

11/681.859

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 – Guelma
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Electrotechnique et Automatique



Domaine : Sciences et Technologie
Filière : Electrotechnique
Spécialité : Réseaux Electriques

**Mémoire de fin d'études
pour l'obtention du diplôme de Master Académique**

**Etude et Modélisation de l'hystérésis magnétique application
au calcul de champ électromagnétique en milieu magnétique**

Présenté par :
-DIARRA Moussa
-MELLAH Yacine

Sous la direction de :
Dr. LADJIMI ABDEL AZIZ

Jun 2015

REMERCIEMENTS

Nous voudrions tout d'abord exprimer notre profonde reconnaissance et gratitude à Dr. LADJIMI ABDEL AZIZ notre encadreur, qui nous a dirigé avec un grand enthousiasme dans le cadre de notre travail, ses conseils et ses commentaires nous ont permis de mener à terme notre travail, de surmonter nos difficultés et de progresser dans nos recherches.

Et nous tenons également à adresser nos remerciements au président et aux membres du jury d'avoir accepté de lire et de critiquer notre travail.

Enfin, nous voudrions adresser nos remerciements à toutes les personnes qui assurent l'encadrement du département.



Dédicace

A mes très chers parents Kortoumou Cissoko et Diarra Abdel Kader pour l'éducation qu'ils m'ont octroyé depuis tout petit, pour leur soutien, leur encouragement et leur présence ;

A mes frères et sœurs : Aissata ,Adama ,Hadji ,Fanta ,Mimi

Leurs encouragements, soutiens, réconforts et amours m'ont été précieux et indispensables ;

A mes petits choux Junior,Prince ,Aminata ,Nana leur amour m'ont énormément aidé.

A toute ma famille ;

A mon professeur Mr . Moussaoui ;

A tous mes bon(ne)s ami(e)s partout où ils (elles) sont ;

A mes très cher(e)s ami(e)s Bax, IB, Sow, Abba, David, Zie, Moro, Moustapha , Carter ;

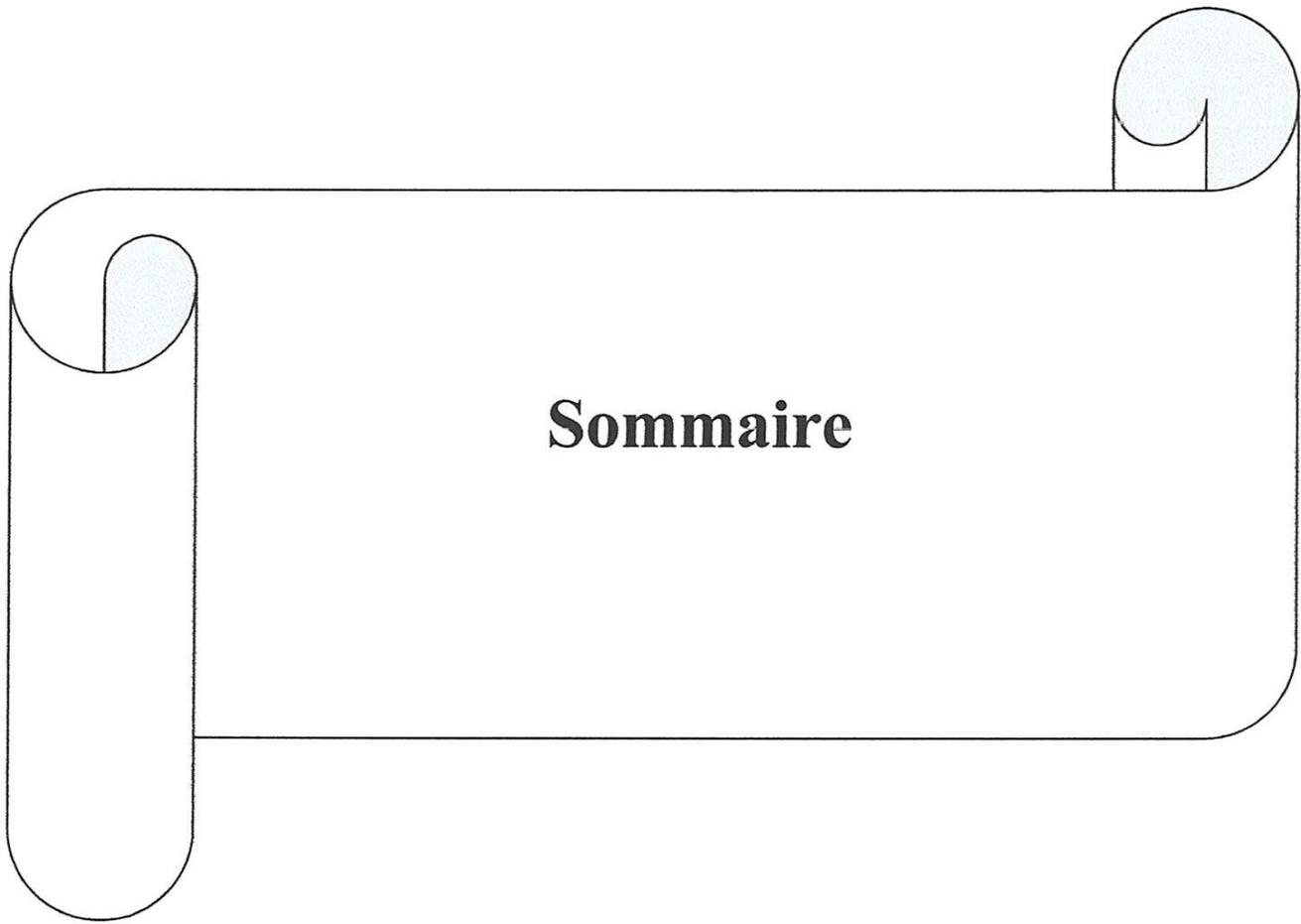
A mon binôme et ami Mellah, pour la patience dont il fait preuve envers moi ;

A tous mes promotionnel(le)s de l'université de Guelma ;

A toute la communauté étrangère de Guelma ;

Ce travail vous est dédié !

Diarra Moussa



Sommaire

INTRODUCTION GENERALE

Chapitre I : Matériaux Magnétiques

Introduction.....	01
1. Notions de magnétisme	01
1.1. Les matériaux magnétiques.....	01
1.1.1. Echelle atomique	01
1.1.2. Echelle microscopique.....	02
1.1.3. Echelle macroscopique	03
1.2 Processus d'aimantation.....	04
1.2.1 .Pour les faibles valeurs de l'excitation	05
1.2.2. Pour les valeurs intermédiaires de l'excitation.....	05
1.2.3Pour les fortes valeurs de l'excitation.....	06
1.2.4. Branche descendante du cycle majeur.....	06
1.3Classification des matériaux ferromagnétiques.....	07
1. Matériaux ferromagnétiques doux	07
2. Matériaux ferromagnétiques durs	08
1.4. Pertes Magnétiques.....	08
1.4.1. Pertes par hystérésis	08
1.4.2. Pertes par courant induit	08
1.5. Comportement thermique du phénomène d'hystérésis.....	09
1.5.1.Température de Curie	10
Conclusion.....	10

Chapitre II : Etudes et implémentation des modèles statiques d'hystérésis

Introduction.....	11
2.1. Présentation des modèles.....	11
2.1.1. Modèle de Preisach.....	11

2.1.1.1 Définition du modèle.....	11
2.1.1.2 Interprétation géométrique.....	12
2.1.1.3 Représentation équivalente.....	13
2.1.1.4 Principe du modèle.....	13
2.1.1.5 Propriétés du modèle.....	15
2.1.1.6 Détermination de la fonction de distribution.....	16
2.1.2. Modèle de Jiles-Atherton.....	17
2.1.2.1. Définition.....	17
a. L'aimantation anhystérétique.....	17
b. L'aimantation.....	17
c. Equation du modèle de Jiles-Atherton.....	18
2.1.2.2. Détermination des paramètres du modèle de Jiles-Atherton.....	19
2.1.2.2.1. Détermination de M_s	19
2.1.2.2.2. Détermination de c	19
2.1.2.2.3. Relation entre a et α	20
2.1.2.2.4. Détermination du paramètre α	20
2.1.2.2.5. Détermination du paramètre k	20
2.1.2.2.6. Relation entre les paramètres de Jiles-Atherton et le point de saturation.....	20
2.1.2.2.7. Mise en œuvre d'un algorithme des paramètres α, a, c et k	21
2.2. Simulation numérique de l'hystérésis magnétique.....	22
Conclusion.....	24

Chapitre III : Mise en œuvre du modèle dynamique d'hystérésis

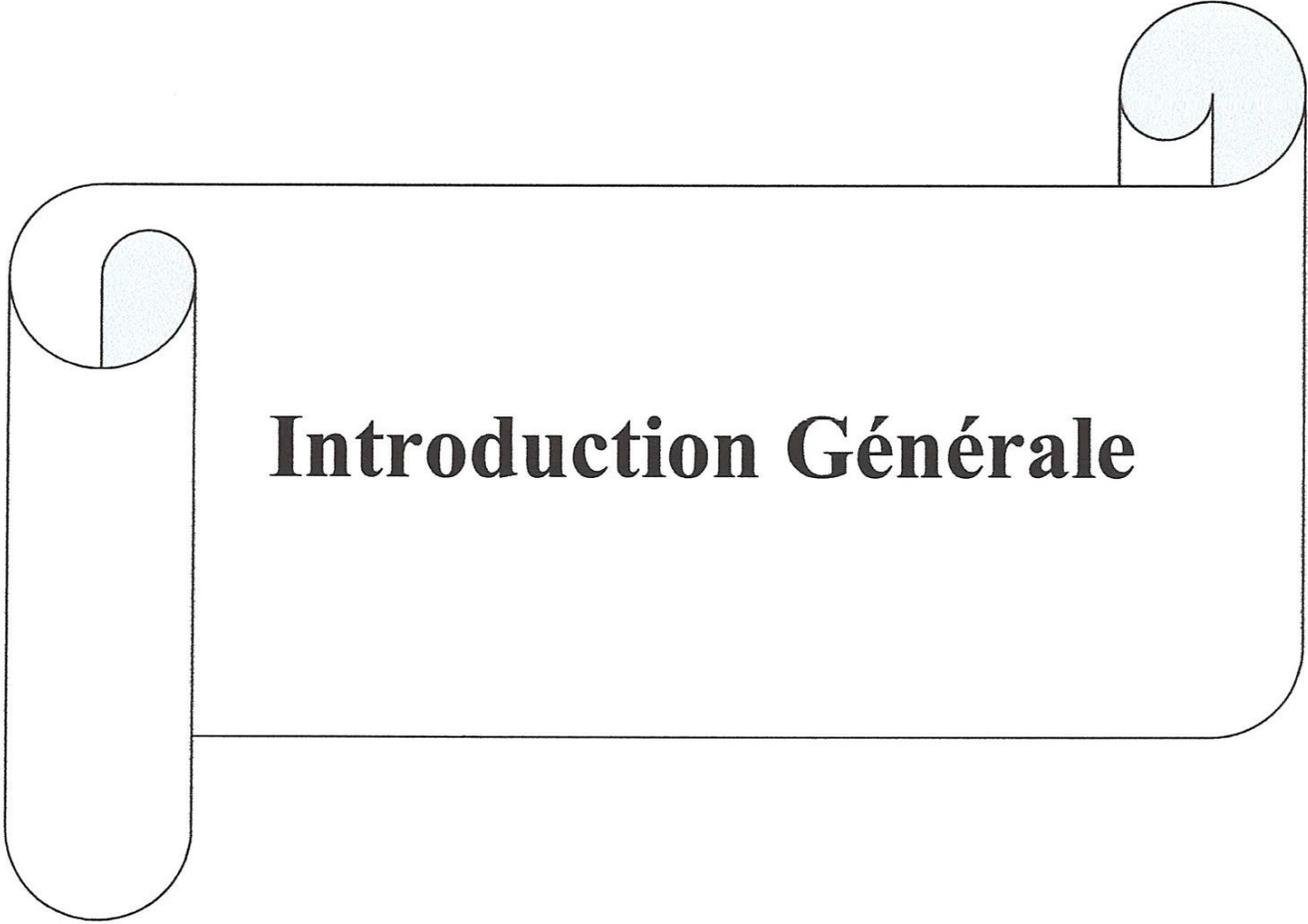
INTRODUCTION.....	25
3.1. Modèle dynamique de Hodgdon.....	25
3.2. Modèle de Preisach dynamique.....	27
3.2.1 Théorie de Bertotti.....	27
3.2.2 Introduction du modèle dynamique de Preisach.....	28
3.3. Modèle de Preisach paramètres.....	29

3.4. Modèle dynamique de Jiles-Antherton.....	29
3.5. Développement du modèle dynamique d'hystérésis.....	31
3.5.1 Introduction de l'effet de la fréquence sur le cycle.....	31
3.5.2 Validation du modèle.....	31
3.5.2.1. Résolution numérique du modèle dynamique de Jiles Atherton.....	31
3.5.2.2 : Génération des cycles mineurs.....	34
Conclusion.....	35

Chapitre IV : Modèles d'hystérésis et calculs élément finis

Introduction.....	36
4.1 Intégration des modèles d'hystérésis dans la MEF.....	36
4.1.1 Equations de Maxwell.....	36
4.1.2 Formulation en potentiel vecteur magnétique.....	38
4.1.2.1 Problème magnétostatique non linéaire.....	38
4.1.2.2 Problème magnétodynamique non linéaire.....	39
4.1.3 Formulation éléments finis du problème électromagnétique.....	40
4.1.3.1 Problème électromagnétique bidimensionnel.....	40
a. Problème magnétostatique.....	40
b. Problème magnétodynamique.....	41
4.2 Méthode de résolution.....	43
4.2.1 Présentation de la méthode du pont fixe.....	44
4.3 Code de calcul éléments finis 2D.....	44
4.3.1 Organigramme de traitement du problème magnétique non linéaire.....	44
4.3.2 Algorithme général de résolution du système non linéaire.....	45
4.4. Application à un champ électromagnétique.....	47
4.4.1. Système étudié.....	47
4.4.2 Résolution.....	48
a-Excitation sinusoïdale.....	48

b-Génération des cycles mineurs.....	49
4.4.2.1 Détermination des pertes.....	50
Conclusion.....	52
Conclusion générale	



Introduction Générale

Introduction générale

La modélisation exacte du phénomène d'hystérésis magnétique est très importante dans la conception d'un dispositif électromagnétique. Le cycle d'hystérésis d'un matériau ferromagnétique dépend de plusieurs facteurs. Parmi ces facteurs nous examinons celles dues à la fréquence d'excitation et à la forme d'onde du champ d'excitation. En effet, sous ces facteurs le comportement magnétique des matériaux ferromagnétiques peut être considérablement modifié et le cycle d'hystérésis évolue sensiblement en fonction de la fréquence et la forme d'onde du champ d'excitation.

Le travail de notre mémoire consiste à proposer une modélisation de l'hystérésis magnétique et son association à l'analyse par éléments finis en vue d'étudier un dispositif à induction électromagnétique.

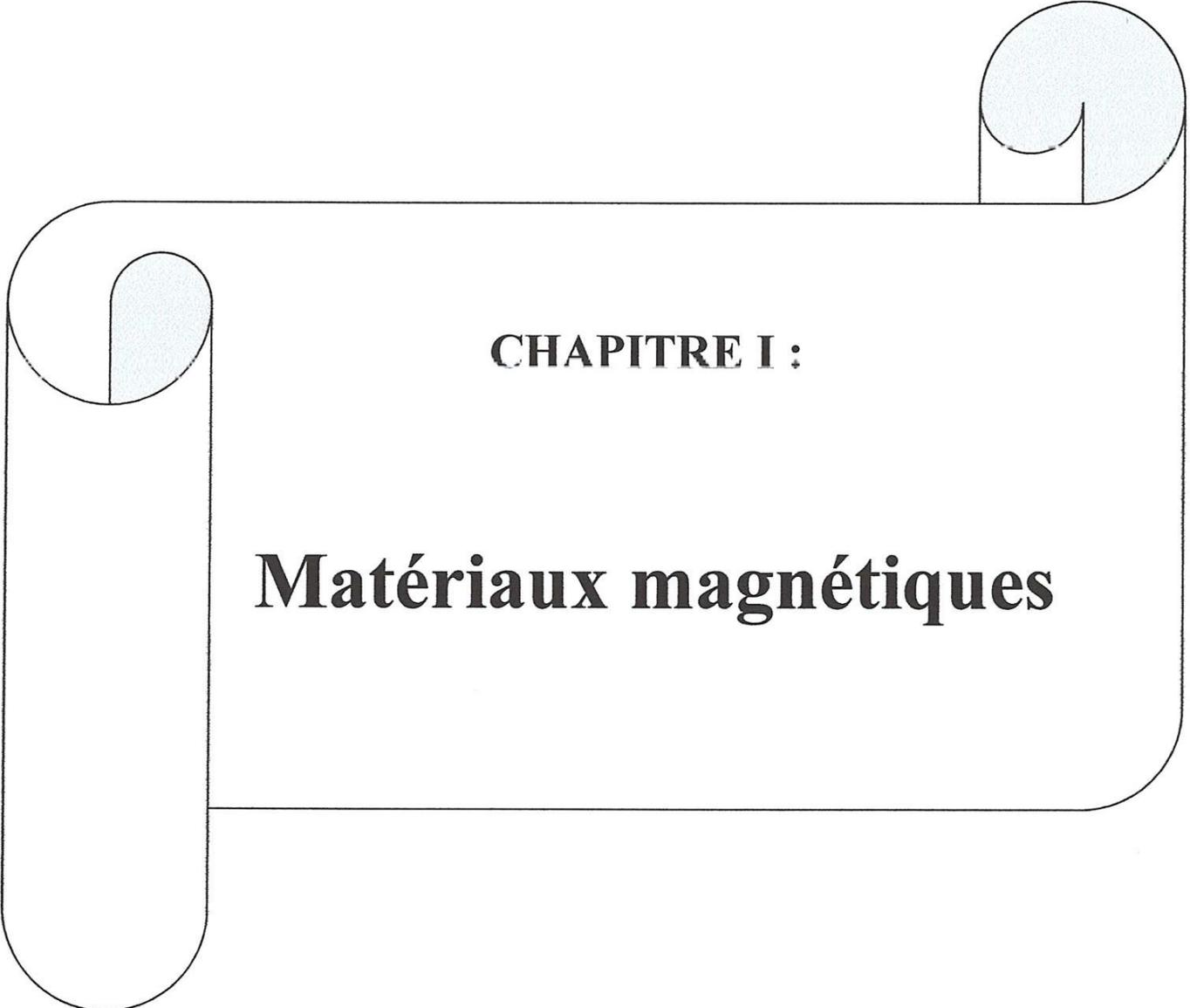
Notre mémoire est structuré comme suit :

Le premier chapitre va traiter les phénomènes d'hystérésis on s'intéresse aux aspects physiques et énergétiques. On va tenter, dans ce chapitre, de comprendre ce qui fait qu'un matériau s'aimante de manière aussi particulière. On donnera les causes principales ainsi que le processus du phénomène. En outre, on citera les différents facteurs qui agissent sur la forme du cycle d'hystérésis.

Dans le deuxième chapitre, nous décrivons la présentation et la mise en œuvre du modèle statique de Jiles-Atherton.

Dans le troisième chapitre, nous aborderons la présentation des modèles dynamiques d'hystérésis et la mise en œuvre du modèle de Jiles-Atherton dynamique. Nous présenterons aussi une approche pour intégrer l'effet de la fréquence dans le modèle statique de Jiles Atherton.

Le quatrième volet de ce mémoire sera traité à l'association au calcul par éléments finis d'un modèle dynamique d'hystérésis et leurs applications à un dispositif à induction magnétique.



CHAPITRE I :

Matériaux magnétiques

INTRODUCTION

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux aspects physiques du phénomène d'hystérésis. On va tenter de comprendre ce qui fait qu'un matériau s'aimante de manière aussi particulière. Par la suite, lors de la modélisation, on fera appel à des notions développées dans cette partie.

La partie description du phénomène est composée de deux sous-parties. Dans la première sous-partie, on tente d'inventorier de manière non exhaustive les matériaux concernés par ce phénomène. Dans la seconde le but est de comprendre ce comportement pour le moins particulier.

Ce chapitre a donc pour objectif de fixer le cadre du travail, de permettre une vision globale du phénomène qu'on va traiter par la suite.

1. NOTIONS DE MAGNETISME

Le comportement des matériaux magnétiques est généralement analysé à partir des grandeurs macroscopiques qui sont, le champ magnétique auquel ils sont soumis et l'aimantation qui en résulte. La relation liant ces deux grandeurs caractérise l'hystérésis du matériau. Ce phénomène complexe trouve ses origines à différentes échelles qu'il convient de rappeler [1-2].

1.1. Les matériaux magnétiques

1.1.1. Echelle atomique

Les électrons d'un atome ont deux mouvements régis par les lois de la physique quantique. Il s'agit de la rotation des électrons autour du noyau sur un rayon de quelques angströms et de la rotation de ces électrons sur eux-mêmes. Le mouvement orbital induit un moment magnétique orbital, tandis que la rotation de l'électron sur lui-même induit un moment magnétique de spin.

Dans un atome isolé, c'est à dire sans interactions avec les atomes voisins, le moment magnétique résultant est la somme des contributions des électrons qu'il contient. Ces électrons se répartissent autour du noyau sur des niveaux d'énergie, les couches et sous-couches électroniques, selon les règles de la mécanique quantique. En générale, ils se regroupent de façon à former des couches complètes et s'apparient deux à deux avec des spins opposés. Par conséquent, le moment magnétique atomique est nul, cependant, certains atomes sont caractérisés par une couche périphérique incomplète contenant des électrons non appariés et dont il résulte un moment magnétique atomique permanent non nul. C'est en particulier le cas des éléments de transition tels que le fer.

1.1.2. Echelle microscopique

A cette échelle, un solide est constitué de groupements d'atomes interagissant et organisés en réseau cristallin. Trois comportements, représentés sur la figure 1.1, sont possibles suivant l'interaction entre atomes voisins :

- ✦ Tous les moments magnétiques sont alignés parallèlement les uns aux autres, même en absence de champ appliqué. Le corps est dit ferromagnétique.
- ✦ Les moments magnétiques se regroupent en deux sous réseaux antiparallèles, mais restent alignés parallèlement les uns aux autres dans chaque sous réseau : Le moment magnétique résultant est très faible ou nul. Un tel corps est dit antiferromagnétique.
- ✦ Les moments magnétiques sont arrangés en sous réseaux mais le moment dans un sens diffère du moment opposé : Le moment total est donc non nul. Un tel corps est dit ferrimagnétique.

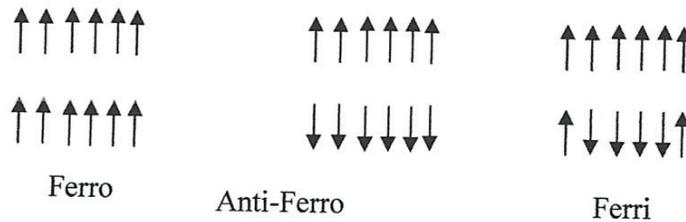


Figure 1.1 : Configuration des moments magnétiques dans les corps Ferro, anti Ferro et ferrimagnétique

Quelques exemples de ces trois familles sont donnés dans le tableau 1.1.

Tableau 1.1. Exemples de corps Ferro, anti Ferro et ferrimagnétiques

Corps ferromagnétique	Corps ferrimagnétique	Corps antiferromagnétique
Fer : Fe	Oxyde de fer γ : $\gamma - Fe_2O_3$	Oxyde de manganèse : MnO
Cobalt : Co	Ferrites : Fe_3O_4	Oxyde de fer α : $\alpha - Fe_2O_3$
Dioxyde de chrome : CrO_2		

Ces trois processus résultent du comportement collectif des moments magnétiques lié à l'énergie d'échange. Celle-ci provient du fort couplage entre les moments magnétiques de spin dû à la mise en commun d'électrons entre atomes voisins. Cette interaction agit à courte distance. Elle est encore appelée interaction d'échange.

A cette échelle intervient également l'énergie d'anisotropie magnéto-cristalline liée à l'orientation des moments magnétiques suivant certaines directions préférentielles du cristal, appelées axes d'anisotropie ou axes faciles, notées AF. C'est un fait d'expérience. Lorsqu'un cristal ne possède qu'un axe facile, on parle d'anisotropie uni axiale. Les axes faciles sont les axes du cristal dans le cas du fer cubique. Certaines directions sont au contraire difficilement accessibles par

les moments magnétiques car énergétiquement défavorables. Elles sont dites axes difficiles, notées AD.

A la température de Curie, l'énergie thermique est aussi importante que l'énergie magnétique du corps ferromagnétique. Les moments magnétiques pointent alors dans toutes les directions et l'aimantation résultante est nulle. Dans cet état désordonné, le matériau est dit paramagnétique. Cependant, l'application d'un champ conduit à l'alignement des moments parallèlement à ce champ.

L'aimantation d'un corps est par définition le moment magnétique totale par unité de volume. Cette grandeur vectorielle caractérise l'ordre des moments dans le corps. Elle est exprimé en A/m dans le système international.

1.1.3. Echelle macroscopique

Prenons l'exemple d'un monocristal de fer en forme de parallélépipède rectangle, (figure 1.2). L'énergie d'échange et l'énergie d'anisotropie, agissant toutes deux à l'échelle microscopique, tendent à aligner les moments magnétiques atomiques avec l'axe oz, axe de facile aimantation. L'énergie démagnétisante qui en résulte est minimale lorsque les domaines sont désorientés du fait de la compensation des directions des champs démagnétisant de ces domaines.

Une structure stable du monocristal est obtenue par la création de domaines parallèles à l'axe facile et de domaines perpendiculaires à cet axe, dits domaines de fermeture, de façon à ce que le flux reste dans l'échantillon (figure 1.2). Elle est le résultat d'une compétition entre différents termes d'énergie.

- ✚ L'énergie d'anisotropie qui tend à aligner l'aimantation avec l'axe facile du cristal,
- ✚ L'énergie d'échange qui proscrit toute variation brutale de l'aimantation,
- ✚ L'énergie démagnétisante qui tend à annuler la divergence de l'aimantation dans le cristal et à rendre l'aimantation tangente à ses bords.

Les domaines sont désorientés du fait de la compensation des directions des champs démagnétisant de ces domaines.

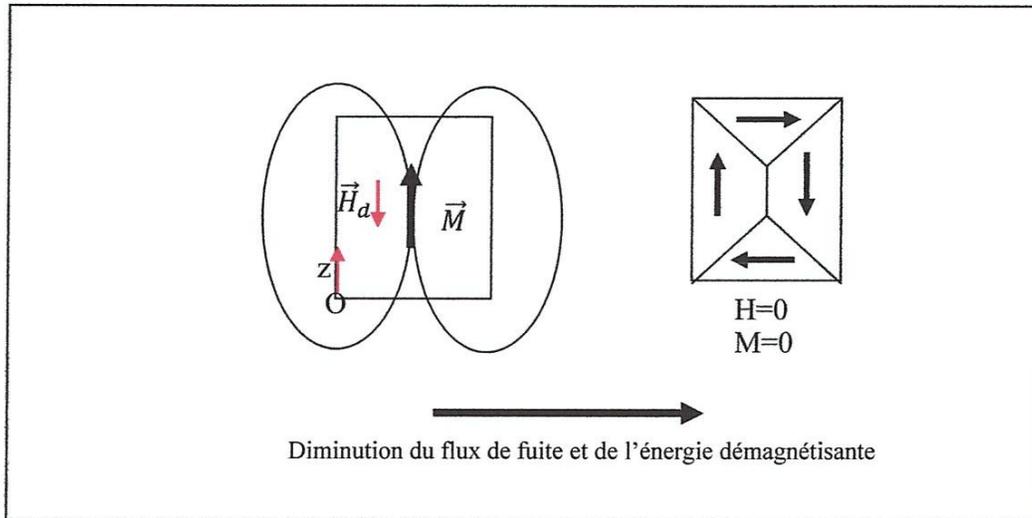


Figure 1.2. Structure en domaines d'un monocristal de fer

Lorsqu'un champ magnétique est appliqué à un monocristal, une énergie supplémentaire appelée énergie de Zeeman s'ajoute à l'énergie interne. Cette énergie a pour effet d'aligner l'aimantation avec le champ extérieur. Par conséquent, la structure en domaines évolue, entraînant une variation d'aimantation. Les parois se déplacent de façon à faire croître les domaines dont l'aimantation est alignée avec le champ au détriment des autres. C'est le mécanisme de déplacement de parois. Ce phénomène est suivi d'une rotation de l'aimantation qui tend à aligner cette dernière avec le champ appliqué.

1.2 PROCESSUS D'AIMANTATION

On suppose un échantillon de matériau ferromagnétique initialement désaimanté. Ce matériau contient des défauts dans son réseau cristallin. Ces défauts sont par exemple, des dislocations, des inclusions non magnétiques, joints de grains.... Ils vont être pour une bonne part dans la présence du phénomène qui nous intéresse.

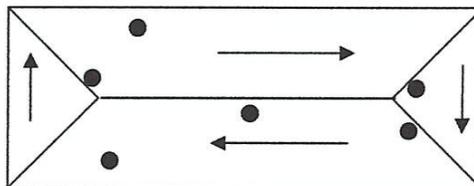


Figure 1.3 : Echantillon initialement désaimanté

Lors de l'aimantation de cet échantillon, trois processus différents peuvent se succéder en fonction de la valeur de l'excitation extérieure imposée [3].

1.2.1. Pour les faibles valeurs de l'excitation

Les domaines dont l'aimantation a une direction proche de celle du champ appliqué, vont croître. Cela se fait au détriment des autres domaines. Pour se faire, les parois vont se déplacer (glisser) jusqu'à rencontrer les défauts du matériau (Figure 1.4).

Ce processus est réversible, tant que les parois ne rencontrent pas d'obstacle. Il n'engendre pas de pertes magnétiques.

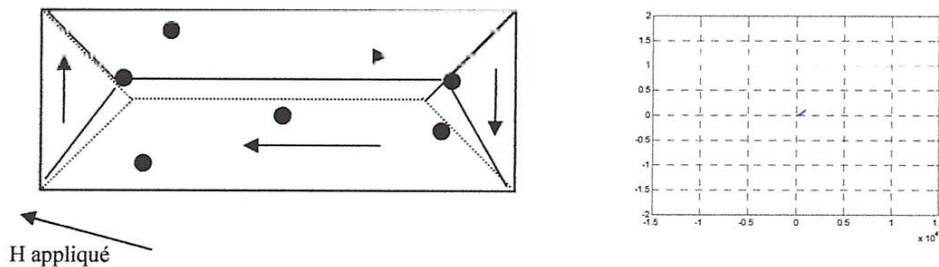


Figure 1.4. Déplacement des parois jusqu'à des zones de blocage

1.2.2. Pour les valeurs intermédiaires de l'excitation (zone fortement non réversible)

Pour ces valeurs de l'excitation, les parois continuent leur déplacement, afin d'augmenter le volume des domaines dont le moment est correctement orienté par rapport au champ appliqué. Elles commencent par se libérer de leurs points d'ancrage, se déplacent, puis, s'accrochent de nouveau,..., jusqu'à ce que tout le volume de l'échantillon soit occupé par le domaine dont l'aimantation a le sens le plus proche de l'excitation imposée. C'est dans cette zone que les pertes électromagnétiques sont les plus fortes.

La simple création ou disparition de parois (puisque lorsque tout le volume est occupé par le même domaine il n'y a plus de parois) est coûteuse en énergie et irréversible.

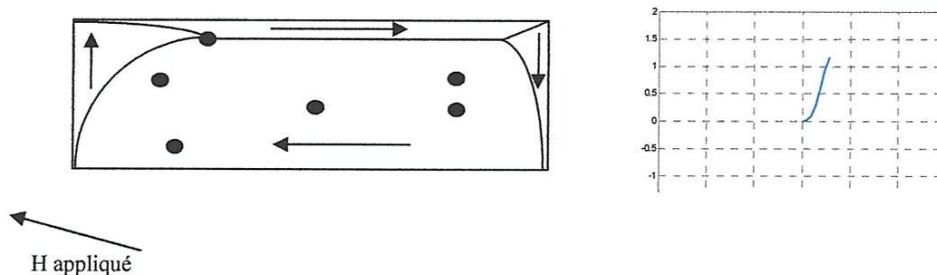


Figure 1.5. Zone d'accrochage/ décrochage de parois

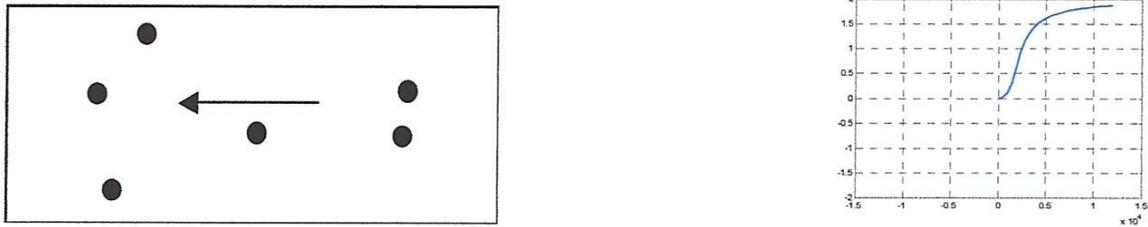


Figure 1.6. Zone de disparition de parois

1.2.3. Pour les fortes valeurs de l'excitation

Le dernier processus à avoir lieu est réversible, il s'agit de la rotation des moments. Lorsque l'échantillon est mono domaine, l'orientation de son aimantation n'est pas forcément celle de l'excitation appliquée. Afin d'orienter les moments, il faut vaincre l'énergie d'anisotropie cristalline.

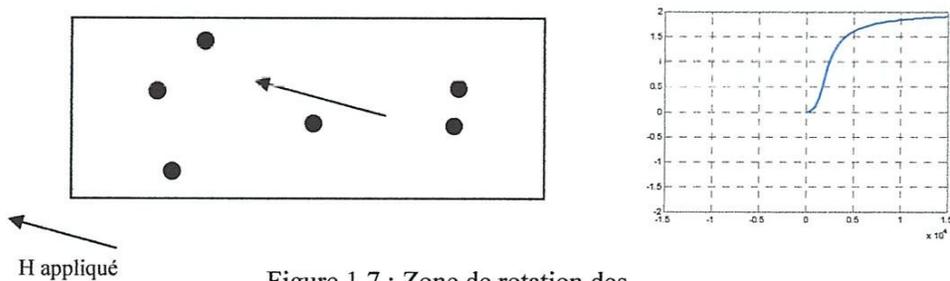


Figure 1.7 : Zone de rotation des moments

Ici on a atteint ce qu'on appelle l'aimantation à saturation de l'échantillon. C'est une caractéristique intrinsèque et fondamentale du matériau. Elle dépend de la température.

Nous avons à ce niveau décrit entièrement la première aimantation. L'échantillon est aimanté, il est dans son état de saturation haute, on peut par décroissance puis par inversion de l'excitation décrire la branche descendante du cycle majeur.

1.2.4. Branche descendante du cycle majeur

A ce stade, apparaît l'irréversibilité du phénomène. En effet, le passage par zéro de l'excitation se fera avec le retour de chacun des moments atomiques dans la direction de leur axe de facilité d'aimantation et la réapparition des domaines. On atteint alors l'aimantation rémanente.

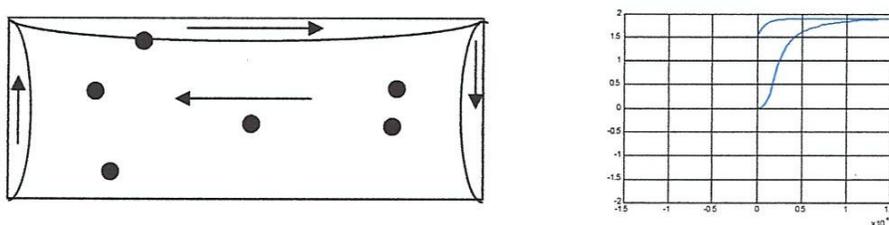


Figure 1.8. Retour au zéro d'excitation

Les étapes suivantes du parcours du cycle d'hystérésis majeur sont obtenues en imposant une excitation de même direction mais de sens contraire. Ensuite, comme précédemment, les parois vont se déplacer et s'accrochent aux défauts, puis se décrocher en avançant de nouveau. La valeur de l'excitation, sur le cycle majeur, pour laquelle l'aimantation passe par zéro est appelée excitation coercitive (notée H_c).

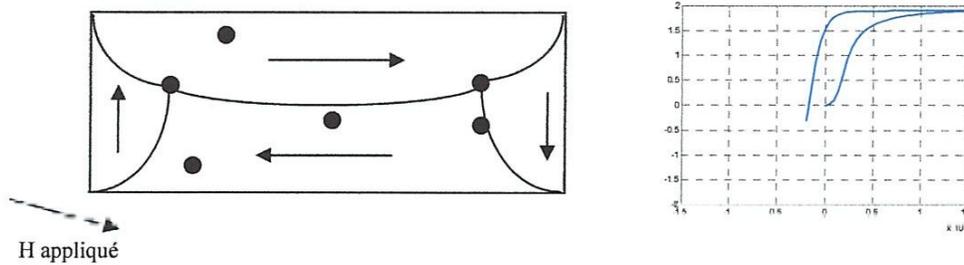


Figure 1.9. Passage par H_c

Les parois se déplacent jusqu'à disparaître de nouveau au profit du domaine de sens opposé à celui de la saturation haute précédemment évoquée.

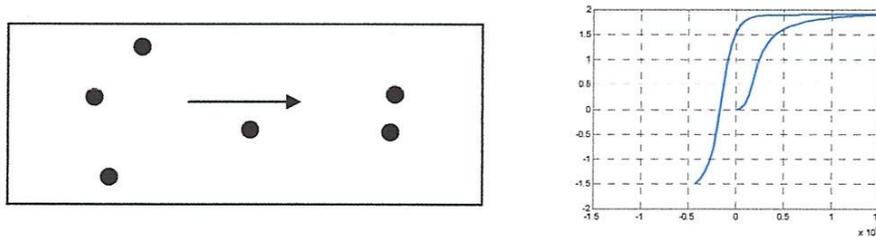


Figure 1.10. Disparition des parois avant saturation basse

Enfin, la dernière étape est de nouveau la rotation des moments. Cette nouvelle étape place l'échantillon dans son état de saturation basse. La branche montante du cycle d'hystérésis se parcourt en partant de cet état de saturation et en augmentant l'excitation. Elle permet de fermer le cycle majeur. Cette branche est parfaitement symétrique par rapport à la branche descendante.

Ce que nous venons de décrire est une représentation simplifiée du rôle joué par les parois dans le processus d'aimantation. Elle permet de se faire une idée assez précise du processus qui génère le comportement hystérétique du matériau.

1.3. CLASSIFICATION DES MATERIAUX FERROMAGNETIQUES

L'observation du cycle d'hystérésis permet de regrouper les matériaux ferromagnétiques en deux catégories :

1. Matériaux ferromagnétiques doux :

B_r plutôt élevée

H_c plutôt faible

Surface du cycle d'hystérésis faible

2. Matériaux ferromagnétiques durs :

B_r plutôt faible

H_c plutôt élevée

Surface du cycle d'hystérésis élevée

1.4. PERTES MAGNETIQUES

Lorsqu'on soumet un matériau à un champ magnétique, celui-ci emmagasine de l'énergie qu'il ne restitue pas complètement après démagnétisation : le matériau magnétique est donc le siège de pertes magnétique.

Dans la littérature, on décompose les pertes magnétiques en deux types : Les pertes par hystérésis (déplacement de parois) et les pertes par courant de Foucault

1.4.1 : Pertes par hystérésis

Il apparaît que, lors d'un parcours complet du cycle d'hystérésis, l'énergie fournie au noyau pour H croissant est plus importante que l'énergie récupérée pour H décroissant : cette différence constitue les pertes par hystérésis.

On montre que, sur un cycle complet, l'énergie que doit fournir le milieu extérieur pour parcourir un cycle d'hystérésis au sein du matériau, vaut par unité de volume (J/m^3) :

$$W = \oint H \cdot dB \quad (1.1)$$

Ce travail, convertit en chaleur par le processus d'aimantation, représente les pertes totales volumiques par cycle. On en déduit aussi que, sous l'action d'un champ extérieur périodique de fréquence f , la puissance moyenne totale dissipée (W/m^3) par le processus hystérétique est :

$$P_h = f \oint H dB \quad (1.2)$$

1.4.2 Pertes par courant induit

Une variation de flux magnétique induit une tension. Par conséquent, lorsqu'on utilise un matériau magnétique conducteur dans une application c'est à dire la variation de flux produits des courants de circulation au sein du matériau, proportionnels à la tension induite. La circulation de ces courants induits non désirés provoque un échauffement et donc des pertes qu'on appelle alors pertes par courants de Foucault.

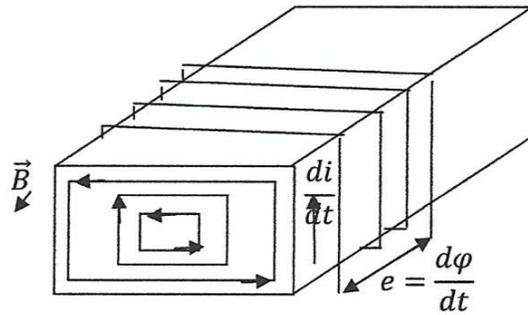


Figure 1.11. Apparition de courants induits dans un matériau magnétique

En régime dynamique, les courants de Foucault produisent un gonflement du cycle d'hystérésis. Sur la figure 1.12, un exemple de comportement dynamique de l'hystérésis est présenté.

Selon Bertotti [4], nous pouvons séparer les pertes totale en trois contributions telles que :

$$P_{moy} = P_h + P_c + P_e \tag{1.3}$$

Où P_h représente les pertes statiques par hystérésis, P_c représente les pertes classiques par courants induits macroscopiques et P_e représente la contribution des pertes par excès qui sont liées au comportement dynamique des parois.

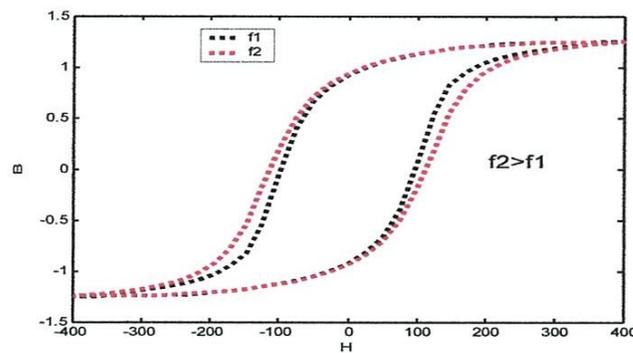


Figure 1.12. Cycle d'hystérésis en régime dynamique.

1.5. COMPORTEMENT THERMIQUE DU PHENOMENE D'HYSTERESIS

La température joue un rôle très important sur les paramètres qui caractérisent les matériaux magnétiques c'est à dire sur le cycle d'hystérésis [5]. La figure 1.13 montre l'évolution de ce dernier en fonction de la température [6]. On remarque qu'il y a une diminution de l'aimantation de saturation M_s , du champ coercitif H_c et de l'induction rémanente B_r , par conséquent la surface du cycle d'hystérésis.

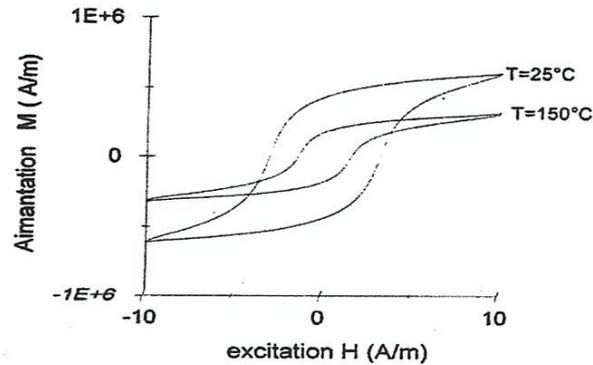


Figure 1.13. Evolution du cycle d'hystérésis en fonction de la température

1.5.1 Température de Curie

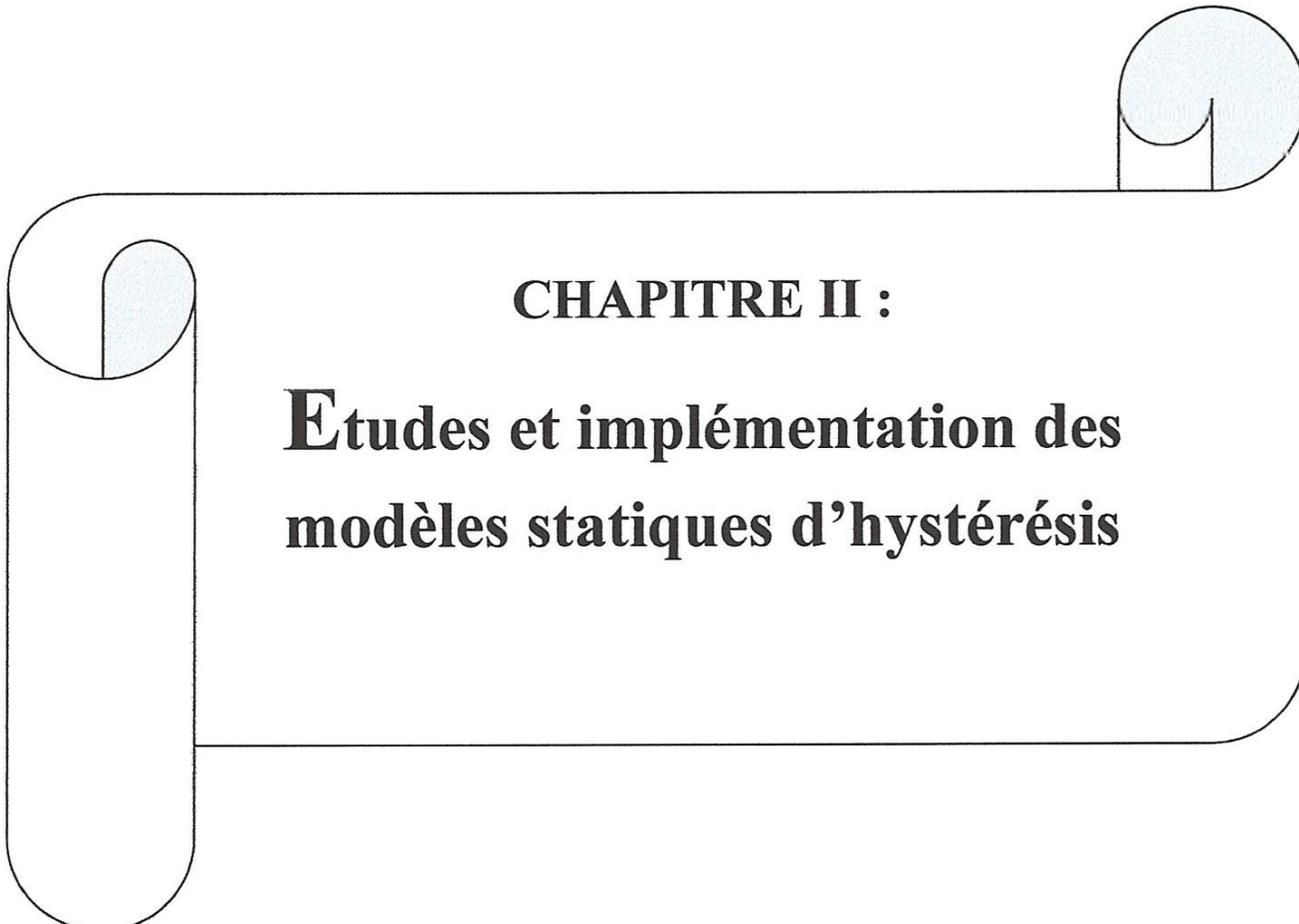
L'aimantation d'un matériau devient nulle à partir d'une certaine valeur de température appelée, température de Curie, dont les valeurs pour différents matériaux sont données sur le tableau 1.2.

Tableau 1.2 .Température de Curie

Elément	Fer (Fe)	Cobalt (Co)	Nickel (Ni)	Ferite (NiO)
Température de Curie (°C)	770	1120	360	220

CONCLUSION

Dans ce chapitre nous avons expliqué les origines du phénomène d'hystérésis magnétique, la variété et la complexité des processus conduisant à ce phénomène. Nous avons mis en évidence les différents paramètres qui caractérisent la forme du cycle d'hystérésis magnétique, les énergies mises en jeu, et qui expliquent les pertes par hystérésis. Enfin, nous avons abordé d'une manière succincte les différentes contraintes telles que la température susceptibles d'avoir une influence majeure sur la forme du cycle d'hystérésis et dont il est nécessaire de tenir compte lors d'une éventuelle modélisation.

A decorative graphic of a scroll with a light blue shaded interior and a black outline. The scroll is oriented horizontally, with the top edge curved upwards and the bottom edge curved downwards. The text is centered within the scroll.

CHAPITRE II :

Etudes et implémentation des modèles statiques d'hystérésis

INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous abordons la description de deux modèles statiques décrivant le phénomène d'hystérésis :

- le modèle de Preisach
- le modèle de Jiles-Antherton

Dans le cadre de ce chapitre, les conditions d'utilisation de ces modèles se réduisent à une étude en régime quasi-statique du comportement des matériaux magnétiques.

2.1. PRESENTATION DES MODELES

2.1.1 Modèle de Preisach

L'un des modèles les plus utilisés pour représenter l'hystérésis des matériaux magnétiques est incontestablement le modèle proposé par le physicien allemand Preisach dans les années 30 [7]. Son approche purement intuitive est basée sur l'observation du mécanisme d'aimantation.

2.1.1.1 Définition du modèle

Dans ce modèle, l'état magnétique du matériau à un instant donné est représenté par un ensemble d'entités magnétiques ayant deux états possibles ($M=+1$ ou $M=-1$) régies par un cycle élémentaire rectangulaire, dissymétrique par rapport à l'origine. Ce cycle est caractérisé par les champs de basculement haut α et bas β , avec $\beta \leq \alpha$, pour lesquels il y a transition irréversible de l'état bas ($M=-1$) vers l'état haut ($M=+1$) ou inversement. Un tel cycle élémentaire est représenté sur la figure 2.1

Le calcul de l'aimantation du matériau repose sur une distribution statistique des cycles élémentaires (ou opérateurs), dont les variables sont α et β . Soit $\rho(\alpha, \beta)$ cette fonction de distribution appelée aussi densité de Preisach. Elle ne dépend pas de l'état magnétique du matériau.

En appelant :

- $\rho(\alpha, \beta)$ la densité de Preisach,
- $\hat{\gamma}_{\alpha\beta} [H]$ l'opérateur associé à la particule admettant pour les champs de basculement α et β , valant (+1) dans l'état positif et (-1) dans l'état négatif,

l'aimantation $M(t)$, résultant de l'application du champ $H(t)$ à l'instant t , s'écrit dans le formalisme donné par Preisach :

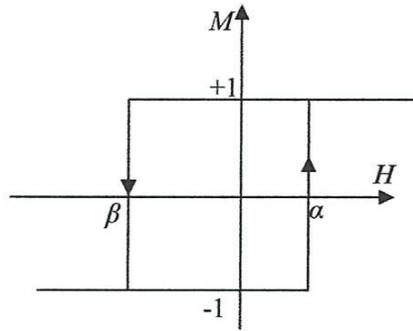


Figure 2.1. Cycle élémentaire d'une entité

$$M(t) = \iint \rho(\alpha, \beta) \hat{\gamma}_{\alpha\beta}[H(t)] d\alpha d\beta \quad (2.1)$$

2.1.1.2 Interprétation géométrique

La densité de Preisach $\rho(\alpha, \beta)$ caractérise le matériau. Nous avons vu qu'elle n'est définie que pour $\alpha \geq \beta$. De plus, pour une certaine valeur du champ H_s , le matériau est saturé et tous les opérateurs du modèle ont la même aimantation (+1 ou -1 suivant le signe de H_s). Ainsi, la densité de Preisach présente les propriétés suivantes :

- Elle est définie dans le domaine $S = \{\alpha \geq \beta, \beta \geq -H_s, \alpha \leq H_s\}$.
- Le cycle majeur étant symétrique, la densité est symétrique par rapport à la droite $\alpha = \beta$.
- Le cycle majeur étant fermé, la densité est bornée.

Le domaine S représente un triangle dans le plan cartésien $(\alpha\beta)$ appelé plan de Preisach (Figure 2.2).

S est subdivisé en deux parties dont la forme dépend du temps :

- $S^+(t)$ contient tous les opérateurs $\hat{\gamma}_{\alpha\beta}$ dans l'état +1,
- $S^-(t)$ contient tous les opérateurs $\hat{\gamma}_{\alpha\beta}$ dans l'état -1.

La relation (2.1) peut alors s'écrire :

$$M(t) = \iint_{S^+(t)} \rho(\alpha, \beta) d\alpha d\beta - \iint_{S^-(t)} \rho(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \quad (2.2)$$

Il apparaît clairement que l'aimantation $M(t)$ dépend uniquement de la répartition des domaines S , et plus précisément de la frontière $L(t)$, séparant les domaines $S^+(t)$ et $S^-(t)$. Cette frontière contient l'histoire du matériau et évolue avec les variations de champ.

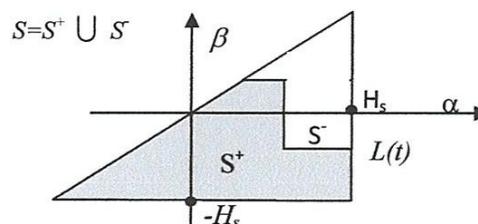


Figure 2.2. Plan de Preisach

2.1.1.3 Représentation équivalente

La densité de Preisach peut être étudiée de façon équivalente en fonction de α et β ou H_c et H_i . En effet, les entités composant le modèle sont souvent interprétées comme des particules magnétiques mono-domaines parfaites, chacune étant caractérisée par un champ coercitif H_c et soumis à un champ d'interaction H_i . Ce champ d'interaction est opposé au champ de dissymétrie du cycle élémentaire rectangulaire associé à chaque particule. Les deux grandeurs H_c et H_i sont définies par le système (2.3) et représentées sur la figure 2.3.

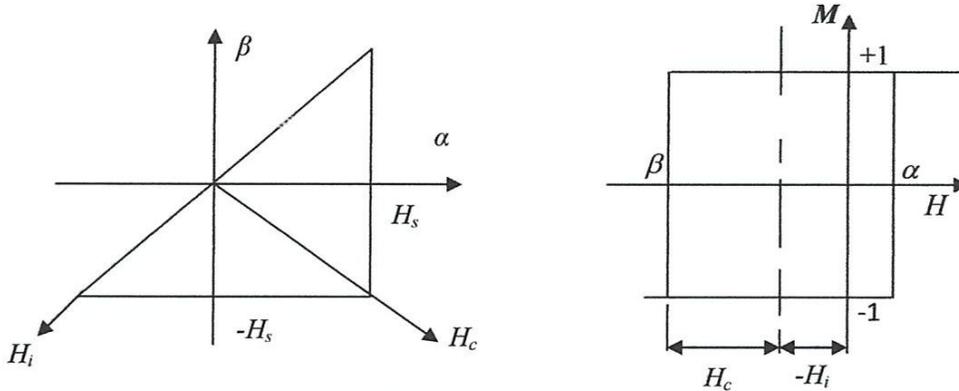


Figure. 2.3. Définition du cycle élémentaire et du plan de Preisach en fonction de H_c et H_i

$$\begin{cases} H_c = \frac{\alpha - \beta}{2} \\ H_i = \frac{\alpha + \beta}{2} \end{cases} \quad (2.3)$$

2.1.1.4 Principe du modèle

Aidons-nous de la représentation géométrique dans le plan de Preisach pour mieux comprendre le fonctionnement du modèle. Soit un matériau désaimanté ($H=0, M=0$) à l'instant $t=0$. Appliquons à l'instant t_1 un champ $H_1 > 0$, puis à l'instant $t_2 > t_1$ un champ $H_2 < H_1$.

D'après la relation (2.2) :

$$M(t) = 0 \Leftrightarrow \iint_{S^+(t)} \rho(\alpha, \beta) d\alpha d\beta = \iint_{S^-(t)} \rho(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \quad (2.4)$$

Compte tenu de la symétrie de $\rho(\alpha, \beta)$ par rapport à la droite $\alpha = -\beta$, l'état désaimanté admet comme frontière $L(0)$ dans le plan de Preisach la droite $\alpha = -\beta$ (Figure 2.4.1). Les deux domaines $S^+(0)$ et $S^-(0)$ sont superposables.

Supposons que l'on applique un champ positif H_1 , inférieur à H_s . Toutes les particules associées aux opérateurs $\hat{\gamma}_{\alpha\beta}$ tel que $\alpha \leq H_1$ basculent dans l'état 'haut' et $\hat{\gamma}_{\alpha\beta}$ vaut alors (+1) tandis que les autres particules restent dans leurs état initial. Dans le plan de Preisach, la frontière $L(t)$ présente un sommet en H_1 (figure 2.4.2) qui devient un état de l'histoire du matériau.

Appliquons maintenant un champ H_2 inférieur à H_1 . Deux cas se présentent :

- $H_2 < H_1$ et $|H_2| < |H_1|$

Toutes les particules associées à un opérateur $\hat{\gamma}_{\alpha\beta}$ et tel que $\beta \geq H_2$ basculent dans l'état bas et l'opérateur vaut (-1). La frontière $L(t)$ comporte alors deux sommets distincts correspondant à H_1 et H_2 , l'histoire étant elle aussi constituée de deux états $(H_1, M(H_1))$ et $(H_2, M(H_2))$ (figure 2.4.3).

- $H_2 < H_1$ et $|H_2| > |H_1|$

Le sommet H_1 disparaît de la frontière $L(t)$ qui ne comporte dès lors que le sommet H_2 . De la même façon, l'état $(H_1, M(H_1))$ est effacé de l'histoire du matériau (Figure 2.4.4).

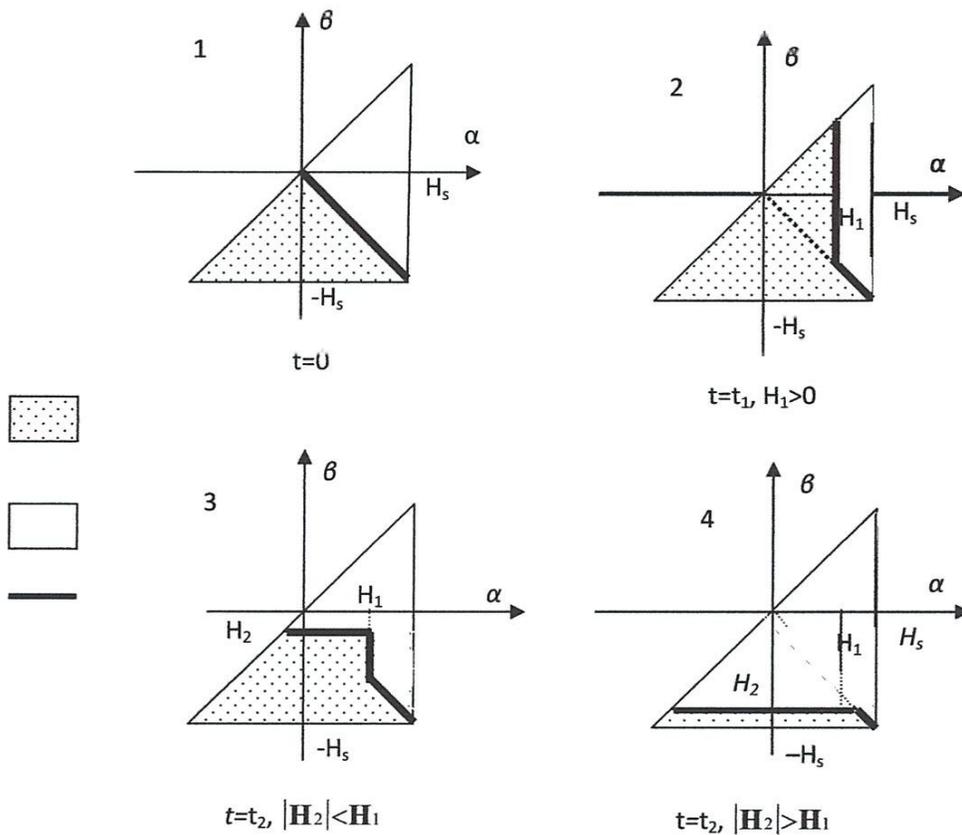


Figure 2.4. Evolution de la frontière $L(t)$ dans le plan de Preisach

Le même raisonnement peut s'étendre aux champs qui sont ensuite appliqués. En particulier, si à partir de la figure 2.4.3, le nouveau champ appliqué vaut H_1 , le plan de Preisach résultant se trouve dans la même configuration que celui de la figure 2.4.2

La frontière $L(t)$ qui sépare les deux domaines $S^+(t)$ et $S^-(t)$ est une ligne polygonale composée de segments perpendiculaires aux axes, et dont les sommets représentent les coordonnées (α, β) des points de rebroussement constituant l'histoire du matériau. Les segments horizontaux résultent de l'application de champs décroissants tandis que les segments verticaux correspondent à

l'application de champs croissants. L'aimantation est donc complètement déterminée par l'histoire et l'état initial (saturé positif, négatif ou désaimanté) du matériau.

Ainsi, l'évolution de la configuration magnétique d'un matériau soumis à différents champs peut être aussi bien étudiée à partir des cycles $M(H)$ qu'à partir du plan de Preisach. La figure 2.5 montre les deux représentations pour une série de champs d'amplitude décroissante, appliquée à partir de l'état saturé négativement.

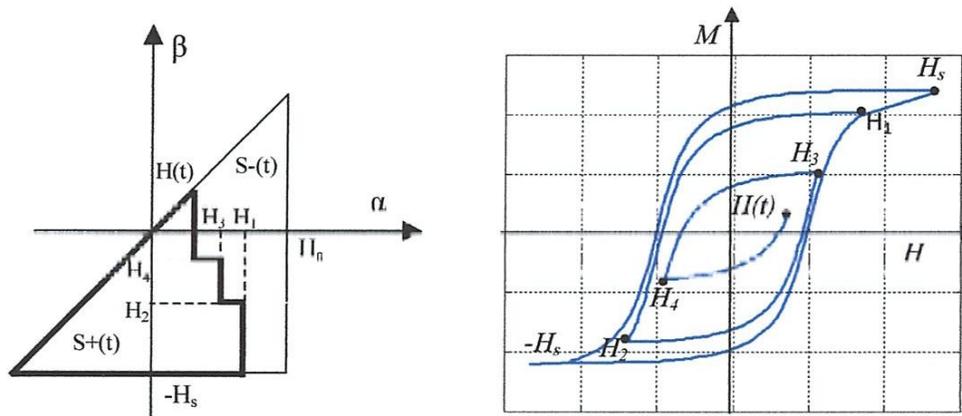


Figure 2.5. Représentation dans le plan de Preisach et dans le plan (HOM) de l'aimantation $M(0, H_s, -H_s, H_1, H_2, H_3, H_4, H(t))$

2.1.1.5 Propriétés du modèle

L'étude précédente permet de déduire deux propriétés importantes du modèle [8-9] :

Certains des états magnétiques atteints peuvent disparaître de l'histoire. En effet, l'application d'un champ H élimine les états antérieurs (α_i, β_i) tels que $\alpha_i \leq H$ ou $\beta_i \geq H$. En particulier, l'application d'un champ supérieur ou égal au champ de saturation H_s du matériau efface tous les états de l'histoire. C'est la propriété d'effacement partiel.

Afin d'illustrer cette propriété, reprenons la figure 2.4.4 en supposant que le champ appliqué H_4 est supérieur à H_2 en valeur absolue. Les configurations du plan de Preisach et du plan (HOM) obtenues après application de la même série du champ appliqué sont représentées sur la figure 2.6.

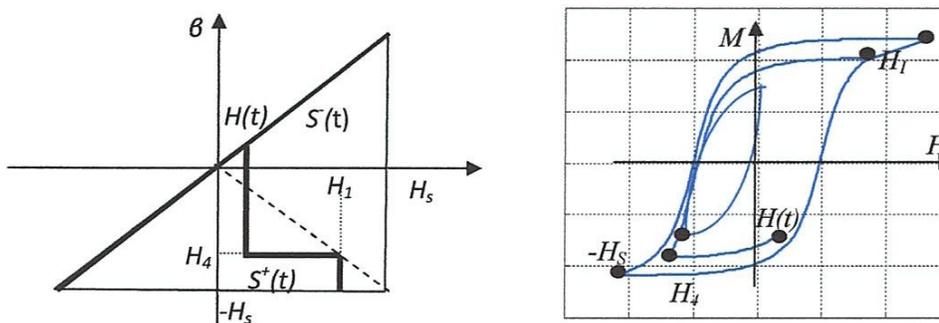


Figure 2.6. Représentation dans le plan (HOM) et dans le plan de Preisach

Cette propriété a pour conséquence la stabilité des cycles mineurs.

La seconde propriété est la propriété de congruence des cycles mineurs. Tous les cycles mineurs ayant pour champs extrêmes H_1 et H_2 sont congruents au sens géométrique c'est à dire que, quel que soit l'état magnétique antérieur, les cycles mineurs obtenus sont superposables (figure 2.7).

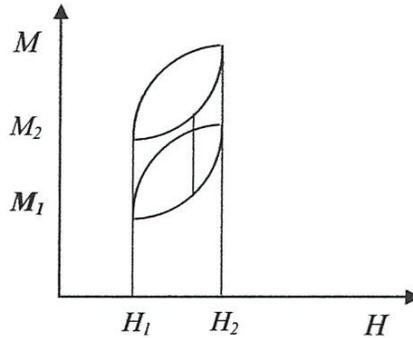


Figure 2.7. Cycles mineurs congruents

Dans les années 50, le mathématicien russe Kravoselskii [10], convaincu que ce modèle contenait une idée mathématique originale, l'a dissocié de son aspect physique pour en dégager une théorie très générale et purement mathématique, applicable à tout problème physique de nature quelconque comportant des propriétés hystérétiques. Il a ainsi révélé la nature phénoménologique de ce modèle. Mayergoz a poursuivi cette étude et a clairement défini les conditions d'utilisation du modèle. Il a ainsi démontré que les deux propriétés énoncées ci-dessus constituent des conditions nécessaires et suffisantes pour représenter un problème hystérétique par le modèle de Preisach [11].

2.1.1.6 Détermination de la fonction de distribution $\rho(\alpha, \beta)$

La définition complète du modèle de Preisach nécessite la détermination de la fonction de distribution de Preisach. Elle est nécessaire pour calculer l'aimantation finale de l'échantillon ferromagnétique décrite par l'équation (2.1). Deux orientations de recherche ont été suivies pour identifier, la première à partir d'un seul ou d'un ensemble de cycles expérimentaux [12-13], la seconde est d'essayer de l'approcher par une expression analytique [14].

2.1.2. Modèle de Jiles-Atherton

Le modèle de Jiles-Atherton est un modèle qui, contrairement au modèle de Preisach, décrit l'origine du phénomène d'hystérésis dans les matériaux ferromagnétiques à partir d'une approche physique [15]. Cette description est essentiellement basée sur des considérations énergétiques liées aux déplacements de parois au sein du système magnétique [16-17].

2.1.2.1 Définition

a. L'aimantation anhystérétique

La théorie de Langevin pour les matériaux magnétiques donne l'aimantation qui résulte de l'orientation des moments magnétiques suivant la direction du champ magnétique appliqué :

$$M_{an} = M_s \left(\coth \left(\frac{H}{a} \right) - \left(\frac{a}{H} \right) \right) \quad (2.5)$$

Où M_s représente l'aimantation à saturation, H est le champ appliqué et a (A/m) est un paramètre qui caractérise la pente de l'aimantation anhystérétique.

Pour les matériaux ferromagnétiques, on considère qu'il existe un champ interne (champ moléculaire de Weiss). Il est alors nécessaire, pour obtenir l'équation de l'aimantation anhystérétique (équation (2.7)) de corriger l'équation (2.5) en remplaçant le champ H par le champ d'excitation effectif H_e donné par :

$$H_e = H + \alpha M \quad (2.6)$$

Dans ce cas, la relation anhystérétique prend la forme :

$$M_{an} = M_s \left(\coth \left(\frac{H_e}{a} \right) - \left(\frac{a}{H_e} \right) \right) \quad (2.7)$$

b. L'aimantation

Pour décrire correctement le processus d'aimantation dans les matériaux ferromagnétiques, Jiles et Atherton ont décomposé l'aimantation M en deux composantes, la première est la composante irréversible M_{irr} et la seconde la composante réversible M_{rev} .

$$M = M_{irr} + M_{rev} \quad (2.8)$$

• Composante irréversible de l'aimantation

Nous considérons d'abord, des parois de Bloch planes et rigides (figure 2.8) qui subissent le processus d'accrochage-déaccrochage sur les sites d'ancrage lors de leurs déplacements. La densité d'énergie dissipée par ce processus est ensuite calculée pour une densité uniforme des sites d'ancrage de même nature [15].

L'expression de l'énergie magnétisante est obtenue à partir de la différence entre l'énergie associée au comportement anhystérétique et les pertes dues au processus d'ancrage des parois. Par conséquent, la susceptibilité différentielle associée au processus irréversible de l'aimantation après quelques manipulations mathématiques [15], peut être écrite comme suit:

$$\frac{dM_{irr}}{dH_e} = \left(\frac{M_{an} - M_{irr}}{k\delta} \right) \quad (2.9)$$

Où la constante k est lié à la densité d'énergie moyenne d'ancrage des parois. Le paramètre $\delta = 1 \pm$ prend la valeur +1 quand $\frac{dH}{dt} > 0$ et la valeur -1 quand $\frac{dH}{dt} < 0$.

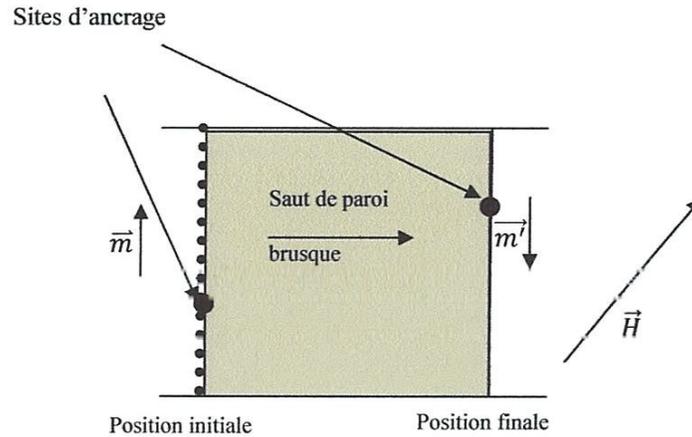


Figure.2.8. Saut brusque de parois sous l'action d'un champ extérieur

• **Composante réversible de l'aimantation**

Maintenant nous considérons que les parois peuvent se déformer sur les sites d'ancrage sous l'action du champ appliqué (figure 2.9), une nouvelle contribution est ajoutée au processus d'aimantation. Ainsi, la déformation des parois est associée au processus réversible de l'aimantation.

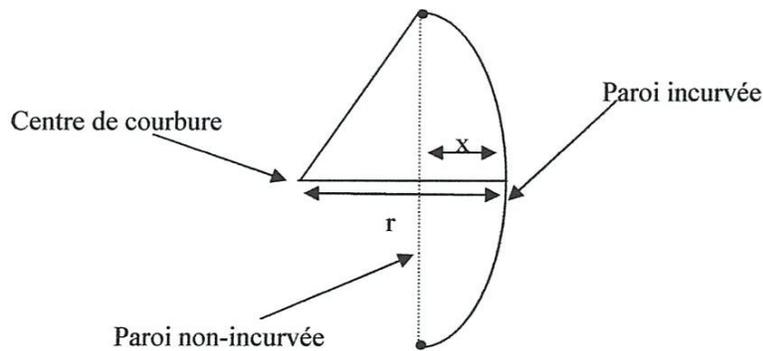


Figure 2.9. Déformation réversible d'une paroi sous champ extérieur

Après quelques hypothèses sur la déformation d'une paroi [15], Jiles et Atherton montrent que l'aimantation réversible est proportionnelle à la différence $(M_{an} - M_{irr})$.

$$M_{rev} = c(M_{an} - M_{irr}) \quad (2.10)$$

où c est un coefficient de réversibilité tel qu'il est $\in [0, 1]$.

c. Equation du modèle de Jiles-Atherton

En recombinaison l'équation (2.10) dans l'expression (2.8), nous pouvons écrire :

$$M = M_{irr} + c(M_{an} - M_{irr}) \quad (2.11)$$

Enfin, en différenciant cette expression par rapport à H et sachant que :

$$\frac{dM_{an}}{dH} = \frac{dM_{an}}{dH_e} \left(1 + \alpha \frac{dM}{dH} \right) \quad (2.12)$$

$$\frac{dM_{irr}}{dH} = \frac{dM_{irr}}{dH_e} \left(1 + \alpha \frac{dM}{dH} \right) \quad (2.13)$$

Nous obtenons l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dM}{dH} = \frac{(1-c) \frac{dM_{irr}}{dH_e} + c \frac{dM_{an}}{dH_e}}{1 - \alpha c \frac{dM_{an}}{dH_e} - \alpha(1-c) \frac{dM_{an}}{dH_e}} \quad (2.14)$$

Il s'agit de l'équation différentielle du modèle de Jiles-Atherton $M(H)$. L'expression de $\frac{dM_{irr}}{dH_e}$ est donnée par l'équation (2.9) et la dérivée de l'aimantation anhystérique par rapport au champ effectif est :

$$\frac{dM_{an}}{dH_e} = \frac{M_s}{a} \left[1 - \coth^2 \left(\frac{H_e}{a} \right) - \left(\frac{a}{H_e} \right)^2 \right] \quad (2.15)$$

Dans ce modèle, cinq paramètres c, a, α, k et M_{sat} doivent être déterminés.

2.1.2.2. Détermination des paramètres du modèle de Jiles-Atherton

La génération du cycle d'hystérésis suppose une connaissance exacte des paramètres du matériau. Il faut alors les déterminer à partir de quelques points de mesures. Une méthode d'identification de ces paramètres a été développée par Jiles [16].

2.1.2.2.1. Détermination de M_s

C'est le paramètre le plus simple à identifier ; dans la plupart des cas il est donné par le constructeur. Sinon, il suffit d'appliquer un champ magnétique suffisamment élevé et de mesurer ensuite l'aimantation de saturation correspondante.

2.1.2.2.2. Détermination de c

L'aimantation réversible due aux déplacements réversibles des parois est déterminée à l'aide du paramètre c . Il est défini par (2.16) comme étant le rapport entre la susceptibilité initiale χ'_{in} du matériau et sa susceptibilité anhystérique initiale χ'_{an} . L'hypothèse de calcul, est que, la dérivée de l'aimantation irréversible par rapport au le champ magnétique autour de l'origine est nulle.

$$c = \frac{(dM/dH)_{M=0}^{H=0}}{(dM_{an}/dH)_{M=0}^{H=0}} = \left(\frac{\chi'_{in}}{\chi'_{an}} \right) = \frac{3a}{M_s} \chi'_{in} \quad (2.16)$$

2.1.2.2.3. Relation entre a et α

D'après Jiles les deux paramètres a et α ne peuvent être définis que l'un en fonction de l'autre à partir de la susceptibilité anhystérétique initiale. Cette dernière est définie par la relation (2.17).

$$\chi'_{an} = \lim_{H \rightarrow M} \left(\frac{dM_{an}}{dH} \right) = \frac{M_s}{3a - \alpha M_s} \quad (2.17)$$

On peut déduire donc :

$$a = \frac{M_{sat}}{3} \left(\frac{1}{\chi'_{an}} + \alpha \right) \quad (2.18)$$

2.1.2.2.4. Détermination du paramètre α

On peut utiliser la valeur de l'aimantation rémanente M_r pour déterminer α . La relation reliant M_r et α est donnée par la relation (2.19) :

$$M_r = M_{an}(M_r) + k \left[\left(\frac{\alpha}{1-c} \right) + \left(\chi'_r - c \frac{dM_{an}(M_r)}{dH} \right)^{-1} \right]^{-1} \quad (2.19)$$

où χ'_r est la susceptibilité différentielle du matériau définie au point $H = 0$ et $M = M_r$.

2.1.2.2.5. Détermination du paramètre k

Pour des matériaux ferromagnétiques, k peut être considéré comme étant le champ coercitif [16] dont l'unité est A/m.

L'expression de k est donnée par :

$$k = \frac{M_{an}(H_c)}{1-c} \left(\alpha + \frac{1-c}{\chi'_c - c \frac{dM_{an}(H_c)}{dH}} \right) \quad (2.20)$$

Où, χ'_c est la susceptibilité différentielle coercitive.

2.1.2.2.6. Relation entre les paramètres de Jiles-Atherton et le point de saturation

Pour le processus de calcul des paramètres a et α , Jiles a trouvé judicieux d'intégrer les coordonnées du point de saturation définis par (H_m, M_m) et la susceptibilité correspondante χ'_m . Si le point de fermeture du cycle est au voisinage de la saturation, alors la susceptibilité différentielle définie à partir de l'aimantation totale est équivalente à celle définie à partir de l'aimantation anhystérétique, et on peut écrire ;

$$\frac{dM}{dH} \approx \frac{dM_{an}(H_m)}{dH} \approx \frac{dM_{irr}}{dH} \quad (2.21)$$

Au voisinage de la saturation $M_{irr} \cong M_m$ on a :

$$\chi'_m = \frac{(M_{an}(H_m) - M_m)}{k - \alpha(M_{an}(H_m) - M_m)} + c \left(\frac{dM_{an}(H_m)}{dH} - \frac{dM_{irr}(H_m)}{dH} \right) \quad (2.22)$$

En combinant (2.21) et (2.22), on abouti à la relation entre les paramètres du modèle de J-A et la susceptibilité de saturation :

$$\chi'_m = \frac{M_{an}(H_m) - M_m}{k - \alpha(M_{an}(H_m) - M_m)} \quad (2.23)$$

Ceci nous conduit à :

$$M_m = M_{an}(H_m) - \frac{k\chi'_m}{1 + \alpha\chi'_m} \quad (2.24)$$

2.1.2.2.7. Mise en œuvre d'un algorithme des paramètres α , a , c et k

Etant donné que certains paramètres sont exprimés implicitement en fonction des autres, un calcul numérique itératif s'impose pour les extraire. Alors, J-A a élaboré un algorithme permettant de définir ces paramètres à partir de quelque point de mesure. Cet algorithme consiste à déterminer le coefficient c à partir de la courbe de première aimantation par (2.16). Tandis que les paramètres (a , α et k) peuvent être obtenus successivement par (2.18), (2.19) et (2.20). Une valeur aléatoire de α est utilisée pour la première itération de calcul. Ce processus de calcul est représenté par l'organigramme suivant.

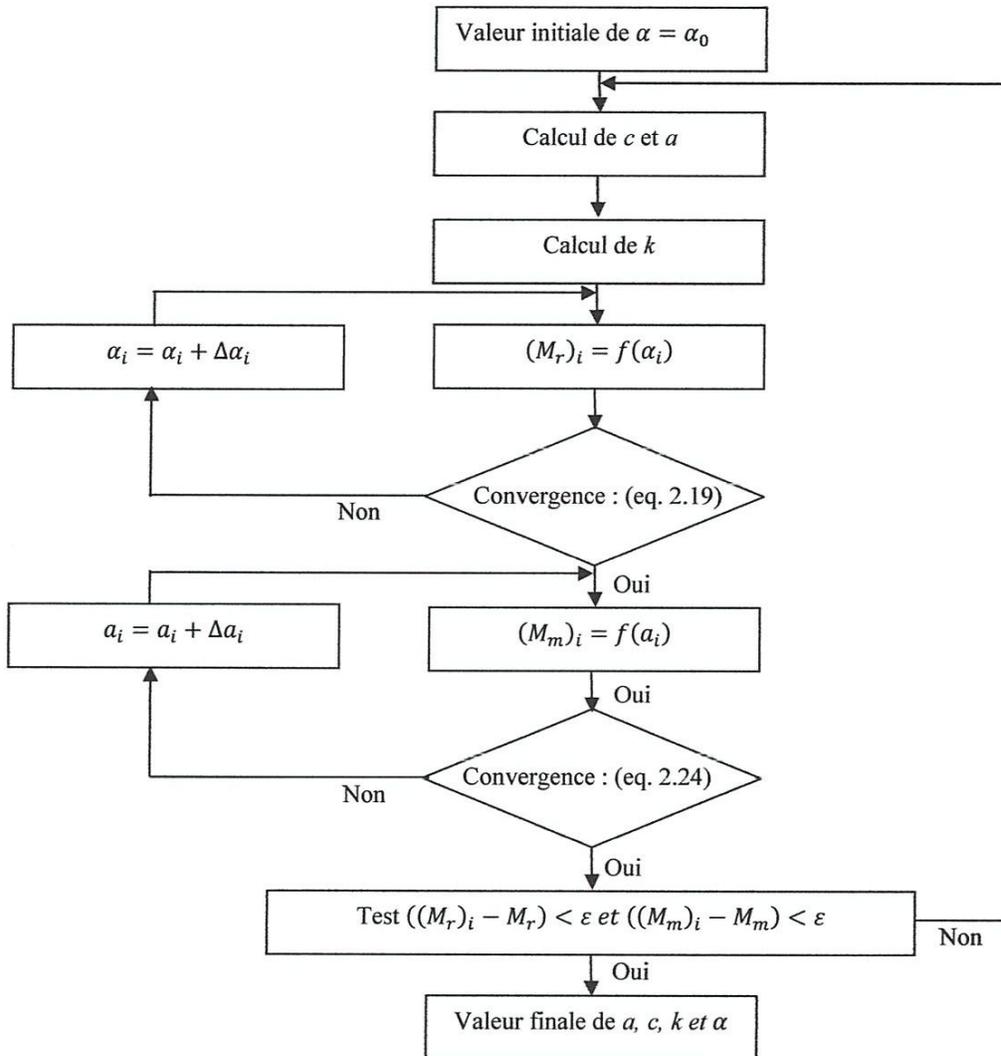


Figure 2.10. Organigramme de calcul des paramètres du modèle de J-A

2.2. SIMULATION NUMIRIQUE DE L'HYSTERESIS MAGNETIQUE

L'organigramme de la figure 2.11 résume les différentes étapes pour la construction du cycle statique du modèle de Jiles-Atherton. A l'aide de cet organigramme on peut réaliser un programme de calcul sous environnement Matlab qui permet de générer des cycles d'hystérésis, ce programme est basé sur la méthode d'Euler pour la résolution de l'équation différentielle donnant l'aimantation globale du matériau. La figure (2. 12) représente l'aimantation anhystérétique, la figure (2.13) montre la composante irréversible de l'aimantation, et la figure (2.14) représente la composante réversible. La figure (2.15) montre le cycle majeur du phénomène d'hystérésis pour $M_s=1.7.10^6$ A/m, $k=2000$ A/m, $c=0.1$, $a=1000$ et $\alpha=0.0017$.

INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous présentons les modèles d'hystérésis dynamiques pour étudier les matériaux en régime dynamique. Dans ce cas, la forme du cycle d'hystérésis ne dépend plus seulement des extrêmes du champ mais aussi de son taux de variation temporel. Ainsi, nous notons un gonflement du cycle en fonction de la fréquence

3.1. MODELE DYNAMIQUE DE HODGDON

Le modèle de Hodgdon est décrit par une relation entre B et H , définie par une équation différentielle [18].

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \alpha \left| \frac{\partial H}{\partial t} \right| (f(H) - B) + \frac{\partial H}{\partial t} g(H) \quad (3.1)$$

Où α est une constante positive.

En utilisant la perméabilité différentielle μ_d , l'équation (3.1) devient ;

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \begin{cases} \alpha(f(H) - B) + g(H) & \text{si } \frac{\partial H}{\partial t} > 0 \\ -\alpha(f(H) - B) + g(H) & \text{si } \frac{\partial H}{\partial t} < 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Les fonctions f et g définissent la structure du modèle pour que les solutions de (3.1) soient hystérétiques il faut que ces fonctions remplissent les conditions suivantes.

- ✓ f doit être une fonction impaire, continue par morceau, monotone croissante différentiable, telle que sa dérivée seconde admette une limite finie lorsque H tend vers l'infini.
- ✓ g doit être une fonction paire, continue par morceau.

En intégrant (3.2), l'induction magnétique sur les branches montante (3.3) et descendante (3.4) du cycle majeur sous les conditions initiales B_0 et H_0 sera donnée par :

$$B^+(H) = f(H) + [B_0 - f(H_0)] \exp(-\alpha(H - H_0)) + \exp[-\alpha H \int_{H_0}^H (g(\xi) - f'(\xi)) \exp(\alpha\xi) d\xi] \text{ si } H < H_0 \quad (3.3)$$

$$B^-(H) = f(H) + [B_0 - f(H_0)] \exp(\alpha(H - H_0)) - \exp[\alpha H \int_{H_0}^H (g(\xi) - f'(\xi)) \exp(-\alpha\xi) d\xi] \text{ si } H > H_0 \quad (3.4)$$

Où B^+ est la solution générale obtenue pour une évolution croissante à partir de l'état initial et B^- est la solution générale obtenue pour une évolution décroissante à partir de l'état initial.

Des résultats satisfaisants sont obtenus avec les fonctions $f(H)$ et $g(H)$ pour la génération du cycle d'hystérésis tel que :

$$f(H) = \begin{cases} b_1 \tan^{-1} \left(\frac{H_s}{b_2} \right) + \mu_0 (H - H_s) & \text{si } H > H_s \\ b_1 \tan^{-1} \left(\frac{H}{b_2} \right) & \text{si } |H| < H_s \\ -b_1 \tan^{-1} \left(\frac{H_s}{b_2} \right) + \mu_0 (H + H_s) & \text{si } H < -H_s \end{cases} \quad (3.5)$$

Et

$$g(H) = \begin{cases} f'(H) = \left[1 - b_3 \exp \left(-\frac{b_4 |H|}{H_s - |H|} \right) \right] & \text{si } H < -H_s \\ f'(H) & \text{si } |H| > H_s \end{cases} \quad (3.6)$$

Avec b_1 , b_2 , b_3 et b_4 des coefficients déterminées à partir de relevés expérimentaux sur cycle d'hystérésis mesuré, ces points sont l'aimantation rémanente définie au point $(0, B_r)$, le champ coercitif défini au point $(H_c, 0)$ et l'aimantation spontanée (H_s, B_s) , on obtient le système d'équation suivant (3.7):

$$\begin{cases} b_1 = \frac{2B_s}{\pi} \\ b_2 = \left(\frac{\mu_s \pi H_s^2}{2B_s - \mu_s \pi} \right) \\ b_3 = 1 + \frac{\alpha B_r - \mu_r}{f'(0)} \\ b_4 = \frac{H_s - H_c}{H_c} \ln \frac{b_3 f(H_c)}{\alpha f(H_c) + f'(H_c) - \mu_c} \end{cases} \quad (3.7)$$

Pour avoir l'effet de la fréquence du champ d'excitation sur le cycle d'hystérésis [39], en remplaçant $g(H)$ par $\tilde{g} \left(H, \frac{\partial H}{\partial t} \right)$ dans l'équation (3.1), on obtient :

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \alpha \left| \frac{\partial H}{\partial t} \right| (f(H) - B) + \frac{\partial H}{\partial t} \tilde{g} \left(H, \frac{\partial H}{\partial t} \right) \quad (3.8)$$

où

$$\tilde{g}(H) = \begin{cases} f'(H) \left[1 - b_3 c \left(\frac{\partial H}{\partial t} \right) \exp \left(-b_4 \frac{|H|}{H_s - |H|} \right) \right] & \text{si } |H| < H_s \\ f'(H) & \text{si } |H| > H_s \end{cases} \quad (3.9)$$

Avec $c \left(\frac{\partial H}{\partial t} \right)$ est une fonction donné par :

$$c(\dot{H}) = \begin{cases} 1 + c_1 |\dot{H}| & \text{si } \dot{H} < \dot{H}_1 \\ c_1 \dot{H}_1 + c_2 (|\dot{H}| - \dot{H}_1) & \text{si } \dot{H}_1 < \dot{H} < \dot{H}_2 \\ 1 + c_1 + c_2 (\dot{H}_2 - \dot{H}_1) + c_3 (|\dot{H}| - \dot{H}_2) & \text{si } \dot{H}_2 < |\dot{H}| \end{cases} \quad (3.10)$$

La difficulté de ce modèle réside dans la détermination des coefficients de $c(\dot{H})$. En effet Hodgdon n'a pas défini de méthode de calcul des paramètres c_1 , c_2 et c_3 , ce qui rend le modèle relativement inapplicable.

3.2. MODELE DE PREISACH DYNAMIQUE

Le modèle a été proposé par Bertotti en 1992 [19], où il a introduit le concept d'objet magnétique (O.M.) dans sa théorie statistique sur le mouvement des parois de Bloch.

3.2.1 Théorie de Bertotti

Les parois de Bloch ne se déplacent pas de manière totalement indépendante dans les matériaux ferromagnétiques. En effet, ces parois ont tendance à se déplacer en groupes à cause de certaines corrélations internes d'origine magnétostatique. Ainsi, Bertotti désigne par Objet Magnétique (O.M) un ensemble de parois ayant le même comportement dynamique.

Bertotti a appliqué le modèle de Kittel [20] dans sa théorie statistique, qui est associé au mouvement d'une paroi, à un O.M. Il a supposé que l'ensemble des parois est aléatoirement distribué dans la structure magnétique. Ainsi, l'évolution d'une paroi au sein de la structure entraîne une variation de flux locale telle que :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{\sigma G} [H_{surf}(t) - H_{hyst} - H_i(t)] \quad (3.11)$$

Cette équation montre la contribution de deux champs H_{hyst} et $H_i(t)$, le premier est lié aux phénomènes statiques d'hystérésis et le second est lié aux courants induits moyens. $H_{surf}(t)$ représente le champ d'excitation en surface de la tôle, comme présenté dans le modèle de Kittel. Le facteur G est un coefficient d'amortissement sans dimension, il détermine la proportionnalité entre la pression agissant sur la paroi mobile et la variation de flux correspondante.

L'hypothèse sur la répartition aléatoire des parois est valable dans le cas des tôles à grains orientés. En effet, l'espacement entre les grains étant généralement plus grand que l'épaisseur de la tôle, une paroi peut être assimilée à un O.M. pour lequel la relation (3.11) reste valable. Par contre, pour des tôles à grains non orientés, étant donnée la finesse de la structure en domaines, un O.M. est constitué de plusieurs parois magnétiquement corrélées et qui interagissent entre-elles dans une région limitée de la section de la tôle. Ce groupe de parois est appelé Groupe de Barkhausen (G.B.). Une étude statistique montre que ce type de matériau obéit aussi à la loi (3.11) mais à condition de considérer un coefficient d'amortissement différent. En effet, en associant à chaque G.B. un coefficient d'amortissement G^{GB} et en supposant une distribution aléatoire de ces G.B., l'équation (3.11) devient :

$$\frac{\partial \varphi^{GB}}{\partial t} = \frac{1}{\sigma G^{GB}} [H_{surf}(t) - H_{hyst} - H_i(t)] \quad (3.12)$$

Où G^{GB} est une fonction compliquée de la structure interne du Groupe de Barkhausen ($G \leq G^{GB} \leq 0.5$). Par analogie avec l'équation (3.1), nous constatons que c'est le Groupe de Barkhausen qui joue le rôle d'un Objet Magnétique. Bertotti généralise les deux cas précédents, équations (3.11) et (3.12), en associant à chaque O.M. un coefficient d'amortissement généralisé G' . On montre que $G' \cong G$ et les O.M. étant supposés distribués aléatoirement dans la section, nous avons l'équation généralisée suivante :

$$\frac{\partial \varphi^{OM}}{\partial t} = \frac{1}{\sigma G} [H_{surf}(t) - H_{hyst} - H_i(t)] \quad (3.13)$$

Nous allons introduire le modèle de Preisach étendu à la dynamique à partir de cette expression.

3.2.2 Introduction du modèle dynamique de Preisach

Dans le modèle de Preisach statique, les commutateurs γ_{ab} basculent instantanément. Dans la théorie de Bertotti, un O.M. est lié à chaque cycle élémentaire. La variation de flux d'un tel O.M. est montrée dans la loi (3.13). L'expression de l'aimantation devient :

$$M(t) = M_{sat} \iint \rho(\alpha, \beta) \cdot \varphi(\alpha, \beta, t) d\alpha d\beta \quad (3.14)$$

Dans ce modèle, les commutateurs ont une pente finie (figure 3.1) et la variation temporelle du flux est décrite par une expression similaire à celle donnée par l'équation (3.13) :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = k[H(t) - \alpha] \text{ pour } H(t) \geq \alpha \text{ et } \varphi(\alpha, \beta, t) \leq +1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} = k[H(t) - \beta] \text{ pour } H(t) \leq \beta \text{ et } \varphi(\alpha, \beta, t) \geq -1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \end{cases} \quad \text{sinon} \quad (3.15)$$

Le paramètre k donné par [43] :

$$k = \frac{N_0}{\sigma GSM_s} \quad (3.16)$$

avec S la section de la tôle, σ la conductivité, N_0 le nombre d'O.M. dans la section de la tôle et M_s l'aimantation à saturation.

L'aimantation totale est réécrite sous la forme :

$$M(t) = M_{sat} \iint_{S_+(t)} \rho(\alpha, \beta) \varphi(\alpha, \beta, t) d\alpha d\beta + M_{sat} \iint_{S_-(t)} \rho(\alpha, \beta) \varphi(\alpha, \beta, t) d\alpha d\beta \quad (3.17)$$

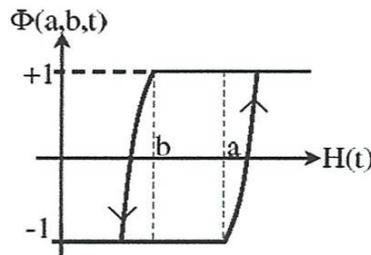


Figure. 3.1. Cycle élémentaire dynamique

Remarque : Le modèle dynamique de Preisach proposé par Bertotti, décrit l'effet de la fréquence sur le comportement magnétique des matériaux. Toutefois, ce modèle reste compliqué à mettre en œuvre et très gourmand en temps de calcul. Ce qui rend le modèle est difficile à implanter dans un code de calcul de champ [21].

3.3. MODELE DE PREISACH PARAMETRE

Dans les travaux de thèse de Bernard [3], il a proposé une méthode originale pour la prise en compte de l'effet de la fréquence dans le modèle de Preisach. Celle-ci consiste à paramétrer la fonction de distribution inverse $\rho'(\alpha, \beta)$, pour une utilisation $M(B)$ du modèle de Preisach, en fonction d'une grandeur liée à la dynamique : la vitesse de variation de l'induction $\frac{dB}{dt}$. La nouvelle fonction de distribution s'écrit $\rho'(\alpha, \beta, \frac{dB}{dt})$. Celle-ci est caractérisée pour une vitesse de variation donnée de l'induction, $\frac{dB}{dt} = Cst$, et pour plusieurs amplitudes d'excitation. L'opération est répétée plusieurs fois pour différentes vitesses de variation de l'induction. Le processus expérimental se traduit par l'application dans l'échantillon d'un flux triangulaire de pente et d'amplitude variables. Il est observé que la loi d'évolution de la fonction de distribution $\rho'(\alpha, \beta, \frac{dB}{dt})$ en fonction de $\frac{dB}{dt}$ peut être approximée par une droite. Il s'ensuit que :

$$\rho' \left(\alpha, \beta, \frac{dB}{dt} \right) = \rho'_{stat}(\alpha, \beta) + \gamma(\alpha, \beta) \left(\frac{dB}{dt} \right). \quad (3.18)$$

Remarque : Les résultats obtenus par ce modèle donnent de bons résultats sur des tôles. Toutefois, pour plus de précision, il est nécessaire de disposer d'un grand nombre de mesures pour des fréquences et des amplitudes d'excitation différentes.

3.4. MODELE DYNAMIQUE DE JILES-ATHERTON

Le modèle de Jiles-Atherton décrit dans le deuxième chapitre est étendu à des matériaux conducteurs afin de décrire leurs comportements magnétiques sous l'effet de la fréquence et des différentes pertes. La formulation théorique du modèle a été conservée. Une nouvelle approche énergétique basée sur la séparation des pertes permet de développer le modèle dynamique de Jiles [22]. Les pertes dans un matériau magnétique se composent alors des pertes par hystérésis dW_h/dt , des pertes courant de Foucault dW_{ec}/dt et des pertes supplémentaires dW_a/dt . Les pertes par courant de Foucault peuvent être définies à partir des équations de Maxwell pour un échantillon d'une géométrie bien définie. Si on ignore l'effet de peau et que le champ magnétique traverse uniformément l'échantillon ferromagnétique, la densité des pertes par courant de Foucault est alors proportionnelle au carré de la variation de l'aimantation par rapport au temps [23].

$$\frac{dW_{ec}}{dt} = \frac{d^2}{2\rho\beta} \left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2 = \frac{(d\mu_0)^2}{2\rho\beta} \left(\frac{dM}{dt} \right)^2 \quad (3.19)$$

ρ est la résistivité en Ωm , d la section de l'échantillon et β un facteur géométrique qui peut être égale à 6 pour les tôles, 16 pour les cylindres et 20 pour les sphères. Sous des conditions de variation sinusoïdale d'induction à faibles ou moyennes fréquences, ces pertes par unité de volume sont évaluées par :

$$\frac{dW_{ec}}{dt} = \frac{\pi^2 B_{max}^2 d^2 f^2}{\rho \beta} \quad (3.20)$$

B_{max} est la valeur maximale de l'induction en Tesla et f la fréquence en H_z . En plus des pertes par hystérésis le matériau peut être le siège de pertes supplémentaires qui seront évaluées par :

$$\frac{dW_a}{dt} = \left(\frac{GdwH_0}{\rho} \right)^{1/2} \left(\frac{dB}{dt} \right)^{3/2} \quad (3.21)$$

avec $G=0.13356$, w est la largeur du laminage et H_0 le champ interne exercé par les domaines magnétiques. En se basant sur les équations (2.10, 2.11, 2.12, 2.13, 2.14) et en ajoutant les deux composantes de pertes (courant de Foucault et supplémentaires) on peut déduire que :

$$\begin{aligned} \mu_0 \int M_{an} dH_e = \mu_0 \int M dH_e + \mu_0 k \delta \int \left(\frac{dM}{dH_e} \right) dH_e - \mu_0 k \delta c \int \left(\frac{dM_{an}}{dH_e} \right) dH_e + \int \frac{\mu_0 d^2}{2\rho\beta} \left(\frac{dM}{dt} \right)^2 dt + \\ \int \left(\frac{GdwH_0}{\rho} \right)^{1/2} \left(\frac{\mu_0 dM}{dt} \right)^{3/2} dt \end{aligned} \quad (3.22)$$

avec : $H_e = H + \alpha M$. Des transformations de l'équation (3.22) permettent d'obtenir l'équation quasi statique (3.23) de l'hystérésis magnétique tenant compte des différents types de pertes.

$$\begin{aligned} D_1 \frac{dH}{dt} \left(\frac{dM}{dH} \right)^2 + \left(\frac{\mu_0 GdwH_0}{\rho} \right)^{1/2} \left(\frac{dH}{dt} \right)^{1/2} \left(\frac{dM}{dH} \right)^{3/2} + \left[k\delta - \alpha \left(M_{an} + M + k\delta c \frac{dM_{an}}{dH_e} \right) \right] \left(\frac{dM}{dH} \right) - \\ \left(M_{an} - M + k\delta c \frac{dM_{an}}{dH_e} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

avec les paramètres dynamiques D_1 et D_2 qui sont donnés par :

$$D_1 = \frac{\mu_0 d^2}{2\rho\beta} \quad (3.24)$$

$$D_2 = \frac{\mu_0 GdwH_0}{\rho} \quad (3.25)$$

Dans l'équation (3.23) interviennent aussi les paramètres du modèle statique α , a , c , k et M_s . L'expression de l'aimantation anhystérétique est donnée par (2.21). Dans une première approximation, les valeurs de ces paramètres sont les mêmes que ceux obtenus pour le modèle statique et présentés au 2ème chapitre. Les deux nouveaux paramètres D_1 et D_2 peuvent être déterminés à partir des grandeurs physiques (conductivité,...) et géométriques (facteur de forme, section,...) de l'échantillon considéré.

3.5. Développement du modèle dynamique d'hystérésis

Le modèle de Preisach dynamique et le modèle de Jiles-Atherton dynamique qui ont été présentés sont souvent assez lourds à mettre en œuvre et ils sont très coûteux en termes de calcul ; or le modèle à choisir doit être associé à un calcul élément finis. Dans cette partie une autre démarche est adoptée pour introduire l'effet de la fréquence sur le cycle d'hystérésis. C'est une approche phénoménologique qui consiste à introduire l'effet de la fréquence sur le champ coercitif à travers le paramètre k du modèle statique de Jiles-Atherton.

3.5.1 Introduction de l'effet de la fréquence sur le cycle

L'introduction de l'effet de la fréquence sur le cycle d'hystérésis généré par le modèle de Jiles – Atherton statique est introduit par le comportement fréquentiel du paramètre k du modèle.

Dans les matériaux ferromagnétiques doux le paramètre k peut être approché au champ coercitif H_c ($k \approx H_c$) [16].

L'évolution du champ coercitif donc le paramètre k en fonction de la fréquence est donné par l'expression suivante:

$$k_f = k_0(1 + \beta\sqrt{f}) \quad (3.25)$$

où k_f est la valeur de k à une fréquence donnée, k_0 est la valeur de k en statique.

Les autres paramètres du modèle (c, a et M_s) sont constante pour ce modèle.

3.5.2 Validation du modèle

Le modèle proposé a été validé par rapport aux résultats fourni par le modèle dynamique de Jiles-Atherton, pour une tôle F_cS_i [24]. Nous donnons aussi pour ce matériau les valeurs des paramètres du modèle de Jiles dynamique dans le tableau 3.1.

Tableau 3.1 : Valeurs des paramètres pour le modèle dynamique de Jiles

Paramètres	Tôle F_cS_i (Dynamique)
k	65
M_s	1167880
c	0.035
a	75
α	$1.83 \cdot 10^{-4}$
D_1	$3.3 \cdot 10^{-2}$
D_2	$5 \cdot 10^{-1}$

3.5.2.1. Résolution numérique du modèle dynamique de Jiles Atherton

La résolution numérique du modèle dynamique de Jiles-Atherton est très délicate (équation (3.23)). En effet, il s'agit de résoudre, après le changement de variable $X = \left(\frac{dM}{dH}\right)^{1/2}$, un polynôme d'ordre 4 [25]. Nous avons utilisé la méthode d'Euler implicite pour la discrétisation temporelle et la méthode de Newton-Raphson pour la résolution du polynôme.

L'organigramme représenté par la figure.3.2 résume les différentes étapes pour la construction du cycle d'hystérésis dynamique du modèle de Jiles-Atherton. A l'aide de cet organigramme on

peut réaliser un programme de calcul qui permet de générer des cycles d'hystérésis en fonction de la fréquence.

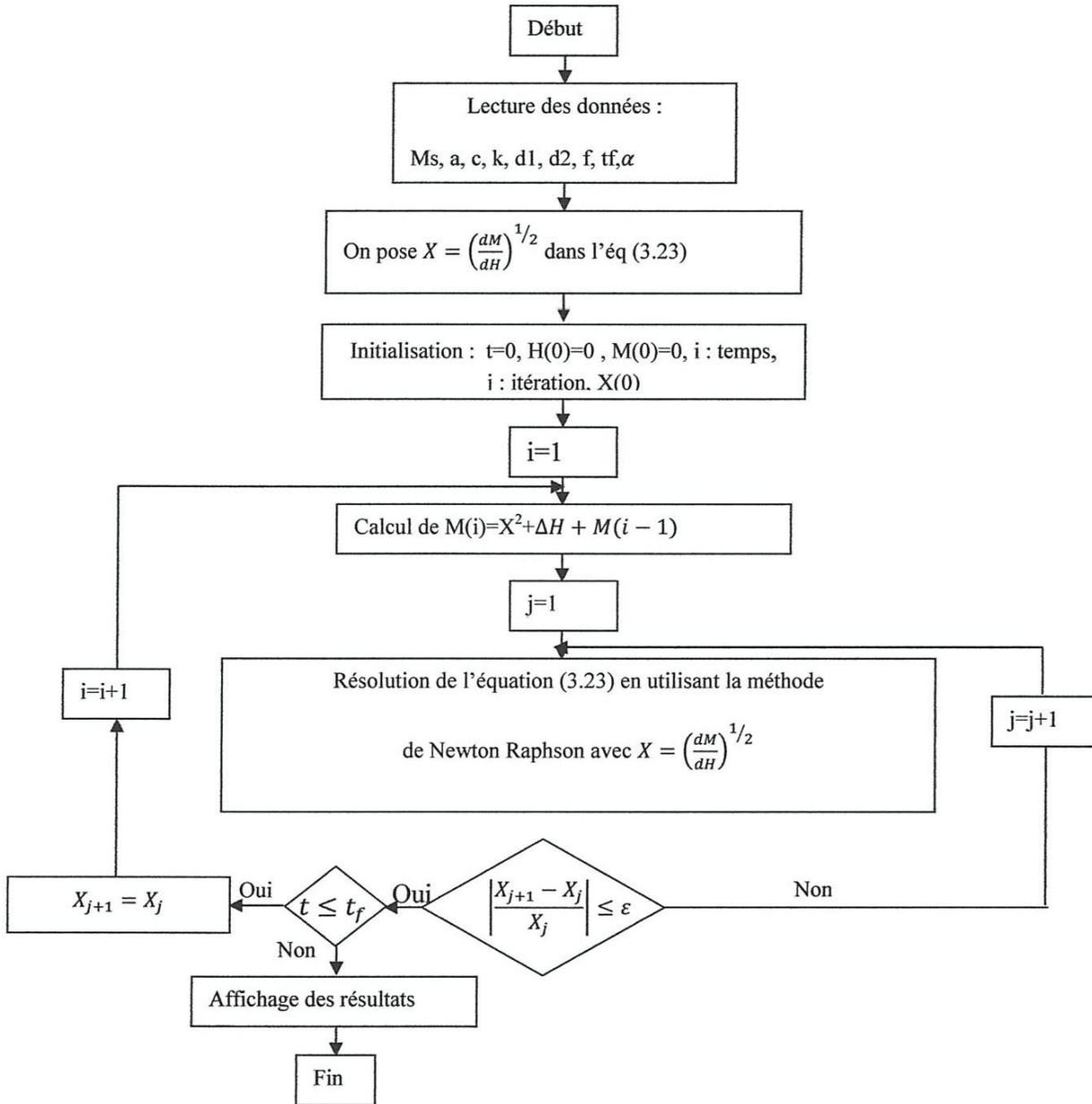


Figure 3.2 : Organigramme de calcul du modèle de Jiles-Atherton dynamique

La courbe de l'évolution du champ coercitif en fonction de la fréquence, calculé par le modèle de Jiles dynamique (figure 3.3) a été utilisée pour identifier la constante β et k_0 .

Donc pour décrire le comportement fréquentiel du phénomène hystérétique, il suffit de calculer les paramètres du modèle de J-A statique (M_s , α , c , et a), puis en ajustant le modèle analytique figurant dans (3.3).

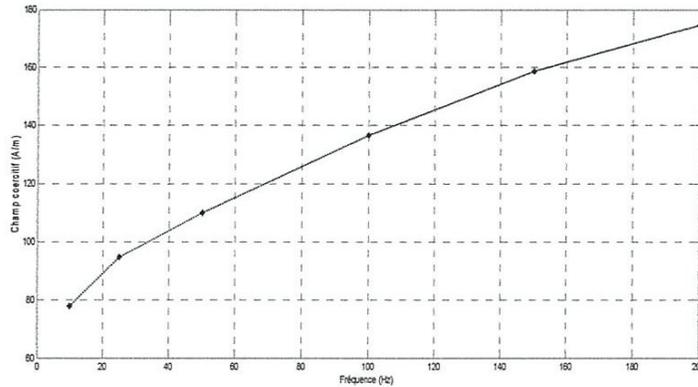


Figure 3.3 : Champ coercitif calculé par le modèle dynamique de Jiles

La simulation du phénomène d'hystérésis intégrant le comportement fréquentiel du paramètre k permet d'avoir une évolution du champ coercitif et par conséquent de l'aire du cycle d'hystérésis (Fig.3. 4), ce qui représente mieux la dépendance de l'effet de la fréquence sur le cycle d'hystérésis généré par le modèle statique de Jiles-Atherton.

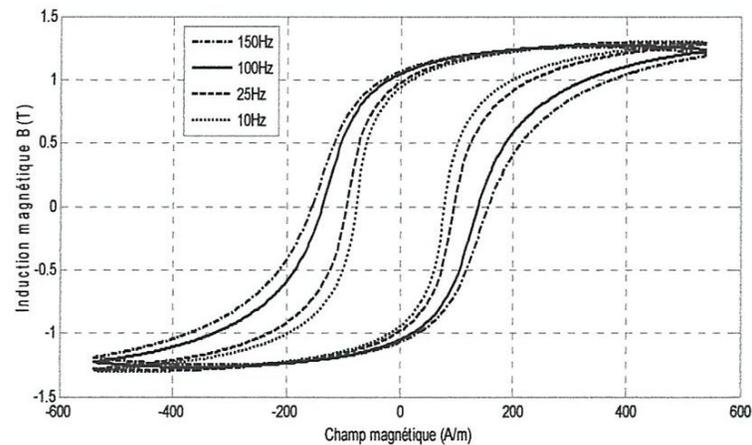


Figure 3.4 : Cycles d'hystérésis simulés à $f=150, 100, 25$ et 10Hz avec $\beta = 0.224$ et $k_0 = 50.9\text{A/m}$

Les cycles d'hystérésis en fonction de la fréquence calculés par le modèle proposé a été comparé par les cycles simulés par le modèle dynamique de Jiles, la figure 3.5 montre qu'il y'a un accord entre les résultats des deux modèles pour les fréquences 10, 25 et 100 Hz.

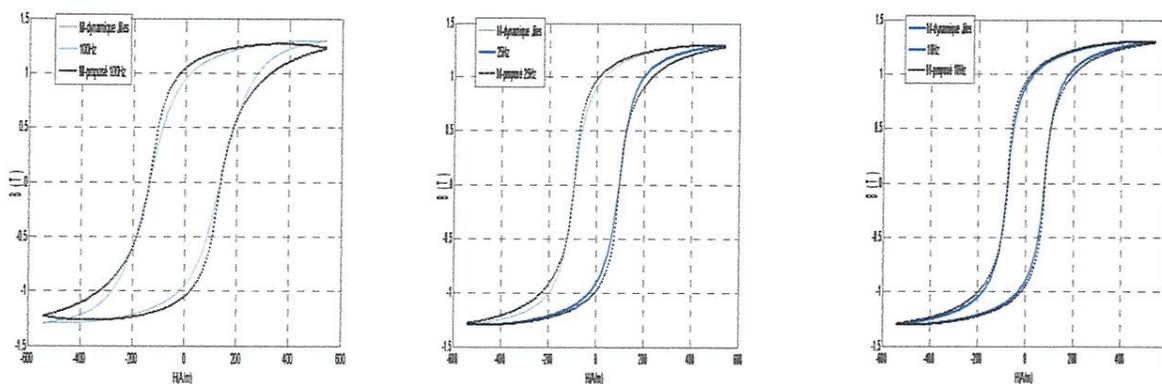


Figure 3.5 : Comparaison des cycles entre les deux modèles (100, 25 et 10Hz)

L'évolution du champ coercitif peut être validée en prélevant sur les courbes les valeurs de H_c en fonction de la fréquence. En effet d'après les résultats de la figure (3.6) les champs coercitifs simulés par le modèle proposé sont très proches de ceux simulés par le modèle dynamique de Jiles.

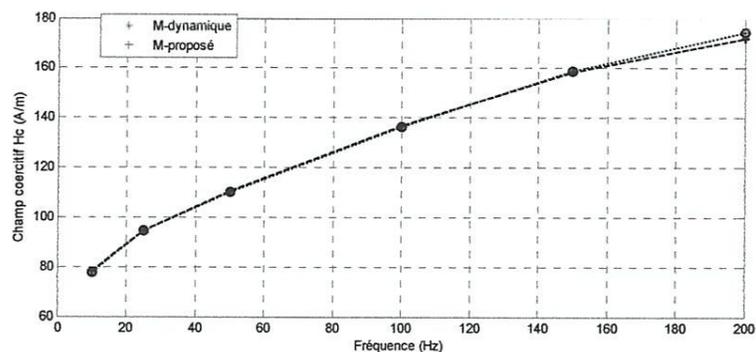


Figure 3.6 : Comparaison des champs coercitifs

Remarque

L'introduction de l'effet de la fréquence sur le cycle d'hystérésis généré par le modèle d'hystérésis proposé est effectuée à travers le paramètre k du modèle de Jiles-Atherton statique, cette approche exige la connaissance d'une courbe décrivant l'évolution du champ coercitif en fonction de la fréquence et partir de laquelle on peut identifier celle du paramètre k . Malgré la contrainte d'identification que demande cette méthode, elle présente l'avantage d'avoir le cycle d'hystérésis à une fréquence donnée à partir du modèle statique de Jiles-Atherton et la courbe de l'évolution du champ coercitif en fonction de la fréquence.

3.5.2.2 Génération des cycles mineurs

La génération des cycles mineurs a été effectuée en exploitant le modèle d'hystérésis lorsque le matériau est excité par une excitation dont la forme est représentée sur la figure 3.7. Les résultats fournis par le modèle sont donnés par la figure 3.8.

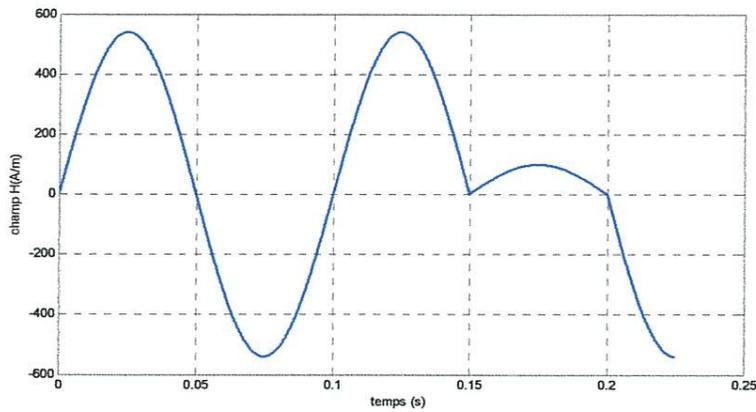


Figure 3.7. Champ magnétique d'excitation pour la génération des cycles mineurs

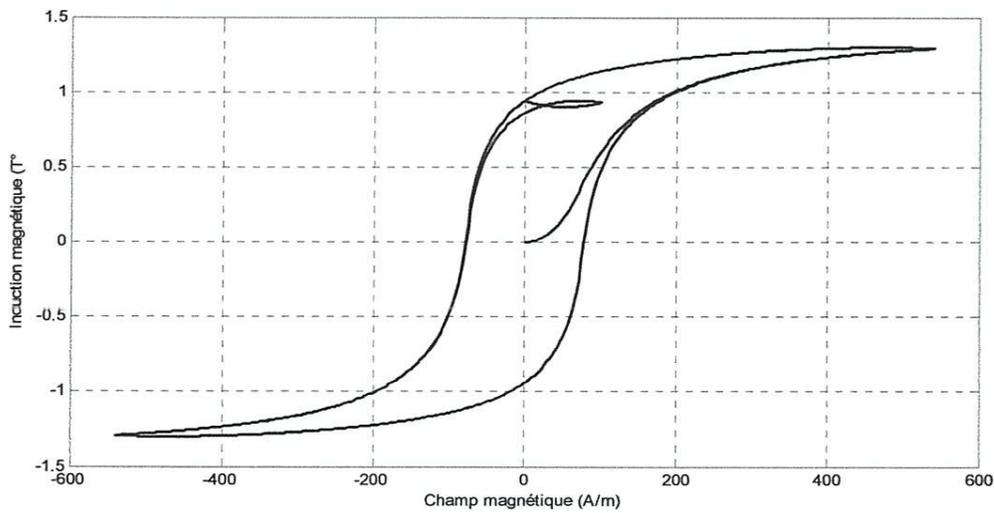
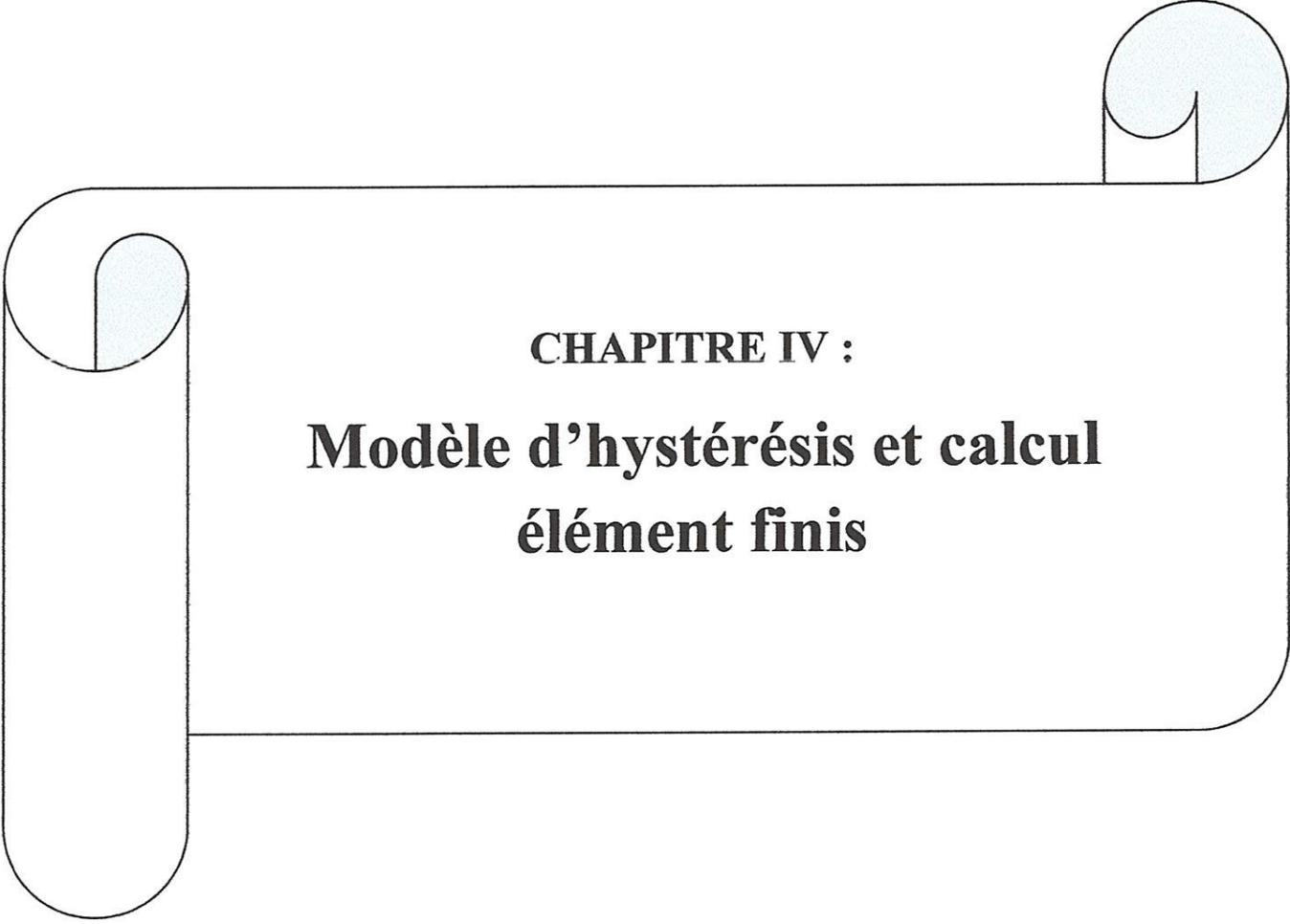


Figure 3.8. Génération des cycles d'hystérésis avec des cycles mineurs

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons exposé trois modèles d'hystérésis dynamiques, ces trois derniers sont les plus utilisés par les chercheurs pour la caractérisation des matériaux ferromagnétiques en régime dynamique. Nous avons réalisé une intégration de l'effet de la fréquence dans le modèle de Jiles-Atherton statique. Les résultats obtenus sont satisfaisants de par la bonne concordance entre cycles calculées par le modèle proposé et les cycles calculés par le modèle dynamique de Jiles.

Dans le prochain chapitre nous allons essayer d'intégrer le modèle d'hystérésis proposé dans le calcul par éléments finis.

A decorative border resembling a scroll or ribbon, with a light blue shaded area on the left side and a circular scroll-like element on the right side.

CHAPITRE IV :
Modèle d'hystérésis et calcul
élément finis

INTRODUCTION

Dans ce chapitre nous allons établir les formulations éléments finis des problèmes électromagnétiques, proposer un algorithme de résolution du problème intégrant le modèle d'hystérésis et présenter le code éléments finis développé pour la résolution numérique du différent problème.

4.1 INTEGRATION DE MODELES D'HYSTERESIS DANS LA MEF

Dans le cadre de notre travail, La caractéristique magnétique est représentée par un modèle d'hystérésis. Nous ne développons ici que la méthode d'intégration d'un modèle d'hystérésis dans un code de calcul par éléments finis [19-21], [24], [26-29]. Mais auparavant nous rappelons les équations de Maxwell et leur développement dans un système de coordonnées cartésiennes et cylindriques pour les deux cas d'étude magnétostatique et magnétodynamique, par la suite nous présentons les formulations éléments finis correspondantes. [30-34].

4.1.1 Equations de Maxwell

Tous les phénomènes de l'électromagnétisme sont décrits par les quatre équations de Maxwell locales.

Ces équations aux dérivées partielles peuvent être séparées en équations de couplage électromagnétique (4.1) et (4.2) et de conservation (4.3) et (4.4). Ce sont :

- Maxwell Faraday $\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (4.1)

- Maxwell d'Ampère $\overrightarrow{rot}(\vec{H}) = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ (4.2)

- Maxwell Gauss électrique $div \vec{D} = \rho$ (4.3)

- Maxwell Gauss magnétique $div \vec{B} = 0$ (4.4)

Les grandeurs intervenant dans ces équations exprimées en SI, sont :

L'induction magnétique $\vec{B}[T]$

Le déplacement électrique $\vec{D}[C.m^{-2}]$

Le champ électrique $\vec{E}[V.m^{-1}]$

Le champ magnétique $\vec{H}[A.m^{-1}]$

La densité de courant $\vec{J}[A.m^{-2}]$

La densité de charge volumique $\rho [C.m^{-3}]$

Le temps $t[s]$

Pour décrire complètement le problème, les relations constitutives du matériau sont ajoutées aux équations de Maxwell.

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (4.5)$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad (4.6)$$

$$\vec{J} = \sigma (\vec{E} + V_d \times \vec{B}) + \vec{J}_s \quad (4.7)$$

ε représente la permittivité, μ_0 la perméabilité dans l'air, M l'aimantation du matériau, σ la conductivité électrique V_d la vitesse de déplacement de charges, J_s la densité de courant des sources, A la limite de séparation de deux milieux correspondant aux indices i et j dans le domaine d'étude, des relations de passage doivent être telles que :

- La relation de continuité de la composante normale de l'induction magnétique \vec{B} :

$$\vec{n} \cdot \vec{B}_i = \vec{n} \cdot \vec{B}_j \quad (4.8)$$

- La relation de continuité de la composante normale de densité de courant \vec{J} :

$$\vec{n} \cdot \vec{J}_i = \vec{n} \cdot \vec{J}_j \quad (4.9)$$

- La relation de continuité de la composante tangentielle du champ électrique \vec{E} :

$$\vec{E}_i \times \vec{n} = \vec{E}_j \times \vec{n} \quad (4.10)$$

- La relation de continuité de la composante tangentielle du champ magnétique \vec{H} :

$$\vec{H}_i \times \vec{n} = \vec{H}_j \times \vec{n} \quad (4.11)$$

Les formulations peuvent être modifiées selon la nature du système étudié et parfois certaines grandeurs deviennent négligeables. C'est pour cette raison que, des simplifications peuvent être apportées. Si on considère que les phénomènes étudiés relèvent du domaine quasi-stationnaire ou magnétodynamique à des fréquences inférieures à 10^{12} Hz, les courants de déplacement sont négligeables devant les courants de conduction. Ceci se traduit par :

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \ll \vec{J} \quad (4.12)$$

Et l'équation de Maxwell Ampère s'écrit alors :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{H} = \vec{j} \quad (4.13)$$

Dans le cadre des systèmes étudiés, on peut considérer que les charges volumiques sont négligées. Ainsi, l'équation de Maxwell Gauss électrique s'écrit alors :

$$\text{div } \vec{D} = 0 \quad (4.14)$$

On considère aussi que, le terme $\sigma(\vec{V}_d \times \vec{B})$ est négligeable car la vitesse de déplacement est nulle. Donc,

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} + \vec{j}_s \quad (4.15)$$

4.1.2 Formulation en potentiel vecteur magnétique

Puisque nous limitons cette étude à des cas bidimensionnels, nous avons choisi de résoudre ces équations en utilisant comme inconnue le potentiel vecteur magnétique. On définit donc à partir de (4.4), le potentiel vecteur magnétique \vec{A} .

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \quad (4.16)$$

Le système admet dans ce cas une solution de la forme $\vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}}f$, d'où la nécessité d'imposer une condition de jauge afin d'assurer l'unicité de solution. Dans le cadre des systèmes à deux dimensions ceci n'est pas nécessaire. La jauge de Coulomb définie par $\text{div } \vec{A} = 0$ est vérifiée. Le système d'équations à résoudre s'écrit :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} = \vec{j} \\ \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \vec{B} \\ \vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) \end{cases} \quad (4.17)$$

Nous allons présenter maintenant les formulations des problèmes magnétostatique et magnétodynamique intégrant la non linéarité introduite par le modèle d'hystérésis.

4.1.2.1 Problème magnétostatique non linéaire

Dans le cas du modèle magnétostatique, le dispositif à étudier est supposé parcouru par des courants non nuls et le champ magnétique est produit par des sources de courant indépendantes du temps.

En se basant sur (4.6) on a :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{M}) \quad (4.18)$$

La substitution de (4.13) et (4.16) dans (4.18) donne :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{A}) = \mu_0(\vec{J}_s + \overrightarrow{rot}\vec{M}) \quad (4.19)$$

L'aimantation du matériau \vec{M} est déterminée par le modèle d'hystérésis. Le système d'équations à résoudre dans ce cas est :

$$\begin{cases} \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{A}) = \mu_0(\vec{J}_s + \overrightarrow{rot}\vec{M}) \\ \text{div } \vec{A} = 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

4.1.2.2 Problème magnétodynamique non linéaire

Le magnétodynamique est l'étude des phénomènes électromagnétiques non stationnaires. Ainsi, dans le domaine de l'électrotechnique, ce modèle est utilisé lorsque le système contient des matériaux conducteurs qui sont le siège de courants induits non négligeables.

La substitution de (4.16) dans (4.1) :

$$\overrightarrow{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (4.21)$$

On peut définir ainsi le potentiel scalaire électrique V tel que :

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}V \quad (4.22)$$

La combinaison de (4.22) et (4.15) donne :

$$\sigma \vec{E} = \vec{J} - \vec{J}_s = -\sigma \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}V \right) \quad (4.23)$$

Donc,

$$\vec{J} = -\sigma \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}V \right) + \vec{J}_s \quad (4.24)$$

La substitution de (4.24) dans (4.18) donne :

$$\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \overrightarrow{rot} \left(\frac{1}{\mu_0} \overrightarrow{rot}\vec{A} \right) = \vec{J}_s - \sigma \overrightarrow{grad}V + \overrightarrow{rot}\vec{M} \quad (4.25)$$

Le comportement magnétique non linéaire est introduit par le modèle d'hystérésis $M = f(H)$.

4.1.3 Formulation éléments finis du problème électromagnétique

Pour cette étude, nous allons nous restreindre au cas bidimensionnel plan. Ainsi, les systèmes, possèdent une symétrie de translation suivant la troisième dimension ou une symétrie d'axe de révolution.

Dans les deux cas, la direction du vecteur densité \vec{J} , doit être perpendiculaire au plan d'étude. Le problème reste donc invariant suivant l'axe oz dans les coordonnées cartésiennes ou suivant la révolution d'axe oz dans les coordonnées axisymétriques.

Dans les calculs suivants, nous détaillerons le cas d'un système à symétrie de translation (coordonnées cartésiennes) et nous déduirons le cas d'un système à symétrie de révolution (coordonnées axisymétriques).

4.1.3.1 Problème électromagnétique bidimensionnel

a) Problème magnétostatique

Pour un problème magnétostatique et dans un système de coordonnées cartésiennes le champ magnétique et l'aimantation du matériau évoluent dans le plan (x,y), la relation (4.20) s'écrit :

$$-\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = \mu_0 \left(J_s + \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \right) \quad (4.26)$$

J_s est la densité de courant de la source, M_x la projection de l'aimantation \vec{M} sur l'axe (ox) et M_y sa projection sur l'axe (oy). En appliquant la méthode de Galerkin à cette équation on a :

$$\iint_{\Omega} \left[\omega_i \left(-\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right) \right] d\Omega = \iint_{\Omega} \left[\omega_i \mu_0 \left(J_s + \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \right) \right] d\Omega ; d\Omega = dx dy \quad (4.27)$$

Où Ω est le domaine de résolution, ω_i les fonctions de projection. Cette expression est la forme forte de la formulation élément finis. Mais, l'intégration par partie des termes en dérivées seconde nous donne la forme faible de cette formulation. Cette dernière permet d'explicitier les conditions aux limites naturelles.

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial \omega_i}{\partial y} \frac{\partial A}{\partial y} \right) d\Omega - \left[\int \omega_i \frac{\partial A}{\partial x} dx + \int \omega_i \frac{\partial A}{\partial y} dy \right] = \iint_{\Omega} \omega_i \mu_0 J_s d\Omega + \iint_{\Omega} \omega_i \left(\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \right) d\Omega \quad (3.28)$$

La discrétisation de A sous la forme $A = \sum_j (\omega_j A_j)$ et l'introduction des conditions de Neumann homogènes nous permet d'écrire cette équation sous la forme :

$$\sum_j \left[\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x} \frac{\partial \omega_j}{\partial x} + \frac{\partial \omega_i}{\partial y} \frac{\partial \omega_j}{\partial y} \right) d\Omega \right] A_j = \iint_{\Omega} \omega_i \mu_0 J_s d\Omega + \iint_{\Omega} \mu_0 \omega_i \left(\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \right) d\Omega \quad (4.29)$$

Ceci nous conduit à la forme matricielle suivante :

$$[M]\{A\} = \{F\} + \{G\} \quad (4.30)$$

Tels que,

$$\begin{cases} M_{ij} = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x} \frac{\partial \omega_j}{\partial x} + \frac{\partial \omega_i}{\partial y} \frac{\partial \omega_j}{\partial y} \right) d\Omega \\ F_i = \iint_{\Omega} \omega_i \mu_0 J_s d\Omega \\ G_i = \iint_{\Omega} \mu_0 \omega_i \left(\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \right) d\Omega \end{cases} \quad (4.31)$$

Le maillage utilisé est un maillage triangulaire, et les fonctions d'interpolations sont de premier ordre.

$$\omega_i = (a_i + b_i + c_i) \quad i=1,2,3 \quad (4.32)$$

Avec :

$$\begin{cases} a_1 = ((x_2 y_3 - x_3 y_2) / 2\Delta_e) \\ b_1 = ((y_2 - y_3) / 2\Delta_e) \\ c_1 = ((x_3 - x_2) / 2\Delta_e) \end{cases} \quad (4.33)$$

Où, Δ_e est l'aire du triangle et les autres coefficients a_i , b_i et c_i sont obtenus par une permutation circulaire.

On obtient alors :

$$\begin{cases} M_{ij} = (b_i b_j + c_i c_j) \Delta_e \\ F_i = \frac{\Delta_e}{3} J_s \\ G_i = \mu_0 \Delta_e (b_i M_y - c_i M_x) \end{cases} \quad (4.34)$$

Dans un repère cylindrique ces coefficients prennent la forme suivante :

$$\begin{cases} M_{ij} = (b_i b_j + c_i c_j) \Delta_e / r_m \\ F_i = \frac{\Delta_e}{3} J_s \\ G_i = \mu_0 \Delta_e (b_i M_z - c_i M_r) \end{cases} \quad (4.35)$$

Où r_m est le rayon moyen dans l'élément triangulaire.

b) Problème magnétodynamique

Pour un problème magnétodynamique et dans un système de coordonnées cartésiennes le champ magnétique et l'aimantation du matériau évoluent dans le plan (x,y), donc la relation (4.25) s'écrit :

$$\mu_0 \sigma \frac{\partial A}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right) = \mu_0 \left(J_s - \sigma \overrightarrow{grad} V + \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \right) \quad (4.36)$$

Dans le cadre de cette étude, une alimentation en courant sera effectuée sur les dispositifs étudiés ; on peut donc négliger le terme $\overrightarrow{\sigma grad V}$. Il est possible de discrétiser le terme temporel sous la forme :

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{A^t - A^{t+\Delta t}}{\Delta t} \quad (4.37)$$

En suivant la même démarche que dans le cas magnétostatique on a :

$$\sum_j \iint_{\Omega} (\mu_0 \sigma \omega_i \omega_j d\Omega) \frac{\partial A_j}{\partial t} + \sum_j \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x} \frac{\partial \omega_j}{\partial x} + \frac{\partial \omega_i}{\partial y} \frac{\partial \omega_j}{\partial y} \right) d\Omega A_j = \iint_{\Omega} (\omega_i \mu_0 J_s d\Omega) + \iint_{\Omega} \omega_i \mu_0 \left(\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \right) d\Omega \quad (4.38)$$

Est on obtient un système matriciel de la forme :

$$[K] \left\{ \frac{\partial A}{\partial t} \right\} + [M] \{A\} = \{F\} + \{G\} \quad (4.39)$$

Tel que,

$$\begin{cases} K_{ij} = \iint_{\Omega} \sigma \mu_0 \omega_i \omega_j d\Omega \\ M_{ij} = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x} \frac{\partial \omega_j}{\partial x} + \frac{\partial \omega_i}{\partial y} \frac{\partial \omega_j}{\partial y} \right) d\Omega \\ G_i = \iint_{\Omega} \mu_0 \omega_i \left(\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \right) d\Omega \\ F_i = \iint_{\Omega} \omega_i \mu_0 J_s d\Omega \end{cases} \quad (4.40)$$

Pour les mêmes considérations que dans le cas précédent on a :

$$\begin{cases} M_{ij} = (b_i b_j + c_i c_j) \Delta_e \\ K_{ij} = \begin{cases} \frac{\sigma \mu_0 \Delta_e}{6} & \text{si } i = j \\ \frac{\sigma \mu_0 \Delta_e}{12} & \text{si } i \neq j \end{cases} \\ F_i = \frac{\Delta_e}{3} J_s \\ G_i = \mu_0 \Delta_e (b_i M_y - c_i M_x) \end{cases} \quad (4.41)$$

Dans un repère cylindrique on obtient une écriture matricielle de la même forme que (4.39), avec :

$$\begin{cases} K_{ij} = \iint_{\Omega} \sigma \mu_0 \omega_i \omega_j \frac{d\Omega}{r} \\ M_{ij} = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial r} \frac{\partial \omega_j}{\partial r} + \frac{\partial \omega_i}{\partial z} \frac{\partial \omega_j}{\partial z} \right) \frac{d\Omega}{r} \\ F_i = \iint_{\Omega} \omega_i \mu_0 J_s d\Omega \\ G_i = \iint_{\Omega} \mu_0 \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial r} M_z - \frac{\partial \omega_i}{\partial z} M_r \right) d\Omega \end{cases} \quad (4.42)$$

Et,

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{ij} = \begin{cases} \frac{\sigma\mu_0\Delta_e}{6r_m} \\ \frac{\sigma\mu_0\Delta_e}{12r_m} \end{cases} \\ F_{ij} = \frac{\Delta_e}{3} J_s \\ M_{ij} = (b_i b_j + c_i c_j) \frac{\Delta_e}{r_m} \\ G_i = \mu_0 \Delta_e (b_i M_z - c_i M_r) \end{array} \right. \quad (4.43)$$

Une fois que les différentes formulations en éléments finis intégrant le modèle d'hystérésis sont établies, une méthode de résolution du problème non linéaire doit être choisie. Dans le paragraphe suivant nous allons proposer un algorithme de résolution [35].

4.2 METHODE DE RESOLUTION

Une combinaison entre la MEF et un modèle d'hystérésis aboutit à un système non linéaire, une technique fiable et rapide pour la résolution de ce système et demandée, habituellement pour traiter les problèmes non linéaires la méthode de Newton Raphson est la plus en vue mais, dans le cas où cette non linéarité est due à l'introduction de l'effet de l'hystérésis cette méthode n'est pas recommandée, son application exige le calcul de la matrice de rigidité M pour chaque itération et nécessite l'évaluation de la dérivée de la courbe $B(H)$ pour estimer le Jacobien ce qui la rend source d'alourdissement du processus itératif de résolution, en plus de sa complexité de mise en œuvre dans la MEF.

Donc pour traiter ce genre de problème plusieurs travaux ont été publiés dans ce sens on cite [37][38][39] dans lesquels une nouvelle alternative a été utilisée et qui consiste en la méthode du point fixe qui présente l'avantage de ne calculer la matrice de rigidité M qu'une seule fois en plus de la convergence de la solution pour n'importe quelle valeur initiale imposée[19], d'où sa rapidité et sa simplicité de mise en œuvre.

Pour voir la différence entre les deux méthodes qui viennent d'être cités un travail qui a été effectué par [20] montre que la méthode de point fixe prend le dessus sur la méthode de Newton Raphson en ce qui concerne la facilité d'implémentation et la stabilité de la convergence c'est en se basant sur ces résultats que nous souhaitons l'adopter pour la résolution du système (4.39), un dernier point reste à dire est que cette approche peut être associée soit avec un modèle d'hystérésis direct soit inverse le dernier consomme un temps plus grand à cause de la nécessité de l'inversion du modèle, pour cette raison on préfère appliquer la technique du point fixe avec un modèle d'hystérésis direct en utilisant un facteur de relaxation pour pondérer le champ magnétique.

4.2.1 Présentation de la méthode du pont fixe

Toute équation du type $f(x) = 0$ peut se ramener à une équation du type $g(x) = x$ si $f(x) = g(x) - x$, c'est sous cette forme que l'on applique la méthode du point fixe.

La variable x est nommée variable de point fixe, elle vaut x à l'instant initial. On lui fait subir l'application g et on obtient x_1 . De manière générale on peut écrire :

$$g(x_i) = x_{i+1} \quad (4.44)$$

Si la méthode converge au bout d'un certain nombre d'itération on aboutit à une valeur x_{n+1} qui est peu différente de x_n c'est-à-dire une valeur $g(x_n)$ très peu différente de x_n donc $f(x_n)$ proche de zéro, et l'équation $f(x) = 0$ est résolue.

4.3 Code de calcul éléments finis 2D

4.3.1 Organigramme de traitement du problème magnétique non linéaire

La méthode des éléments finis, permet de résoudre les équations de Maxwell dans des conditions très générales et en particulier en prenant en compte le comportement non linéaire des matériaux magnétiques, Ainsi, on est amené à résoudre un système d'équation non linéaire suivant l'organigramme (4.2).

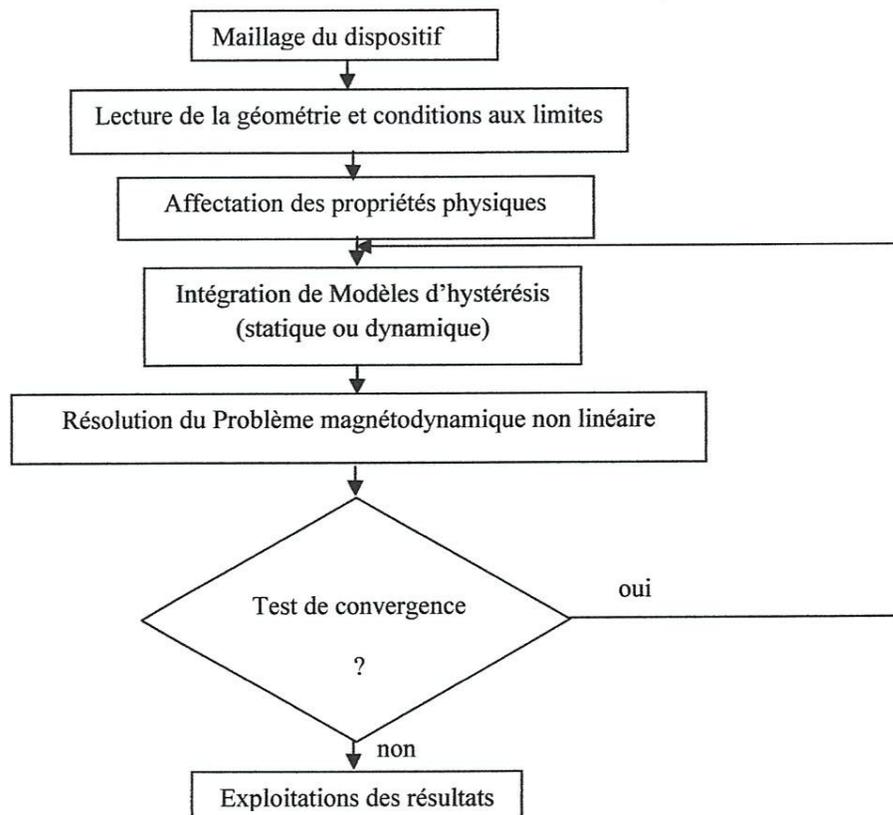


Figure 4.1 : Organigramme de principe de résolution du problème magnétodynamique avec hystérésis

4.3.2 Algorithme général de résolution du système non linéaire

Un programme a été développé sous environnement Matlab, permettant la résolution du problème magnétique non linéaire. En effet, il consiste à résoudre itérativement l'équation considérée jusqu'à la convergence de la solution en intégrant chaque fois le calcul du cycle d'hystérésis.

Le processus itératif consiste à rechercher la solution du système à une itération i donné à partir d'une estimation de l'aimantation basée sur les résultats de l'itération précédente $i-1$. Supposons qu'initialement, l'échantillon est dans son état désaimanté, la résolution du système d'équation (4.39) permet le calcul du potentiel vecteur magnétique A . Celui-ci permet à son tour de la détermination de l'induction magnétique B à partir de la loi (1.16). Cette induction fournit le champ magnétique H qui sera relaxé afin d'assurer la rapidité de la convergence.

Une fois que B et H d'une itération sont connus on peut calculer la nouvelle aimantation M ou moyen du modèle d'hystérésis (Preisach ou Jiles Atherton). La figure (4.2) illustre le schéma de cet algorithme [35].

Le champ magnétique total H comporte deux parties, le champ démagnétisant H_d et le champ appliqué H_a .

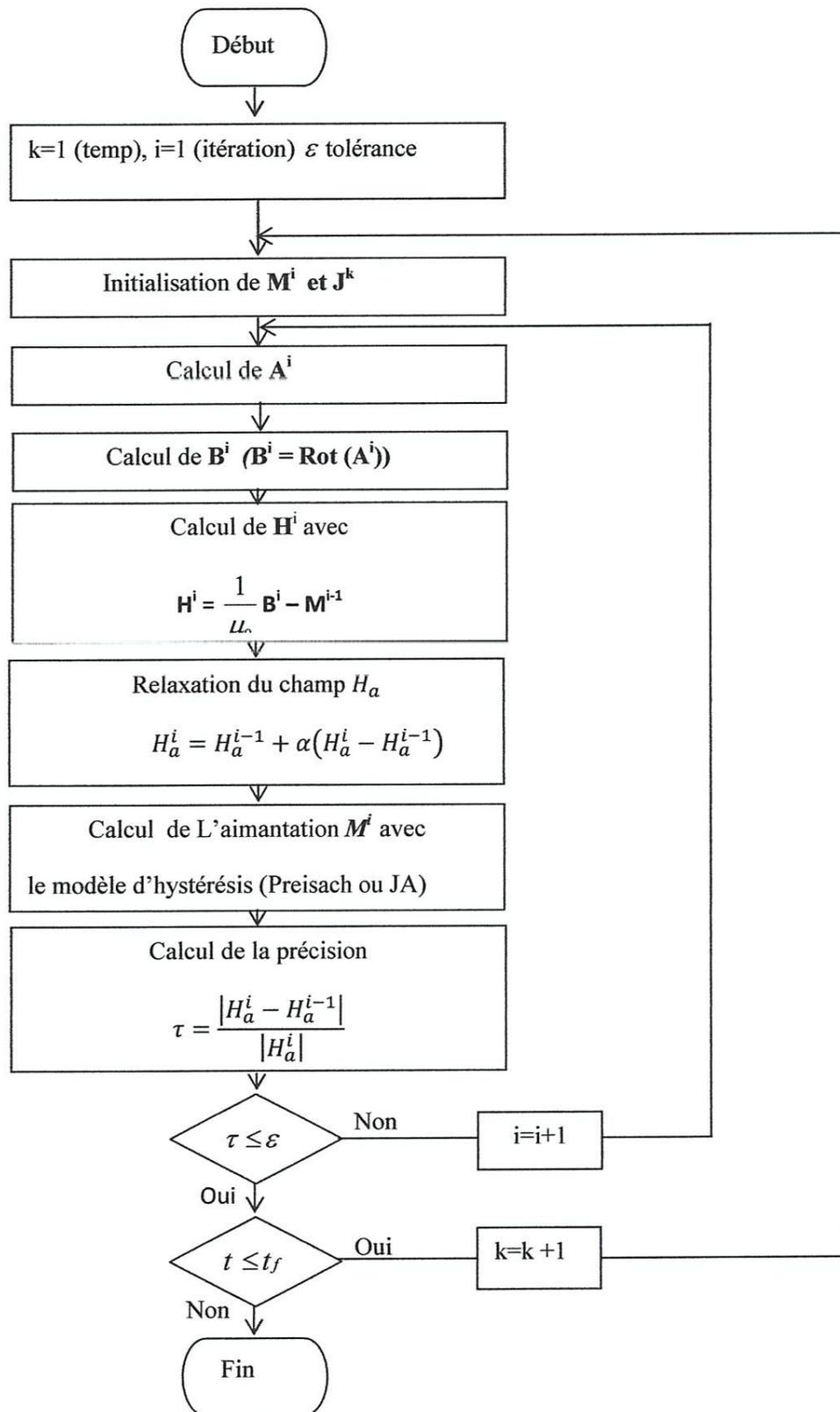


Figure 4.2. Organigramme de l'intégration du modèle d'hystérésis dans la méthode des éléments finis

Conclusion générale

Conclusion générale

Le travail entrepris dans le cadre de ce mémoire a été orienté dans un premier temps vers la mise en œuvre du modèle statique de Jiles-Atherton par l'écriture d'un programme informatique permettant la régénération du cycle d'hystérésis des matériaux magnétiques pour différentes formes du champ d'excitation. Une fois ce travail réalisé et validé par rapport à des résultats de la littérature, nous avons introduit l'effet de la fréquence dans le modèle statique de Jiles-Atherton à travers le modèle du paramètre k dépend de la fréquence. La validation a été effectuée par rapport à des résultats fournis par le modèle dynamique de Jiles pour le cas des fréquences 5Hz, 10Hz, 50Hz, 100Hz, et 150Hz. Les résultats obtenus sont satisfaisants de part de la bonne concordance entre les cycles calculés par le modèle proposé et les cycles simulés par le modèle dynamique de Jiles, de plus, le modèle reproduit les cycles mineurs.

L'intégration du modèle d'hystérésis dans le calcul par éléments finis a permis d'effectuer les calculs en utilisant un programme mise en œuvre sous environnement Matlab en exploitant le modèle de Jiles-Atherton. Les bons résultats de confrontation entre les cycles d'hystérésis calculés par éléments finis en exploitant le modèle d'hystérésis de Jiles-Atherton et les cycles d'hystérésis générés par le modèle théorique de Jiles-Atherton, pour les deux formes de la densité d'excitation permet de valider le programme de calcul par EF sous environnement Matlab en intégrant le modèle d'hystérésis.

Les résultats du calcul des pertes par courant de Foucault et par hystérésis conduisent à une bonne intégration du modèle d'hystérésis dans le code de calcul par éléments finis. Les résultats obtenus sont en concordance avec la théorie.

References bibliographiques

- [1] F. Robert, « Matériaux d'électrotechniques », Traité d'électricité, Volume II, Presses polytechniques Romandes. Troisième édition 1989.
- [2] P. Brissonneau, « Magnétisme et matériaux magnétiques pour l'électrotechnique », Paris, Hemès, 1997.
- [3] Y. Bernard, "Contribution à la modélisation de systèmes électromagnétiques en tenant compte du phénomène d'hystérésis. Extensions du modèle de Preisach adaptées au calcul de champ", Thèse de Doctorat, Université Paris XI, 2000.
- [4] G. Bertotti « General properties of power losses in soft ferromagnetic materials”, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 24, No. 1, pp. 621-630, 1988.
- [5] Hai Yan Lu¹, Jian Guo Zhu², and S. Y. Ron Hui³, *Fellow, IEEE,* " Measurement and Modeling of Thermal Effects on Magnetic Hysteresis of Soft Ferrites”, IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, VOL. 43, NO. 11, NOVEMBER 2007
- [6] B. Nait-Kaci, « Modélisation de l'hystérésis magnétique tenant compte des contraintes thermique », Thèse de Magister, Univ. Tizi-Ouzou, 2000.
- [7] F. Preisach, "Über die magnetische nachwirkung”, Zeitschrift für Physik 94, pp. 277-302, 1935.
- [8] F. Vajda, E. Della Torre” Measurements of output Preisach functions”, IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, Vol 27,N°26,pp 4757-4762, 1991.
- [9] E. Della Torre, J. Oti, G. Kadar, « Preisach modeling and reversible magnetization », IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, Vol 6, N°26, pp 3052-3058, 1990.
- [10] Mark A. Krasnosel'skii, Aleksei V. Pokrovskii Systems with hysteresis. Nauka, Moscow 1983.
- [11] Issak. D. Mayergoyz “Mathematical models of hysteresis”, IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, Vol 22,N°5, pp 603-608, 1986..
- [12] G. Biocri, D. Pescetti, “ Analytical theory of the behavior of ferromagnetic materials”, II. Nuvo Cimento, Vol. II, N°6. pp16, 1958.
- [13] I.D. Mayergoyz, “ Mathematical models of hysteresis” Edition Lavoisier, pp 277-433, 1992
- [14] F. Vajda. E. Della Torre, “ Identification of parameters in an Accomodation Model” IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, Vol 30,N°6,pp 4371-4373, 1994.
- [15] Jiles, Atherton, « Ferromagnetic hysteresis », IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 19, N° 5, pp 2183-2184, 1983.
- [16] Jiles, Atherton, « Theory of ferromagnetic hysteresis », Journal of Magnetism and magnetic materials Vol. 61, pp 48-60, 1986.