

11/531.658

Université du 8 mai 1945 – Guelma
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Mécanique



Mémoire de Fin d'Étude

Pour l'obtention du diplôme de Master

Option : Maintenance Industrielle

Présenté par AFAIFIA Issam

=====

***CALCUL DYNAMIQUE D'UNE PLAQUE
RECTANGULAIRE REPOSANT SUR MILIEU
ÉLASTIQUE DE PROPRIÉTÉS INERTIELLES***

=====

Sous la Direction de :

Pr. GUENFOUD Salah

Année universitaire 2013/2014

Remerciement



*Le langage de dieu est à dieu le seul et unique, à qui nous adressons
nos amples remerciements.*

*A vrai dire, l'espace de cette feuille ne suffira pas à contenir les
noms des personnes qui m'ont aidé tout au long de ma formation et
de ma recherche.*

*Je remercie également mon encadreur Pr. GUENFUD Salah
Pour avoir accepté de diriger ce travail pour la réalisation du mémoire
de Master.*

*Je tiens à remercier aussi l'ensemble des enseignants du département
de génie mécanique qui ont contribué bien à ma formation.*

*Et tous les étudiants du département de génie mécanique, option :
"Maintenance industrielle" promotion 2014*

*Et à tout ce qui a contribué de près ou de loin pour accomplir ma
mission*

A tous ces gents MERCI

SOMMAIRE

Introduction générale	1
CHAPITRE I	
1. Synthèse des références bibliographiques	2
2. Problématique	4
3. Formulation de l'approche.....	4
4 .Conclusion	8
CHAPITRE II	
1. Fonction de Green pour déterminer les déplacements verticaux de la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles	9
2.a. Déplacement d'un point de la surface situant à l'intérieur de l'élément chargé.....	11
2.b Déplacement d'un point de la surface situant en dehors de l'élément chargé.....	12
3. Conclusion	12
CHAPITRE III	
1. Fonction des déflexions de la plaque.....	13
1.1. Solution de Clebsch.....	13
1.2. Méthode de Ritz.....	14
2. Conclusion	18
CHAPITRE IV	
1. Introduction.....	19
2. Cas d'une plaque Divisée en quatre éléments identiques	19
2.1. Détermination des fréquences propres de la plaque.....	20
2.2. Détermination des formes propres de la plaque.....	21
3. Cas d'une plaque Divisée en neuf éléments identiques.....	22
4. Réponse de la plaque reposant sur milieu élastique de propriétés inertielles à une excitation extérieure harmonique.....	25
5. Conclusion	26
Conclusion générale.....	27
Annexe.....	28
Références bibliographiques.....	31

Introduction générale

L'analyse statique ou dynamique de poutres et plaques reposant sur milieux élastique, faisant partie de la science des problèmes de contact, est un sujet d'actualité vu l'application large de ce type de structure comme dans le cas des fondations des immeubles, les fondations des ponts, différentes constructions sous terraines etc. Mais la résolution de ce problème est liée à de très grande difficultés mathématiques, notamment lorsque certains éléments plus réalistes sont tenus en compte et par conséquent entrent dans le calcul, à savoir la géométrie complexe de la structure, la matière anisotrope du matériau de la structure, la tenue en compte des forces de frottement dans la zone de contact entre la structure et la surface du milieu élastique, la tenue en compte de l'inertie du milieu élastique etc. La définition de l'inertie du milieu élastique réside dans la tenue en compte de sa masse dans le calcul de ce problème ce qui aboutit à une étude intéressante et que ce facteur influe fortement sur les résultats de calcul et les rend plus proches à la réalité. C'est pourquoi, l'analyse dynamique de poutres et plaques en interaction avec les surfaces des milieux élastiques ne s'est pas résolue complètement à ce jour, même avec l'utilisation des approches linéaires les plus simples, comme le modèle de Winkler. Donc actuellement les chercheurs de ce domaine s'intéressent à améliorer les méthodes de calcul existantes de ces structures ou de proposer de nouvelles méthodes plus efficaces et plus exactes aboutissant aux résultats de calcul plus proches de la réalité.

Le travail pris dans le cadre de la préparation du mémoire de fin d'études de ce Master sera focalisé sur l'étude dynamique d'une plaque rectangulaire de type Kirchhoff reposant sur milieu élastique de propriétés inertielles, le modèle de Lamb. Cela consiste à déterminer les fréquences et modes propres de la plaque, ainsi que sa réponse due à des excitations extérieures harmoniques. Pour accomplir ces tâches ; les déflexions de la plaque se déterminent par la méthode de Ritz et les déplacements de la surface du milieu élastique se déterminent par l'étude de la fonction de Green. Le couplage de ces deux études se fait par la méthode mixte connue dans la science de la théorie d'élasticité qu'on note pour notre cas méthode de Gemochkin. Cette méthode de couplage aboutit à un système d'équations algébriques sous forme matricielle dont les inconnues représentent les efforts de liaison qui physiquement signifient les forces de réaction dans la zone de contact. Ce système permet la détermination des fréquences et modes propres de la plaque rectangulaire reposant sur la surface du milieu élastique de propriétés inertielles en appliquant le principe mathématique relatif au calcul des valeurs et vecteurs propres des matrices. Le reste des grandeurs physiques se déterminent par l'application des différentes formules de la théorie d'élasticité.

1. Synthèse des références bibliographiques:

Des recherches considérables ont été effectués dans ce domaine afin d'arriver au stade actuel. Le premier travail dans le domaine de la propagation des ondes à travers des solides élastiques a été établi par Lamb [1], connu ultérieurement par le modèle de Lamb. Dans ce travail, il a considéré la propagation des ondes générée sur la surface du semi-infini élastique, isotrope et homogène due à une charge appliquée sur la surface ou à l'intérieur du semi-infini. Le principe de ce travail rapidement propagé et appliqué dans plusieurs domaines à savoir : science du tremblement de terre, géo-mécanique, science des fondations, anisotropie générale, problèmes de contact, géodynamique, mécanique de contact, élasto-dynamique et autres problèmes complexes de la physique des solides [2].

Reissner [3] est le premier qui a développé la solution analytique d'un disque cylindrique sollicité verticalement et reposant sur la surface d'un semi-infini élastique en utilisant le principe de Lamb. Après, plusieurs chercheurs [4, 5] ont expansé la solution de Reissner pour étudier différentes modes de vibrations liées au problème de Lamb.

La sismologie de certaines plaques enterrées, en se basant sur la solution de Lamb, a été faite par Pekeris [6]. En utilisant la procédure d'Eason, Guan et Novak [7] ont déterminé la réponse ondulatoire du semi-infini élastique et homogène due à une charge appliquée instantanément.

Shinozuka et al. [8] ont tenté d'établir des modèles réels pour la source sismique, en se basant sur le problème de Lamb, puisque elle joue un rôle crucial dans le tremblement des terres et à partir duquel la possibilité de déterminer plusieurs entités physiques donnant de l'information fondamentale sur les secousses sismiques et par conséquent adopté le design structurel adéquat en vue de bonne résistance. Basé sur la méthodologie de Lamb, Chouet [9] et Dunkin [10] ont adopté des algorithmes permettant de minimiser le temps du calcul numérique pour analyser des structures en interaction avec les semi-infinis sous forme de couches. Zhang et Shinozuka [11] ont investigué la propagation 3D des ondes dans les semi-infinis sous forme de couches considérant le non homogénéité latérale. La tenue en compte du non homogénéité latérale dans le modèle concernant le semi-infini sous forme de couches a augmenté la complexité mathématique et physique du problème. Chu et al. [12] ont étudié la propagation des ondes sismiques en se basant sur le fait que la terre ne peut être jamais considérée latéralement homogène. Erdik and Durukal [13] ont développé une procédure hybride pour l'évaluation du mouvement des sols. Cette procédure est utilisée dans l'ingénierie des structures proches des sols non stables causés par la propagation des ondes sismiques et leurs effets accompagnés. Zeng et Liang [14] ont présenté une solution

fondamentale, dérivé des travaux de Luco et Apsel [15] et Franssens [16], pour déterminer la propagation des ondes dans les problèmes élasto-dynamiques des semi-infinis sous formes de couches causées par une source sismique, étudié aussi auparavant par Chapel et Tsakalidis [17]. Ce problème est examiné aussi par Georgiadis et al [18]. et al. [18] et dans leur travail ont détaillé une procédure pour l'évaluation numérique de la transformation des intégrales classiques du problème de Lamb.

En utilisant la méthode de Cagniard–De Hoop, Jin et Liu [19] ont obtenu la solution exacte pour le déplacement horizontal du centre de la surface du semi-infini élastique causé par une charge impulsive horizontale. Cette étude peut servir dans le cas problèmes d'interactions dynamiques entre sols et structures en utilisant le principe de Lamb. Des solutions exactes pour les déplacements verticaux et horizontaux dus à des charges impulsives horizontales et verticales ont été obtenues par Jin [20,21] du centre de la surface du semi-infini élastique.

Le travail apporté dans la référence [26] consacré à une étude semi-analytique pour l'analyse dynamique des poutres et plaques reposant sur semi-infini élastique de propriétés inertielles, modèle de Lamb. Ces problèmes sont liés à de très grandes difficultés mathématiques ce qui conduit souvent à des processus de résolution irréalisables. Les auteurs de ce travail ont présenté une analyse détaillée de la fonction de Green définissant les déplacements verticaux de la surface du semi-infini élastique dans la zone de contact avec les structures. Cette étude de la fonction de Green permet la détermination des forces réactives dans la zone de contact et les autres grandeurs physiques se déterminent par l'application des différentes formules de la théorie d'élasticité. Les solutions apportées dans ce travail peuvent être appliquées à: (i) étude de l'interaction dynamique entre les sols et les structures, (ii) déterminer les déplacements de caractère ondulatoire provoqués par une source sismique et (iii) algorithmes adaptés aux calculs numériques en utilisant différentes méthodes numériques. En outre, sont déterminées les fréquences propres, les déformées propres d'une poutre reposant sur un semi infini élastique de propriétés inertielles, ainsi que sa réponse due à une excitation harmonique extérieure. Une validation avec la même structure reposant sur un milieu élastique de propriétés distributives, modèle de Boussinesq, illustre l'importance de la tenue en compte de l'inertie et son effet sur les résultats de l'analyse dynamique.

Les auteurs de la référence [27] ont utilisé la méthode de Ritz pour calculer avec une grande précision sans les déflexions d'une plaque rectangulaire déformable reposant sur la surface d'un quart-infini élastique. Pour atteindre cet objectif, les auteurs de ce travail ont étudié trois étapes essentielles. La première étape a été consacrée à l'étude de la fonction de Green qui décrit les déplacements verticaux de la surface d'un quart-infini élastique sous l'effet d'une force verticale appliquée sur sa surface. Dans ce cas, une formule explicite a été obtenue en résolvant analytiquement une intégrale complexe qui n'a pas eu de solution

analytique auparavant. La deuxième étape a été consacrée à l'étude du système couplé, la plaque et le quart-infini élastique. Cette partie a abouti à la détermination des forces de réaction dans la zone de contact en se basant sur la solution de Hetenyi. La dernière étape a été consacrée à l'application de la méthode de Ritz pour déterminer les déflexions d'une plaque reposant sur la surface du quart-infini élastique. Il s'agit de la première solution semi-analytique proposé pour ce type de problèmes de contact.

2. Problématique:

Le problème posé est de déterminer les fréquences et modes propres de la plaque reposant sur milieu élastique de propriétés inertielles, ainsi que sa réponse due à l'action des excitations extérieures harmoniques par une approche semi-analytique. Négligeons, l'amortissement, ainsi que les forces de frottement dans la zone de contact entre la plaque et le milieu élastique.

3. Formulation de l'approche :

Soit une plaque de masse M et de rigidité cylindrique D reposant sur semi-infini élastique de type Lamb, (fig. I.1)

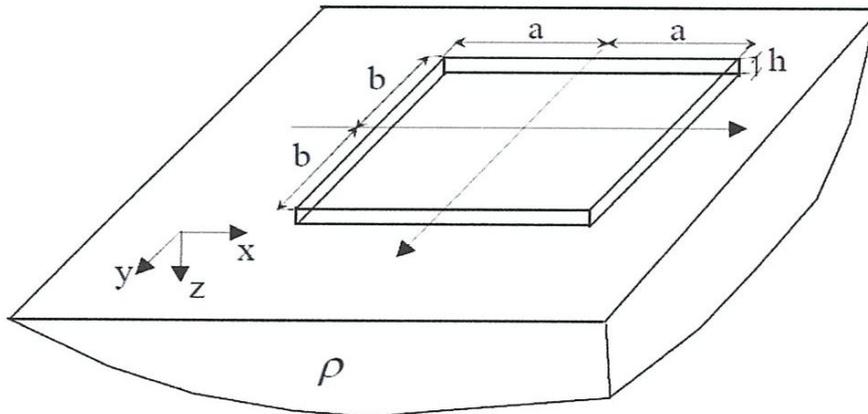


Fig. I.1. Plaque reposant sur semi infini élastique de propriétés inertielles

Divisons la plaque en un nombre d'éléments identiques n et au centre de chaque élément on met une liaison rigide à travers laquelle se réalise le contact de la plaque avec la surface du semi-infini élastique. C'est à dire le contact continu de la plaque avec la surface du milieu élastique est remplacé par un

contact partiel au niveau des liaisons. Admettons que la masse de chaque élément est concentrée en son centre (fig. I.2).

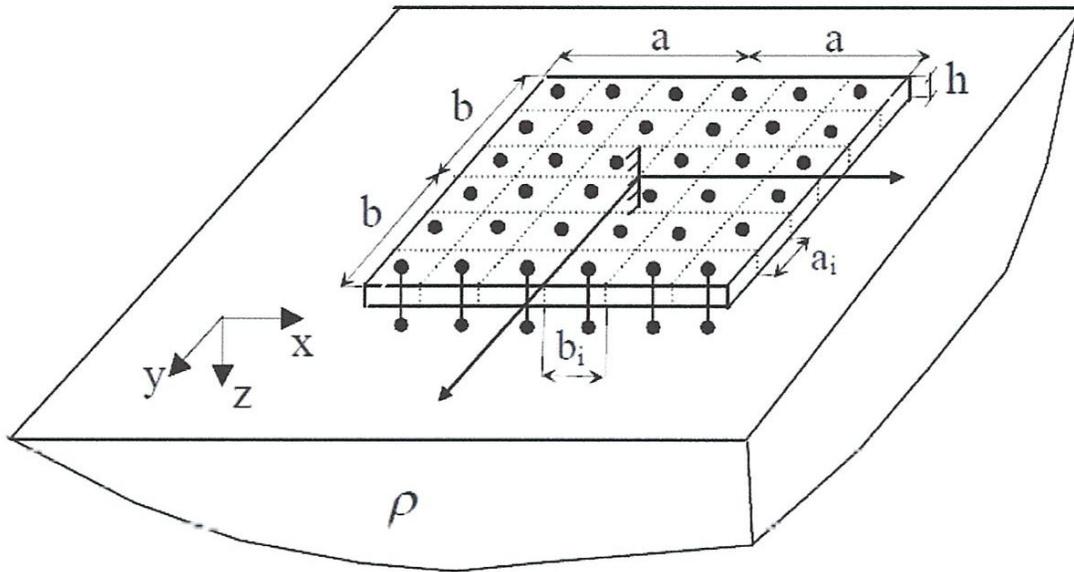


Fig. I.2. Plaque reposant sur semi infini élastique discrétisée en un nombre d'éléments

Le principe de la méthode utilisée, connue sous le nom de la méthode de Gemochkin, est illustré sur (fig. I.3) En outre, les forces d'inertie $J_j(t)$ vibrant les masses sont appliquées uniquement sur la plaque, tant que les efforts de liaisons $X_j(t)$ sont appliqués sur la plaque et sur la surface du semi-infini élastique [28].

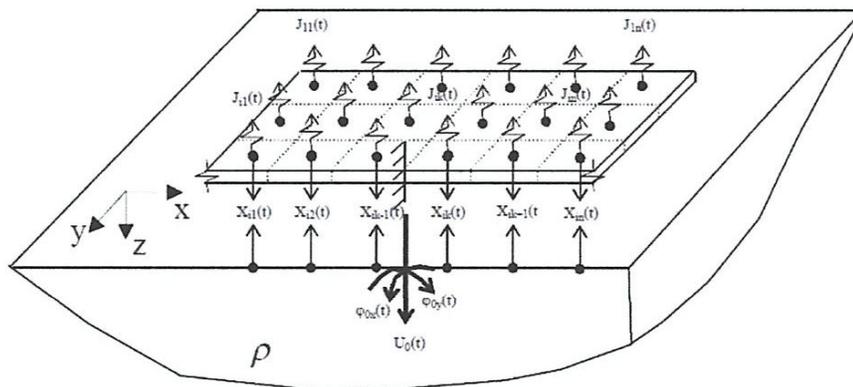


Fig. I.3. Discrétisation du système couplé : plaque et semi infini élastique

Le système d'équations canoniques permettant l'étude des vibrations libres de la plaque reposant sur la surface du semi-infini élastique est [28]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vdots \\ \sum_{j=1}^n (v_{ij} + W_{ij}) X_j(t) - \sum_{j=1}^n y_{ij} J_j(t) + \lambda_i \varphi_0(t) + u_0(t) + \Delta_{ip} = 0; \quad i = 1, \dots, n \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n [X_j(t) - J_j(t)] \ell_{ox} = I_{0x} \ddot{\varphi}_{0x}(t) \\ \sum_{j=1}^n [X_j(t) - J_j(t)] \ell_{oy} = I_{0y} \ddot{\varphi}_{0y}(t) \\ \sum_{j=1}^n [X_j(t) - J_j(t)] = M \ddot{u}_0(t). \end{array} \right. \quad (I.1)$$

Où v_{ij} déplacement vertical de la surface du semi-infini élastique au point i du à la force P appliquée au point j de la même surface;

W_{ij} : Déflexion de la plaque au point i due à la force $X_j = 1$ appliquée au point j de la plaque;

$X_k(t)$: Effort de liaison appliqué sur la plaque et sur la surface du semi-infini élastique (inconnue);

Δ_{ip} : La déviation est fonction de caractérisation du faisceau au niveau du point i en raison de charges externes;

P : Est la charge externe appliquée au point p de la poutre (pour les vibrations libres $\Delta_{ip} = 0$);

λ_i : Est le bras de la masse élémentaire correspondant au point i d'intégration;

$J_j(t)$: La force d'inertie uniquement sur la plaque;

$\varphi_{0x}(t), \varphi_{0y}(t)$: Angles de rotation par rapport aux axes Ox et Oy (inconnues);

$u_0(t)$ Déplacement vertical initial de la plaque à l'encastrement (inconnue);

M : Masse totale de la plaque;

ℓ_{ix}, ℓ_{iy} : Bras de levier des centres des éléments par rapport aux axes Ox et Oy ;

I_{Ox}, I_{Oy} : Moments d'inertie de la plaque par rapport aux axes Ox et Oy ;

$$\ddot{\varphi}_{0x}(t) = \frac{d^2 \varphi_{0x}}{dt^2}; \quad \ddot{\varphi}_{0y}(t) = \frac{d^2 \varphi_{0y}}{dt^2}; \quad \ddot{u}_0(t) = \frac{d^2 u_0}{dt^2}.$$

La vibration libre de la plaque est supposée sous forme harmonique, alors on pourra écrire [26]:

$$X_j(t) = X_j e^{i\omega t}; \quad \varphi_{0x}(t) = \varphi_{0x} e^{i\omega t}; \quad \varphi_{0y}(t) = \varphi_{0y} e^{i\omega t}; \quad u_0(t) = u_0 e^{i\omega t}; \quad J_j(t) = J_k e^{i\omega t}. \quad (I.2)$$

Reportons (I.2) dans le système (I.1), ce dernier devient:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vdots \\ \sum_{i=1}^n (v_{ij} + W_{ij}) X_j - \sum_{i=1}^n W_{in} J_i + \ell_{ix} \varphi_{0x} + \ell_{iy} \varphi_{0y} + u_0 = 0; \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n [X_j - J_j] \ell_{jx} = I_{0x} \ddot{\varphi}_{0x}; \\ \sum_{i=1}^n [X_j - J_j] \ell_{jy} = I_{0y} \ddot{\varphi}_{0y}; \\ \sum_{i=1}^n [X_j - J_j] = M \ddot{u}_0, \end{array} \right. \quad (I.3)$$

Le premier challenge principal de cette étude est l'étude de la fonction de Green exprimée par le paramètre v_{ij} . Son expression finale à introduire dans le système (I.3) est donnée dans la référence [26]. Le second challenge est la détermination des déflexions de la plaque en utilisant la méthode de Ritz. Son expression finale est donnée dans la référence [27].

Enfin, le couplage de la plaque avec le milieu élastique de propriétés inertielles et par conséquent la détermination des fréquences et mode propres de plaque est accompli par la méthode de Gemochkin [28] exprimée par le système d'équations (I.3).

4. Conclusion :

L'application de cette méthode nécessite la détermination de tous les paramètres du système (I.3) et sa mise en exécution sur une machine de calcul puissante, car le calcul des fréquences propres nécessite un temps de calcul énorme.

CHAPITRE II

FONCTION DE GREEN

1. Fonction de Green pour déterminer les déplacements verticaux de la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles

La fonction de Green définit les déplacements verticaux de la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles [1]. Cette fonction prend la forme suivante :

$$v = \frac{-P e^{i\omega t}}{2\pi G_0} [I_\xi + i\pi \chi K J_0(\chi r)] \quad (\text{II.1})$$

Où P est l'amplitude de la charge harmonique;

ω La fréquence d'excitation;

r la distance entre le point où la force dynamique est appliquée et le point où le déplacement de la surface du semi-infini élastique est déterminé.

Selon Guenfoud et al. [30], après plusieurs simplifications mathématiques de la formule (II.1), cette dernière devient:

$$v = \frac{-kP e^{i\omega t}}{2\pi G_0} \left\{ (I_{21} + I_3) + i \left[(I_1 + I_{22}) + \frac{\pi \chi K J_0(\chi r)}{k} \right] \right\} \quad (\text{II.2})$$

Où k est donné par $k = \sqrt{\frac{\omega^2 \rho}{G_0}}$ avec ρ la masse volumique du semi- infini élastique,

$G_0 = \frac{E_0}{2(1+\nu_0)}$, E_0 et ν_0 ce sont le module d'élasticité et le coefficient de Poisson du semi-infini élastique, respectivement.

Compte tenu de la charge externe $P e^{i\omega t} = \cos(\omega t)$ et en tenant compte que de la partie réelle de l'équation (II.2), alors l'Eq. (II.3) peut s'écrire :

$$v = \frac{-k \cos(\omega t)}{2\pi G_0} (I_{21} + I_3) \quad (\text{II.3})$$

Où, selon Guenfoud et al. [30]

$$I_{21} = \sum_{m=1}^{11} \frac{b_{2m-1}}{2m} \left({}_1F_2 \left(m; 1, m+1; \frac{-k^2 r^2}{4} \right) - \frac{{}_1F_2 \left(m; 1, m+1; \frac{-k^2 r^2}{16} \right)}{4^m} \right) \quad (\text{II.4})$$

$$\begin{aligned}
I_3 = & d_0 \left\{ \frac{1}{\sqrt{k^2 r^2}} F_2 \left(\frac{1}{2}; 1, \frac{3}{2}; \frac{-k^2 r^2}{4} \right) \right\} + \\
& + d_1 \left\{ \frac{\pi}{2} [Y_0(\chi kr) + H_0(\chi kr)] - \right. \\
& \left. - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{F_2 \left(\frac{1+m}{2}; 1, \frac{3+m}{2}; \frac{-k^2 r^2}{4} \right)}{(1+m)\chi^{m+1}} \right\} + \\
& + d_2 \left\{ \frac{1}{128} \left[-k^4 r^4 {}_2F_3 \left(1, 1; 2, 3, 3; \frac{-k^2 r^2}{4} \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + 16(4 - k^2 r^2(2 - 2\gamma + \ln 4) + k^2 r^2 \ln(k^2 r^2)) \right] \right\}.
\end{aligned}
\tag{II.5}$$

Où $d_0, d_1, d_2, h_1, h_3 \dots \dots h_{21}$, ce sont des coefficients à déterminer par la méthode des moindres carrés, Demidovich et al. [31];

Selon Gradshteyn et Ryjik [32], $H_0(\alpha)$ est la fonction de Struve; et $Y_0(\alpha)$ est la fonction de Bessel du deuxième genre, ${}_pF_q(a; b; d)$ est une fonction hypergéométrique généralisée; $\gamma \approx 0.577216$ (constante d'Euler) et $\chi = 1.07236$ pour $\nu = 1/3$. Pour l'application de l'approche proposée, l'Eq. (II.3) devraient être intégrées sur l'élément chargé de dimensions b et c , Fig (II.1). Par conséquent, la variable r devient $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$v = \frac{-k \cos(\omega t)}{2bc\pi G_0} \iint_{x,y} \left[I_{21}(\sqrt{x^2 + y^2}) + I_3(\sqrt{x^2 + y^2}) \right] dx dy \tag{II.6}$$

Ici, l'expression est divisée sur la grandeur bc , puisque le chargement est considéré uniformément distribué sur un élément rectangulaire de dimensions b et c . Comme de nombreux auteurs ont noté, que la complexité de ce problème réside dans la détermination de l'intégrale définie, intégrale de la formule (II.6), alors ce problème est résolu de la manière suivante :

2. a. Déplacement d'un point de la surface situant à l'intérieur de l'élément chargé

Dans ce cas $r \rightarrow 0$, le point i coïncide avec le point j et donc l'Eq. (II.6) est intégrée sur la surface de l'élément chargé par une charge uniformément répartie. Ceci est montré dans l'équation (II.7)

$$v = \frac{-k \cos(\omega t)}{2bc\pi G_0} \int_{-c/2}^{c/2} \int_{-b/2}^{b/2} \left[I_{21}(\sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2}) + I_3(\sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2}) \right] d\eta d\xi \quad (II.7)$$

Ici $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$

Certaines parties des intégrales I_{21} et I_3 dans les formules (II.7) sont calculées sans difficultés, mais certaines parties ne sont pas évaluées, en raison de leur complexité. Par conséquent, pour résoudre ce problème, l'approche de Johnson [33] est appliquée, dans lequel un changement de variables du système de coordonnées cartésiennes en un système de coordonnées polaires est accompli.

Après l'introduction du chargement de coordonnées et selon Johnson [33], la formule (II.7) devient :

$$v = \frac{-2k \cos(\omega t)}{bc\pi G_0} \left\{ \int_0^{\arctan\left(\frac{b}{c}\right)} \int_0^{\frac{c}{2\cos\varphi}} \left[I_{21}(\sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2}) + I_3(\sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2}) \right] r dr d\varphi + \int_0^{\arctan\left(\frac{c}{b}\right)} \int_0^{\frac{b}{2\cos\theta}} \left[I_{21}(\sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2}) + I_3(\sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2}) \right] r dr d\theta \right\} \quad (II.8)$$

Cette approche permet de tenir compte de la singularité, qui est observé dans les termes $\frac{1}{\sqrt{k^2 r^2}}$ et $Y_0(\chi kr)$ dans l'éq.(II.5).

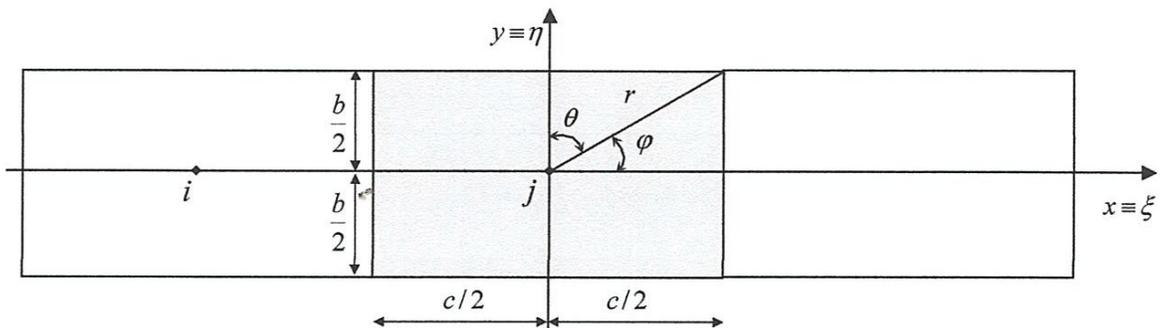


Fig II.1. Géométrie de l'élément chargé

2. b. Déplacement d'un point de la surface situant en dehors de l'élément chargé

Dans ce cas, $r \neq 0$ c'est-à-dire l'absence totale de la singularité dans tous les termes des équations (II.4) et (II.5) et les déplacements de la surface du demi-infini élastique de propriétés inertielles sont exprimé par l'éq. (II.3) et qui sont calculées par l'éq. (II.6). Par exemple, si l'élément chargé est divisé en 16 sous éléments (fig. II.2), alors l'expression des déplacements de la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles prend la forme suivante :

$$v = \frac{-k \cos(\omega t)}{2\pi G_0} \left\{ \frac{1}{16} \sum_{n=1}^{16} \left[I_{21} \left(\sqrt{(x-\xi_n)^2 + \eta_n^2} \right) + I_3 \left(\sqrt{(x-\xi_n)^2 + \eta_n^2} \right) \right] \right\} \quad (\text{II.9})$$

L'équation (II.9) définissant les déplacements verticaux de la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles, donne une expression très longue, encombrante et compliquée à appliquer. Par conséquent, il est nécessaire d'observer de précautions supplémentaires dans son application.

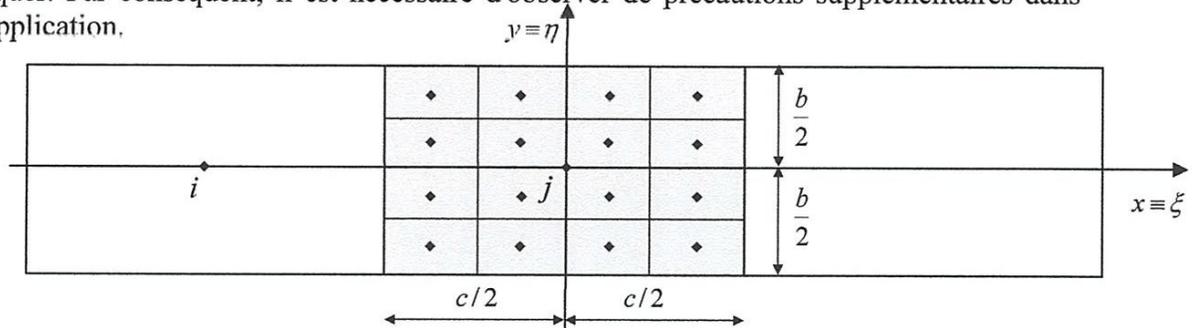


Fig II.2. Maillage de l'élément chargé

3. Conclusion :

Le grand challenge de ce problème (étude de la fonction de Green) a été surmonté par l'évaluation des intégrales de l'expression (II.1) où un algorithme a été donné dans [26] adapté à la méthode de calcul utilisée pour l'étude dynamique de la plaque rectangulaire reposant sur milieu élastique de propriétés inertielles.

CHAPITRE III

FONCTION DES DEFLEXIONS DE LA PLAQUE

1. Fonction des déflexions de la plaque

1.1. Solution de Clebsch

La fonction W_{ij} , qui figure dans le système d'équations canoniques (I.3) pour étudier ce système (plaque reposant sur milieu élastique de propriétés inertielles), définit les déflexions de la plaque rectangulaire de condition aux limites libres sur tout son contour et donnée, en se basant sur la solution de Clebsch [29], sous la forme suivante :

$$W_{ij}(x, y) = W_0(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n W_n(x, y). \quad (\text{III.1})$$

D'après [30] et pour notre cas, les termes qui satisfont les conditions aux limites de la plaque étudiée sont :

$$W_{ij}(x, y) = W_0(x, y) + A_{22}W_1(x, y) + B_{22}W_2(x, y) + A_{31}W_3(x, y) + B_{31}W_4(x, y), \quad (\text{III.2})$$

Où:

$$\begin{aligned} W_0(x, y) = \frac{Pab}{16\pi D} & \left\{ \left[\left(\frac{x-t}{a} - \frac{t}{a} \right)^2 + \left(\frac{y-z}{b} - \frac{z}{b} \right)^2 \right] \ln \left[\left(\frac{x-t}{a} - \frac{t}{a} \right)^2 + \left(\frac{y-z}{b} - \frac{z}{b} \right)^2 \right] + \right. \\ & + 4 \left(\frac{xt}{a^2} + \frac{yz}{b^2} \right) \left(1 + \ln \left[\frac{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{t^2 + z^2}}{ab} \right] \right) - \\ & \left. - \left(\frac{t^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \right) \ln \left[\frac{t^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \right] - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \ln \left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right] \right\}; \end{aligned}$$

x, y : Coordonnées du point où se détermine le déplacement de la plaque ;

t, z : Coordonnées du point où la charge est appliquée ;

a, b : Dimensions de la plaque (fig. II.1) ;

$$W_1(x, y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} ;$$

$$W_2(x, y) = \frac{2xy}{ab} ;$$

$$W_3(x, y) = \frac{x}{a} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right);$$

$$W_4(x, y) = \frac{y}{b} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right).$$

1.2. Méthode de Ritz

Pour déterminer les coefficients $A_{22}, B_{22}, A_{31}, B_{31}$ on utilise la méthode de Ritz [27] qui se base sur la variation de l'énergie de déformation de la plaque.

D'après [27], on peut écrire :

L'énergie de déformation de la plaque est donnée par :

$$U = \iint_{x,y} \psi(x, y) dx dy \quad (\text{III.3})$$

Où

$$\psi(x, y) = \left\{ \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dy^2} \right)^2 - \beta \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 w}{dy^2} - \left[\frac{d^2 w}{dx dy} \right]^2 \right) \right\};$$

$$\beta = 2(1 - \nu);$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} : \text{Rigidité cylindrique de la plaque,}$$

E, ν : Module d'élasticité et coefficient de Poisson du matériau de la plaque;

h : Épaisseur de la plaque.

Le travail des forces extérieures agissant sur la plaque lors du passage de la plaque de l'état déformé à l'état initial est donné par :

$$\Pi = -PW(t, z)$$

La fonctionnelle de l'énergie de déformation totale est donnée par :

$$\exists = U + \Pi$$

Enfin, les coefficients $A_{22}, B_{22}, A_{31}, B_{31}$ se déterminent par :

$$\frac{\partial \Xi}{\partial A_{22}} = 0 ;$$

$$\frac{\partial \Xi}{\partial B_{22}} = 0 ;$$

$$\frac{\partial \Xi}{\partial A_{31}} = 0 ;$$

$$\frac{\partial \Xi}{\partial B_{31}} = 0 .$$

Après une suite de simplifications mathématiques on obtient le système suivant :

$$\begin{pmatrix} \frac{16D\beta}{a^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{16D\beta}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{32D(-8+\beta)}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{32D(-8+\beta)}{a^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{22} \\ B_{22} \\ A_{31} \\ B_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Q_1 1 + \left(\frac{t^2}{a^2} - \frac{z^2}{a^2} \right) \\ -Q_2 2 + \frac{2tz}{aa} \\ t \left(\frac{t^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} \right) \\ -Q_3 3 + \frac{a}{z \left(\frac{t^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} \right)} \\ -Q_4 4 + \frac{a}{z \left(\frac{t^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} \right)} \end{pmatrix}$$

La solution de ce système donne les expressions de ces différents coefficients :

$$A_{22} = \frac{ab}{16D\beta} \left[\int_{-b}^b \int_{-a}^a Q_1(x,y) dx dy - \left(\frac{t^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} \right) \right];$$

$$B_{22} = \frac{ab}{16D\beta} \left[\int_{-b}^b \int_{-a}^a Q_2(x,y) dx dy - \frac{2tz}{ab} \right];$$

$$A_{31} = \frac{-3ab}{32D\beta} \left[\int_{-b}^b \int_{-a}^a Q_3(x,y) dx dy - \frac{t}{a} \left(\frac{t^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \right) \right];$$

$$B_{31} = \frac{-3ab}{32D\beta} \left[\int_{-b}^b \int_{-a}^a Q_4(x,y) dx dy - \frac{z}{b} \left(\frac{t^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \right) \right];$$

$$Q_1(x, y) = (b^8 t (t-x)^2 x^3 (x-y) (x+y) + a^8 (x-y) y^3 (x+y) (y-z)^2 z + a^6 b^2 y (-t x y^3 (x^2 + 3 y^2) + y^2 (x^2 (t^2 + 2 x^2) + (-t^2 + 8 t x + x^2) y^2 + y^4) z - y (2 (x^2 + y^2)^2 + t (x^3 + 3 x y^2)) z^2 + (x^2 + y^2)^2 z^3) + a^2 b^6 x (-t^3 (x^2 + y^2)^2 + x^3 y (3 x^2 + y^2) z + t^2 (2 x (x^2 + y^2)^2 + x y (3 x^2 + y^2) z) - t x^2 (x^4 + x^2 (y^2 + 8 y z - z^2) + y^2 (2 y^2 + z^2))) + a^4 b^4 (-t^3 x y^2 (x^2 + 3 y^2) + t y^2 (2 x^5 + 3 x^3 y^2 + 3 x y^4) - t x (x^2 + y^2)^2 z^2 + t^2 y (2 (x-y) y^3 (x+y) + (x^2 + y^2)^2 z) + x^2 z (-2 y^5 + y^3 z^2 + x^4 (-3 y + 2 z) + x^2 y (-3 y^2 - 2 y z + 3 z^2))) \beta) / (4 a^3 b^3 \pi (x^2 + y^2)^2 (b^2 x^2 + a^2 y^2) (b^2 (t-x)^2 + a^2 (y-z)^2));$$

$$Q_2(x, y) = \frac{\left(Y \left(\frac{t(x-y)(x+y)}{a^2(x^2+y^2)^2} + \frac{x}{b^2 x^2 + a^2 y^2} \right) + \frac{(t-x)(y-z)}{b^2(t-x)^2 + a^2(y-z)^2} + \frac{x(-x+y)(x+y)z}{b^2(x^2+y^2)^2} \right) \beta}{2 \pi};$$

$$Q_3(x, y) = \left(\beta \left(3b^6 t (t-x)^2 x^2 (x-y) (x+y) - 3a^6 x (x-y) y (x+y) (y-z)^2 z + a^2 b^4 (t ((t-x)^2 x^4 + x^2 (5t^2 - 10tx + 8x^2) y^2 - (2t^2 - 4tx + 5x^2) y^4) + 3xy (x^2 (3t^2 - 8tx + 3x^2) + (t^2 + x^2) y^2) z + 3tx^2 (x-y) (x+y) z^2) + a^4 b^2 (3t^2 xy (-x^2 + y^2) z + t (2y^4 (y-z) z + x^4 (3y^2 + 2yz + z^2) + x^2 y^2 (9y^2 - 20yz + 5z^2)) + xz (y^3 (y-3z) (y-z) + x^4 (-5y + 2z) + x^2 y (8y^2 - 14yz + 9z^2))) - 2a^2 b^2 x (x^2 + y^2)^2 (b^2 (t-x)^2 + a^2 (y-z)^2) \left(\text{Log} \left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right] - \text{Log} \left[\frac{b^2 (t-x)^2 + a^2 (y-z)^2}{a^2 b^2} \right] \right) \right) \right) / (4 a^4 b^3 \pi (x^2 + y^2)^2 (b^2 (t-x)^2 + a^2 (y-z)^2));$$

$$Q_4(x, y) = - \left(\beta \left(3b^6 t (t-x)^2 x y (-x^2 + y^2) + 3a^6 (x-y) y^2 (x+y) (y-z)^2 z + a^4 b^2 (3t^2 (x-y) y^2 (x+y) z + z (-y^4 (y-z)^2 + x^2 y^2 (-8y^2 + 10yz - 5z^2) + x^4 (5y^2 - 4yz + 2z^2)) - 3txy (x^2 (y^2 + z^2) + y^2 (3y^2 - 8yz + 3z^2))) + a^2 b^4 (-3t^3 xy (x^2 + 3y^2) - 3x^2 y^2 (3x^2 + y^2) z + t^2 (x^2 y^2 (14y - 5z) + 2x^4 (2y + z) - y^4 (2y + z)) + t (-x^5 (y + 2z) + x^3 y (-8y^2 + 20yz - 3z^2) + x y^3 (5y^2 - 2yz + 3z^2))) + 2a^2 b^2 y (x^2 + y^2)^2 (b^2 (t-x)^2 + a^2 (y-z)^2) \left(\text{Log} \left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right] - \text{Log} \left[\frac{b^2 (t-x)^2 + a^2 (y-z)^2}{a^2 b^2} \right] \right) \right) \right) / (4 a^3 b^4 \pi (x^2 + y^2)^2 (b^2 (t-x)^2 + a^2 (y-z)^2)).$$

Ici x, y : Ce sont des coordonnées où se détermine la déflexion de la plaque;

t, z : Ce sont des coordonnées du point où la force est appliquée.

Les expressions finales des coefficients $A_{22}, B_{22}, A_{31}, B_{31}$ sont données dans l'annexe 1.

Les schémas suivants illustrent la déformation de la plaque due à deux types de charges issues de l'application de cette solution.

- a. Charge uniformément répartie sur toute la plaque

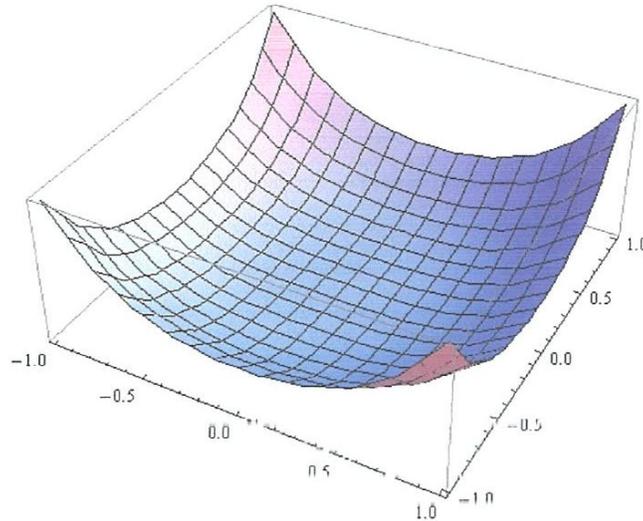


Fig. III.1. Déformation de la plaque due à une charge verticale uniformément répartie sur toute sa surface

- b. Charge concentrée au centre de la plaque

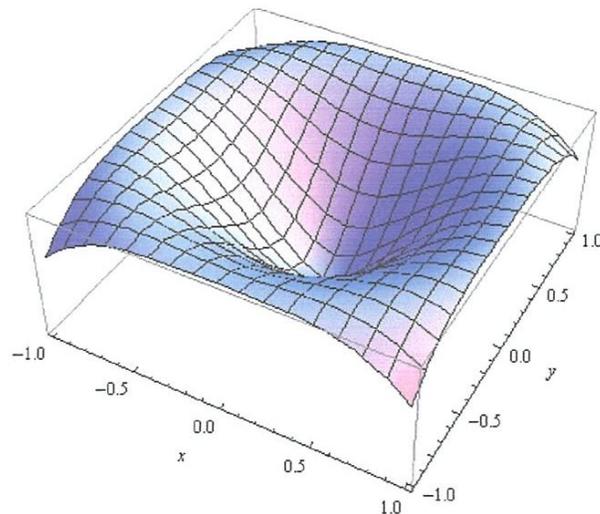


Fig. III.2. Déformation de la plaque due à une charge verticale concentrée appliquée en son centre

2. Conclusion :

L'application de la méthode de Ritz basant sur la variation de l'énergie de déformation de la plaque étudiée dans ce travail à abouti à un algorithme simplifié afin qu'il soit adapté non seulement pour la méthode de calcul utilisée, mais aussi pour d'autres différentes méthodes de calcul numérique.

CHAPITRE IV

EXEMPLE D'APPLICATION

1. Introduction

Dans ce chapitre on va appliquer l'approche semi-analytique décrit dans les chapitres précédents en vue du calcul dynamique d'une plaque carrée reposant sur milieu élastique de propriétés inertielles.

Les valeurs suivantes relatives aux caractéristiques géométriques et mécaniques de la plaque et du semi-infini élastique sont prises en considération :

$$\nu = \frac{1}{3};$$

$$\rho = 1900 \text{ kg/m}^2;$$

$$x = 1.0723562676808107$$

$$K = \omega \sqrt{\frac{\rho}{G_0}}$$

$$a = 1 \text{ m};$$

$$\nu = \frac{1}{3}$$

$$\beta = 2 * (1 - \nu);$$

$$E_1 = 200000000000;$$

$$h = .2;$$

2. Cas d'une plaque Divisée en quatre éléments identiques

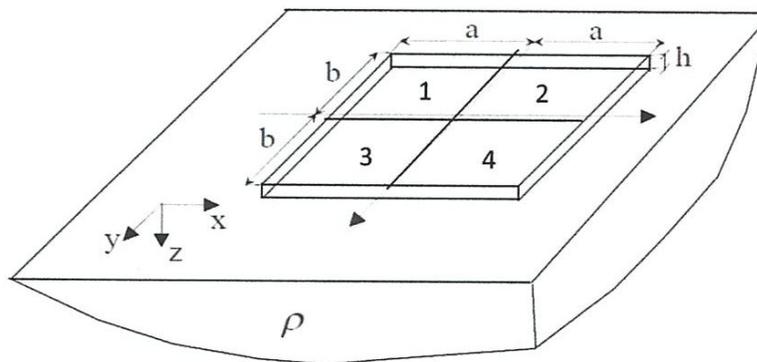


Fig. IV.1. Plaque maillée en quatre éléments identiques

L'introduction de valeurs géométriques et mécaniques du système étudié (plaque reposant sur milieu élastique de propriétés inertielles) dans le système d'équations (I.3), et après plusieurs transformations et simplifications

L'introduction de valeurs géométriques et mécaniques du système étudié (plaque reposant sur milieu élastique de propriétés inertielles) dans le système d'équations (I.3), et après plusieurs transformations et simplifications mathématiques, permet d'obtenir le système d'équations sous la forme matricielle suivante :

$$[A] \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \\ \varphi_{0,x} \\ \varphi_{0,y} \\ u_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.1})$$

2.1. Détermination des fréquences propres de la plaque

La détermination des valeurs propres ω de la plaque carrée reposant sur milieu élastique de propriétés inertielles se fait par la détermination des racines de l'équation du déterminant de la matrice A du système (IV.1), c'est-à-dire :

$$\text{Det}[A]=0 \quad (\text{IV.2})$$

L'expression du déterminant est tellement compliquée et longue, alors sa solution est encore plus compliquée. C'est pourquoi on a recours à de la solution graphique à l'aide du logiciel «Mathematica ».

La figure IV.2 représente le graphe de l'équation du déterminant dans un intervalle donné où l'on voit les points d'intersection de l'équation avec l'axe des coordonnées. Le zoom graphique des racines de l'équation du déterminant de la matrice A permet de déterminer leurs valeurs numériques.

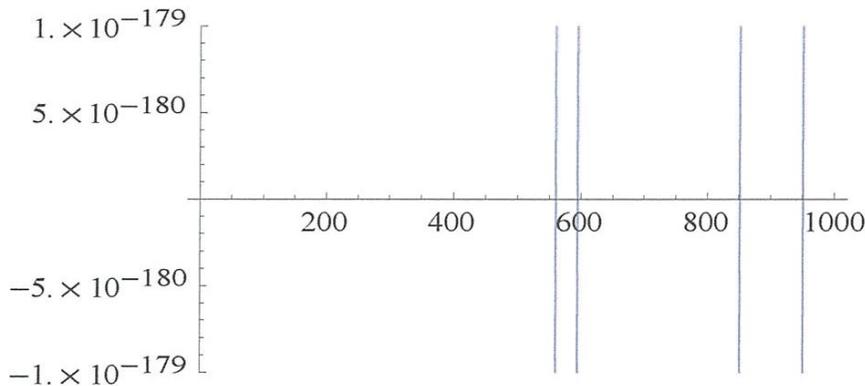


Fig IV 2 Détermination des racines de l'équation du déterminant graphiquement

Cette opération de détermination graphique a donné toutes les valeurs des fréquences propres de la plaque carrée reposant sur milieu élastique de propriétés inertielles et les quatre premières valeurs des fréquences propres en (Hz) sont :

I	1	2	3	4
$\omega(\text{Hz})$	559.8320	594.4746	851.6920	950.5567

2.2. Détermination des formes propres de la plaque

La détermination des formes propres de la plaque carrée reposant sur milieu élastique de propriétés inertielles se fait de la manière suivante :

Remplaçons dans le système d'équations de forme matricielle (IV.1) ω par l'une de ses valeurs propres ;

Supprimons la première équation du système (IV.1), ce dernier devient de taille $(n + 2)(n + 2)$ et affectant la valeur de 1 à l'inconnue X_1 ;

Transformons la première colonne du système de taille $(n + 2)(n + 2)$ à l'autre côté du système et résolvons ainsi le système résultant ;

Cette résolution permet de déterminer les valeurs des inconnues X_i du système (IV.1) et par conséquent déterminer les déplacements de la plaque carrée reposant sur milieu élastique de propriétés inertielles. Ces déplacements donnent une forme déformée de la plaque qui représente sa forme propre, par la formule suivante [26] :

$$v_i = \frac{-k}{2\pi G_0} \sum_{j=1}^n X_j F_{ij} \quad (\text{IV.3})$$

Cette opération est répétée pour chaque valeur de fréquence propre de la plaque ce qui a permis de déterminer ses modes propres appropriés pour chaque fréquence propre.

La figure IV.2 représente les modes propres correspondant aux quatre premières fréquences propres de la plaque.

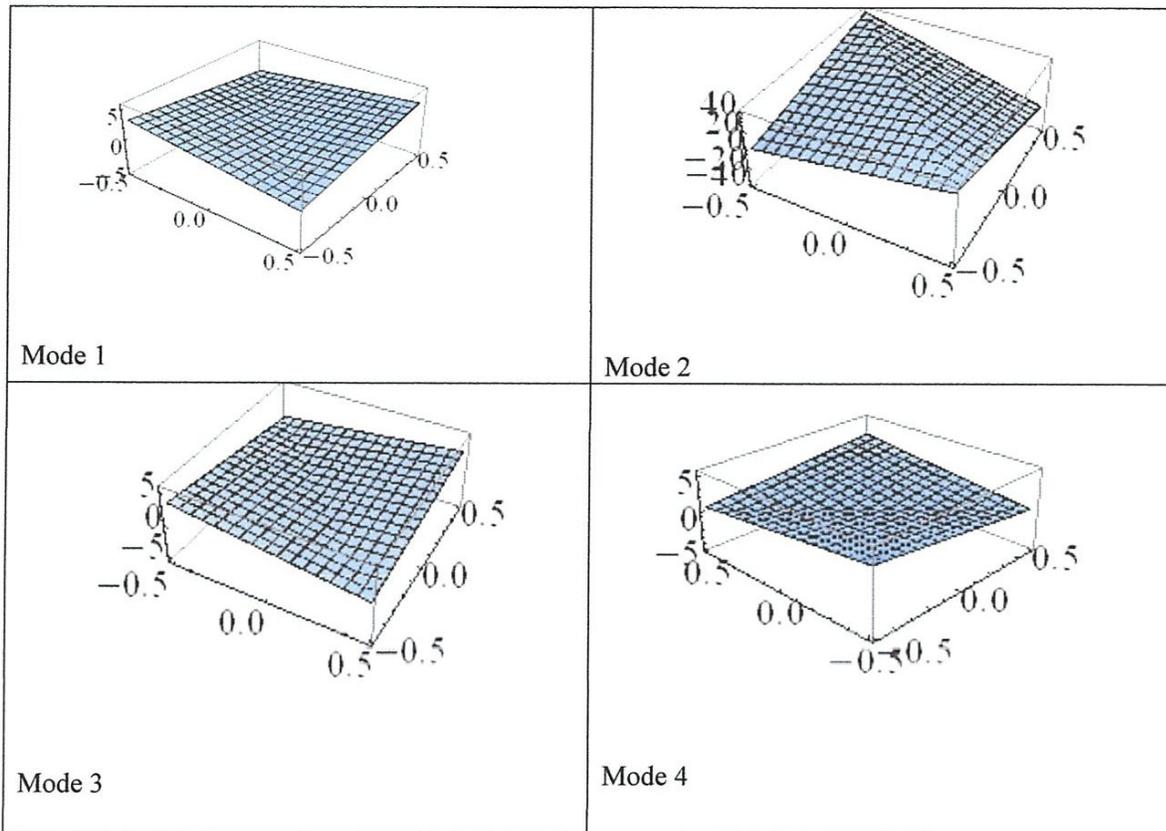


Fig. IV.3 Modes propres correspondant aux quatre premières fréquences propres de la plaque

3. Cas d'une plaque Divisée à différents nombres d'éléments identiques

De la même manière on a répété cette opération d'étude dynamique de la plaque carrée reposant sur milieu élastique de propriétés inertielles en vue de déterminer ses fréquences et modes propres pour différents maillages.

Pour une plaque maillée en neuf éléments identiques (fig. IV.), on a obtenu les résultats suivants :

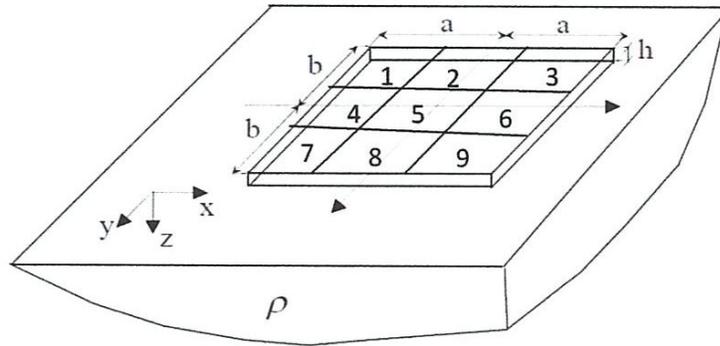


Fig. IV.4. Plaque maillée en neuf éléments identiques

Les quatre premières valeurs des fréquences propres de la plaque pour ce type de maillage sont

I	1	2	3	4
$\omega(Hz)$	326.9159	868.4374	972.4834	2757.8483

Les quatre premiers modes propres de la plaque pour ce type de maillage sont

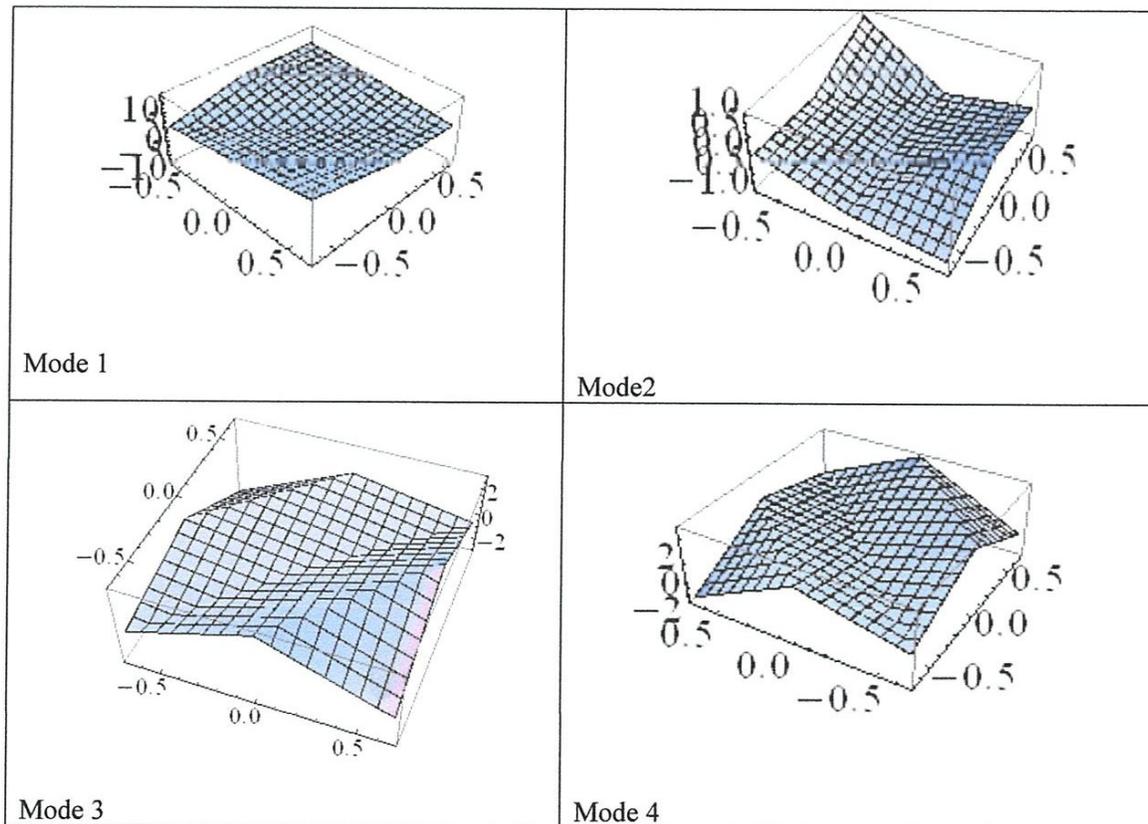


Fig. IV.5 Modes propres correspondant aux quatre premières fréquences propres de la plaque

Pour un maillage de la plaque en seize éléments identiques (fig. IV.6), on a obtenu les résultats suivants :

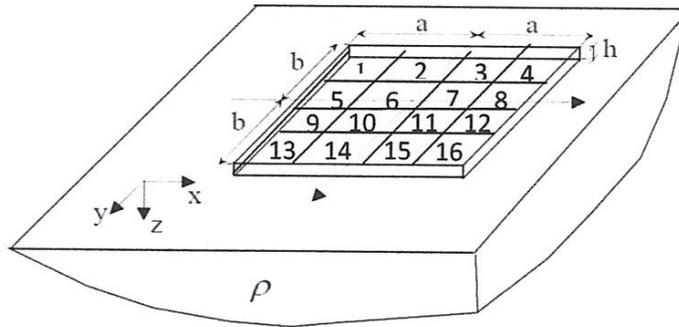


Fig. IV.6. Plaque maillée en seize éléments identiques

Les quatre premières valeurs des fréquences propres de la plaque pour ce type de maillage sont

I	1	2	3	4
ω	87.9011	213.5890	515.2564	610.3860

Les quatre premiers modes propres de la plaque pour ce type de maillage sont

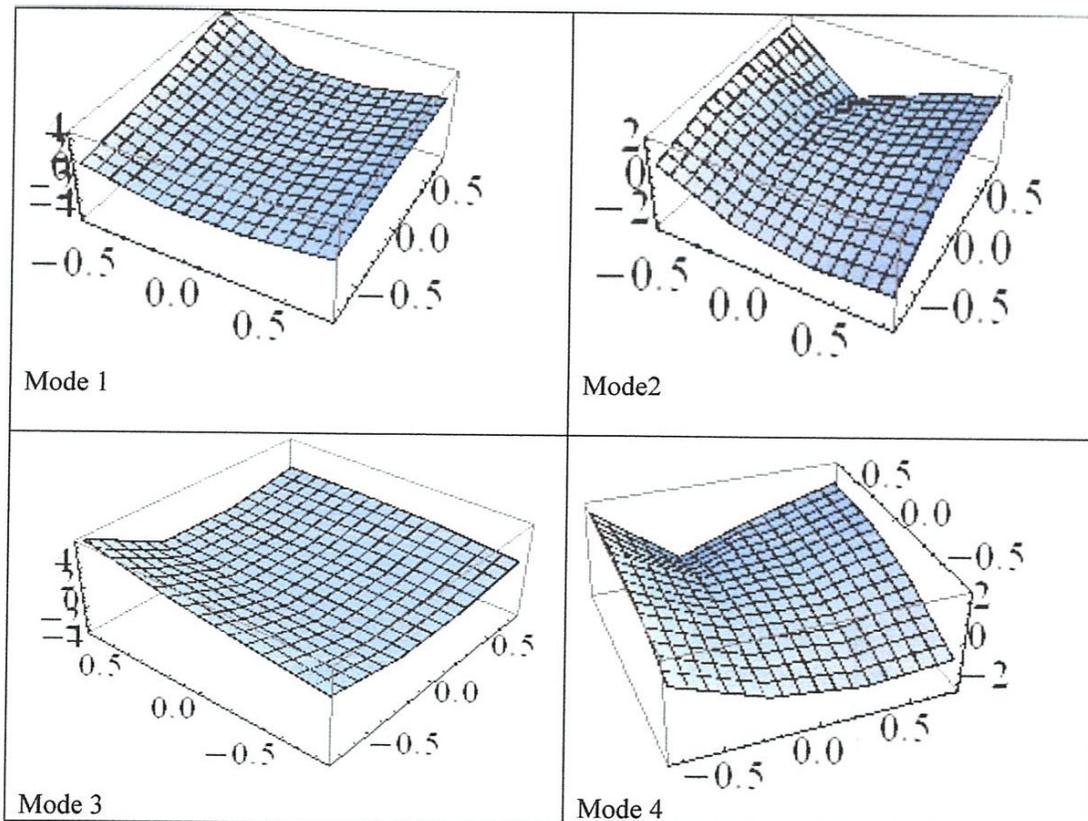


Fig. IV.7 Modes propres correspondant aux quatre premières fréquences propres de la plaque

$$v_i = \frac{-k}{2bc\pi G_0} \sum_{j=1}^{16} X(t) F_{ij}$$

La figure IV.9 représente la réponse de la plaque à cette charge harmonique en 3D pour différents instants. Ici, $t_j = t_0 + \Delta t$, $t_0 = 0$ s, $\Delta t = 0.001$ s. En outre, le déplacement maximal est obtenu au niveau du point d'application de l'excitation extérieure.

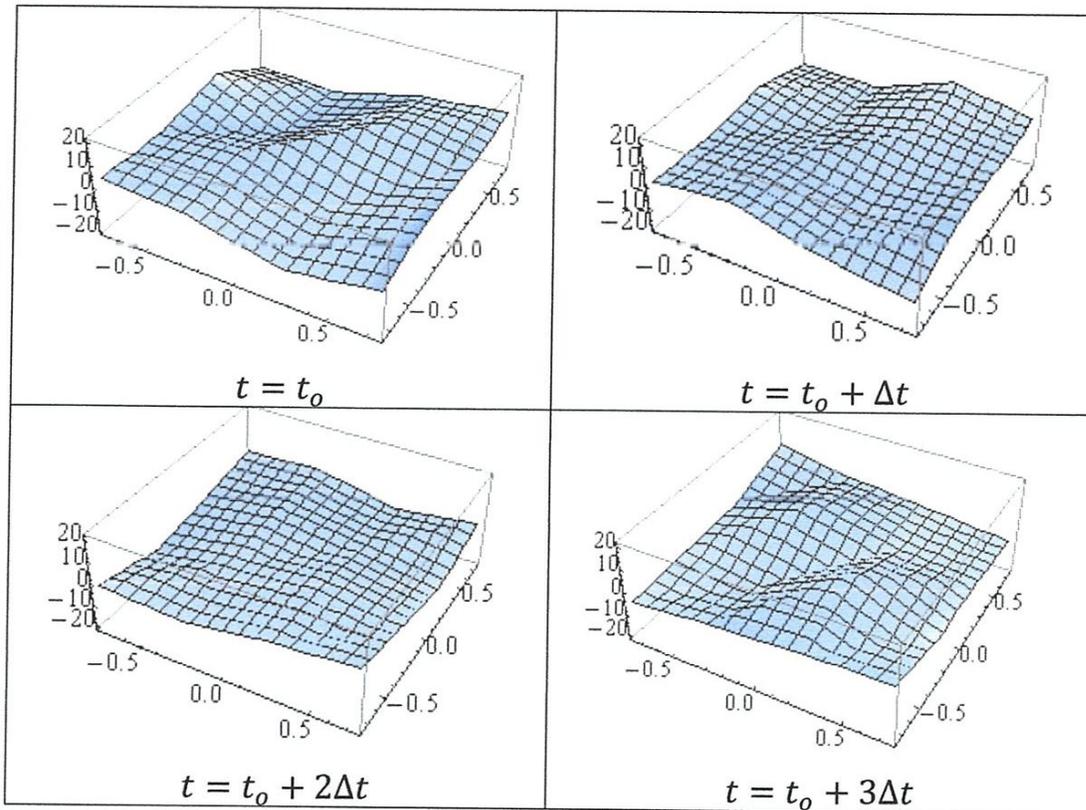


Fig. IV.9. Réponse de la plaque en fonction du temps en 3D due à l'excitation harmonique

5. Conclusion :

Le calcul en statique ou en dynamique des structures en interaction avec dans ce travail, plaque reposant sur milieu élastique, qui fait partie des problèmes de contact et donc non épargné de ces difficultés de calcul. L'approche semi-analytique proposée apportée dans ce travail pour résoudre ce problème est donnée sous forme d'algorithmes simplifiés et adaptés aux machines de calcul personnelles et aux différentes applications d'engineering.

Conclusion générale

Le calcul statique ou dynamique des structures en interaction avec des milieux élastiques (problèmes de contact) est lié à de très grandes difficultés mathématiques. Cette tâche se complique de plus en plus lors de la tenue en considération de certains paramètres comme la complexité des formes géométriques des structures, la variabilité de leurs dimensions géométriques ou mécaniques, la tenue en compte de l'inertie des milieux élastiques, la non-négligence de l'amortissement et des forces de frottement dans les zones de contact, la non-linéarité du calcul etc. C'est pourquoi, la tâche concernant l'étude des problèmes de contact n'est pas accomplie complètement à nos jours et que souvent sa solution inévitablement se fait de façons numériques ou semi-numériques.

Dans ce contexte, l'étude dynamique d'une plaque flexible carrée reposant sur la surface d'un milieu élastique de propriétés inertielles accomplie dans le cadre de ce travail de mémoire de Master est considéré comme une contribution en vue de résoudre l'un des points de ce problème compliqué. Le travail est réalisé par une approche semi-analytique basant sur la méthode mixte du calcul des structures connue sous le nom de méthode de Gemochkin discrétisant le système étudié. Les deux grands challenges de cette étude résident dans: (I) étude de la fonction de Green définissant les déplacements de la surface du milieu élastique de propriétés inertielles et (II) application de la méthode de Ritz pour déterminer les déflexions de la plaque flexible. Ces deux tâches ont été étudiées et publiées auparavant en plus ce sont données sous formes d'algorithmes simplifiés et adaptés pour le calcul d'ingénieur. L'exécution de cette méthode est faite par un programme de calcul "Mathematica".

Les résultats de calcul trouvés, issus de cette étude dynamique, concernent les valeurs des fréquences propres de la plaque, les modes propres de la et sa réponse due à une excitation harmonique extérieure sont très satisfaisants.

Enfin, la raison pour laquelle le maillage apporté dans ce travail est assez faible est justifié par l'inconvénient de cette méthode qui exige de machines de calcul très puissantes, voir la nécessité d'exécuter les calculs de maillage fin par des stations de calcul puissantes et non par de simples singles machines.

ANNEXE

A22 =

$$\left(\frac{1}{16 D1 \beta} a^2 \left(\frac{t^2}{a^2} - \frac{z^2}{a^2} - \frac{1}{4 a^2 \pi} \beta \left(-a (a - 2 t) \operatorname{ArcTan} \left[\frac{a - t}{a - z} \right] - a (a + 2 t) \operatorname{ArcTan} \left[\frac{a + t}{a - z} \right] + (t^2 + (a - z)^2) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \operatorname{ArcTan} \left[\frac{a - z}{a - t} \right] + (t^2 + (a - z)^2) \operatorname{ArcTan} \left[\frac{a - z}{a + t} \right] - a^2 \operatorname{ArcTan} \left[\frac{a - t}{a + z} \right] + \right. \right. \\ \left. \left. 2 a t \operatorname{ArcTan} \left[\frac{a - t}{a + z} \right] - a^2 \operatorname{ArcTan} \left[\frac{a + t}{a + z} \right] - 2 a t \operatorname{ArcTan} \left[\frac{a + t}{a + z} \right] + a^2 \operatorname{ArcTan} \left[\frac{a + z}{a - t} \right] + \right. \right. \\ \left. \left. t^2 \operatorname{ArcTan} \left[\frac{a + z}{a - t} \right] + 2 a z \operatorname{ArcTan} \left[\frac{a + z}{a - t} \right] - z^2 \operatorname{ArcTan} \left[\frac{a + z}{a - t} \right] + a^2 \operatorname{ArcTan} \left[\frac{a + z}{a + t} \right] + \right. \\ \left. \left. t^2 \operatorname{ArcTan} \left[\frac{a + z}{a + t} \right] + 2 a z \operatorname{ArcTan} \left[\frac{a + z}{a + t} \right] + z^2 \operatorname{ArcTan} \left[\frac{a + z}{a + t} \right] \right) \right) \right)$$

B22 =

$$\left(\frac{1}{16 D1 \beta} a^2 \left(\frac{2 t z}{a^2} - \frac{1}{8 a^2 \pi} \beta \left(- (2 a^2 + t^2 + 2 a (t - z) + z^2) \operatorname{Log} [a^2 + 2 a t + t^2 + (a - z)^2] - (2 a^2 - 2 a t + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. t^2 + 2 a z + z^2) \operatorname{Log} [2 a^2 - 2 a t + t^2 + 2 a z + z^2] + (2 a^2 + t^2 + z^2 - 2 a (t + z)) \operatorname{Log} [\right. \right. \\ \left. \left. 2 a^2 + t^2 + z^2 - 2 a (t + z)] + (2 a^2 + t^2 + z^2 + 2 a (t + z)) \operatorname{Log} [2 a^2 + t^2 + z^2 + 2 a (t + z)] \right) \right) \right)$$

A31 =

$$\left(- \frac{1}{32 D1 (-8 + \beta)} 3 a^2 \left(\frac{t \left(\frac{t}{a'} + \frac{z}{a'} \right)}{a} - \frac{1}{24 a^3 \pi} \left(4 a^2 t (16 - 24 \pi - 4 \beta + 9 \pi \beta) + 4 a (12 a t + 2 a^2 \beta + 3 t^2 \beta) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \operatorname{ArcTan} \left[\frac{a - t}{a - z} \right] + 2 a^2 (16 a + 9 t \beta) \operatorname{ArcTan} \left[\frac{-a + t}{a - z} \right] - \right. \right. \\ \left. \left. 2 a (4 a^2 (-4 + \beta) + 6 t^2 \beta + 3 a t (-8 + 3 \beta)) \operatorname{ArcTan} \left[\frac{a + t}{a - z} \right] + \right. \right. \\ \left. \left. 2 t (48 a z + 9 (a^2 + z^2) \beta + t^2 (8 + \beta)) \operatorname{ArcTan} \left[\frac{a - z}{a - t} \right] - 48 a^2 t \operatorname{ArcTan} \left[\frac{a - z}{a + t} \right] + 16 t^3 \right. \\ \left. \left. \operatorname{ArcTan} \left[\frac{a - z}{a + t} \right] + 96 a t z \operatorname{ArcTan} \left[\frac{a - z}{a + t} \right] - 48 t z^2 \operatorname{ArcTan} \left[\frac{a - z}{a + t} \right] + 18 a^2 t \beta \operatorname{ArcTan} \left[\frac{a - z}{a + t} \right] + \right. \\ \left. \left. 2 t^3 \beta \operatorname{ArcTan} \left[\frac{a - z}{a + t} \right] - 36 a t z \beta \operatorname{ArcTan} \left[\frac{a - z}{a + t} \right] + 18 t z^2 \beta \operatorname{ArcTan} \left[\frac{a - z}{a + t} \right] + \right. \\ \left. \left. 48 a^2 t \operatorname{ArcTan} \left[\frac{-a + z}{a - t} \right] + 48 t z^2 \operatorname{ArcTan} \left[\frac{-a + z}{a - t} \right] + 36 a t z \beta \operatorname{ArcTan} \left[\frac{-a + z}{a - t} \right] - \right. \\ \left. \left. 32 a^3 \operatorname{ArcTan} \left[\frac{a - t}{a + z} \right] + 48 a^2 t \operatorname{ArcTan} \left[\frac{a - t}{a + z} \right] + 8 a^3 \beta \operatorname{ArcTan} \left[\frac{a - t}{a + z} \right] - 18 a^2 t \beta \operatorname{ArcTan} \left[\frac{a - t}{a + z} \right] + \right. \\ \left. \left. 12 a t^2 \beta \operatorname{ArcTan} \left[\frac{a - t}{a + z} \right] + 32 a^3 \operatorname{ArcTan} \left[\frac{a + t}{a + z} \right] + 48 a^2 t \operatorname{ArcTan} \left[\frac{a + t}{a + z} \right] - 8 a^3 \beta \operatorname{ArcTan} \left[\frac{a + t}{a + z} \right] - \right. \\ \left. \left. 18 a^2 t \beta \operatorname{ArcTan} \left[\frac{a + t}{a + z} \right] - 12 a t^2 \beta \operatorname{ArcTan} \left[\frac{a + t}{a + z} \right] - 48 a^2 t \operatorname{ArcTan} \left[\frac{a + z}{a - t} \right] + \right. \\ \left. \left. 16 t^3 \operatorname{ArcTan} \left[\frac{a + z}{a - t} \right] - 96 a t z \operatorname{ArcTan} \left[\frac{a + z}{a - t} \right] - 48 t z^2 \operatorname{ArcTan} \left[\frac{a + z}{a - t} \right] + \right. \\ \left. \left. 18 a^2 t \beta \operatorname{ArcTan} \left[\frac{a + z}{a - t} \right] + 2 t^3 \beta \operatorname{ArcTan} \left[\frac{a + z}{a - t} \right] + 36 a t z \beta \operatorname{ArcTan} \left[\frac{a + z}{a - t} \right] + \right. \\ \left. \left. 18 t z^2 \beta \operatorname{ArcTan} \left[\frac{a + z}{a - t} \right] - 48 a^2 t \operatorname{ArcTan} \left[\frac{a + z}{a + t} \right] + 16 t^3 \operatorname{ArcTan} \left[\frac{a + z}{a + t} \right] - 96 a t z \right. \\ \left. \left. \operatorname{ArcTan} \left[\frac{a + z}{a + t} \right] - 48 t z^2 \operatorname{ArcTan} \left[\frac{a + z}{a + t} \right] - 18 a^2 t \beta \operatorname{ArcTan} \left[\frac{a + z}{a + t} \right] + 2 t^3 \beta \operatorname{ArcTan} \left[\frac{a + z}{a + t} \right] + \right. \\ \left. \left. 36 a t z \beta \operatorname{ArcTan} \left[\frac{a + z}{a + t} \right] + 18 t z^2 \beta \operatorname{ArcTan} \left[\frac{a + z}{a + t} \right] - 8 a^3 \operatorname{Log} [a^2 + 2 a t + t^2 + (a - z)^2] + \right. \\ \left. \left. 24 a t^2 \operatorname{Log} [a^2 + 2 a t + t^2 + (a - z)^2] + 48 a^2 z \operatorname{Log} [a^2 + 2 a t + t^2 + (a - z)^2] - \right. \right. \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
& 24 t^2 z \operatorname{Log}\left[a^2 + 2 a t + t^2 + (a - z)^2\right] - 24 a z^2 \operatorname{Log}\left[a^2 + 2 a t + t^2 + (a - z)^2\right] + \\
& 8 z^3 \operatorname{Log}\left[a^2 + 2 a t + t^2 + (a - z)^2\right] + 2 a^3 \beta \operatorname{Log}\left[a^2 + 2 a t + t^2 + (a - z)^2\right] - \\
& 6 a t^2 \beta \operatorname{Log}\left[a^2 + 2 a t + t^2 + (a - z)^2\right] - 18 a^2 z \beta \operatorname{Log}\left[a^2 + 2 a t + t^2 + (a - z)^2\right] - \\
& 6 a t z \beta \operatorname{Log}\left[a^2 + 2 a t + t^2 + (a - z)^2\right] + 3 t^2 z \beta \operatorname{Log}\left[a^2 + 2 a t + t^2 + (a - z)^2\right] + \\
& 12 a z^2 \beta \operatorname{Log}\left[a^2 + 2 a t + t^2 + (a - z)^2\right] - 5 z^3 \beta \operatorname{Log}\left[a^2 + 2 a t + t^2 + (a - z)^2\right] - \\
& 24 a^3 \operatorname{Log}\left[\frac{a^2 + 2 a t + t^2 + (a - z)^2}{a^2}\right] + 6 a^3 \beta \operatorname{Log}\left[\frac{a^2 + 2 a t + t^2 + (a - z)^2}{a^2}\right] + \\
& 8 a^3 \operatorname{Log}\left[2 a^2 - 2 a t + t^2 + 2 a z + z^2\right] - 24 a t^2 \operatorname{Log}\left[2 a^2 - 2 a t + t^2 + 2 a z + z^2\right] + \\
& 48 a^2 z \operatorname{Log}\left[2 a^2 - 2 a t + t^2 + 2 a z + z^2\right] - 24 t^2 z \operatorname{Log}\left[2 a^2 - 2 a t + t^2 + 2 a z + z^2\right] + \\
& 24 a z^2 \operatorname{Log}\left[2 a^2 - 2 a t + t^2 + 2 a z + z^2\right] + 8 z^3 \operatorname{Log}\left[2 a^2 - 2 a t + t^2 + 2 a z + z^2\right] - \\
& 2 a^3 \beta \operatorname{Log}\left[2 a^2 - 2 a t + t^2 + 2 a z + z^2\right] + 6 a t^2 \beta \operatorname{Log}\left[2 a^2 - 2 a t + t^2 + 2 a z + z^2\right] - \\
& 18 a^2 z \beta \operatorname{Log}\left[2 a^2 - 2 a t + t^2 + 2 a z + z^2\right] + 6 a t z \beta \operatorname{Log}\left[2 a^2 - 2 a t + t^2 + 2 a z + z^2\right] + \\
& 3 t^2 z \beta \operatorname{Log}\left[2 a^2 - 2 a t + t^2 + 2 a z + z^2\right] - 12 a z^2 \beta \operatorname{Log}\left[2 a^2 - 2 a t + t^2 + 2 a z + z^2\right] - \\
& 5 z^3 \beta \operatorname{Log}\left[2 a^2 - 2 a t + t^2 + 2 a z + z^2\right] + 24 a^3 \operatorname{Log}\left[\frac{2 a^2 - 2 a t + t^2 + 2 a z + z^2}{a^2}\right] - \\
& 6 a^3 \beta \operatorname{Log}\left[\frac{2 a^2 - 2 a t + t^2 + 2 a z + z^2}{a^2}\right] + 8 a^3 \operatorname{Log}\left[2 a^2 + t^2 + z^2 - 2 a (t + z)\right] - \\
& 24 a t^2 \operatorname{Log}\left[2 a^2 + t^2 + z^2 - 2 a (t + z)\right] - 48 a^2 z \operatorname{Log}\left[2 a^2 + t^2 + z^2 - 2 a (t + z)\right] + \\
& 24 t^2 z \operatorname{Log}\left[2 a^2 + t^2 + z^2 - 2 a (t + z)\right] + 24 a z^2 \operatorname{Log}\left[2 a^2 + t^2 + z^2 - 2 a (t + z)\right] - \\
& 8 z^3 \operatorname{Log}\left[2 a^2 + t^2 + z^2 - 2 a (t + z)\right] - 2 a^3 \beta \operatorname{Log}\left[2 a^2 + t^2 + z^2 - 2 a (t + z)\right] + \\
& 6 a t^2 \beta \operatorname{Log}\left[2 a^2 + t^2 + z^2 - 2 a (t + z)\right] + 18 a^2 z \beta \operatorname{Log}\left[2 a^2 + t^2 + z^2 - 2 a (t + z)\right] - \\
& 6 a t z \beta \operatorname{Log}\left[2 a^2 + t^2 + z^2 - 2 a (t + z)\right] - 3 t^2 z \beta \operatorname{Log}\left[2 a^2 + t^2 + z^2 - 2 a (t + z)\right] - \\
& 12 a z^2 \beta \operatorname{Log}\left[2 a^2 + t^2 + z^2 - 2 a (t + z)\right] + 5 z^3 \beta \operatorname{Log}\left[2 a^2 + t^2 + z^2 - 2 a (t + z)\right] + \\
& 24 a^3 \operatorname{Log}\left[\frac{2 a^2 + t^2 + z^2 - 2 a (t + z)}{a^2}\right] - 6 a^3 \beta \operatorname{Log}\left[\frac{2 a^2 + t^2 + z^2 - 2 a (t + z)}{a^2}\right] - \\
& 8 a^3 \operatorname{Log}\left[2 a^2 + t^2 + z^2 + 2 a (t + z)\right] + 24 a t^2 \operatorname{Log}\left[2 a^2 + t^2 + z^2 + 2 a (t + z)\right] - \\
& 48 a^2 z \operatorname{Log}\left[2 a^2 + t^2 + z^2 + 2 a (t + z)\right] + 24 t^2 z \operatorname{Log}\left[2 a^2 + t^2 + z^2 + 2 a (t + z)\right] - \\
& 24 a z^2 \operatorname{Log}\left[2 a^2 + t^2 + z^2 + 2 a (t + z)\right] - 8 z^3 \operatorname{Log}\left[2 a^2 + t^2 + z^2 + 2 a (t + z)\right] + \\
& 2 a^3 \beta \operatorname{Log}\left[2 a^2 + t^2 + z^2 + 2 a (t + z)\right] - 6 a t^2 \beta \operatorname{Log}\left[2 a^2 + t^2 + z^2 + 2 a (t + z)\right] + \\
& 18 a^2 z \beta \operatorname{Log}\left[2 a^2 + t^2 + z^2 + 2 a (t + z)\right] + 6 a t z \beta \operatorname{Log}\left[2 a^2 + t^2 + z^2 + 2 a (t + z)\right] - \\
& 3 t^2 z \beta \operatorname{Log}\left[2 a^2 + t^2 + z^2 + 2 a (t + z)\right] + 12 a z^2 \beta \operatorname{Log}\left[2 a^2 + t^2 + z^2 + 2 a (t + z)\right] + \\
& 5 z^3 \beta \operatorname{Log}\left[2 a^2 + t^2 + z^2 + 2 a (t + z)\right] + 6 a^3 (-4 + \beta) \operatorname{Log}\left[\frac{2 a^2 + t^2 + z^2 + 2 a (t + z)}{a^2}\right] \Big) \Big) \Big) \Big)
\end{aligned}$$

B31 =

$$\begin{aligned}
& \left(-\frac{1}{32 D 1 (-8 + \beta)} 3 a^2 \left(z \left(\frac{t^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} \right) - \frac{1}{24 a^3 \pi} \left(4 a^2 z (16 + 24 \pi - 4 \beta - 9 \pi \beta) + 6 a (a - 2 t) z (-8 + 3 \beta) \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \operatorname{ArcTan}\left[\frac{a - t}{a - z}\right] + 6 a (a + 2 t) z (-8 + 3 \beta) \operatorname{ArcTan}\left[\frac{a + t}{a - z}\right] + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. 2 \left(3 a^2 z (8 - 3 \beta) + 4 a^3 (-4 + \beta) + 6 a z^2 \beta - z \left(z^2 (8 + \beta) + 3 t^2 (-8 + 3 \beta) \right) \right) \operatorname{ArcTan}\left[\frac{a - z}{a - t}\right] + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. 2 \left(3 a^2 z (8 - 3 \beta) + 4 a^3 (-4 + \beta) + 6 a z^2 \beta - z \left(z^2 (8 + \beta) + 3 t^2 (-8 + 3 \beta) \right) \right) \operatorname{ArcTan}\left[\frac{a - z}{a + t}\right] - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. 48 a^2 z \operatorname{ArcTan}\left[\frac{a - t}{a + z}\right] + 96 a t z \operatorname{ArcTan}\left[\frac{a - t}{a + z}\right] + 18 a^2 z \beta \operatorname{ArcTan}\left[\frac{a - t}{a + z}\right] - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \begin{array}{ccc} . a - t, & . a + t, & . a + t, \end{array} \right. \right. \right.
\end{aligned}$$

Références bibliographiques

- [1] Lamb H. On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid. Philosophical Transactions of the Royal Society of London 1904; A203:1–42
- [2] Graff K. Wave motion in elastic solids. Courier Dover Publications;1991.
- [3] Reissner E. Stationare, axialsymmetrische, durch ein schüttelnde Masse erregte Schwingungen eines homogenen elastische Halbraumes. Ingenieur Archiv 1936;7(6):381–96.
- [4] Shekhter O.Y., The taking into account of the inertial properties of the ground in the calculation of a foundation unit on forced vibration. The work's collection of N.I.I.O., vibration of constructions and foundations, Vol.2,1948, p. 72–89,(Russian Edition)
- [5] Bycroft G.N. Forced vibrations of a rigid circular plate on a semi infinite elastic space and on an elastic stratum. Philosophical Transactions of the Royal Society of London 1956; 248(A.948):327–68.
- [6] Pekeris CL. The seismic buried pulse. Proceedings of the National Academy of Sci USA 1955; 41:469–80.
- [7] Guan F, Novak M. Transient response of an elastic homogeneous half space to suddenly applied rectangular loading. Journal of Applied Mechanics: ASME 1994; 61:256–63.
- [8] Shinozuka M, Deodatis G, Zhang R, Papageorgiou AS. Modeling, synthetics and engineering applications of strong earthquake wave motion. Soil Dynamics and Earthquake Engineering 1999; 18:209-28.
- [9].Chouet B. Representation of an extended seismic source in a propagator based form a lism. Bulletin of the Seismological Society of America 1987;77(1):14-27.
- [10] Dunkin J.W. Computation of modal solutions in layered, elastic media at high frequencies. Bulletin of the Seismological Society of America 1965; 55(2): 335-58.
- [11] Zhang R, Shinozuka M. Effects of irregular boundaries in layered half-space on seismic waves. Journal of Sound and Vibration 1996; 195(1):1-16.