vec{\nabla}_x + \varepsilon^{-1} \vec{\nabla}_y) \cdot (\underline{\underline{G}} (\vec{\nabla}_x + \varepsilon^{-1} \vec{\nabla}_y) (p_0 + \varepsilon p_1)) = \frac{\mu}{2} (\vec{\nabla}_x + \varepsilon^{-1} \vec{\nabla}_y) \cdot (h_\varepsilon \vec{U})$$

Soit :

$$\begin{aligned} & \vec{\nabla}_x \cdot (\underline{\underline{G}} \vec{\nabla}_x p_0) + \vec{\nabla}_x \cdot (\underline{\underline{G}} \vec{\nabla}_y p_1) + \vec{\nabla}_y \cdot (\underline{\underline{G}} \vec{\nabla}_x p_1) + \varepsilon \vec{\nabla}_x \cdot (\underline{\underline{G}} \vec{\nabla}_x p_1) + \varepsilon^{-1} [\vec{\nabla}_y \cdot \\ & (\underline{\underline{G}} \vec{\nabla}_x p_0) + \vec{\nabla}_y \cdot (\underline{\underline{G}} \vec{\nabla}_y p_1)] = \frac{\mu}{2} \vec{\nabla}_x \cdot (h \vec{U}) + \frac{\mu}{2} \varepsilon^{-1} \vec{\nabla}_y \cdot (h_\varepsilon \vec{U}) \end{aligned}$$

(III.3)

Après identification par rapport à ε^j ($j=-1, 0, 1$), nous trouvons les équations suivantes :

- termes en ε^{-1} :

$$\vec{\nabla}_y \cdot (\underline{\underline{G}} \vec{\nabla}_y p_1) = \frac{\mu}{2} \vec{\nabla}_y \cdot (h \vec{U}) - \vec{\nabla}_y \cdot (\underline{\underline{G}} \vec{\nabla}_x p_0) \quad (III.4)$$

- termes en ε^0 :

$$\vec{\nabla}_x \cdot [\underline{\underline{G}} (\vec{\nabla}_x p_0 + \vec{\nabla}_y p_1)] = \frac{\mu}{2} \vec{\nabla}_x \cdot (h \vec{U}) - \vec{\nabla}_y \cdot (\underline{\underline{G}} \vec{\nabla}_x p_1) \quad (III.5)$$

- termes en ε^1 :

$$\vec{\nabla}_x \cdot (\underline{\underline{G}} \vec{\nabla}_x p_1) = 0 \quad (III.6)$$

Si $\vec{U} = V \vec{e}_1$,

les équations (III.4) et (III.5) s'écrivent :

$$\vec{\nabla}_y \cdot (\underline{\underline{G}} \vec{\nabla}_y p_1) = \Lambda \frac{\partial h}{\partial y_1} - \vec{\nabla}_y \cdot (\underline{\underline{G}} \vec{\nabla}_x p_0) \quad (III.7)$$

$$\vec{\nabla}_x \cdot [\underline{\underline{G}} (\vec{\nabla}_x p_0 + \vec{\nabla}_y p_1)] = \Lambda \frac{\partial h}{\partial x_1} - \vec{\nabla}_y \cdot (\underline{\underline{G}} \vec{\nabla}_x p_1) \quad (III.8)$$

avec cette fois ci $\Lambda = \frac{1}{2} \mu V$.

Pour découpler les équations (III.4) à (III.6), nous utilisons la même relation de laminaire

Compte tenu de l'équation de laminaire, l'équation (III.7) s'écrit :

$$\vec{\nabla}_y \cdot \left[\underline{\underline{G}} \vec{\nabla}_y (v_1 \frac{\partial p_0}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial p_0}{\partial x_2} + v_3) \right] = \Lambda \frac{\partial h}{\partial y_1} - \vec{\nabla}_y \cdot \left[G_{11} \frac{\partial p_0}{\partial x_1} \vec{e}_1 + G_{22} \frac{\partial p_0}{\partial x_2} \vec{e}_2 \right]$$

Par identification, nous trouvons les équations différentielles suivantes :

$$\vec{\nabla}_y \cdot (\underline{\underline{G}} \vec{\nabla}_y v_1) = -\vec{\nabla}_y \cdot (G_{11} \vec{e}_1)$$

$$\vec{\nabla}_y \cdot (\underline{\underline{G}} \vec{\nabla}_y v_2) = -\vec{\nabla}_y \cdot (G_{22} \vec{e}_2)$$

$$\vec{\nabla}_y \cdot (\underline{\underline{G}} \vec{\nabla}_y v_3) = \Lambda \frac{\partial h}{\partial y_1}$$

ou encore :

$$\vec{\nabla}_y \cdot (\underline{\underline{G}} \vec{\nabla}_y v_1) = -\frac{\partial G_{11}}{\partial y_1} \quad \text{sur } Y = (0,1) \times (0,1) \quad (\text{III.9})$$

$$\vec{\nabla}_y \cdot (\underline{\underline{G}} \vec{\nabla}_y v_2) = -\frac{\partial G_{22}}{\partial y_2} \quad \text{sur } Y = (0,1) \times (0,1) \quad (\text{III.10})$$

$$\vec{\nabla}_y \cdot (\underline{\underline{G}} \vec{\nabla}_y v_3) = \Lambda \frac{\partial h}{\partial y_1} \quad \text{sur } Y = (0,1) \times (0,1) \quad (\text{III.11})$$

L'intégration de l'équation (III.8) sur la cellule (Y) conduit à :

$$\int_Y \left[\vec{\nabla}_y \cdot (\underline{\underline{G}} \vec{\nabla}_x p_1) + \vec{\nabla}_x \cdot (\underline{\underline{G}} \vec{\nabla}_y p_1) + \vec{\nabla}_x \cdot (\underline{\underline{G}} \vec{\nabla}_x p_0) - \Lambda \frac{\partial h}{\partial x_1} \right] dY = 0 \quad (\text{III.12})$$

avec $\int_Y \vec{\nabla}_y \cdot (\underline{\underline{G}} \vec{\nabla}_x p_1) dY = 0$ et $dY = dy_1 dy_2$

L'équation (III.12) se réduit à :

$$\int_Y \left(\vec{\nabla}_x \cdot \left[\underline{\underline{G}} \vec{\nabla}_y \left(\frac{\partial p_0}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial p_0}{\partial x_2} v_2 + v_3 \right) \right] + \vec{\nabla}_x \cdot (\underline{\underline{G}} \vec{\nabla}_x p_0) - \Lambda \frac{\partial h}{\partial x_1} \right) dY = 0 \quad (\text{III.13})$$

L'équation (III.13) peut s'écrire aussi :

$$\vec{\nabla}_x \cdot \left[\frac{\partial p_0}{\partial x_1} \int_Y (\underline{\underline{G}} \vec{\nabla}_y v_1 + G_{11} \vec{e}_1) dY + \frac{\partial p_0}{\partial x_2} \int_Y (\underline{\underline{G}} \vec{\nabla}_y v_2 + G_{22} \vec{e}_2) dY \right] =$$

$$\vec{\nabla}_x \cdot \int_Y \left\{ \begin{array}{l} \Lambda h \\ 0 \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} G_{11} \frac{\partial v_3}{\partial y_1} \\ G_{22} \frac{\partial v_3}{\partial y_2} \end{array} \right\} dY \quad (\text{III.14})$$

Soit par conséquent :

$$\vec{\nabla}_x \bullet \left(\underline{\underline{A}}(\mathbf{x}) \vec{\nabla}_x p_0 \right) = \vec{\nabla}_x \bullet \boldsymbol{\theta}(\mathbf{x}) \text{ Sur } (\Omega) \quad (\text{III.15})$$

Les coefficients des matrices \mathbf{A} et $\boldsymbol{\theta}$ sont définis par :

$$\begin{aligned} a_{11} &= \int_Y G_{11} \left(1 + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} \right) dY ; & a_{12} &= \int_Y G_{11} \frac{\partial v_2}{\partial y_1} dY ; & a_{21} &= \int_Y G_{22} \frac{\partial v_1}{\partial y_2} dY ; \\ a_{22} &= \int_Y G_{22} \left(1 + \frac{\partial v_2}{\partial y_2} \right) dY \end{aligned}$$

$$\theta_1 = \int_Y \left(\Lambda h - G_{11} \frac{\partial v_3}{\partial y_1} \right) dY ; \quad \theta_2 = - \int_Y G_{22} \frac{\partial v_3}{\partial y_2} dY \quad (\text{III.16})$$

L'équation (III.15) peut aussi s'écrire sous la forme développée comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(a_{11} \frac{\partial p_0}{\partial x_1} + a_{12} \frac{\partial p_0}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(a_{21} \frac{\partial p_0}{\partial x_1} + a_{22} \frac{\partial p_0}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \theta_2}{\partial x_2} \text{ sur } (\Omega) \quad (\text{III.17})$$

Dans le cas lisse, c'est-à-dire : $h(\mathbf{x}) = h_0(\mathbf{x})$, l'équation (III.17) se réduit à l'équation de Reynolds turbulente classique, i.e. :

$$\begin{aligned} \Lambda \frac{\partial}{\partial x_1} (h_0(\mathbf{x})) - \vec{\nabla}_x \bullet \left(\underline{\underline{G}} \vec{\nabla}_x p_0 \right) &= 0 \\ \underline{\underline{G}} &= h_0^3(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} \nu_{12} & 0 \\ 0 & \nu_{12} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

Comme dans le cas laminaire, l'équation (III.17) dont l'inconnue est la pression homogénéisée p_0 n'admet pas de solution analytique, il est donc nécessaire d'utiliser les méthodes de résolution numérique telle que les différences finies, les éléments finis et les volumes finis.

- Equation géométrique du film

Les deux surfaces d'un contact entre lesquelles s'écoule un lubrifiant, peuvent avoir les caractéristiques suivantes: [9]

- les deux surfaces sont lisses et mobiles,
- les deux surfaces sont lisses et stationnaires (fixes),
- (c) les deux surfaces sont rugueuses et mobiles figure III.1,
- (d) les deux surfaces sont rugueuses et stationnaires (contacts hydrostatiques),
- (e) une surface rugueuse et stationnaire tandis que l'autre est lisse et mobile
- (f) une surface est rugueuse et mobile tandis que l'autre est lisse et mobile.

Dans le cas (f) où la surface mobile est rugueuse figure III.1, l'équation de Reynolds laminaire ou turbulente devient in stationnaire. Il y a lieu de rajouter le terme transitoire $\mu \frac{\partial h}{\partial t}$ dans le second membre de l'équation.

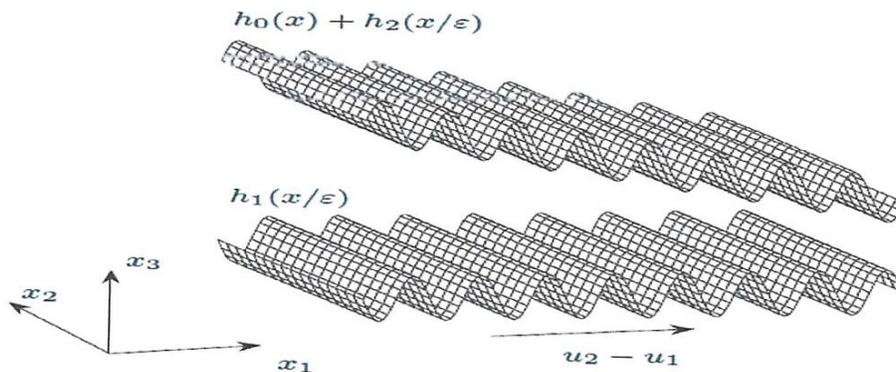


Fig. III.1 Représentation schématique d'un contact dont les deux surfaces sont mobiles et présentant des distributions périodiques de rugosités.

Dans le cas d'un contact figure III.1, l'expression générale de l'épaisseur du film est de la forme :

$$h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = h_0(\mathbf{x}) + h_1(\mathbf{y}) + h_2(\mathbf{y}) ; \quad \mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \quad (\text{III.19})$$

Dans l'équation (III.19), h_0 exprime la géométrie du film globale dans le cas où les deux surfaces sont parfaites (lisses), et h_1 et h_2 sont deux fonctions périodiques (sinusoïdales) dépendant des variables locales qui représentent les rugosités des deux surfaces. ε est un paramètre décrivant la longueur d'onde de la rugosité.

Dans le cas où la surface inférieure est lisse, l'expression (III.19) se réduit à :

$$h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = h_0(\mathbf{x}) + h_1(\mathbf{y}) \quad (\text{III.20})$$

III.3 Caractéristiques hydrodynamiques homogénéisées

III.3.1 Pression homogénéisée

La pression homogénéisée p_0 est calculée pour les deux régimes d'écoulement à partir de la résolution des équations de Reynolds turbulente (III.17)

III.3.2 Portance hydrodynamique homogénéisée

La portance homogénéisée du contact ou la capacité de charge se calcule par l'intégration de la pression sur la surface du contact :

$$W_\varepsilon = \iint_{\Omega} p_\varepsilon dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega} (p_0 + \varepsilon p_1) dx_1 dx_2 \quad (\text{III.21})$$

Si on fait tendre $\varepsilon \rightarrow 0$, on trouve la charge homogénéisée :

$$W_0 = \iint_{\Omega} p_0 dx_1 dx_2 \quad (\text{III.22})$$

III.4 Algorithme d'homogénéisation

L'algorithme ou le processus d'homogénéisation comprend les étapes suivantes :

Etape 1 :

Résolution numérique du problème local gouverné par le système d'équation régime laminaire ou el régime turbulent cette équation (III.9).(III.11) dont les inconnues sont des fonctions périodiques $v_1(x, y), v_2(x, y)$ et $v_3(x, y)$.

Etape2 :

Calcul des coefficients des matrices $A(x)$ et $\theta(x)$ définies par les expressions laminaires ou (III.16) à l'aide d'une intégration numérique.

Etape 3 :

Résolution numérique du problème global régi par l'équation homogénéisée équation de régime laminaire est équation (III.17) ou dont l'inconnue est la pression homogénéisée p_0 .

Il est utile de noter que les étapes 1 et 2 de l'algorithme d'homogénéisation s'appliquent à chaque point $x = \langle x_1, x_2 \rangle$ du domaine global $\Omega = (0, 2\pi R) \times (-L/2, L/2)$.

On présente dans la figure(III.4) le schéma de résolution mis en place pour la résolution du problème homogénéisé :

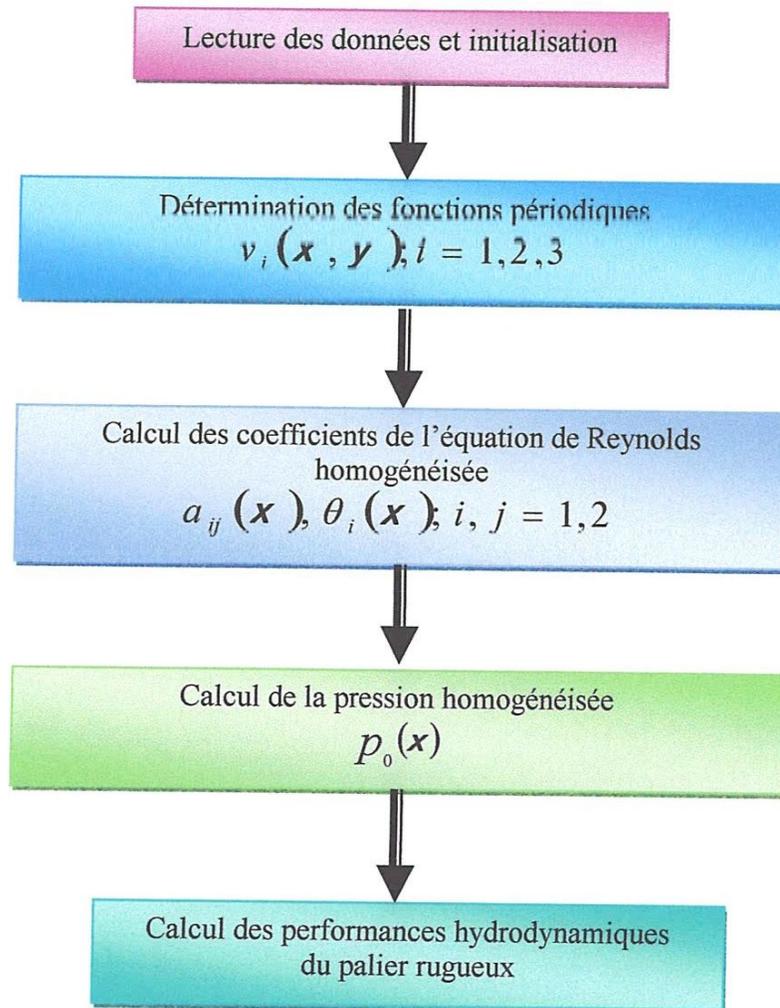


Fig. IV.4 Schéma de résolution du problème de lubrification par la méthode d'homogénéisation.

III.5 Conclusion

L'application du processus d'homogénéisation à l'équation de Reynolds turbulente par l'introduction d'un développement asymptotique multi-échelle de la pression a conduit à une cascade d'équations aux dérivées partielles décrivant deux problèmes : un problème local (échelle microscopique) gouverné par trois EDPs et un problème global régi par une EDP dont l'inconnue est la pression homogénéisée p_0 . La connaissance de celle-ci permettra de calculer les caractéristiques hydrodynamiques homogénéisées du contact.

Tous les calculs sont effectués pour une valeur de l'excentricité relative $\varepsilon_0 = 0.50$ correspondant à un palier modérément chargé.
 Les caractéristiques des maillages utilisées pour la discrétisation spatiale des différentes équations différentielles sont indiquées dans le tableau IV.7.

Tableau IV.7 Caractéristiques des maillages par différences finies.

| Méthode d'analyse | EDPs gouvernant le problème | Nombre de mailles |
|-------------------|-----------------------------|-------------------|
| Homogénéisation | Equations locales | 40 × 40 |
| | Equation globale | 80 × 80 |

IV.4.1 Effets de la rugosité de surface sur le profil de pression hydrodynamique en régimes laminaire et turbulent

Les figures IV.6 à IV.8 représentent les répartitions de pression hydrodynamique (2-D) et (3-D) obtenues dans le cas du palier lisse et du palier rugueux pour les deux régimes d'écoulement laminaire et turbulent.

D'après ces illustrations, nous observons clairement que le pic de pression augmente avec l'amplitude de la rugosité aussi bien en régime laminaire qu'en régime turbulent. Pour une amplitude de rugosité donnée, le pic de pression calculé en régime turbulent est plus important que celui obtenu dans le cas laminaire.

IV Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons mis en évidence les effets non négligeables de l'amplitude de la rugosité ainsi que la turbulence sur certaines performances hydrodynamiques du palier, à savoir : la répartition de pression homogénéisée dans le film et la capacité de charge homogénéisée du palier.

D'autre part, la prise en considération de la turbulence entraîne une augmentation significative du pic de pression.

Il peut être aussi conclu que la méthode d'homogénéisation constitue un outil très puissant pour l'étude des contacts lubrifiés rugueux dont la distribution de rugosité est périodique (sinusoïdale).

Conclusion générale

L'étude dans ce mémoire de Master visait à développer un modèle de simulation numérique basé sur l'application du processus d'homogénéisation à l'équation de Reynolds turbulente considérée comme l'équation de base de la lubrification hydrodynamique. Ce modèle permet de prendre en considération la géométrie locale du contact (rugosités) ainsi que le phénomène de turbulence rencontré dans les paliers tournant à grande vitesse ou lubrifiés par des fluides de faible viscosité.

Parmi les méthodes d'analyse des contacts lubrifiés rugueux proposées dans la littérature technique, notre choix s'est porté sur la technique d'homogénéisation car cette technique est rigoureuse et la mieux adaptée dans le cas des contacts rugueux dont la distribution des rugosités est périodique. L'homogénéisation dans le cas turbulent, basé en deux types de problème ; un problème local (échelle microscopique) et un autre global (échelle macroscopique).

L'étude paramétrique effectuée à l'aide de la méthode d'homogénéisation a permis de mettre en évidence les effets non négligeables de l'amplitude relative des rugosités sur le pic de pression. Ce dernier augmentait avec l'amplitude. D'autre part, la prise en considération de la turbulence affecte sensiblement le profil de pression et la portance. Il a été trouvé que pour une valeur de l'excentricité, la portance homogénéisée calculée en régime turbulent est nettement plus grande que celle obtenue en laminaire.

Les prolongements possibles de cette étude sont :

- ✓ la prise en considération de la rugosité de la surface mobile (arbre),
- ✓ la prise en compte des effets non newtoniens des lubrifiants en écoulement turbulent.

Nomenclature

| | |
|---|--|
| G_x, G_z | fonction de turbulence introduites par Ng et Pan |
| R, R_1, R_2 | Rayon du palier, de l'arbre, du coussinet |
| $R_h = \frac{\rho V h}{\mu}$ | Nombre de Reynolds |
| u, v, w | composantes des vitesses. |
| $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ | composantes moyennes des vitesses. |
| u', v', w' | composantes des fluctuations de vitesse |
| y^+ | Variable sans dimension. |
| ω | vitesse angulaire. |
| $\varepsilon = \frac{e}{c}$ | Excentricité relative. |
| μ | viscosité dynamique. |
| ν | viscosité cinématique |
| ρ | Masse volumique. |
| τ | Contrainte de cisaillement à la paroi |
| τ_{XY}, τ_{ZY} | Contraintes de cisaillement dans le film. |
| \bar{y}_i | Composantes moyennes de l'accélération. |
| δ | Constante. |
| $T_c = \frac{\rho V_c c}{\mu} \sqrt{\frac{c}{R}}$ | Nombre de Taylor critique. |
| $\bar{U}_i = \frac{u_i}{V}$ | composantes ,sans dimension,de la vitesse |
| $V = \omega R$ | vitesse linéaire de l'arbre en rotation. |
| w | charge appliquée au palier. |
| $Y = \frac{x_2}{h}$ | Variable sans dimension. |
| C_i | Constantes d'intégration. |
| e | Excentricité |

| | |
|--------------------------|---|
| h | <i>Épaisseur du film</i> |
| l | <i>longueur de mélange.</i> |
| T | <i>variable de temps.</i> |
| u_i | <i>composantes des vitesses</i> |
| \bar{u}_i | <i>composantes moyennes des vitesses</i> |
| u'_i | <i>composantes des fluctuations de vitesses</i> |
| h_0 | <i>épaisseur du film du contact parfait, (m)</i> |
| h_1 | <i>amplitude des rugosités, (m)</i> |
| h | <i>épaisseur du film lubrifiant, $h = h_0 + h_1$, (m)</i> |
| h_ε | <i>épaisseur déterministe du film lubrifiant, (m)</i> |
| p | <i>pression dans le film lubrifiant, (Pa)</i> |
| p_0 | <i>pression, solution homogénéisée, (Pa)</i> |
| p_ε | <i>pression, solution déterministe, (Pa)</i> |
| U | <i>vitesse de déplacement de la glissière, $m.s^{-1}$</i> |
| u_1, u_2 $m.s^{-1}$ | <i>composantes du champ de vitesse de l'écoulement suivant x_1 et x_2,</i> |
| \bar{u}_1, \bar{u}_2 | <i>vitesse moyennes de l'écoulement suivant x_1 et x_2, $m.s^{-1}$</i> |
| W | <i>portance hydrodynamique, (N)</i> |
| \mathbf{x} | <i>coordonnées d'espace globales, $\mathbf{x} = \langle x_1 \ x_2 \rangle$</i> |
| \mathbf{y} | <i>coordonnées d'espace locales, $\mathbf{y} = \langle y_1 \ y_2 \rangle$</i> |
| Y | <i>cellule unitaire, $Y = (0, 1) \times (0, 1)$</i> |
| α | <i>amplitude des rugosités, (m)</i> |
| $\tilde{\alpha}$ | <i>amplitude adimensionnée, $\tilde{\alpha} = \alpha/h_{\min}$</i> |
| Φ | <i>fonction de dissipation visqueuse, $W.m^{-3}$</i> |
| η | <i>constante physique due à la présence des couples de contraintes, (N.s)</i> |

| | |
|--------------------------------|--|
| λ | longueur d'onde des rugosités, (m) |
| $\lambda_{x_1}, \lambda_{x_2}$ | longueurs d'onde des rugosités suivant les directions x_1 et x_2 , (m) |
| Λ | constante, $\Lambda = 6\mu U$, Pa.m cas laminaire |
| Λ | constante, $\Lambda = \frac{1}{2}\mu V$ Pa.m cas turbulent |
| ρ | masse volumique du lubrifiant, $kg.m^{-3}$ |
| μ | viscosité dynamique du lubrifiant, (Pa.s) |
| $\bar{\nabla}_x(\bullet)$ | opérateur différentiel, $\bar{\nabla}_x(\bullet) = \left\langle \frac{\partial(\bullet)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial(\bullet)}{\partial x_2} \right\rangle$ |
| $\bar{\nabla}_y(\bullet)$ | opérateur différentiel, $\bar{\nabla}_y(\bullet) = \left\langle \frac{\partial(\bullet)}{\partial y_1} \quad \frac{\partial(\bullet)}{\partial y_2} \right\rangle$ |
| $\bar{\nabla}(\bullet)$ | gradient de la fonction (\bullet) , $\bar{\nabla}(\bullet) = \bar{\nabla}_x(\bullet) + \varepsilon^{-1}\bar{\nabla}_y(\bullet)$ |
| $\bar{\nabla} \bullet$ | opérateur de divergence |

Références

- [1] « Lubrification hydrodynamique : paliers et butées »
Paliers hydrodynamiques (Jean Frêne de l'Université de Poitiers).
- [2]. jean frêne ; Daniel Nicolas ; Bernard Degueurce ; Daniel Berthe ;
Maurice Godet ; lubrification hydrodynamique : palier et butées ;
Mars1990 ; Editeur : Eyrolles.
- [3] cours magister TRIBOLOGIE, PRINCIPES ET
MATERIAUX Thèse SAID BENSAAADA M. T.BOUZIANE
Thèse SAID BENSAAADA M. T.BOUZIANE université
Beskra 02/07/2003.
- [4] Christophe Minet: Lubrification mixte dans les étanchéités
Dynamique Application aux garnitures mécanique d'étanchéité ;
juillet2009.
- [5] cours mécanique de fluide professeur lahmar Mostafa .
- [6] Hicham DAANOUNI Pierre-Guillaume GOURIO-JEWELL
- [7] Thèse Doctorat belaide F.
- [8] jean frêne ; Daniel Nicolas ; Bernard Degueurce ; Daniel Berthe ;
Maurice Godet ; lubrification hydrodynamique : palier et
Butées ; Mars1990 ; Editeur : Eyrolles.
- [9] Thèse GaaGaia Djamel Edinne 2011 .
- [10] professeur lahmar Mostafa .