

11/621.868

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université 8 Mai 1945 – Guelma  
Faculté des Sciences et de la Technologie  
Département de Génie Electrotechnique et Automatique



**Domaine : Sciences et Technologie**  
**Filière : Automatique et Informatique Industrielle**  
**Spécialité : Commande et Diagnostic des Systèmes Industriels**

**Mémoire de fin d'études**  
**Pour l'obtention du diplôme de Master Académique**

---

**REGLAGE DES CORRECTEURS PI ET PID FRACTIONNAIRES**  
**PAR MINIMISATION DE L'ERREUR**

---

Présenté par :  
**BEN ARBIA BILAL**

**LAIFA SAMI**

Sous la direction de :

**Dr. BOUDJEHEM BADR EDDINE**

Juin 2015



24/3/15

## Remerciements

*Avant tout on remercie le dieu tout puissant pour  
Sa générosité de nous donner la santé, la volonté et  
la patience tout au long de la vie universitaire.  
Ensuite, nous adressons nos sincères remerciements  
à nos enseignants notamment à notre promoteur  
Dr. BOUDJAHEM Badr-Eddine. Qui  
franchement nous a  
donné son maximum en vue d'élaborer un très bon  
mémoire ; sans oublier aussi ses conseils permanents,  
ses orientations efficaces et sa grande patience.*

*On tient à exprimer notre profonde gratitude aux  
membres de jury.*

*Nous remercions avec sincérité toutes les personnes  
qui ont nous contribué de près ou de loin à réussir ce  
travail.*

*Nos vives salutations.*



# Dédicace

*Avant tous, je remercie dieu le tout puissant de m'avoir  
donné le courage et la patience pour réaliser ce travail malgré  
toutes les difficultés rencontrées.*

*Je dédie ce modeste travail :*

*A mes très chers parents, que dieu les garde et les protège  
pour leurs soutien moral*

*A mes frères mes sœurs*

*Aux chers amis*

*raid, aïmen, lina, yacin, idriss, mohamed, yahya, bilal, ramzi,  
mahdi, oussama, walid, sami, hakim, malik, rahim, lazher, fateh,  
amine, akrem, hichem,*

*et*

*badri, seddik, issam, zakalo, wassim, saddam, seif, youssef, nasar,  
hassani, massab, Mohamed, houssem, makhlouf, nadjah,  
bilal, halim, hamza,*

*A tous les amis (es) d'études surtout ceux d'automatique  
promotion 2015*

*Aux habitants de ma Wilaya Guelma*

**BENARBIA BILAL**

**LAIFA SAMI**



# TABLE DES MATIERES

---

Introduction générale.....	1
----------------------------	---

## Chapitre I : Correcteurs classiques

I.1. Introduction .....	3
I.2. Correcteurs classiques.....	3
I.2.1. Correcteur proportionnel(P).....	3
I.2.2. Correcteur proportionnel intégrale (PI) .....	4
I.2.2.1. Action Intégrale (I) .....	4
I.2.2.2. Action Proportionnelle – Intégrale (PI) .....	4
I.2.3. Correcteur PID (Proportionnel Intégral et Dérivée) .....	6
I.3. Différentes structures du régulateur PID .....	8
I.4. Caractéristiques dynamiques d'un procédé .....	10
I.4.1. Temps de réponse .....	10
I.4.2. Temps de montée .....	11
I.4.3. Dépassement .....	11
I.5. Méthodes industrielles de synthèse d'un régulateur PID .....	12
I.5.1. Méthode de Ziegler-Nichols temporelle .....	12
I.5.2. Méthode de Ziegler-Nichols fréquentielle .....	12
I.6. Conclusion .....	13

## Chapitre II : Correcteurs fractionnaires

II.1. Introduction .....	14
II.2. Calcul fractionnaire .....	14
II.2.1. Opérateurs d'ordre fractionnaire .....	14
II.3. Intégration fractionnaire .....	15
II.3.1. Définition de Riemann-Liouville.....	15
II.4. Dérivation fractionnaire .....	15
II.4.1. Définition de Riemann-Liouville (R-L) .....	15
II.4.2. Définition de Caputo .....	16
II.4.3. Définition de Grunwald-Letnikov (G-L) .....	16
II.5. Transformée de Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaire .....	16

## TABLE DES MATIERES

II.5.1. Transformée de Laplace de l'intégration fractionnaire .....	16
II.5.2. Transformée de Laplace de la dérivation fractionnaire .....	17
II.6. Quelques propriétés de la dérivation d'ordre fractionnaire .....	17
II.6.1. Linéarité .....	17
II.6.2. Opérateur identité .....	17
II.6.3. La loi additive d'index .....	18
II.7. Inconvénient du calcul fractionnaire .....	18
II.8. Système d'ordre fractionnaire.....	18
II.8.1. Représentation des systèmes d'ordre fractionnaire .....	18
II.8.1.1. Représentation par équation différentielle .....	18
II.8.1.2. Représentation par fonction de transfert .....	19
II.8.1.3. Représentation par espace d'état .....	19
II.9. Domaines d'application .....	20
II.10. Système d'ordre fractionnaire élémentaire .....	20
II.11. Performances et Caractéristiques du Système Oscillatoire d'ordre Fractionnaire.....	22
II.11.1. Spécifications fréquentielles .....	23
II.11.2. Spécifications temporelles .....	23
II.12. Correcteur fractionnaire .....	23
II.12.1.Principe.....	24
II.12.2. Correcteur PI fractionnaire $PI^\lambda$ .....	24
II.12.3. Correcteur PD fractionnaire $PD^\mu$ .....	25
II.12.4. Correcteur PID fractionnaire $PI^\lambda D^\mu$ .....	26
II.13.Conclusion .....	27

### Chapitre III : Approximation avec le modèle diffusif

III. 1.Introduction .....	28
III.2.Représentation Diffusive .....	28
III.2.1.Modèle diffusif .....	28
III.2.2. Formes équivalentes de le réalisation diffusive .....	30
III.3.Quelques exemples de la représentation diffusive .....	30

## TABLE DES MATIERES

III.4. Avantages de la représentation diffusive .....	32
III.5. Approximation en dimension finie.....	32
III.5.1. Principe .....	32
III.5.2. Choix des paramètres du modèle diffusif .....	34
III.5.2.1. Choix des pôles .....	34
III.5.2.2. Choix de $\xi_{\min}$ Et $\xi_{\max}$ .....	34
III.5.2.3. Choix des fonctions $\Lambda_k$ .....	35
III.6. Simulation numérique .....	36
III.6.1. Approximation d'un intégrateur non entier $\frac{1}{p^a}$ .....	37
III.6.2. Approximation d'un dérivateur non entier $p^\beta$ .....	41
III 7 Conclusion .....	43

### Chapitre IV : Réglage optimal d'un PID fractionnaire

IV. 1. Introduction .....	44
IV.2. Méthodes d'optimisation d'un critère intégral .....	44
IV.3. Procédure de réglage .....	47
IV.4. Algorithme d'optimisation sous MATLAB .....	48
IV.4.1. Problèmes d'optimisation sans contrainte .....	48
IV.5. Application .....	49
IV.5.1. Réglage optimal des paramètres des correcteurs classiques.....	50
IV.5.1.1. Correction du système par PI classique .....	50
IV.5.1.2. Correction du système par PID classique.....	54
IV.5.2 Réglage optimal des paramètres des correcteurs fractionnaires .....	59
IV.5.2.1. Correction du système par $PI^\alpha$ fractionnaire .....	59
IV.5.2.2. Correction du système par $PI^\alpha D^\beta$ fractionnaire .....	67
IV.5.3. Comparaison globale entre les correcteurs classiques et fractionnaires .....	71
IV.6. Conclusion .....	72
Conclusion générale.....	73

## LISTE DES FIGURES

### Liste des figures

I.1	Schéma fonctionnel d'un régulateur P.....	4
I.2	Schéma fonctionnel d'un régulateur PI.....	5
I.3	Réponse indicielle du régulateur PI.....	5
I.4	Réponse harmonique du régulateur PI.....	6
I.5	Schéma fonctionnel du régulateur PID.....	7
I.6	Réponse indicielle du régulateur PID.....	7
I.7	Réponse harmonique du régulateur PID.....	8
I.8	Régulateur à structure parallèle.....	9
I.9	Régulateur à structure série.....	9
I.10	Régulateur à structure mixte (variante).....	10
I.11	Temps de réponse.....	10
I.12	Temps de montée.....	11
I.13	Dépassement.....	11
I.14	Réponse indicielle et mesure des caractéristiques $a$ et $L$ .....	12
II.1	Boucle de commande idéale de Bode.....	21
II.2	Diagramme de Bode en boucle ouvert de la fonction $L(p)$ .....	22
II.3	Possibilités des correcteurs à trois actions.....	24
II.4	Schéma fonctionnel d'un régulateur $PI^\lambda$ .....	25
II.5	Structure de correcteur $PI^\lambda D^\mu$ .....	26
III.1	Choix de la fonction d'interpolation sur les segments.....	35
III.2	Schémas de simulation par approche diffusive.....	36
III.3.a	Approximation numérique d'un intégrateur approché par modèle diffusif.....	37
III.3.b	Approximation numérique d'un intégrateur approché par modèle diffusif.....	38
III.3.c	Approximation numérique d'un intégrateur approché par modèle diffusif.....	39
III.3.d	Approximation numérique d'un intégrateur approché par modèle diffusif.....	40
III.3.e	Approximation numérique d'un intégrateur approché par modèle diffusif.....	41
III.4.a	Approximation numérique d'un dérivateur approché par modèle diffusif.....	42
III.4.b	Approximation numérique d'un dérivateur approché par modèle diffusif.....	43
IV.1	Les surfaces hachurées indiquent l'erreur dynamique de la réponse.....	44
IV.2	Critère ISE.....	45
IV.3	Critère IAE.....	46

## LISTE DES FIGURES

---

<b>IV.4</b> Système de commande en boucle fermée.....	47
<b>IV.5</b> Modèle simulink du système en boucle fermée .....	48
<b>IV.6</b> Réponse indicielle du système en BF avec gain variable.(PI class- Fminsearch-ISE).....	50
<b>IV.7</b> Réponse indicielle du système en BF avec gain variable.( PI class- Fmincon-ISE).....	51
<b>IV.8</b> Réponse indicielle du système en BF avec gain variable.( PI class- Fminsearch-IAE) .....	52
<b>IV.9</b> Réponse indicielle du système en BF avec gain variable.(PI class- Fmincon-IAE).....	52
<b>IV.10</b> Réponse indicielle du système en BF avec gain variable ( PI class- Fminsearch-ITAE).....	53
<b>IV.11</b> Réponse indicielle du système en BF avec gain variable.(PI class- Fmincon-ITAE).....	53
<b>IV.12</b> Réponse indicielle du système en BF des différents régulateur optimal PI ( IAE,ISE et ITAE) .....	54
<b>IV.13</b> Réponse indicielle du système en BF avec gain variable.(PID class- Fminsearch-ISE).....	55
<b>IV.14</b> Réponse indicielle du système en BF avec gain variable.(PID class- Fmincon-ISE).....	55
<b>IV.15</b> Réponse indicielle du système en BF avec gain variable. (PID class- Fminsearch-IAE).....	56
<b>IV.16</b> Réponse indicielle du système en BF avec gain variable.(PID class- Fmincon-IAE).....	57
<b>IV.17</b> Réponse indicielle du système en BF avec gain variable.(PID class- Fminsearch-ITAE) .....	58
<b>IV.18</b> Réponse indicielle du système en BF avec gain variable.(PID class- Fmincon-ITAE).....	58
<b>IV.19</b> Réponse indicielle du système en BF des différents régulateurs optimaux PID ( IAE,ISE et ITAE).....	59
<b>IV.20</b> Réponse indicielle du système en BF avec gain variable.( PI fract- Fminsearch-ISE).....	60



## LISTE DES FIGURES

---

<b>IV.21</b> Réponse indicielle du systeme en BF avec gain variable.( PI fract- Fmincon- ISE).....	60
<b>IV.22</b> Réponse indicielle du systeme en BF avec gain variable.( PI fract- Fminsearch- IAE).....	61
<b>IV.23</b> Réponse indicielle du systeme en BF avec gain variable.( PI fract- Fmincon- IAE).....	62
<b>IV.24</b> Réponse indicielle du systeme en BF avec gain variable.( PI fract- Fminsearch- ITAE).....	63
<b>IV.25</b> Réponse indicielle du systeme en BF avec gain variable.( PI fract- Fminsearch- ITAE).....	63
<b>IV.26</b> Réponse indicielle du systeme en BF des déférents régulateurs optimaux PI fractionnaire ( IAE, ISE et ITAE).....	64
<b>IV.27</b> Réponse indicielle $PI$ classique et $PI^{\alpha}$ fractionnaire du système en BF avec gain variable(ISE).....	65
<b>IV.28</b> Réponse indicielle $PI$ classique et $PI^{\alpha}$ fractionnaire du système en BF avec gain variable(IAE).....	65
<b>IV.29</b> Réponse indicielle $PI$ classique et $PI^{\alpha}$ fractionnaire du système en BF avec gain variable(ITAE).....	66
<b>IV.30</b> Réponse indicielle du systeme en BF avec gain variable.(PID fract- Fminsearch- ISE).....	67
<b>IV.31</b> Réponse indicielle du systeme en BF avec gain variable.(PID fract- Fminsearch- IAE).....	68
<b>IV.32</b> Réponse indicielle du systeme en BF avec gain variable.(PID fract- Fminsearch- ITAE) .....	69
<b>IV.33</b> Ropense indicielle du systeme en BF des déférents régulateurs optimaux PID frctionnaire ( IAE, ISE et ITAE).....	69
<b>IV.34</b> Réponse indicielle $PID$ classique et $PI^{\alpha}D^{\beta}$ :fractionnaire du système en BF avec gain variable(ISE).....	70
<b>IV.35</b> Réponse indicielle $PID$ classique et $PI^{\alpha}D^{\beta}$ :fractionnaire du système en BF avec gain variable(IAE).....	70
<b>IV.36</b> Réponse indicielle $PID$ classique et $PI^{\alpha}D^{\beta}$ :fractionnaire du système en BF avec gain variable(ITAE).....	71

## LISTE DES TABLEAUX

---

### Liste des tableaux

I.1. Paramètres du régulateur PID, obtenue par la méthode de Ziegler Nichols temporelle.....	12
I.2. Paramètres du régulateur PID,obtenue par la méthode de Ziegler-Nichols fréquentielle.....	13
III.1. La représentation diffusive et la réponse impulsionnelle des quelques opérateurs fractionnaires.....	31
IV .1. Les caractéristiques de la réponse temporelle du système commandé par un PI classique avec critère ISE. ....	50
IV .2. Les caractéristiques de la réponse temporelle du système commandé par un PI classique avec critère IAE ....	51
IV.3. Les caractéristiques de la réponse temporelle du système commandé par un PI classique avec critère ITAE ....	53
IV.4. Les caractéristiques de la réponse temporelle du système commandé par un PID classique avec critère ISE ....	55
IV.5. Les caractéristiques de la réponse temporelle du système commandé par un PID classique avec critère IAE ....	56
IV.6. Les caractéristiques de la réponse temporelle du système commandé par un PID classique avec critère ITAE ....	57
IV.7. Les caractéristiques de la réponse temporelle du système commandé par un $PI^{\alpha}$ d'ordre fractionnaire avec critère ISE ....	60
IV.8. Le tableau regroupe les caractéristiques de la réponse temporelle du système commandé par un $PI^{\alpha}$ d'ordre fractionnaire avec critère IAE ....	61
IV.9. Les caractéristiques de la réponse temporelle du système commandé par un $PI^{\alpha}$ d'ordre fractionnaire avec critère ITAE ....	62
IV.10. Les caractéristiques de la réponse temporelle du système commandé par un $PI^{\alpha}D^{\beta}$ fractionnaire avec critère ISE ....	67
IV.11. Les caractéristiques de la réponse temporelle du système commandé par un $PI^{\alpha}D^{\beta}$ fractionnaire avec critère IAE ....	68
IV.12. Les caractéristiques de la réponse temporelle du système commandé par un $PI^{\alpha}D^{\beta}$ fractionnaire avec critère ITAE ....	68
IV .13. Les caractéristiques de la réponse temporelle de système commandé par les correcteur classique et fractionnaire avec les critères ISE, IAE et ITAE .....	71

## LISTE DES SYMBOLES

---

### Liste des symboles

$\alpha$  : Ordre fractionnaire.

$I^\alpha$  : Opérateur d'intégration fractionnaire d'ordre  $\alpha$ .

$D^\alpha$  : Opérateur de dérivation fractionnaire d'ordre  $\alpha$ .

$\Gamma$  : Fonction gamma.

$\partial_t^\alpha$  : Opérateur modifié de dérivation fractionnaire d'ordre  $\alpha$ .

$\mu(\xi)$ ,  $\nu(\xi)$  et  $\square(\xi)$  : Représentations diffusives (Symboles diffusifs).

$\psi(\xi, t)$  et  $\varphi(\xi, t)$  : Réalisations diffusives (Variables auxiliaires de diffusion).

$p$  : Variable de Laplace.

$L$  : Transformé de Laplace.

$\xi$  : Variable diffusive.

$H(s)$  : Fonction de transfert.

$H_\lambda(s)$  : Fonction de transfert incertain.

$F(s)$  : Fonction de transfert en boucle fermée.

$h(t)$  : Réponse impulsionnelle.

$X$  : Variable d'état.

$\square$  : Fonction d'interpolation.

$Re$  : Partie réelle.

$R$  : Ensembles des nombres réels.

$R^+$  : Ensembles des nombres réels positifs ou nuls.

$R^n$  : Ensemble vectoriel de dimension  $n$  construit sur le corps des réels.

$\mathcal{L}$  : Opérateur de Laplace.

$x \in R^n$  : Valeur de composantes  $x_i$ .

$\Gamma(\cdot)$  : Fonction Gamma d'Euler

${}_{t_0}I_t^\alpha f(t)$  : Intégration d'ordre  $\alpha$  de la fonction  $f(t)$  selon la définition de Riemann-Liouville

${}_{t_0}^R D_t^\alpha f(t)$  : Dérivée d'ordre  $\alpha$  de la fonction  $f(t)$  selon la définition de Riemann-Liouville.

${}_{t_0}^C D_t^\alpha f(t)$  : Dérivée d'ordre  $\alpha$  de la fonction  $f(t)$  selon la définition de Caputo.

${}_{t_0}^G D_t^\alpha f(t)$  : Dérivée d'ordre  $\alpha$  de la fonction  $f(t)$  selon la définition Grunwald-Letnikov.

## RÉSUMÉ

---

### Résumé :

Le correcteur PID est la technique la plus utilisée dans l'asservissement des processus industriels depuis des décennies. La conception et le réglage de ce type de correcteur a été un sujet de recherche depuis le jour où Ziegler et Nichols ont présenté leur méthode en 1942. Récemment, un correcteur  $PI^\alpha D^\beta$  d'ordre fractionnaire qui est une généralisation du correcteur PID classique a été proposé. L'intérêt pour ce type de correcteur est justifié par une meilleure flexibilité dans la conception de la commande puisqu'il a deux paramètres en plus, les ordres fractionnaires des actions d'intégration et de dérivation. Ces paramètres peuvent être utilisés pour satisfaire des performances additionnelles dans la conception des systèmes asservis. Bien que plusieurs méthodes et techniques de réglage du correcteur  $PI^\alpha D^\beta$  ont été proposées, un travail de recherche continu et intensif est encore en cours pour le rehaussement de la qualité et l'amélioration des performances des systèmes asservis.

Le travail réalisé dans ce mémoire une méthode de réglage du correcteur classique et fractionnaire en présente essentiellement le principe de réglage et l'implémentation des correcteurs d'ordre fractionnaire. Le réglage en fait deux parties ; En première partie , l'ajustement des paramètres optimaux des correcteurs classique PI et PID en minimisant des critères de performances, Les critères de performances utilisés sont les critères intégraux de l'erreur basée sur la fonction d'optimisation, la deuxième partie l'ajustement des paramètres optimaux des correcteurs fractionnaires  $PI^\alpha$  et  $PI^\alpha D^\beta$  .

### Mots Clés :

Intégrateur d'ordre fractionnaire, Dérivateur d'ordre fractionnaire, correcteur  $PI^\alpha D^\beta$  fractionnaire, réglage de correcteur .



# INTRODUCTION GÉNÉRALE

### Introduction générale :

Le rôle des correcteurs est de modifier automatiquement le comportement du système afin d'imposer les performances désirés.

Les correcteurs classiques présentent plusieurs avantages tel que une précision parfaite, diminution de temps de monter, stabilisation du système, diminution du dépassement et amélioration de la sensibilité. Lorsque le système présent des retards importants, des perturbations très grands ou des grandes variations de ses paramètres, les correcteurs classiques devient incapable d'assurer les performances désirées ce qui donc limite l'utilisation de ces correcteurs dans certains cas.

Ce travail présent des nouveaux correcteurs appelés correcteurs d'ordres fractionnaires. Ces correcteur sont basés sur la théorie du calcul fractionnaire. Les correcteurs PID fractionnaires sont des généralisations des correcteurs PID classique. Du fait que la fonction de transfert est irrationnelle, il est nécessaire de l'approchée par une fonction standard simple à implémenter. le modèle diffusif est l'un des méthodes la plus utilisé pour avoir une réalisation non héréditaire de ces correcteurs avec une fonction de transfert rationnelle standard.

Ce mémoire est décomposé en quatre chapitres organisés comme suit:

Le premier chapitre illustre les différentes structures des correcteurs classiques que l'on rencontre lors la mise en œuvre des systèmes asservis continus. Et leurs méthodes de réglage.

Le deuxième chapitre introduit les notions mathématiques de base des opérateurs d'ordre fractionnaire et des systèmes d'ordre fractionnaire. Nous présentons les correcteurs fractionnaires en particulier les PID d'ordre fractionnaire.

Le troisième chapitre introduit la réalisation des correcteurs fractionnaire par la représentation diffusive. Cette approximation s'appuie sur le comportement des entrées et des sorties d'une équation de diffusion.

## INTRODUCTION GÉNÉRALE

---

Le quatrième chapitre présente l'étude d'un système de 4 ordre avec des méthode, basé sur la minimisation d'une fonctionnelle ISE,IAE,ITAE .la formulation mathématique de problème d'optimisation est basé sue l'approximation des fonction de transfert irrationnelle des correcteurs fractionnaire par sa représentation diffusive implémenté dans MATLAB.



**CHAPITRE I :**  
**CORRECTEURS**  
**CLASSIQUES**



## I.1. Introduction :

Le correcteur élabore le signal de commande adéquat, envoyé à l'entrée du processus, afin que sa sortie satisfasse au mieux les objectifs en termes d'asservissement ou de régulation. Dans ce chapitre, nous présentons les différentes structures des correcteurs classiques que l'on rencontre lors la mise en œuvre de systèmes asservis continus.

On appelle correction, un système asservi qui doit maintenir constante la sortie conformément à la consigne (constante) indépendamment des perturbations. Pour un système asservi, le but de la correction est [1] :

- Accroître la stabilité ;
- Augmenter le gain du système en boucle ouverte, aux basses fréquences, pour augmenter la précision statique ;
- Assurer une réponse acceptable pour des signaux de consigne définis en fonction du temps ;
- Fournir des caractéristiques fréquentielles (marge de gain et de phase) demandées dans une bande de fréquences.

## I.2. Correcteurs classiques :

### I.2.1. Correcteur proportionnel (P) :

Le régulateur à action proportionnelle, ou régulateur P, a une action simple et naturelle, puisqu'il construit une commande  $u(t)$  proportionnelle à l'erreur  $e(t)$ .

- Loi de commande [2] :

$$u(t) = K_p \cdot e(t) \quad (1.1)$$

- Fonction de transfert :

$$G_c = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \quad (1.2)$$

- Schéma fonctionnel :

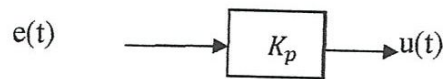


Figure I.1 : Schéma fonctionnel d'un régulateur P

Avantages :

- améliore la rapidité du système.
- Augmentation de la précision pour un système sans intégrateur

Inconvénients :

- amplification sur toute la bande de fréquence
- rapproche le point critique ce qui risque d'instabilité

## I.2.2. Correcteur Proportionnelle Intégrale (PI) :

### I.2.2.1. Action Intégrale (I) :

Cette action calcule sa contribution à la commande en n'utilisant pas l'écart instantané mais une mémoire des écarts intervenus lors des précédents instants. Ceci permet d'éliminer à la fois les erreurs statiques trop petites pour que l'action proportionnelle les contre et les erreurs de suivi de consignes en pente. L'action intégrale agit proportionnellement à la surface de l'écart, et elle poursuit son action tant que l'écart n'est pas nul. On dit que l'action intégrale donne la précision statique.

### I.2.2.2. Action Proportionnelle – Intégrale (PI) :

En général, le régulateur ne fonctionne pas en action intégrale pure (trop instable). Il fonctionne en correcteur Proportionnel Intégral (PI).

- Loi de commande :

$$u(t) = K_p \cdot \left( e(t) + \frac{1}{T_i} \cdot \int_{-\infty}^t e(\tau) d\tau \right) \quad (1.3)$$

Où  $T_i$  est la constante d'intégration

- Fonction de transfert :

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \cdot \frac{1+sT_i}{sT_i} \quad (1.4)$$

- Schéma fonctionnel :

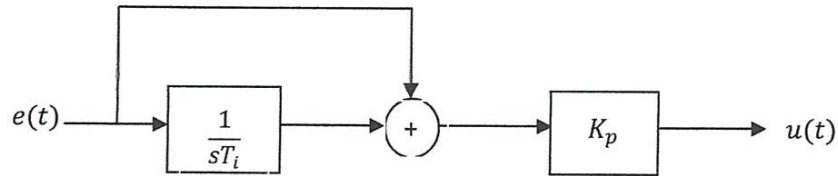


Figure I.2 : Schéma fonctionnel d'un régulateur PI

- La réponse indicielle du régulateur PI est donnée par la figure 1.3 et la réponse harmonique est donnée par la figure 1.4

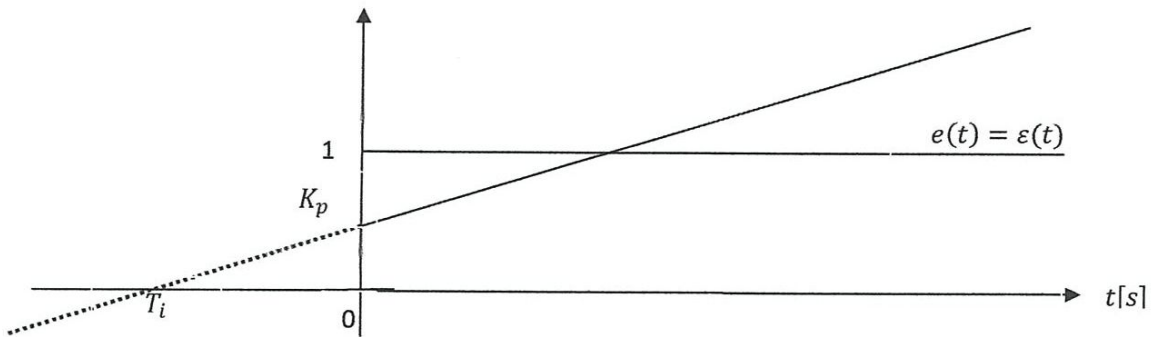


Figure I.3 : Réponse indicielle du régulateur PI

Avantage :

- annule l'erreur statique grâce à l'action intégrale

Inconvénients :

- retard de phase à cause de l'action intégrale qui peut conduire à une instabilité si le correcteur est mal placé.

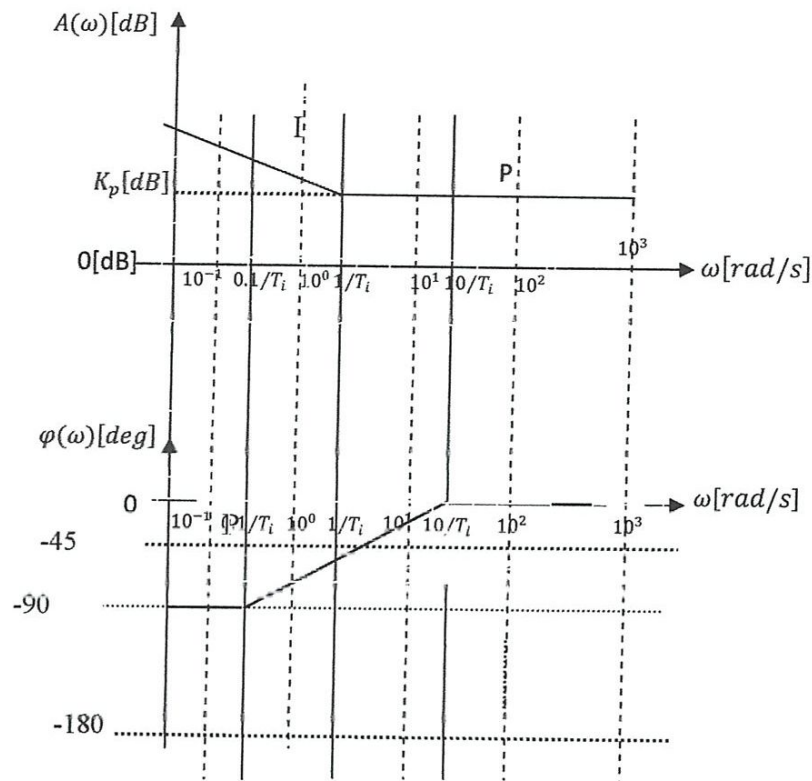


Figure I.4 : Réponse harmonique du régulateur PI

### I.2.3. Correcteur PID (Proportionnel Intégral et Dérivée) [3] :

Le régulateur PID (Proportionnel-Intégral-Dérivée) est la combinaison des trois actions de base P, I et D. Grâce aux termes P et I, ils permettent l'annulation d'une erreur statique tout en autorisant grâce à l'action D des performances de rapidité supérieures à celles d'un régulateur PI. Le régulateur PID est un organe de contrôle permettant d'effectuer une régulation en boucle fermée d'un système industriel. C'est le régulateur le plus utilisé dans l'industrie, et il permet de contrôler un grand nombre de procédés.

- Loi de commande :

$$u(t) = K_p \cdot \left( e(t) + \frac{1}{T_i} \cdot \int_{-\infty}^t e(\tau) d\tau + T_d \cdot \frac{de}{dt} \right) \quad (1.5)$$

Où  $T_d$  est la constante de dérivation.

- Fonction de transfert :

$$G_c(t) = \frac{U(t)}{E(t)} = K_p \cdot \frac{1+s.T_i+s^2.T_i.T_d}{s.T_i} \tag{1.6}$$

- Schéma fonctionnel:

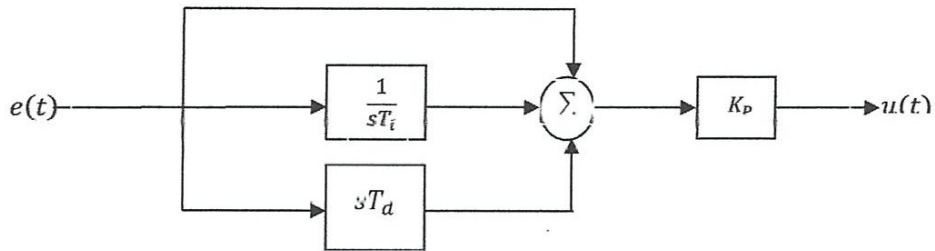


Figure I.5 : Schéma fonctionnel du régulateur PID

- Réponse indicielle du régulateur PID :

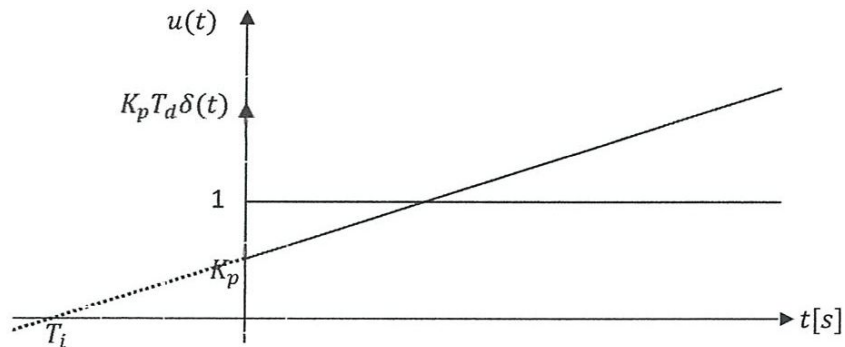


Figure I.6 : Réponse indicielle du régulateur PID

Avantage :

- annule l'erreur statique
- améliore la rapidité du système.
- améliore la stabilité du système

- Réponse harmonique d'un régulateur PID est donnée par la figure 1.7

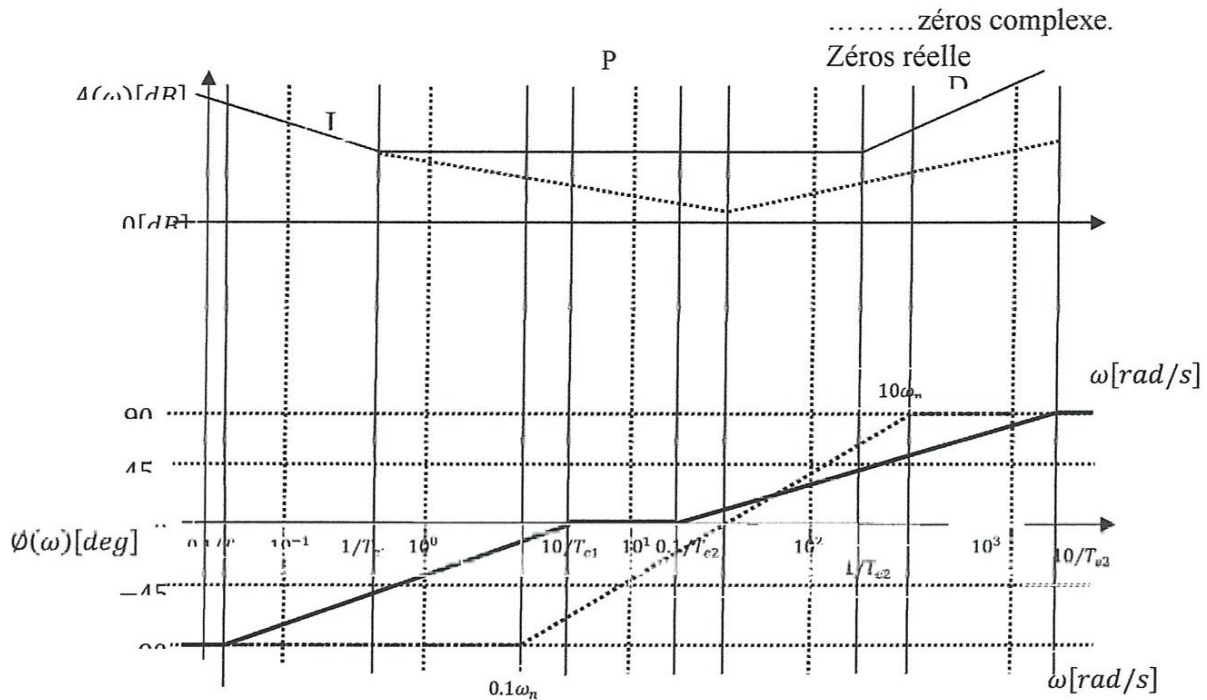


Figure I.7 : Réponse harmonique du régulateur PID

**I.3. Différente structures du régulateur PID :**

Les actions élémentaires d'un régulateur peuvent être associées de plusieurs façons. Les valeurs des paramètres PID ne donnent pas le même comportement du procédé selon que la structure est parallèle ou mixte. C'est pourquoi il est primordial que l'automaticien connaisse la structure existante du régulateur. La structure est imposé par le fabricant du régulateur [2].

**1- Structure parallèle :**

C'est la structure présentée dans la (figure. I.8).

Équation temporelle :

$$u(t) = k_p \varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(t). d(t) + T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + u_0 \tag{I.7}$$

Équation de transfert :

$$C(P) = \frac{y(p)}{\varepsilon(p)} = K_p + \frac{1}{T_i p} + T_d p \tag{I.8}$$

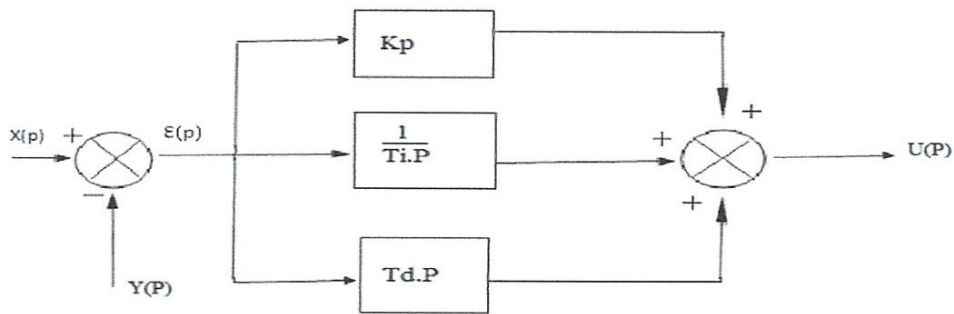


Figure I.8: Régulateur à structure parallèle.

**2-Structure série :**

C'est la structure présentée dans la (figure. I.9).

Équation temporelle :

$$u(t) = a \cdot K_p \cdot \varepsilon(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t \varepsilon(t) d(t) + K_p \cdot T_d \cdot \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + u_0 \tag{I.9}$$

Ou  $a = \frac{T_i+T_d}{T_i}$  est le coefficient théorique d'interaction entre action intégrale et action dérivée [2].

Équation de transfert :

$$C(P) = \frac{Y(P)}{\varepsilon(P)} = K_p \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i P}\right) (1 + T_d P) \tag{I.10}$$

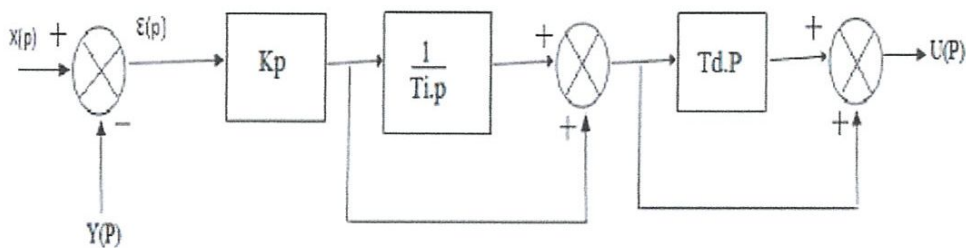


Figure I.9 : Régulateur à structure série.

**3-Structure mixte :**

C'est la structure présentée dans la (figure. I.5) Elle est la plus utilisé actuellement par les constructeurs.

D'autres structures mixtes existent aussi comme par exemple (figure .I.10).

Equation temporelle :

$$u(t) = K_p \varepsilon(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t \varepsilon(t) dt + T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + u_0 \quad (\text{I.11})$$

Fonction de transfert :

$$C(P) = \frac{Y(P)}{\varepsilon(P)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i P}\right) + T_d P \quad (\text{I.12})$$

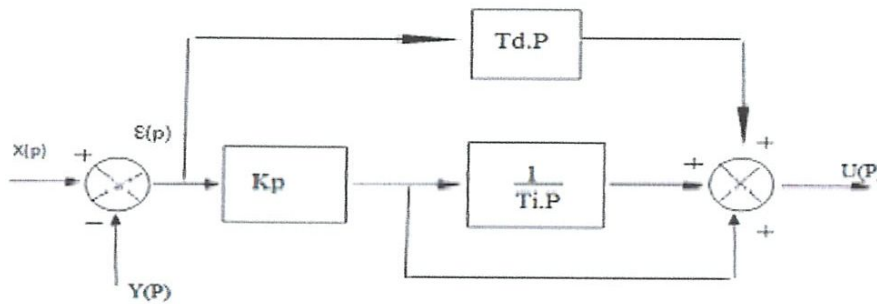


Figure I.10 : Régulateur à structure mixte (variante).

#### I.4. Caractéristiques dynamiques d'un procédé :

##### I.4.1. Temps de réponse :

C'est l'aptitude du procédé à suivre les variations de la consigne. Dans le cas d'un échelon de la consigne, la croissance de la grandeur réglée définit les différents temps de réponse. Dans l'exemple ci-dessous de la figure (I.11), on mesure le temps de réponse à  $\pm 5\%$  qui est égal à  $t_1 - t_0$  [4]:

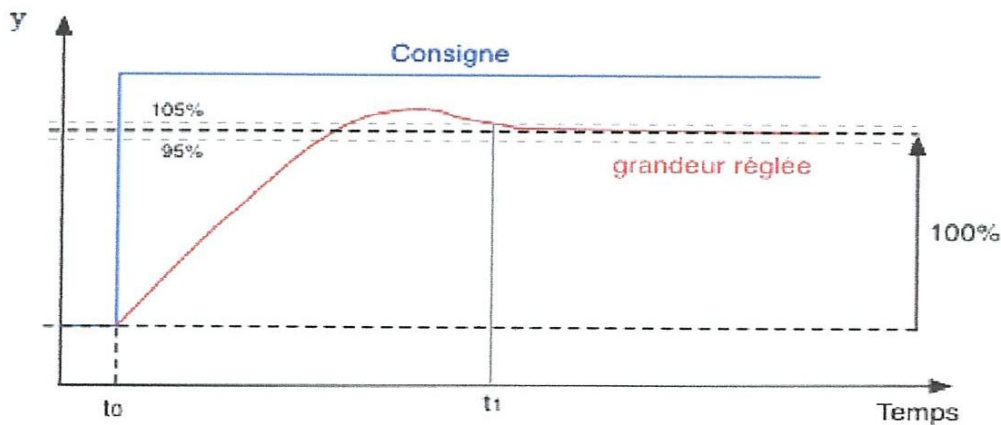


Figure I.11: Temps de réponse.



## I.4.2. Temps de montée :

Le temps de montée (figure I.12) est l'intervalle de temps séparant les instants où la réponse indicielle vaut 10% et 90% de la valeur finale[6]:

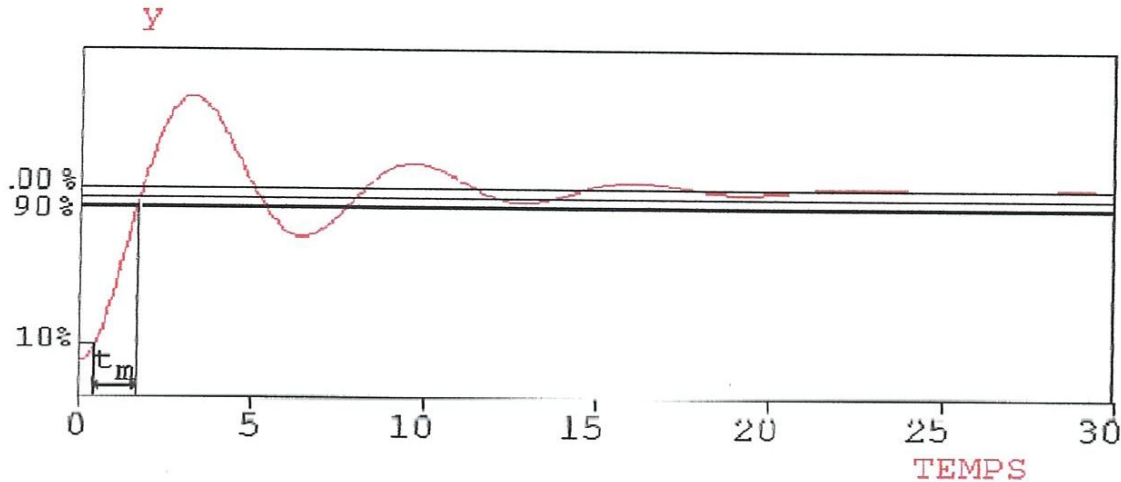


Figure I.12: Temps de montée.

## I.4.3. Dépassement :

Le premier dépassement permet de qualifier la stabilité d'un système. Plus celui-ci sera important, plus le système sera proche de l'instabilité. Dans certaines régulations, aucun dépassement n'est toléré, dans d'autres un dépassement inférieur à 15% est considéré comme acceptable. Dans la réponse indicielle ci-dessous (figure I.13), le premier dépassement est de 14%.

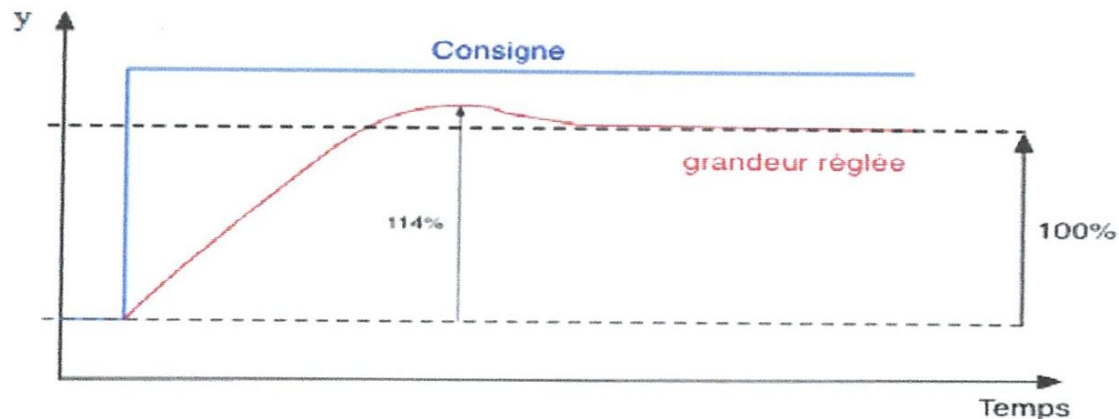


Figure I.13 : Dépassement.

### I.5.Méthodes industrielles de synthèse d'un régulateur PID :

#### I.5.1. Méthode de Ziegler-Nichols temporelle [5] :

La méthode temporelle de Ziegler-Nichols est basée sur la réponse indicielle du procédé en boucle ouverte, modélisé par une fonction de transfert. Les paramètres du régulateur PID en fonction des caractéristiques  $a$  et  $L$  (voir figure 1.14) du procédé sont donnés dans le tableau 1.

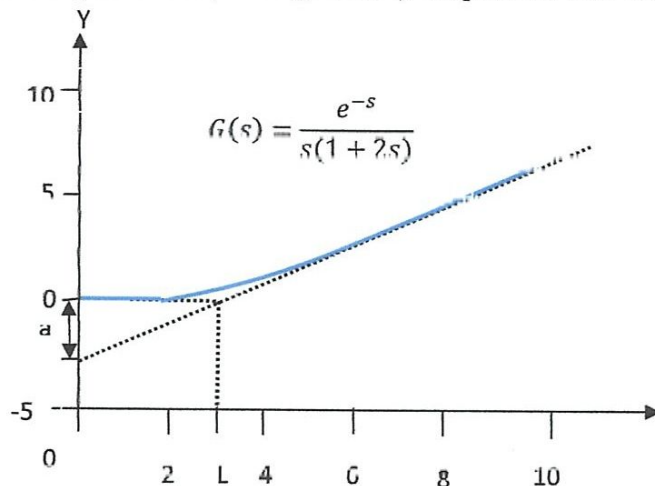


Figure I.14: Réponse indicielle et mesure des caractéristiques  $a$  et  $L$

Tableau I.1 : Paramètres du régulateur PID, obtenue par la méthode de Ziegler-Nichols temporelle

Régulateur	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$1/a$		
PI	$0.9/a$	$3L$	
PID	$1.2/a$	$2L$	$L/2$

#### I.5.2. Méthode de Ziegler-Nichols fréquentielle :

Cette méthode est basée sur la connaissance du point critique du diagramme de Nyquist du procédé. Les paramètres du régulateur PID en fonction des caractéristiques  $K_0$  et  $T_0$  sont donnés dans le tableau 2 où  $K_0$  et  $T_0$  sont respectivement le gain qui amène le système en à la

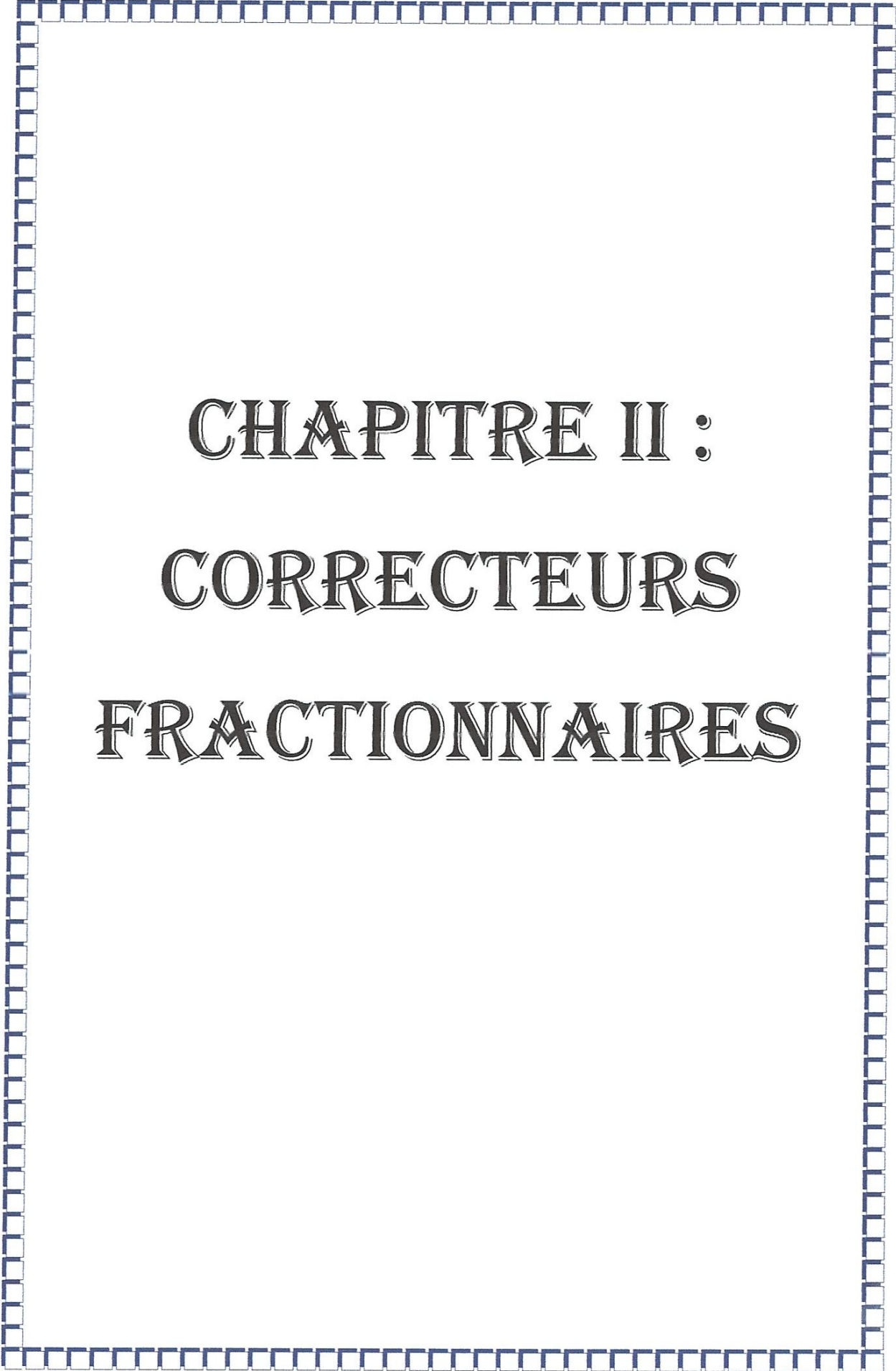
limite d'oscillation et la période des oscillations respectivement. Les méthodes de Ziegler-Nichols ont été développées à partir de simulations sur un grand nombre de cas. Le critère de synthèse est d'obtenir un rapport de décroissance 1/4, pour le rejet des perturbations, ce qui représente un coefficient d'amortissement de 0,22. Ces valeurs sont satisfaisantes pour un bon rejet des perturbations, mais elles sont trop faibles pour les réponses aux changements de consigne.

**Tableau I.2 : Paramètres du régulateur PID, obtenue par la méthode de Ziegler-Nichols fréquentielle**

Régulateur	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$0.5K_0$	$0.8T_0$	
PI	$0.45K_0$		
PID	$0.6K_0$	$0.5T_0$	$0.125 T_0$

## I.6. Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons présenté les corrections classiques permettant d'améliorer les comportements des systèmes asservis. Les correcteurs introduits sont à action proportionnelle (P), proportionnelle et intégrale (PI) ou regroupant les trois actions (PID). En outre, nous avons cité brièvement les différentes techniques de réglages des paramètres de ces correcteurs.



**CHAPITRE II :**  
**CORRECTEURS**  
**FRACTIONNAIRES**

## II.1. Introduction :

Les systèmes d'ordre fractionnaire sont des systèmes dynamiques d'écrit par des équations différentielles d'ordre fractionnaires, ces équations modélise réellement le comportement des systèmes physiques parce qu'ils donnent des modèle plus précis, le problème liée a ce type des systèmes est leur réalisation parce qu'ils sont à mémoire longue.

## II.2. Calcul fractionnaire :

Le calcul fractionnaire est le champ de l'analyse mathématique, l'investigation et l'application des intégrales et des dérivées d'ordre arbitraire. Ces dernières années l'intérêt considérable pour le calcul fractionnaire a été stimulé par les applications de ce calcul dans les différents domaines de la physique et de l'ingénierie .

Généralement on sait que les dérivées et les intégrales d'ordre entier ont des interprétations physiques et géométriques claires, qui simplifient de manière significative leur utilisation pour résoudre des problèmes appliqués dans divers domaines de la science. La différentiation et l'intégration d'ordre arbitraire (pas nécessairement un nombre entier) n'a aucune interprétation géométrique et physique acceptable sur ces opérations pendant plus de 300 ans .

Le calcul d'ordre fractionnaire (intégration et différentiation d'ordre fractionnaire) est un vieux concept qui date de l'époque de Cauchy, Riemann Liouville et Leitnikov au 19<sup>ème</sup> siècle. Il a été utilisé en mécanique depuis les années 1930 et en électrochimie depuis les années 1960. Et plus tard plusieurs mathématiciens et physiciens ont étudié les opérateurs différentiels et les systèmes d'ordre fractionnaire [6].

### II .2.1.Opérateurs d'ordre fractionnaire :

Le calcul fractionnaire est une généralisation de l'intégration et de la différentiation à l'opérateur fondamental d'ordre fractionnaire  $aD_t^\alpha$  où  $a$  et  $t$  sont des limites de l'opération. L'opérateur intégro-différentiel continu est défini par : [7]

$$aD_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ \int_a^t (d\tau)^\alpha & \alpha < 0 \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

$$\mathcal{L}\left\{ {}_0I_t^\alpha f(t) = \frac{F(s)}{s^\alpha}, \alpha > 0 \right\} \quad (\text{II.14})$$

Ou  $s$  représente la variable de Laplace et  $n - 1 < \alpha < n$

### II.5.2. Transformée de Laplace de la dérivation fractionnaire :

#### - Définition de Riemann-Liouville (R-L)

$$\mathcal{L}\left\{ {}_0D_t^\alpha f(t) \right\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [{}^{RL}D^{\alpha-1-k} f(t)]_{t=0} \quad (\text{II.15})$$

Les conditions initiales apparaissant dans (II.8) sont données en fonction d'une dérivée non entière évaluée à l'origine.

#### - Définition de Caputo

$$\mathcal{L}\left\{ {}_0D_t^\alpha f(t) \right\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) \quad (\text{II.16})$$

Les conditions initiales apparaissant dans (II.12) sont données en fonction d'une dérivée entière évaluée à l'origine.

#### - Définition de Grunwald-Letnikov (G-L)

$$\mathcal{L}\left\{ {}_0D_t^\alpha f(t) = s^\alpha F(s) \right\} \quad (\text{II.17})$$

### II.6. Quelques propriétés de la dérivation d'ordre fractionnaire :

Les principales propriétés des dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire sont les suivantes [8]:

#### II.6.1. Linéarité :

La dérivation non entière est un opérateur linéaire. Ainsi, si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues et  $(a, b)$  des nombres réels, on a :

$$D^{(\alpha)}(a.f + b.g) = a.D^{(\alpha)}(f) + b.D^{(\alpha)}(g) \quad (\text{II.18})$$

#### II.6.2. Opérateur identité :

Pour  $\alpha=0$ , l'opération  $D^{(0)}$  est l'opérateur identité :

$$D^{(0)}f(t) = f(t) \quad (\text{II.19})$$

**II.6.3. Loi additive d'index :**

$${}_0D_0^\alpha {}_0D_t^\beta f(t) = {}_0D_t^\beta {}_0D_0^\alpha f(t) = {}_0D_t^{\alpha+\beta} f(t) \quad (\text{II.20})$$

Avec  $\alpha$  et  $\beta$  deux nombres réels.

**II.7. Inconvénients du calcul fractionnaire :**

Les difficultés liées au calcul fractionnaire peuvent être se résumer à :

- Les opérateurs sont héréditaires et à noyau singulier.
- L'approximation numérique très difficiles et demande un très grand stockage.
- Le système n'est pas sous la forme abstraite :  $\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$
- Les opérateurs de convolution prennent en compte toute l'évolution passée du système.

**II.8. Système d'ordre fractionnaire :**

Si plusieurs formes de représentation sont à même de décrire un système entier (équation différentielle, équation récurrente, Représentation d'état, fonction de transfert ...), le comportement d'un système d'ordre fractionnaire est le plus souvent décrit par des équations différentielles ou des fonctions de transfert contenant des opérateurs d'ordre fractionnaire.

**II.8.1. Représentation des systèmes d'ordre fractionnaire :****II.8.1.1. Représentation par équation différentielle :**

Les systèmes d'ordre fractionnaire peuvent être représentés par une équation dynamique donnée par l'expression :

$$H(D^{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_N})(y_1, y_2, \dots, y_l) = G(D^{\beta_0 \beta_1 \beta_2 \dots \beta_M})(u_1, u_2, \dots, u_k) \quad (\text{II.21})$$

Avec :

$y_i, u_i$  : Des fonctions de temps

$H, G$  : Des combinaisons des opérateurs de la dérivée fractionnaire.

Pour les systèmes mono-variables linéaires invariants dans le temps, l'équation (II.22) devient :

$$H(D^{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_N})y(t) = G(D^{\beta_0 \beta_1 \beta_2 \dots \beta_M})u(t) \quad (\text{II.23})$$

On pose :

$$\begin{cases} H(D^{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_N}) = \sum_{k=0}^n a_k D^{\alpha_k} \\ G(D^{\beta_0 \beta_1 \beta_2 \dots \beta_M}) = \sum_{k=0}^m b_k D^{\beta_k} \end{cases} \quad (\text{II.24})$$

Et  $a_k, b_k \in \mathbb{R}$

Finalement on obtient l'équation différentielle d'ordre fractionnaire :

$$a_n D^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} D^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + a_0 D^{\alpha_0} y(t) = b_m D^{\beta_m} u(t) + a_{m-1} D^{\beta_{m-1}} u(t) + \dots + b_0 D^{\beta_0} u(t) \quad (\text{II.25})$$

Selon la relation entre les ordres de dérivation fractionnaire de l'équation différentielle (II.25), on distingue deux types du système d'ordre fractionnaire.

- Les systèmes d'ordre commensurables
- Les systèmes d'ordre rationnels

### II.8.1.2. Représentation par fonction de transfert :

Par l'application de la transformée de Laplace de l'équation (II.26) avec les conditions initiales nulles, on obtient la fonction de transfert du système fractionnaire suivante :

$$G(p) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m p^{\beta_m} + b_{m-1} p^{\beta_{m-1}} + \dots + b_0 p^{\beta_0}}{a_n p^{\alpha_n} + a_{n-1} p^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0 p^{\alpha_0}} \quad (\text{II.27})$$

Dans le cas du système d'ordre commensurable la fonction de transfert est donnée par :

$$G(s) = \frac{\sum_{k=0}^n b_k (s^\alpha)^k}{\sum_{k=0}^m a_k (s^\alpha)^k} \quad (\text{II.28})$$

D'où on peut considérer la fonction rationnelle  $H(\lambda)$  du variable  $\lambda = s^\alpha$  est :

$$H(\lambda) = \frac{\sum_{k=0}^n b_k \lambda^k}{\sum_{k=0}^m a_k \lambda^k} \quad (\text{II.29})$$

### II.8.1.3. Représentation par espace d'état :

La représentation dans l'espace d'état du système multi-variable peut être représentée par :

$$\begin{cases} D^{\alpha} u_j^n X = AX + BU \\ Y = CX + DU \end{cases} \quad (\text{II.27})$$



Avec :

$$\alpha = [\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n]$$

Dans le cas particulier du système d'ordre commensurable à celle du système d'ordre entier par l'utilisation de l'opérateur  $D^\alpha$  et la définition :

$$D^\alpha x_k = x_{k+1} \quad k = 1, 2, \dots, n - 1 \tag{II.28}$$

La représentation d'état sous la forme canonique contrôlable peut donner par l'équation matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} D^\alpha x_1 \\ D^\alpha x_2 \\ \vdots \\ D^\alpha x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_{m-1} & -b_{m-2} & \dots & -b_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u \tag{II.29}$$

$$y = [a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

**II.9. Domaines d'application :**

L'application des méthodes basées sur les systèmes différentiels fractionnaires et de plus en plus fréquentent dans les différentes domaines scientifiques, elles sont utilisées essentiellement comme outils de modalisation en mécanique, automatique, rhéologique. A titre d'exemple ces méthodes sont actuellement utilisées pour modéliser le comportement des matériaux, réaliser des composants électriques à impédance fractionnaire, commander machines électriques par des correcteurs fractionnaires et dans le traitement d'image.

**II.10. Système d'ordre fractionnaire élémentaire [9]:**

Bode a proposé une forme idéale de la fonction de transfert de la boucle de commande dans son travail sur la conception de feedbacks amplificateurs (voire figure II.1) cette fonction de transfert à la forme :

$$L(p) = \left(\frac{w_c}{p}\right)^\alpha \quad a \in R. \tag{II.30}$$

Où  $\omega_c$  est la fréquence de coupure désirée et le paramètre  $a$  la pente de la caractéristique idéale du gain. En fait, la fonction de transfert  $L(p)$  est un intégrateur d'ordre fractionnaire pour  $a > 0$ . Les diagrammes de Bode de  $L(p)$  ( $1 < a < 2$ ) sont très simple (figure II.2). La courbe d'amplitude est une ligne droite de pente constante  $-20a \text{ dB / dec}$ , et la courbe de phase est un trait horizontal à  $-\pi/2$  rads. La courbe de Nyquist se réduit à une ligne droite passant par l'origine avec  $\arg L(j\omega) = -\pi/2 \text{ rad}$ .

Maintenant considérons le système à retour unitaire représenté sur la figure (II.1) avec  $L(p)$  est la fonction de transfert idéal de Bode. Ce choix de  $L(p)$  donne un système en boucle fermée avec la propriété souhaitable d'être peu sensible à la variation du gain.

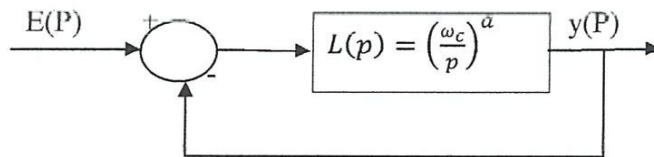


Figure II.1 : Boucle de commande idéale de Bode.

La fonction de transfert en boucle fermée :

$$H(p) = \frac{Y(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + (p/\omega_c)^a} = \frac{K}{K + p^a} \quad \text{avec } K = \omega_c^a \quad (\text{II.31})$$

(Pour :  $1 < a < 2$  en à un système d'ordre fractionnaire oscillatoire).

Ce système à la propriété de robustesse, en termes d'invariance sous changement d'échelle de fréquence .

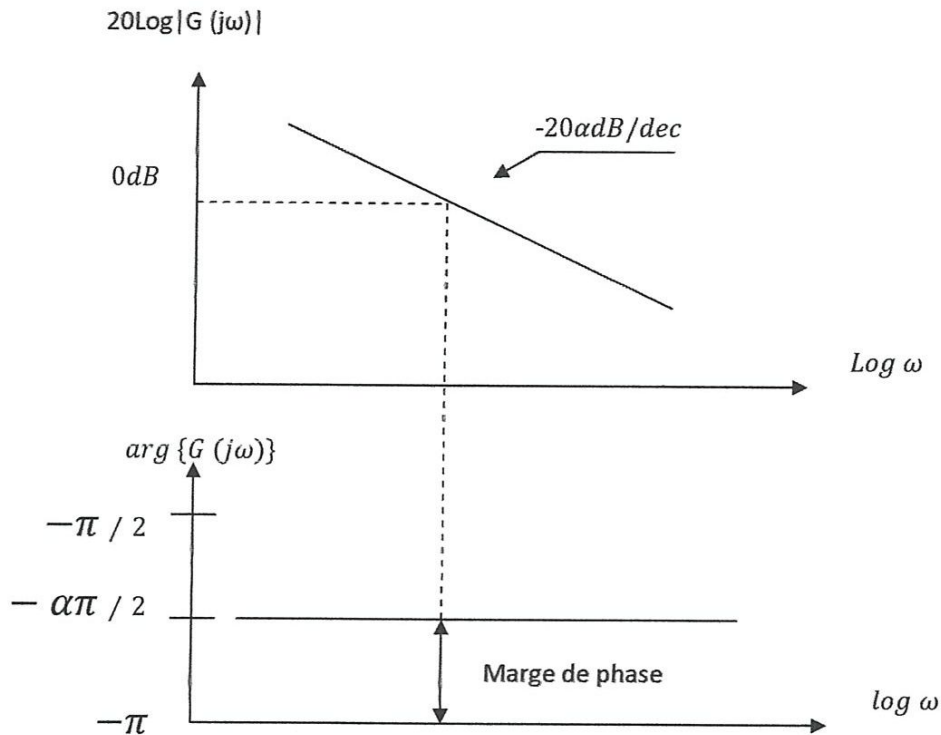


Figure II.2 : Diagramme de Bode en boucle ouverte de la fonction  $L(p)$

Les caractéristiques générales de la fonction de transfert de Bode sont les suivantes [10] :

a) En boucle ouverte :

- Gain : une pente constante de  $-20\alpha\text{dB/dec}$ .
- Fréquence de coupure : une fonction de  $K$ .
- Phase : ligne horizontale de  $-a \frac{\pi}{2}$
- Nyquist : ligne droite avec un argument de  $-a \frac{\pi}{2}$ .

b) En boucle fermée avec retour unitaire :

- La marge du gain est infinie.
- La marge de phase est constante :  $\varphi_a = a \left(1 - \frac{a}{2}\right)$ ; elle dépend seulement de  $\alpha$ .

### II.11. Performances et Caractéristiques du Système Oscillatoire d'ordre Fractionnaire :

Le but fondamental pour la conception des systèmes asservis consiste à répondre aux conditions fixées par le comportement du système projeté. Dans cette partie nous avons cité brièvement les spécifications du système oscillatoire a partir des résultats obtenir par Assabaa dans [11], [12].

**II.11.1. Spécifications fréquentielles :**

1. Facteur de qualité : 
$$Q = \frac{1}{\sqrt{2(1+\cos\frac{a\pi}{2})}} \quad (II.32)$$

2. Facteur d'amortissement : 
$$\xi = \sqrt{\frac{(1+\cos\frac{a\pi}{2})}{2^{a-1}}} \quad (II.33)$$

$\xi$  Dépond seulement de  $\alpha$  se qui permet d'introduire la notion de mode oscillatoire robuste [12].

3. Pulsation de résonance : 
$$w_r = w_n(-\cos(a\pi/2))^{1/a} \quad (II.34)$$

4. Facteur de résonance : 
$$M_r = |G(jw_r)| = \frac{1}{\sin(\frac{a\pi}{2})} \quad (II.35)$$

$M_r$  Dépond seulement de  $\alpha$  se qui permet d'introduire la notion de résonance robuste [12].

**II.11.2 Spécifications temporelles :**

1. Dépassement(%): 
$$M_p = (a - 1.005)(a - 0.755) \quad (II.36)$$

2. Le temps de dépassement : 
$$tp = \frac{1.118(a-0.252)^2}{(a-0.9)w_n}$$

3. Temps de réponse : 
$$ts(2\%) = \frac{4\sqrt{2^{a-1}}}{w_n\sqrt{1+\cos(\frac{a\pi}{2})}} = \frac{4}{\xi w_n} \quad 1.138 < a < 2 \quad (II.37)$$

4. Le temps de monté : 
$$tr \approx \frac{0.135(a+1.158)^2}{(a-0.72)w_n} \quad (II.38)$$

**II.12. Correcteur fractionnaire :**

Les correcteurs d'ordre fractionnaire sont des correcteurs basés sur trois actions proportionnelles, intégrales et dérivées dont l'ordre d'intégration et de dérivation est réel et pas forcément un entier.

## II.12.1.Principe :

Par comparaison aux correcteurs classiques, les correcteurs d'ordre fractionnaires possèdent en plus deux autres paramètres notés  $\lambda$  et  $\mu$  qui présentent l'ordre d'intégration et de dérivation respectivement. Suivant la variation de ces deux paramètres, on peut distinguer différentes possibilités des correcteurs d'ordre fractionnaire (figure II.3) [13] :

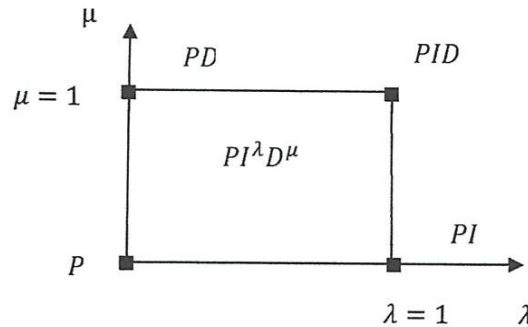


Figure II.3 : Possibilités des correcteurs à trois actions

D'après cette figure, on peut donner les cas suivants :

Lorsque  $\lambda = 0$  et  $\mu = 0$ , on a un correcteur PI classique.

Lorsque  $\lambda = 1$  et  $\mu = 1$ , on a un correcteur PID classique.

Lorsque  $0 < \lambda < 1$  et  $0 < \mu < 1$ , on a un correcteur PID fractionnaire.

Lorsque  $\lambda = 1$  et  $\mu = 0$ , on a un correcteur PI classique.

Lorsque  $\lambda = 0$  et  $\mu = 1$ , on a un correcteur PD classique.

Lorsque  $\lambda = 0$  et  $0 < \mu < 1$ , on a un correcteur PD fractionnaire.

Lorsque  $0 < \lambda < 1$  et  $\mu = 0$ , on a un correcteur PI fractionnaire.

D'après ces résultats, on constate que les correcteurs classiques sont des cas particuliers des correcteurs d'ordre fractionnaires

II.12.2. Correcteur PI fractionnaire  $PI^\lambda$  :

La loi de commande d'un correcteur PI fractionnaire est donné par :

$$u(t) = k_p + k_p \frac{D_t^{-\lambda}}{T_i} \quad (\text{II.39})$$

Par transformé de Laplace, on obtient la fonction de transfert suivante :

$$C(p) = k_p \left( 1 + \frac{1}{T_i p^\lambda} \right) \tag{II.40}$$

Avec :  $k$  : le gain proportionnel

$T_i$  : Constant de temps de l'action intégral

$\lambda$  : Ordre d'intégration

La réponse fréquentielle est caractérisée par l'amplitude et la phase suivant :

L'amplitude :

$$|C(jw)| = \frac{k_p \left[ \left( 1 + T_i w^\lambda \cos\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right) \right)^2 + \left( T_i w^\lambda \sin\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right) \right)^2 \right]^{1/2}}{T_i w^\lambda} \tag{II.41}$$

La phase :

$$\arg(C(w)) = \arctan \left( \frac{w^\lambda \sin\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)}{1 + w^\lambda \cos\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)} \right) - T_i \lambda \frac{\pi}{2} \tag{II.42}$$

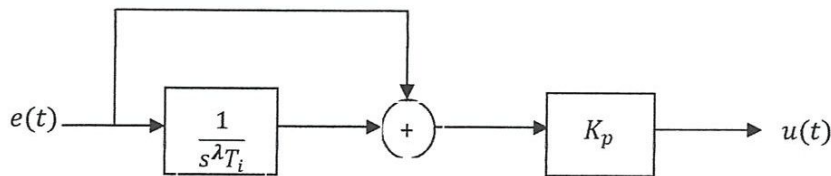


Figure II.4 : Schéma fonctionnel d'un régulateur  $PI^\lambda$

L'avantage principal d'un correcteur PI fractionnaire est de permettre d'avoir un système plus robuste aux variations du gain (avoir même dépassement).

**II.12.3. Correcteur PD fractionnaire  $PD^\mu$  :**

La loi de commande du correcteur PD fractionnaire est donné par :

$$u(t) = k_p + k_p T_d D_t^\mu e(t) \tag{II.43}$$

La fonction de transfert est de la forme :

$$C(p) = k_p (1 + T_d p^\mu) \tag{II.44}$$

Avec :  $k_p$  : le gain proportionnel.

$T_i$  : Constante de temps de l'action dérivée.

$\mu$  : Ordre de dérivation.

La réponse fréquentielle est caractérisée par l'amplitude et la phase suivant :

L'amplitude :

$$|C(jw)| = \frac{k_p}{\left[ (1 + T_d w^\mu \cos(\frac{\mu\pi}{2}))^2 + (T_d w^\mu \sin(\frac{\mu\pi}{2}))^2 \right]^{1/2}} \quad (II.45)$$

La phase :

$$\arg(C(w)) = \text{arc tg} \left( \frac{T_d w^\mu \sin(\frac{\mu\pi}{2})}{1 + T_d w^\mu \cos(\frac{\mu\pi}{2})} \right) \quad (II.46)$$

L'avantage principal de ce correcteur est d'améliorer la stabilité.

**II.12.4. Correcteur PID fractionnaire  $PI^\lambda D^\mu$  :**

Podlubny a proposé une généralisation du correcteur *PID* classique à la forme  $PI^\lambda D^\mu$  nommé le *PID* fractionnaire, où  $\lambda$  et  $\mu$  sont des réel positifs, Il a montré que les performances étaient considérablement améliorées par rapport à celles obtenues par un *PID* d'ordre entier [7]. L'expression analytique du *PID* fractionnaire est donnée par l'équation suivante :

$$u(t) = K_p \left[ e(t) + \frac{1}{T_i} D^{-\lambda}(e(t)) + T_d D^\mu(e(t)) \right] \quad (II.47)$$

Par transformée de Laplace, on obtient la fonction de transfert suivante :

$$C(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s^\lambda} + T_d s^\mu \right) \quad (II.48)$$

Ou :  $K_p$  représente l'action proportionnelle.

$\frac{1}{T_i s^\lambda}$  : représente l'action de l'intégrale d'ordre fractionnaire.

$T_d s^\mu$  : représente l'action de la dérivation d'ordre fractionnaire.

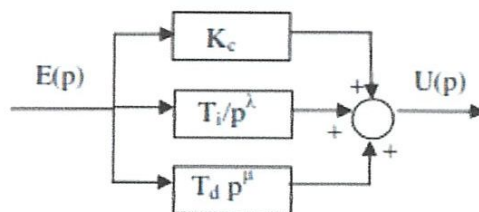


Figure II.5 : Structure de correcteur  $PI^\lambda D^\mu$

Les avantages de ce correcteur est :

- Mieux adapté pour la commande les systèmes fractionnaire
- Structure plus générale

**II.13.Conclusion :**

Dans ce chapitre nous avons traité un nouveau concept utilisé en automatique appelé système d'ordre fractionnaire. Simplement ce système est décrit par une équation différentielle d'ordre fractionnaire. Nous avons introduit la notion des correcteurs PID d'ordre fractionnaire.





**CHAPITRE III :**  
**APPROXIMATION**  
**AVEC LE MODÈLE**  
**DIFFUSIF**

### III.1.Introduction :

D'habitude les simulations sont effectuées avec un logiciel préparé pour traiter seulement les puissances d'ordre entier de  $s$ . Alors il est très important de trouver des approximations d'ordre entier pour des fonctions de transfert d'ordre fractionnaire. Autrement dit, lorsque les simulations doivent être exécutées ou les correcteurs doivent être implémentés, les fonctions de transfert d'ordre fractionnaire sont remplacées par des fonctions de transfert d'ordre entier, avec un comportement assez identique à celles désirées, mais beaucoup plus les approximations disponibles dans le domaine  $s$  sont appelées des approximations analogiques ou des approximations du domaine fréquentiel. Dans la référence on peut trouver un très bon résumé des méthodes d'approximation analogique des systèmes d'ordre fractionnaire, existantes dans la littérature. Ces méthodes d'approximation analogique sont:

- ✓ Méthode EFC (Expansion Fractionnaire Continue)
- ✓ Méthode de Carlson
- ✓ Méthode de Matsuda
- ✓ Méthode d' Oustaloup
- ✓ Méthode de Charef
- ✓ Méthode diffusive
- ✓ Autres méthodes (Roy ,Wang, Jones...)

Et ce travail choisir la méthode diffusive pour les approximations des fonctions de transferts d'ordre fractionnaire

### III.2.Représentation Diffusive :

#### III.2.1.Modèle diffusif :

La théorie de la représentation diffusive permet de réaliser les opérateurs fractionnaires de façon non héréditaire par des systèmes linéaires dynamiques entrée-sortie de nature diffusive. Elle est mieux adaptée à l'analyse et l'étude des systèmes contenant ces opérateurs.

Etant donnée  $H(p)$  la fonction de transfert (non rationnelle) associée à l'opérateur causal de convolution  $H(d/dt)$  la réalisation diffusivo canonique de cet opérateur est la réalisation diffusivo canonique de cet opérateur est exprimée, lorsqu'elle existe, par la réalisation d'état :

$$\begin{cases} \partial_t \psi(\xi, t) = -\xi \psi(\xi, t) + u(t), & \psi(\xi, t) = 0, & \xi \in \mathcal{R}^- \\ y(t) = \int_0^{+\infty} \mu(t, \xi) \psi(\xi, t) d\xi \end{cases} \quad (III.1)$$

Où  $\mu(\xi)$  est appelée représentation diffusivo de  $H(p)$

La représentation diffusivo  $\mu(\xi)$  d'un opérateur pseudo-différentiel à temps invariant de symbole  $H(p)$  est définie, lorsqu'elle existe, comme solution de l'équation intégrale :

$$H(p) = \int_0^{+\infty} \frac{\mu(\xi)}{p+\xi} d\xi \quad (III.2)$$

L'équation (III.2) est la fonction de transfert associée à la représentation diffusivo. En d'autres termes,  $\mu(\xi)$  La représentation est obtenue directement par la transformation de Laplace inverse de la réponse impulsionnelle  $h(t)$  La représentation diffusivo est donc une utilisation "à contre sens" de la transformée de Laplace :

$$\mu(\xi) \xrightarrow{\mathcal{L}_\xi} h(t) \xrightarrow{\mathcal{L}_t} H(p) \quad (III.3)$$

$$h(t) = \mathcal{L}(\mu(\xi)) = \int_0^\infty \mu(\xi) e^{-\xi t} d\xi$$

$$\mu(\xi) = \mathcal{L}^{-1}(h(t))$$

Le principe de la représentation diffusivo est d'introduire une réalisation dynamique d'un système sous la forme d'une représentation d'état classique de dimension infinie, appelée réalisation diffusivo (III.1).

Cette réalisation (III.1), fait apparaître une première équation correspondant à une équation différentielle du premier ordre en dimension infinie, équivalente à un générateur interne indépendant du système considéré. Le système ainsi défini se prête bien à l'approximation en dimension finie et conduit à des simulations numériques dans le domaine temporel à la fois simples, stables, précises et peu coûteuses en calcul (car diagonale) pour les opérateurs non standard.

III.2.2. Formes équivalentes de la réalisation diffusive :

La Représentation diffusive (III.1), mettant en jeu le symbole  $\mu$ , est une des réalisations possibles de l'équation de diffusion linéaire. Elle est très intéressante pour ses propriétés de linéarité et de diagonalité. D'un point de vue général, les réalisations diffusives sont des représentations à deux variables : une variable temps  $t$ , et une variable pulsation  $\xi$ ; la dimension infinie qui correspond à la variable de pulsation  $\xi$  se prête bien à l'approximation en dimension finie. Cette variable pulsation est en fait associée à la variable d'espace de l'équation de diffusion. Voyons pour cela quelques autres représentations diffusives. Par exemple, à partir de (III.1), effectuons le changement de variable  $\xi := 4\pi^2\xi^2$

$$\begin{cases} \partial_t \psi(\xi, t) = -4\pi^2 \xi^2 \eta(\xi, t) + u(t), & \psi(\xi, 0) = 0, & \xi \in \mathcal{R} \\ y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{m}(\xi) \psi(\xi, t) d\xi \end{cases} \quad (III.4)$$

$$\hat{m}(\xi) = 8\pi^2 \xi \eta(4\pi^2 \xi^2)$$

En appliquant la transformée de Fourier inverse par rapport à la nouvelle variable, la réalisation (III.6) est équivalente du point de vue entrée-sortie à la formulation classique de l'équation de la chaleur (III.6), avec  $\psi(\xi, t) = \mathcal{F}_x \Phi(x, t)$  :

$$\begin{cases} \partial_t \Phi(x, t) = \partial_x^2 \Phi(x, t) + \delta(x)u(t), & \psi(\xi, 0) = 0, & x \in \mathcal{R} \\ y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} m(x, t) \Phi(x, t) dx \end{cases} \quad (III.5)$$

Où  $m(x, t) = \mathcal{F} \xi^{-1} \hat{m}(\xi)$  est une distribution tempérée (en général localement régulière) sur l'axe réel  $\mathcal{R}_x$ .

La réalisation (III.1), représente donc une transformée de Fourier appliquée sur la variable espace ( $x$ ) de l'équation de diffusion (III.6), ce modèle, est à l'origine du terme "réalisation diffusive". La réalisation (III.6), moins simple du point de vue des approximations numériques, s'avère en revanche incontournable dès que l'on quitte le cadre des systèmes linéaires temps-invariants.

III.3. Quelques exemples de la représentation diffusive [13],[14],[15]:

Pour un opérateur  $H(\frac{\partial}{\partial t})$  où  $H(p)$  est la fonction de transfert de cet opérateur, définie sur  $\mathcal{C} \setminus \mathcal{R}^-$  le symbole diffusif associé est donné par la limite au sens des distributions [18]:

$$\mu(\xi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2j\pi} [H(-\xi - j\epsilon) - H(-\xi + j\epsilon)], \quad \xi > 0 \quad (III.6)$$

- Exemple de calcul du symbole :

Prenons le cas d'un intégrateur fractionnaire tel que :

$$H(p) = \frac{1}{p^a}, \text{ avec } 0 < a < 1 \tag{III.7}$$

$$\mu(\xi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} + \frac{1}{2j\pi} \left[ \frac{1}{(-\xi - j\epsilon)^a} - \frac{1}{(-\xi + j\epsilon)^a} \right] \tag{III.8}$$

$$\mu(\xi) = \lim_{\theta \rightarrow 0} + \frac{1}{2j\pi} \left[ \xi - ae^{ja(-\pi-\theta)} - \xi - ae^{ja(\pi-\theta)} \right] \tag{III.9}$$

$$\mu(\xi) = \lim_{\theta \rightarrow 0} + \sin(a\pi + a\theta) = \xi^{-a} \frac{\sin(a\pi)}{\pi} \tag{III.10}$$

Le tableau suivant regroupe la représentation diffusive et la réponse impulsionnelle des quelques opérateurs fractionnaires :

Restriction	Symbole Laplace	Rép. diffusive	R. impulsionnelle
$\mathcal{L}\mu \in \mathcal{L}_{loc}^1$	$H = \mathcal{L}h$	$\mu = \mathcal{L}^{-1}h$	H
$\mathcal{L}(\xi\mu) \in \mathcal{L}_{loc}^1$	$pH(p)$	$-\xi\mu$	$\frac{d}{dt}h$
$0 < \Re(\alpha) < 1$	$p^{-\alpha}$	$(\xi) = \xi^{-\alpha} \frac{\sin(a\pi)}{\pi}$	$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}$
$\begin{cases} 0 < \Re(\alpha) < 1 \\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$	$p^{-(\alpha+n)}$	$\frac{ \sin(a\pi) }{\pi} pf \frac{1}{\xi^{\alpha+n}}$	$\frac{1}{\Gamma(\alpha+n)} t^{\alpha+n-1}$
$0 < \Re(\alpha) < 1$	$P^{-\alpha}H(p)$	$\mu_{\alpha} \# \mu$	$I^{\alpha}$
$\alpha > 0$	$H(p + \alpha)$	$\mu(\xi - \alpha)$	$e^{at}h(t)$
-1	$p^{-\alpha}$	$\delta$	1
$\begin{cases} 0 < \Re(\alpha) < 1 \\ \alpha > 0 \end{cases}$	$(p^{\alpha} + a)^{-1}$	$\frac{\sin(a\pi)\xi}{\xi^{2\alpha} + 2a \cos(a\pi)\xi^{\alpha} + a^2}$	$\epsilon_{\alpha(-a,t)}$

Tableau III.1-la représentation diffusive et la réponse impulsionnelle des quelques opérateurs fractionnaires.

**III.4. Avantages de la représentation diffusive :**

La représentation diffusive est une transformation des systèmes de nature héréditaires dans le sens qu'ils ne tiennent pas compte de l'allure locale des fonctions f en des systèmes de nature non héréditaire. Elle permet d'avoir un système sous la forme d'état, ce qui rend l'application d'outils d'étude et d'analyse possible et simple et souple.

**III.5. Approximation en dimension finie:**

**III.5.1. Principe :**

L'approximation en dimension finie est obtenue simplement en discrétisation par rapport à la variable  $\xi$ . On prend  $\xi_k$  de telle que la plage  $\xi$  ainsi couverte est fixée par les valeurs extrêmes  $\xi_1$  et  $\xi_Q$ . On choisit a en générale pour  $\xi$  une progression géométrique, de façon à couvrir une plage étendue avec peu de points. Ce choix permet, dans une représentation logarithmique, d'affecter la même importance à chacune des décades étudiées, mais ce choix n'est cependant pas nécessaire au plan mathématique et l'on pourra prendre par exemple une représentation arithmétique des  $\xi_K$ . Dans certains cas la réalisation diffusive approchée s'exprime :

$$\begin{cases} \psi_k = -\xi\psi_k + u(k), k = 1 \dots \dots \dots N, \psi_k(0) \\ y(t) = \sum_{k=1}^N \mu_k(t)\psi_k(t) \end{cases} \tag{III.11}$$

Avec :

$$\mu_k = \mu(\xi_k) \int_0^{+\infty} \Lambda_k(\xi) d\xi \tag{III.12}$$

On a l'équation de sortie suivante :

$$y(t) = \int_0^t \int [exp(-\xi(t,s)) \mu(\xi)] f(s) ds \tag{III.13}$$

Le terme exponentiel est une décroissance rapide par rapport à  $\xi$  pour grand tout en garantissant une bonne approximation considérons un réseau fini dans le domaine

$$[0, Q] (K \in [0, Q]), 0 = \xi_0 < \xi_1 < \dots \dots \dots < \xi_Q, N_Q = |\xi_0, \xi_1, \dots \dots \dots, \xi_Q|$$

La discrétisation spatiale du système différentiel (2.3) est sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \partial_t \psi_k + \xi \psi_k = f(t) \\ \psi_k = \psi(\xi_k, t) \\ \psi_k(0) = 0 \end{cases} \quad \text{où } k = 1, \dots, Q \quad \text{(III.14)}$$

Si on suppose l'interpolation linéaire sur  $(\xi_k, \hat{\psi}(t))_{\xi_k \in N}$  Définie par :

$$\tilde{\psi}(\cdot, 0) = \sum_{k=1}^Q \mu(\xi) \psi_k(t) \Lambda_k(\xi) \quad \text{(III.15)}$$

Où  $\Lambda_k$  Sont les fonctions d'élément finis de support  $[-K, K]$ , la sortie du système devient :

$$\tilde{y}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi) \tilde{\psi}(\xi, t) d\xi = \frac{1}{\pi} \int \sum_{k=1}^Q \tilde{\psi}_k(\xi) \mu(\xi) \Lambda_k(\xi) \quad \text{(III.16)}$$

On peut se mettre sous forme :

$$\tilde{y}(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^Q \hat{\psi}_k(t) b_k \quad \text{(III.17)}$$

Où  $b_k$  Correspondant aux intégrales sur les segments  $[\xi_{k-1}, \xi_{k+1}]$  des fonctions élément finis.

On note:

$$b_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi) \Lambda_k d\xi$$

$$b_1 = \int_{-\infty}^{\xi_{min}} \mu(\xi) \Lambda_1 d\xi = \int_0^{\xi_{min}} \mu(\xi) \Lambda_1 d\xi$$

$$b_k = \int_{\xi_{min}}^{\xi_{max}} \mu(\xi) \Lambda_k + \int_{\xi_{max}}^{+\infty} \mu(\xi) \Lambda_Q d\xi \quad \text{(III.18)}$$

$$k = 1, \dots, Q$$

$$\text{Avec } \xi_{min} = \xi_1 \text{ et } \xi_{max} = \xi_Q$$

La représentation d'état du système (2.3) est donner par :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} X(t) = AX(t) + Bf(t) \\ y(t) = CX(t) \end{cases} \quad \text{(III.19)}$$

Avec :

$A$  : opérateur à dimension infini.

$B$  : opérateur de contrôle.

$C$  : opérateur d'observation.

$$x(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_k(t))^T \varphi_k(0) = 0$$

$$A = \text{diag}(-\xi_1, \dots, -\xi_k, \dots, -\xi_Q)$$

$$B = (1 \dots \dots \dots 1)^T \quad \text{(III.20)}$$

$$C = \frac{1}{\pi} (b_1, \dots, b_k, \dots, b_Q)$$

$$D = 0$$

La fonction de transfert approchée du système est [16]:

$$\tilde{H}(p) = \sum_{k=1}^Q \frac{b_k}{p + \xi_k} \quad (\text{III.21})$$

### III.5.2 Choix des paramètres du modèle diffusif :

Dans le modèle diffusif il y a beaucoup des paramètres qui sont influant directement sur les résultats, et pour assurer un bon modèle diffusif donc une bonne approximation d'un opérateur fractionnaire, il faut un bon choix de ces paramètres.

Les paramètres qui on choisit sont :

#### III.5.2.1 Choix des pôles [17] :

Les  $\xi_k$  Peuvent être considéré comme pôles pour le système le choix du réseau  $N_Q$  peut s'effectue d'une façon très simple sans aucune crainte d'instabilité.

Il n'existe pas une méthodologie systématique déjà développée pour choisir les pôles  $\xi_k$ , mais il y a plusieurs choix de séquences qui peuvent être utilisées :

- ✓ Séquence arithmétique :  $\xi_{k+1} = \xi_k + r$  avec  $r$  est un raison de la séquence.
- ✓ Séquence polynomiale :  $\xi_{k+1} = k_1^r \xi_k$  Avec  $k_1$  Est une constante.
- ✓ Séquence géométrique :  $\xi_{k+1} = r \xi_k$  Avec  $r$  est la raison de la séquence.

Généralement on utilise la séquence géométrique dans la littérature, car elle produit une séquence linéaire en domaine fréquentiel, elle permet d'utiliser le diagramme de Bode.

#### III.5.2.2. Choix de $\xi_{\min}$ Et $\xi_{\max}$ :

Pour une séquence géométrique les pôles  $\xi_1$  Et  $\xi_Q$  sont liés par :

$$\xi_Q = r^{Q-1} \xi_1 \quad (\text{III.22})$$

Avec  $\xi_{\min} = \xi_1$  et  $\xi_{\max} = \xi_Q$  (III.23)

Donc, en déduire  $r$  :



$$r = \exp\left(\frac{\left(\text{LOG}\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)}{2-1}\right) \tag{III.24}$$

L'équation de diffusion :  $\dot{\psi} = -\xi\psi + f$  est une équation de la forme :  $\dot{\psi} = -\omega\psi$

Nous en pouvons tirer la relation entre  $\xi$  et  $\omega$  :

$$2\pi f = \xi \Rightarrow \begin{cases} \xi_{min} = 2\pi f_{min} \\ \xi_{max} = 2\pi f_{max} \end{cases} \tag{III.25}$$

**III.5.2.3. Choix des fonctions  $\Lambda_k$  :**

La fonction d'interpolation  $\Lambda_k(\xi)$  prend le nom de fonction chapeau. L'interpolation par éléments finis correspond à une méthode standard en analyse numérique. Sa valeur est nulle en dehors de l'intervalle  $[\xi_{k-1}, \xi_{k+1}]$  et vaut 1 pour  $\xi = \xi_k$ . D'où :

$$\Lambda_k(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \xi < \xi_{k-1} \text{ ou } \xi > \xi_{k+1} \\ \frac{\xi - \xi_{k-1}}{\xi_k - \xi_{k-1}} & \text{si } \xi_{k-1} \leq \xi \leq \xi_k \\ \frac{\xi_{k+1} - \xi}{\xi_{k+1} - \xi_k} & \text{si } \xi_k \leq \xi \leq \xi_{k+1} \end{cases} \tag{III.26}$$



**Figure III.1 : Choix de la fonction d'interpolation sur les segments**

Le choix de la fonction  $\Lambda_k$  Au niveau des frontières nous a permis de trouver les coefficients  $b_k$  Pour chaque ordre  $\alpha$  :

$$b_1 = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \left[ \frac{1}{\xi_2 - \xi_1} \left( \frac{\xi_2^{1-\alpha} - \xi_1^{1-\alpha}}{1-\alpha} \xi_2 - \left( \frac{\xi_2^{2-\alpha} - \xi_1^{2-\alpha}}{2-\alpha} \right) \right) + \left( \frac{\xi_1^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) \right] \tag{III.27}$$

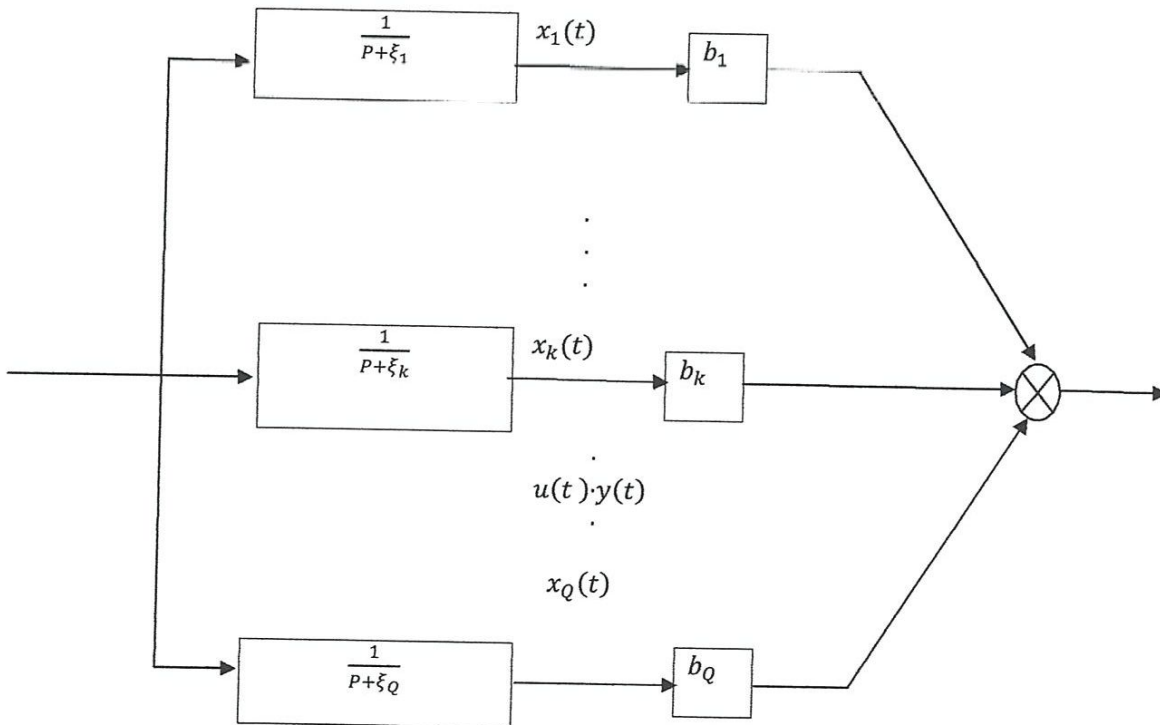
$$b_k = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \left[ \left[ \frac{1}{\xi_k - \xi_{k-1}} \left( \left( \frac{\xi_k^\alpha \xi_{k-1}^{2-\alpha} - \xi_{k-1}^\alpha \xi_k^{2-\alpha}}{\xi_k^\alpha \xi_{k-1}^\alpha (2-\alpha)} \right) - \left( \frac{\xi_{k-1}^\alpha \xi_k - \xi_k^\alpha \xi_{k-1}}{\xi_{k-1}^\alpha \xi_k^\alpha (1-\alpha)} \right) \xi_{k-1} \right) \right] + \right. \\ \left. \left[ \frac{1}{\xi_{k+1} - \xi_k} \left( \left( \frac{\xi_k^\alpha \xi_{k+1} - \xi_{k-1}^\alpha \xi_k}{(1-\alpha) \xi_{k+1}^\alpha \xi_k^\alpha} \right) \xi_{k+1} - \left( \frac{\xi_k - \xi_{k+1} \xi_k^\alpha}{(2-\alpha) \xi_k^\alpha \xi_{k+1}^\alpha} \right) \right) \right] \right] \quad (III.28)$$

**III.6. Simulation numérique :**

La simulation numérique a été effectuée par le logiciel Matlab. Le but principal de cette simulation est :

- ✓ Déterminé les paramètres de l'Approximation numérique. qui conduisent à des opérateurs fractionnaires proches aux opérateurs réels
- ✓ Vérifié les paramètres de l'approximation numérique d'opérateurs fractionnaires pour avoir une bonne approximation

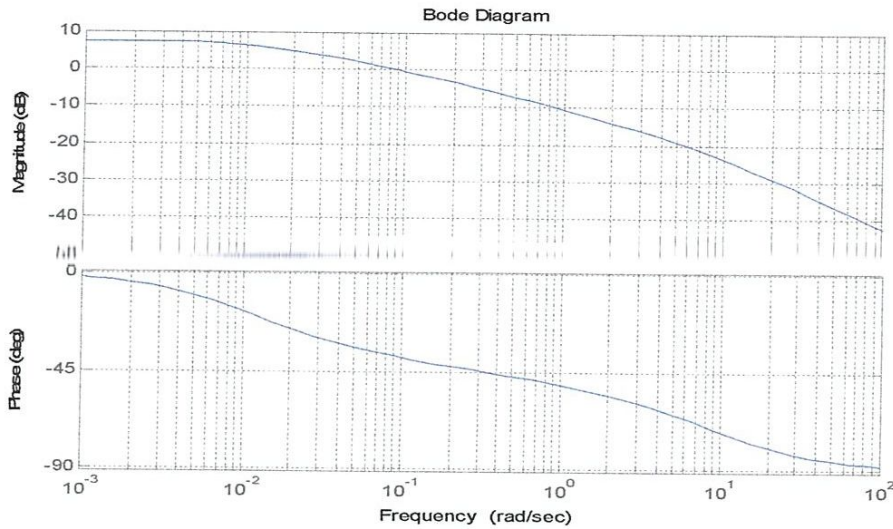
-Schémas de simulation :



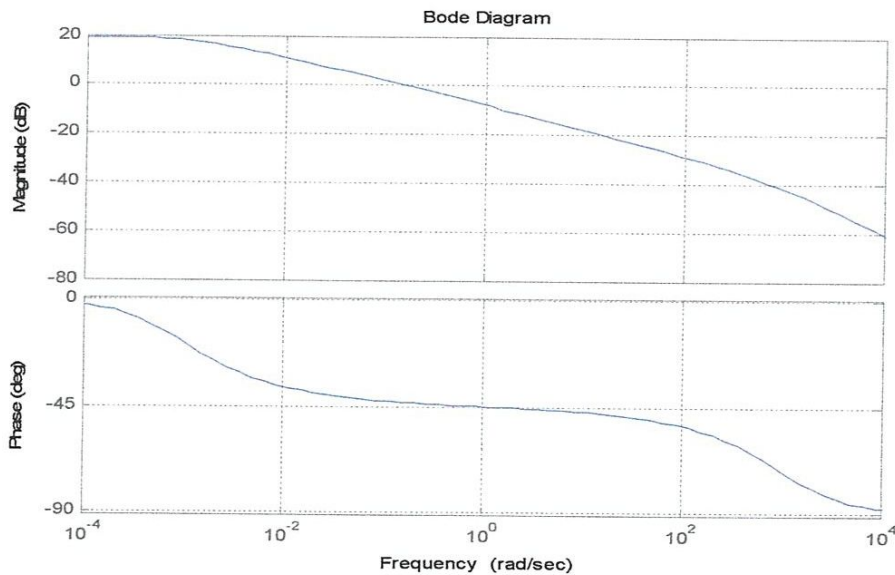
**Figure III.2 : Schémas de simulation par approche diffusif**

III.6.1.Approximation d'un intégrateur non entier  $\frac{1}{p^a}$  :

Nous avons choisis un ordre d'intégration  $a = 0.5$ , on fixe le nombre de pôles  $Q = 30$  et on varier les pôles, Nous obtenons les résultats suivants :

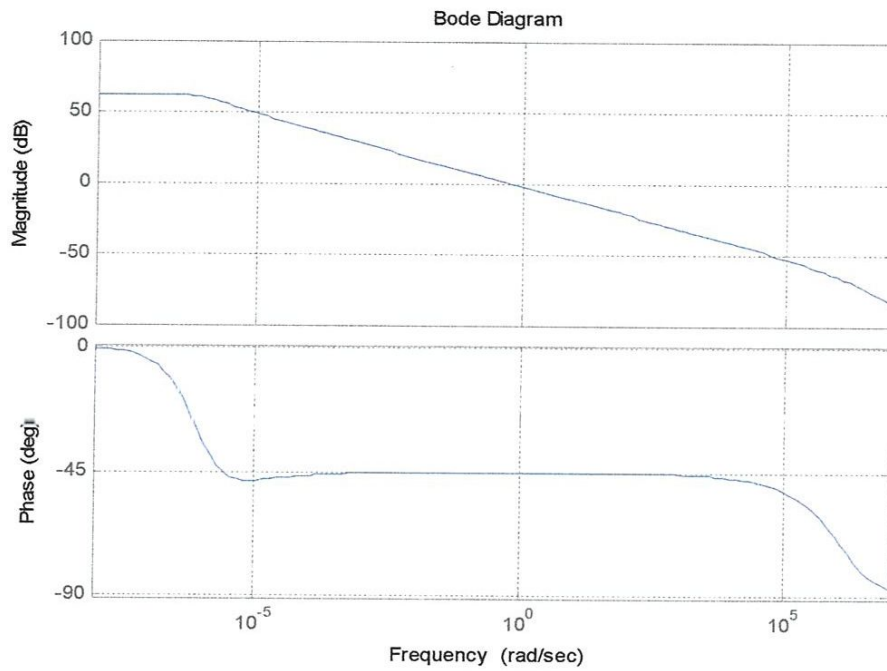


$$\xi_{min} = 10^{-2}, \xi_{max} = 10, a = 0.5 \text{ et } Q = 30$$

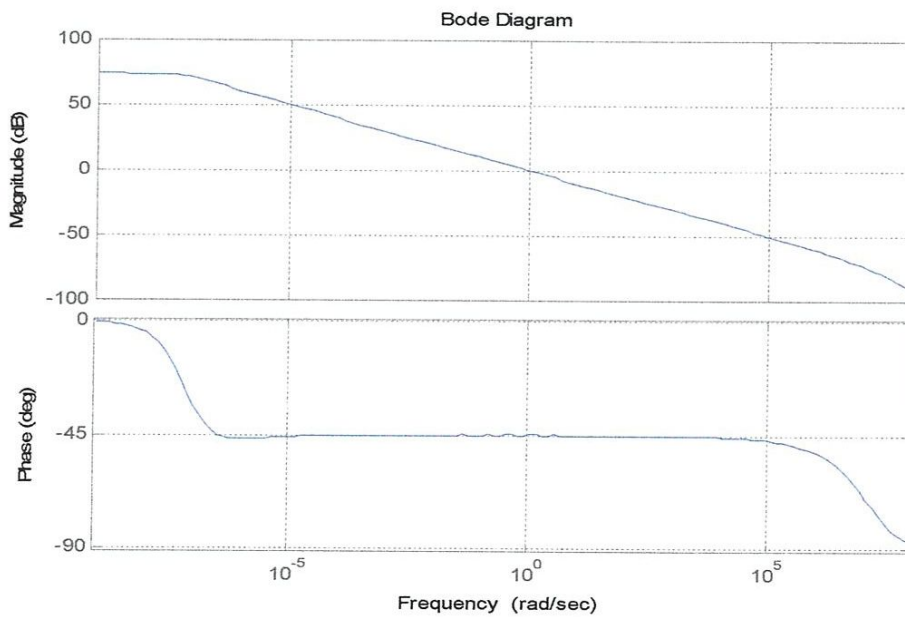


$$\xi_{min} = 10^{-3}, \xi_{max} = 10^3, a = 0.5 \text{ et } Q = 30$$

Figure III.3.a : Approximation numérique d'un intégrateur approché par modèle diffusif

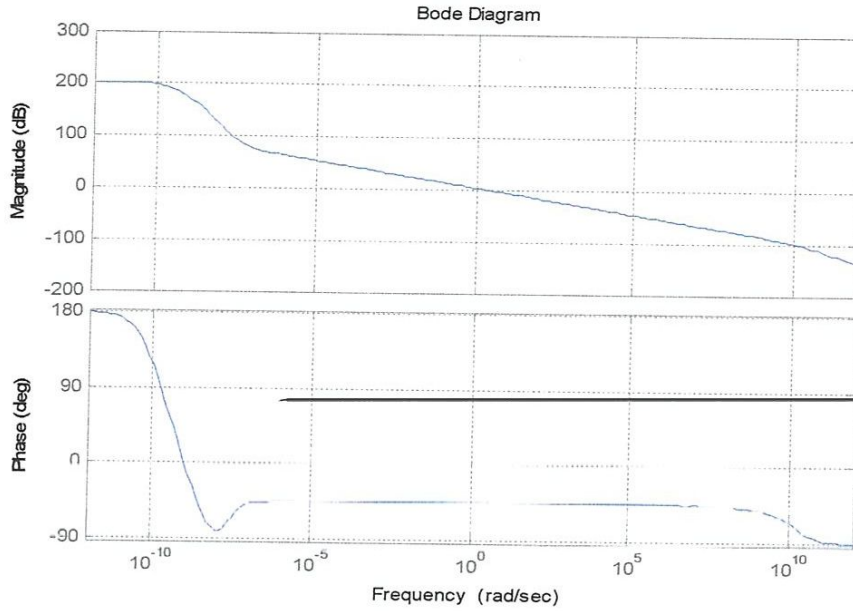


$$\xi_{min} = 10^{-5}, \xi_{max} = 10^5, a = 0.5 \text{ et } Q = 30$$



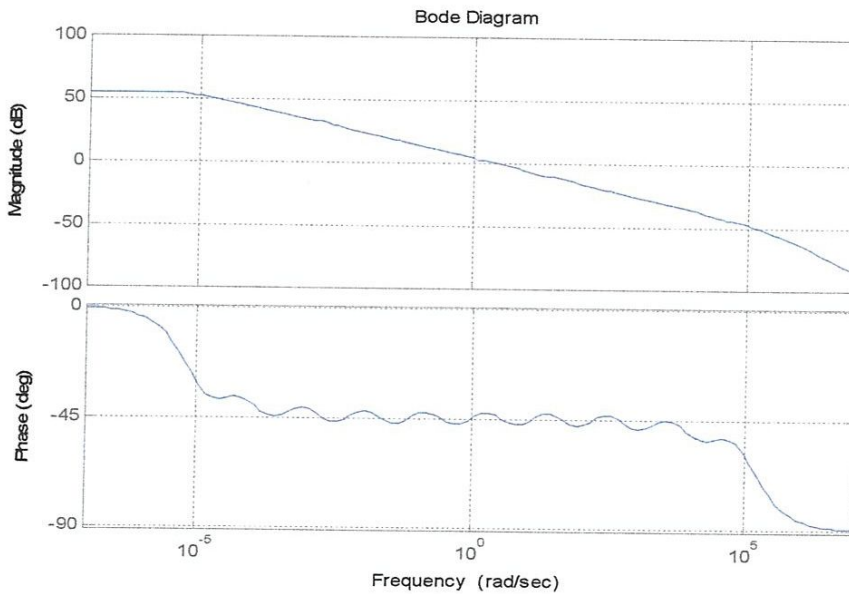
$$\xi_{min} = 10^{-7}, \xi_{max} = 10^7, a = 0.5 \text{ et } Q = 30$$

Figure III.3.b : Approximation numérique d'un intégrateur approché par modèle diffusif



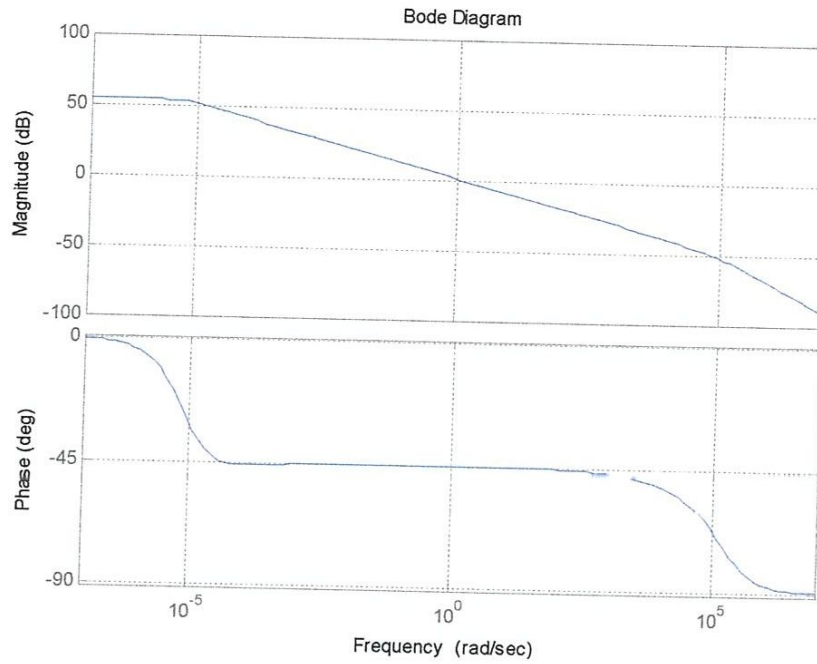
$$\xi_{min} = 10^{-10}, \xi_{max} = 10^{10}, a = 0.5 \text{ et } Q = 30$$

Si on fixe les deux pôles ( $\xi_{min}, \xi_{max} = 10^{-5}, 10^5$ ), puis on varie le nombre de pôles on obtient les résultats suivants :

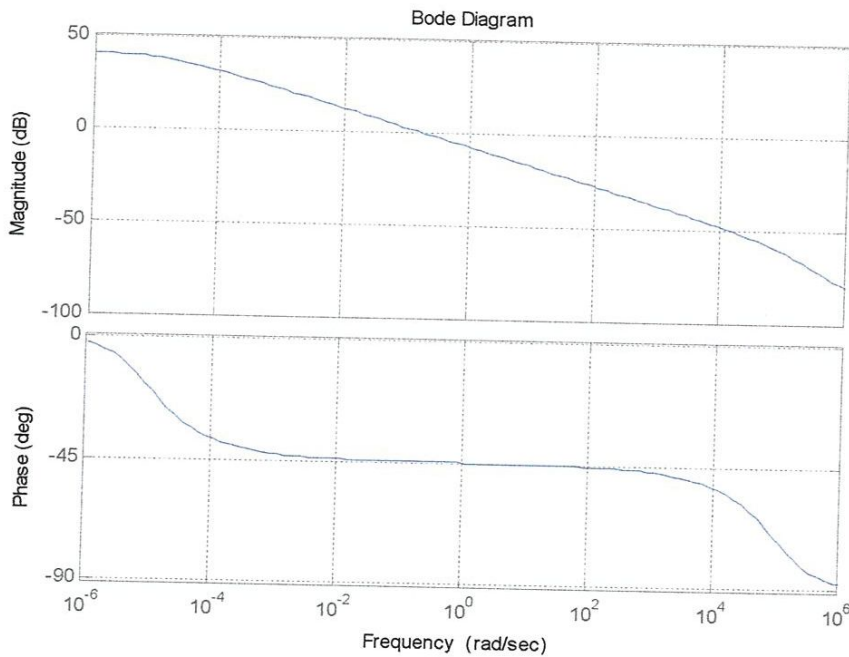


$$\xi_{min} = 10^{-5}, \xi_{max} = 10^5, a = 0.5 \text{ et } Q = 10$$

Figure III.3.c : Approximation numérique d'un intégrateur approché par modèle diffusif

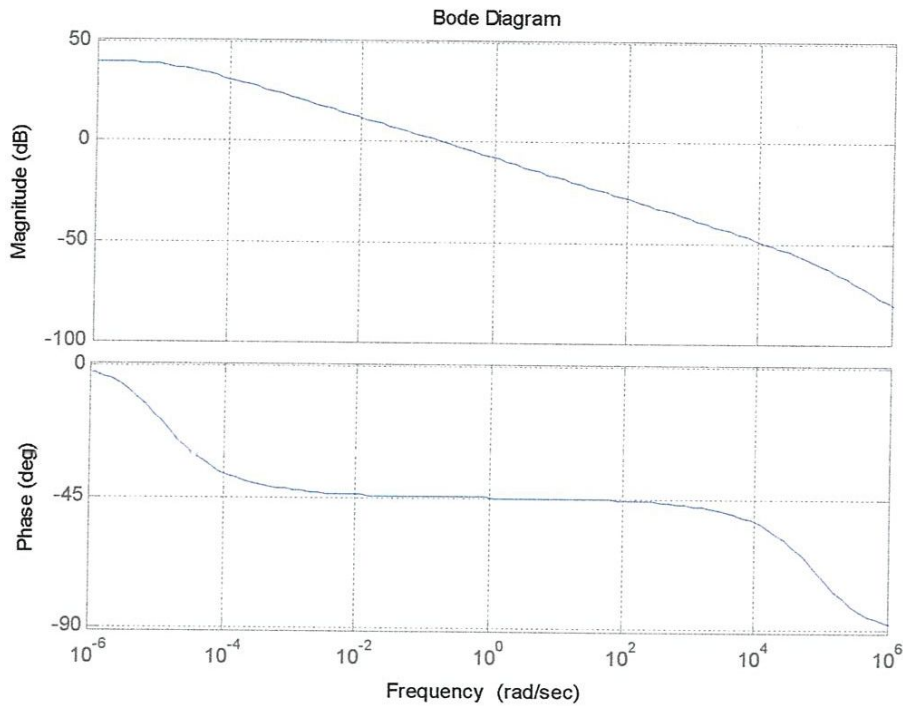


$$\xi_{min} = 10^{-5}, \xi_{max} = 10^5, a = 0.5 \text{ et } Q = 20$$



$$\xi_{min} = 10^{-5}, \xi_{max} = 10^5, a = 0.5 \text{ et } Q = 40$$

Figure III.3.d : Approximation numérique d'un intégrateur approché par modèle diffusif



$$\xi_{min} = 10^{-5}, \xi_{max} = 10^5, a = 0.5 \text{ et } Q = 50$$

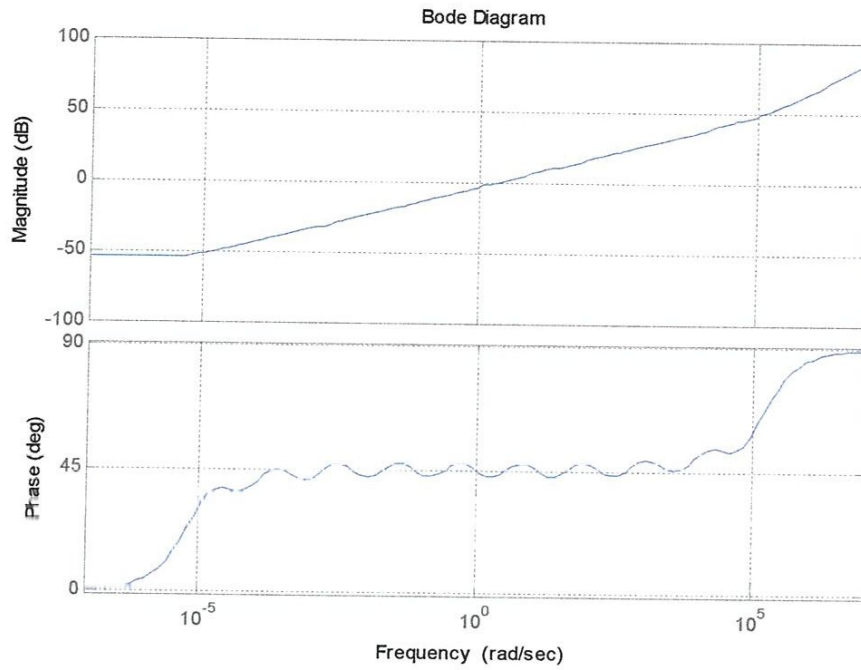
**Figure III.3.e : Approximation numérique d'un intégrateur approché par modèle diffusif**

Les figures (III.3.a.b.c.d.e) présentent les diagrammes de Bode d'un intégrateur fractionnaires d'ordre  $a = 0.5$  approchés par représentation diffusive. Ces figures montrent que un bon choix des paramètres du modèle diffusif discrétisé garantie une bonne approximation dans une bande qui dépend des pulsations des systèmes.

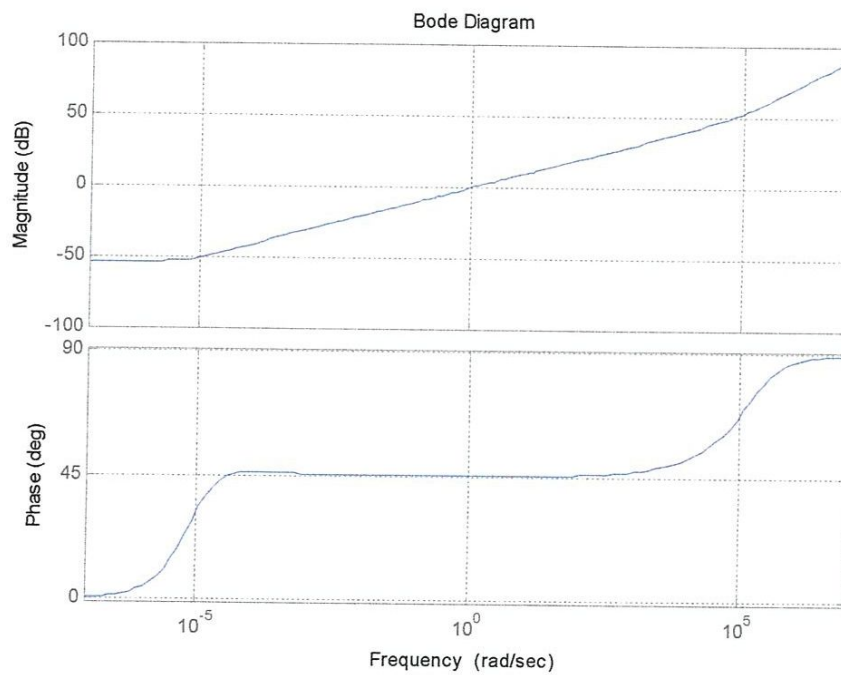
On remarque que pour  $\xi_{min} = 10^{-5}, \xi_{max} = 10^5, a = 0.5$  et  $Q = 20$  on obtient une meilleure approximation de intégrateur fractionnaire d'ordre  $a = 0.5$ .

### III.6.2.Approximation d'un dérivateur non entier $p^\beta$ :

Nous avons choisis un ordre dérivation  $\beta = 0.5$ , et faire le même variation des paramètres et obtenue Les résultats de la simulation.



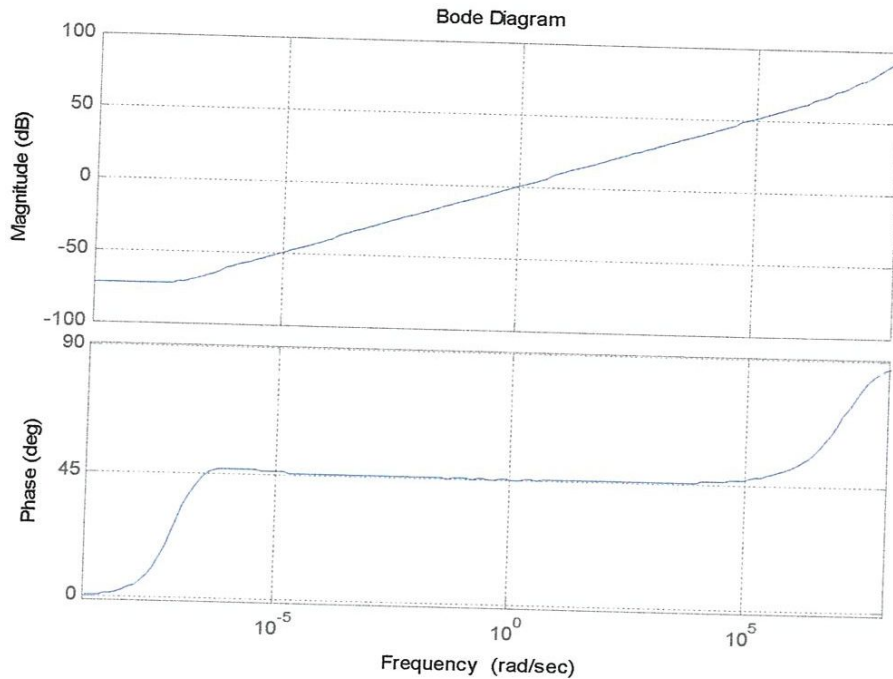
$$\xi_{min} = 10^{-5}, \xi_{max} = 10^5, \beta = 0.5 \text{ et } Q = 10$$



$$\xi_{min} = 10^{-5}, \xi_{max} = 10^5, \beta = 0.5 \text{ et } Q = 20$$

Figure III.4.a : approximation numérique d'un dérivateur approché par modèle diffusif





$$\xi_{min} = 10^{-7}, \xi_{max} = 10^7, \beta = 0.5 \text{ et } Q = 30$$

**Figure III.4.b : approximation numérique d'un dérivateur approché par modèle diffusif**

On remarque que pour  $\xi_{min} = 10^{-5}$ ,  $\xi_{max} = 10^5$ ,  $\beta = 0.5$  et  $Q = 20$  on obtient une meilleure approximation de dérivateur fractionnaire d'ordre  $\beta = 0.5$

### III.7. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté la théorie et l'approximation numérique de la représentation diffusive. La qualité de l'approximation d'opérateurs fractionnaires dépend du choix des paramètres de l'approximation numérique. La simulation numérique a montré clairement l'efficacité et la souplesse de la représentation diffusive.



**CHAPITRE IV:**  
**RÉGLAGE OPTIMAL**  
**D'UN PID**  
**FRACTIONNAIRE**

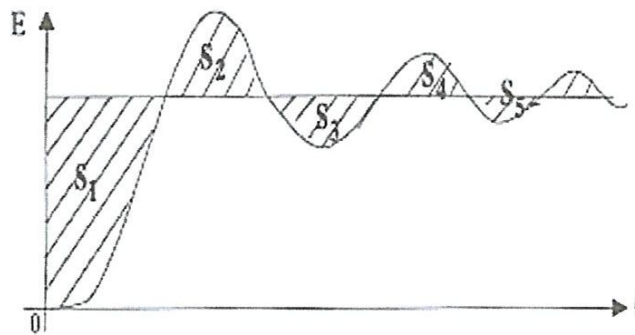
### IV.1. Introduction :

Dans ce chapitre nous présentons des méthodes de réglage optimal des correcteurs classiques et fractionnaires. Dans ce chapitre nous présentons l'ajustement des paramètres des correcteur PID fractionnaire basé sur la minimisation d'une fonctionnelle du coût fonction de l'erreur. Cette fonctionnelle est constitué des indices de performances de type ISE, IAE et ITAE.

Dans ce chapitre la formulation mathématique de problème d'optimisation est basée sur l'approximation des fonctions de transferts irrationnelle des correcteurs fractionnaires par sa représentation diffusive implémenté dans Simulink/MATLAB.

### IV.2.Méthodes d'optimisation d'un critère intégral :

Nous venons de voir que les correcteurs étaient déterminés en partie en fonction des paramètres dynamiques, donc de la précision dynamique, du systèmes asservis complet. Nous allons donc définir des critères concernant celle-ci. Une bonne précision dynamique donne un amortissement moyen (transitoire à faible dépassement) pour un temps de réponse faible. Elle indique l'erreur transitoire apparaissant dans la réponse indicielle. Minimiser l'erreur dynamique soit l'aire hachurée de la Figure 1, permet d'obtenir un faible dépassement et faible temps de réponse.[19] :



**Figure IV.1: Les surfaces hachurées indiquent l'erreur dynamique de la réponse indicielle**

Ces méthodes s'appuient sur des critères d'optimisation d'une des spécifications de performances, considérée la plus importante. Elles sont applicables à condition que l'on

puisse avoir une par métrisation du critère en fonction des paramètres du régulateur. Les critères les plus connus peuvent être décrits par leurs dénominations suivantes :

- ✓ *Integrated Error (IE)* : qui représente l'intégrale de l'erreur :

$$IE = \int_0^{\infty} e(t) dt$$

- ✓ *Critère Integral of Square Error (ISE)* : qui représente l'intégrale de l'erreur quadratique :

Le critère de performance est la formule suivant :

$$ISE = \int_0^{\infty} e(t)^2 dt$$

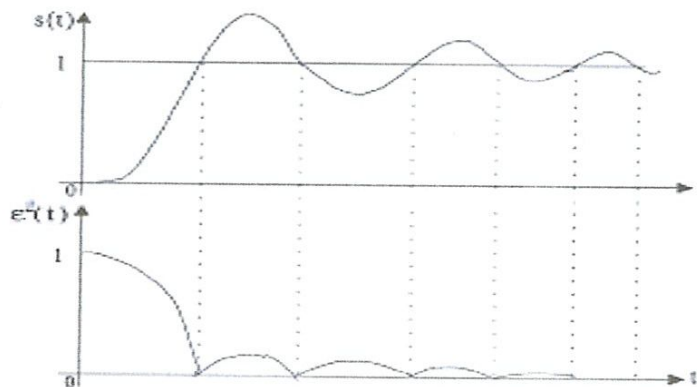


Figure IV.2 : Critère ISE

Ce critère tient beaucoup moins compte des dépassements inférieurs à 1, puisqu'ils sont élevés au carré. C'est principalement la surface S1(Figure 1) que l'on cherche à minimiser

- ✓ *Critère Integral of Absolute Error (IAE)* : qui représente l'intégrale de l'erreur absolue :

Le critère de performance est alors le formule suivant :

$$IAE = \int_0^{\infty} |e(t)| dt$$

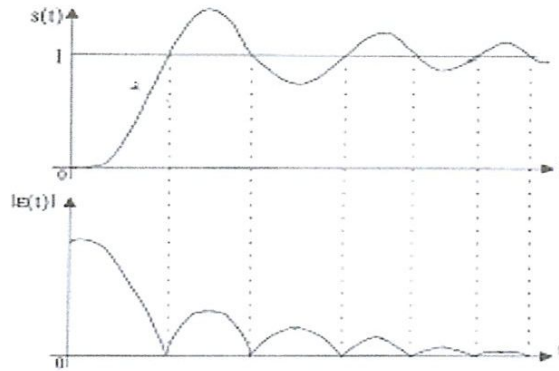


Figure IV.3: Critère IAE

Cet indice exprime la surface générée par la différence entre la valeur de consigne et la valeur réelle. Par rapport au critère ISE, ce critère donne plus de poids aux faibles écarts.

- ✓ **Integrated Time multiplied Square Error (IT<sup>2</sup>SE)** : qui représente l'intégrale de l'erreur quadratique multipliée par le temps :

$$IT^2SE = \int_0^{\infty} (te(t))^2 dt$$

- ✓ **Critère Integral Time multiplied by Absolute Error (ITAE)** : qui représente l'intégrale de l'erreur absolue multipliée par le temps :

Le critère de performance est le suivant :

$$ITAE = \int_0^{\infty} t|e(t)|dt$$

Pour pénaliser les systèmes dont le régime transitoire dur trop longtemps, on utilise également ce critère. Ce critère privilégie une faible erreur statique au prix d'un dépassement initial qui peut être important puisqu'il a lieu pour des faibles valeurs de  $t$ .

Toutes les méthodes d'optimisation utilisent des techniques numériques pour minimiser l'une des fonctions « coût » précédemment énumérées, à l'exception de la méthode basée sur IE. Celle-ci peut être minimisée en maximisant  $K_p / T_i / k_d$ , dans la limite permise par les contraintes physiques. Les autres spécifications de performances doivent être prises en compte sous la forme de conditions d'inégalité de fonctions des paramètres du régulateur. Pour l'interprétation physique des différents critères, Les désavantages de ces méthodes sont liés à la nécessité de calculs numériques laborieux et à l'existence des minimums locaux de la fonction coût.

### IV.3.Procédure de réglage :

Considérons le système de commande à retour unitaire suivant

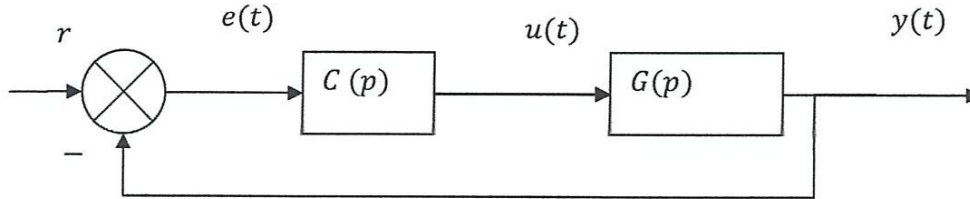


Figure IV.4: Système de commande en boucle fermée

Avec :

$r$  : Signal de référence ou consigne

$e(t)$  : Erreur.

$u(t)$  : Commende (sortie de correcteur)

$C(p)$  : Fonction de transfert du correcteur.

$G(p)$  : Fonction de transfert du procédé.

$y(t)$  : Sortie du système.

La procédure de réglage s'effectue en deux étapes principales :

- Calculer l'erreur en utilisant Simulink.
- Minimiser l'erreur par les fonctions d'optimisation en utilisant le toolbox d'optimisation de Matlab.

La réalisation du système en Simulink est donnée par la figure (Figure IV.5)

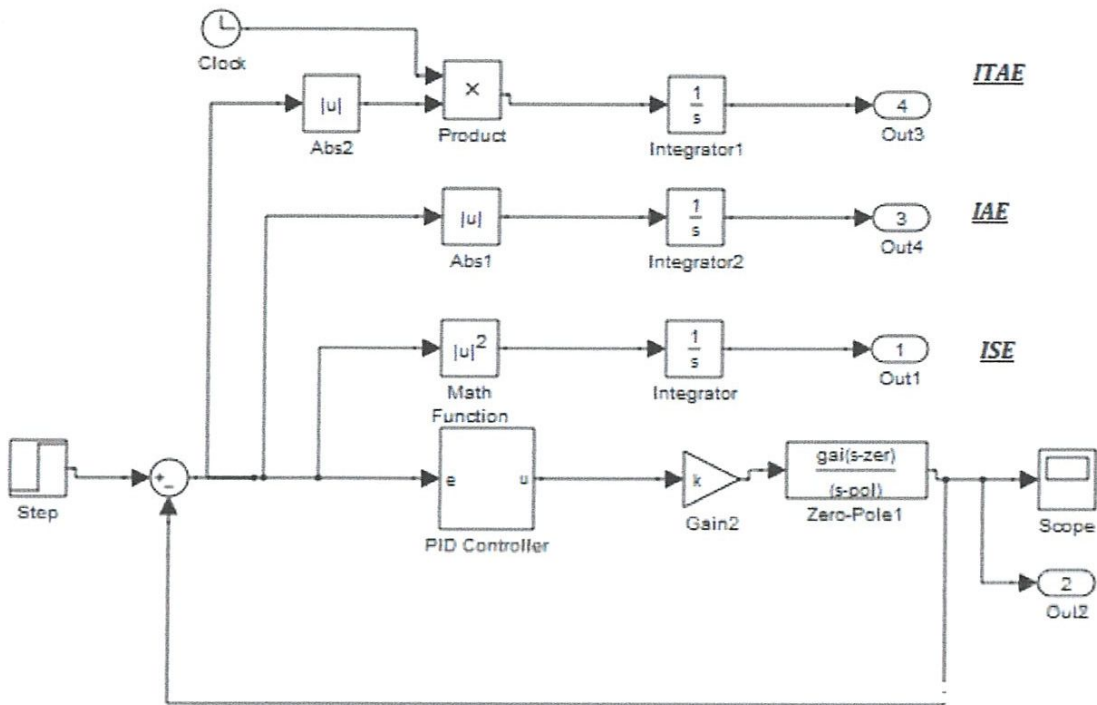


Figure IV.5 : Modèle simulink du système en boucle fermée

#### IV.4. Algorithme d'optimisation sous MATLAB : [20]

##### IV.4.1. Problèmes d'optimisation sans contrainte :

La formulation mathématique du problème d'optimisation sans contrainte est

$$\min_x F(x)$$

Où  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$

L'interprétation de la formule est la suivante : trouver le vecteur  $x$  tel que la fonction objective  $F(x)$  est minimisée. Si un problème d'optimisation est traité, la fonction objectif peut être modifiée à  $-F(x)$  de telle sorte qu'il peut être converti en un problème de minimisation la fonction *fminsearch* du Matlab permet de trouver cet optimum. La syntaxe de cette fonction est

$$[x, fopt, key, c] = \text{fminsearch}(\text{fun}, x0, \text{opt})$$

Où *fun* fonction objective qui contient les variables à minimiser. La variable  $x0$  est les conditions initiales pour la méthode de recherche. L'argument OPT contient les options de contrôle supplémentaires pour le processus d'optimisation.

La fonction *fminsearch* laisse résoudre des problèmes non différentiable et peut souvent manipuler la discontinuité si elle ne se produit pas près de la solution.

➤ Problèmes d'optimisation sous contrainte :

La forme générale de problème d'optimisation sous contrainte est :

$$\begin{cases} \min F(x) \\ Ax \leq B \\ A_{eq}x = B_{eq} \\ x_m \leq x \leq x_M \\ C(x) \leq 0 \\ C_{eq}(x) = 0 \end{cases}$$

Où  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ . Les contraintes sont classés comme des contraintes d'égalité linéaires  $A_{eq}x = B_{eq}$ , contraintes d'inégalité linéaires  $Ax \leq B$ , et les contraintes non linéaires  $C_{eq}(x) = 0$  et  $C(x) \leq 0$ . Les bornes supérieures et inférieures des variables d'optimisation peut également être définie de celle sorte que  $x_m \leq x \leq x_M$ . L'interprétation du problème d'optimisation est le suivant : trouver le vecteur  $x$ , ce qui minimise la fonction objective  $f(x)$ , tout en satisfaisant toutes les contraintes. La fonction `fmincon` du Matlab peut être utilisée pour résoudre des problèmes d'optimisation sous contrainte. La syntaxe de la fonction est

$$[x, f_{opt}, key, c] = \text{fmincon}(\text{Fun}, x_0, A, B, A_{eq}, B_{eq}, x_m, x_M, C_{Fun}, \text{opt})$$

Où  $fun$  est fonction objective qui contient les variables à minimiser et la variable  $x_0$  est les conditions initiales pour la méthode de recherche. Les contraintes non linéaires peuvent être décrites par  $C_{Fun}$  fonction objective des contraintes.

Le rôle de la fonction `fmincon` est de trouver le minimum d'une fonction multi-variable avec contrainte.

#### IV.5. Application :

On considère comme exemple d'application un système de quatrième ordre, sa fonction de transfert suivant :

$$G(p) = \frac{k}{p(p+1)(p+2)(p+3)} \quad \text{avec } 0.8 \leq k \leq 1.1$$



IV.5.1. Réglage optimal des paramètres des correcteurs classiques :

IV.5.1.1. Correction du système par PI classique : La fonction de transfert de ce correcteur PI classique est donnée par :

$$C(s) = K_P \left( 1 + \frac{1}{T_I s} \right) = K_P + \frac{K_I}{s}$$

Ou  $K_I = K_P / T_I$

➤ Critère ISE :

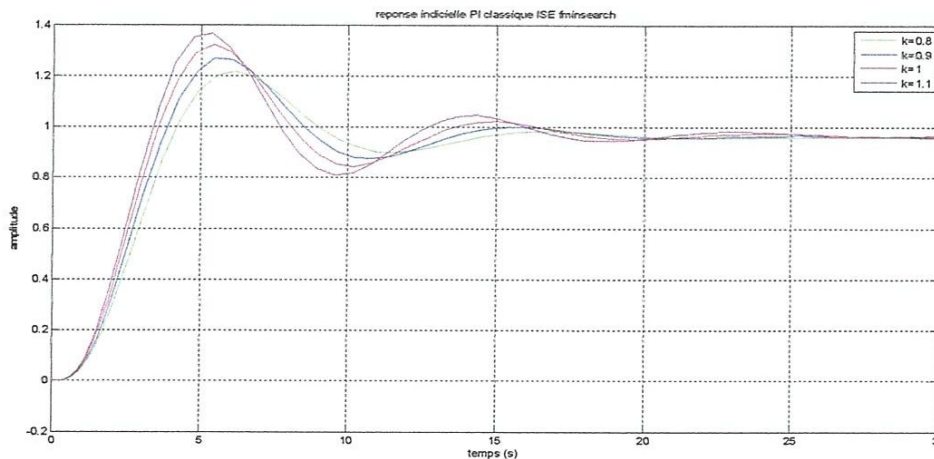
La fonction de transfert de correcteur PI optimal en minimisant le critère ISE par les fonctions d'optimisation fminsearch et fmincon sont respectivement :

$$\left( 3.9413 + \frac{-0.006418}{s} \right) \text{ et } \left( 3.7495 + \frac{1.49 \times 10^{-8}}{s} \right)$$

**Tableau IV .1 :** Les caractéristiques de la réponse temporelle du système commandé par un PI classique avec critère ISE.

En utilisant les deux fonctions d'optimisation fminsearch et fmincon .

ISE	$K_P$	$K_I$	D%	Tr
Fminsearch	3.9418	-0.006418	32%	22s
Fmincon	3.7495	$1.49 \times 10^{-8}$	32.4%	22.3s



**Figure IV.6 :** Réponse indicielle du système en BF avec gain variable. (PI classique - Fminsearch-ISE)

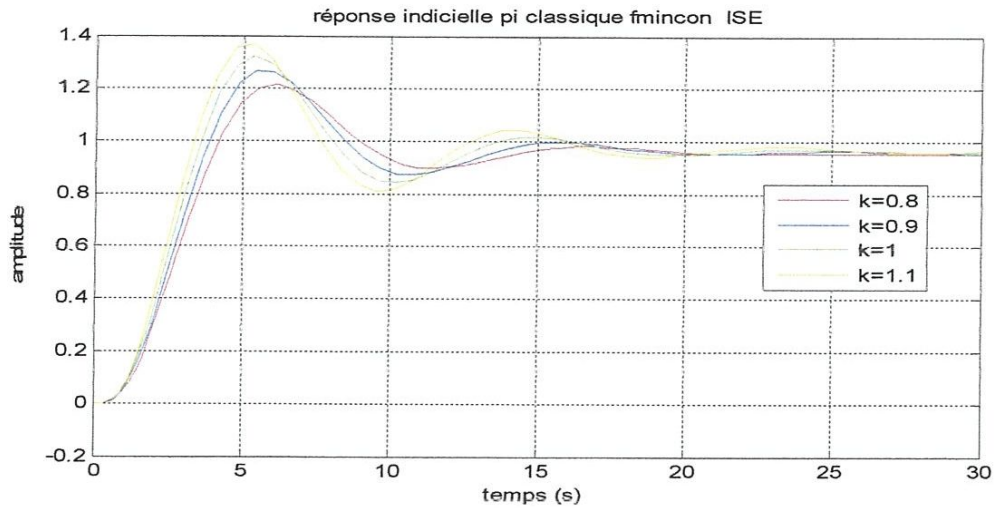


Figure IV.7 : Réponse indicielle du système en BF avec gain variable.(PI class-  
Fmincon-ISE)

Les figures (IV.6) et (IV.7) présentent les réponses du système commandé par PI optimal pour différentes valeurs du gain .

➤ Critère IAE :

la fonction de transfert de correcteur PI optimal en minimisant le critère IAE par les fonctions d'optimisation fminsearch et fmincon sont respectivement :

$$\left(2.6219 - \frac{0.0001878}{s}\right) \text{ et } \left(2.6175 + \frac{1.4901 \times 10^{-8}}{s}\right)$$

Tableau IV .2 : Les caractéristiques de la réponse temporelle du système commandé par un PI classique avec critère IAE, en utilisant les deux fonctions d'optimisation fminsearch et fmincon .

IAE	$K_p$	$K_I$	D%	Tr
Fminsearch	2.6219	-0.0001878	18%	14.8s
Fmincon	2.6175	$1.4901 \times 10^{-8}$	18.5%	15s

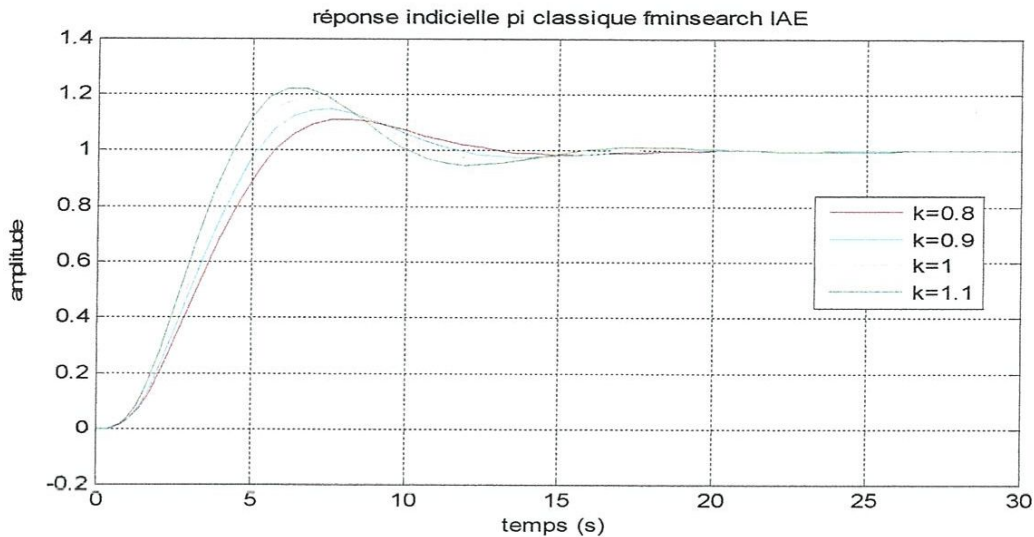


Figure IV.8: Réponse indicielle du système en BF avec gain variable. (PI classique Fminsearch-IAE)

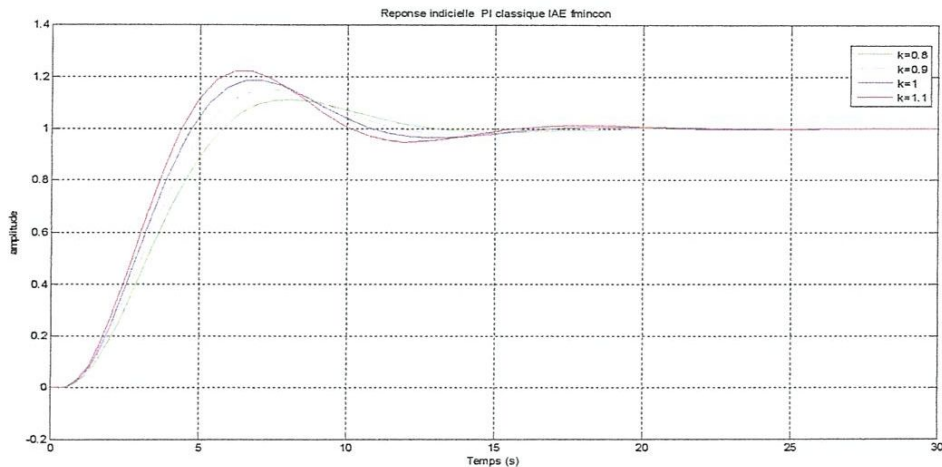


Figure IV.9: Réponse indicielle du système en BF avec gain variable. (PI classique Fmincon-IAE)

Les figures (IV.8) et (IV.9) présentent les réponses du système commandé par PI optimal pour différentes valeurs du gain.

➤ **Critère ITAE :**

La fonction de transfert de correcteur PI optimal en minimisant le critère ITAE par les fonctions d'optimisation fminsearch et fmincon sont respectivement :

$$\left(1.9808 - \frac{0.00013}{s}\right) \text{ et } \left(1.9808 + \frac{1.49 \times 10^{-8}}{s}\right)$$

Tableau IV.3 : Les caractéristiques de la réponse temporelle du système commandé par un PI classique avec critère ITAE, en utilisant les deux fonctions d'optimisation fminsearch et fmincon .

ITAE	$K_p$	$K_I$	D%	Tr
Fminsearch	1.9808	-0.00013	11.6	12s
Fmincon	1.9808	$1.49 \times 10^{-8}$	11.8	12.2s

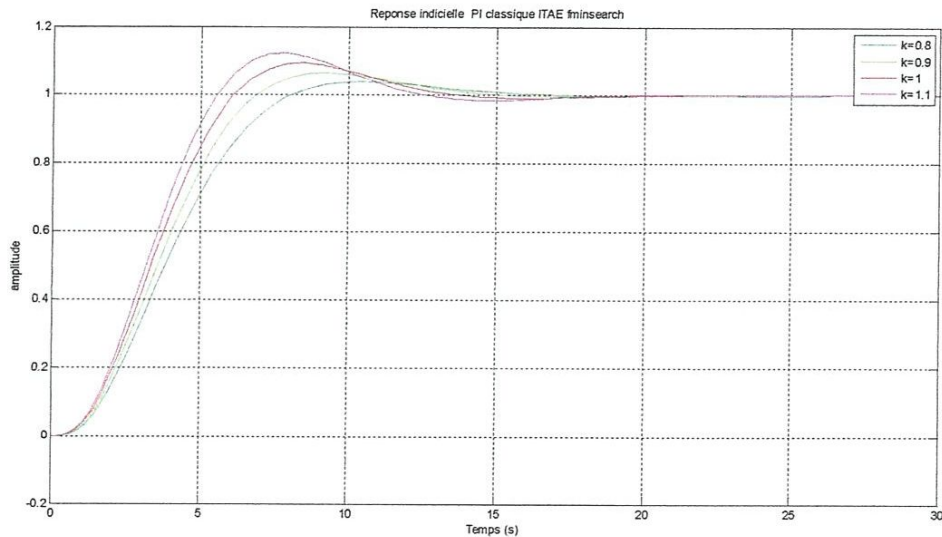


Figure IV.10: Réponse indicielle du système en BF avec gain variable.(PI class-Fminsearch-ITAE)

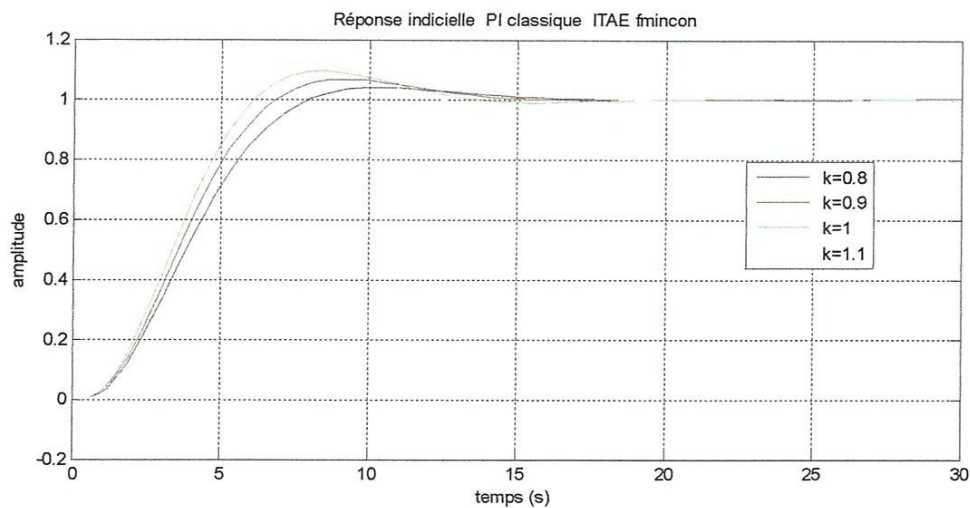
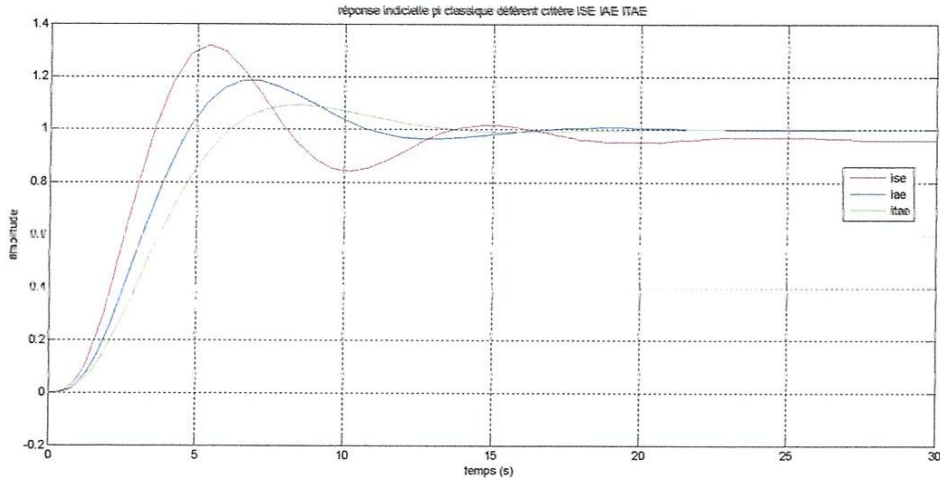


Figure IV.11 : Réponse indicielle du système en BF avec gain variable.(PI class-Fmincon-ITAE)

Les figures (IV.10) et (IV.11) présentent les réponses du système commandé par PI optimal pour différentes valeurs du gain.

- **Comparaison des différents régulateurs optimaux PI :(IAE, ISE et ITAE):**



**Figure IV.12: Réponse indicielle du système en BF des différents régulateurs optimaux PI (IAE, ISE et ITAE)**

**Remarque :**

Les paramètres optimaux du régulateur à l'intérieur du domaine de stabilité qui garantissent des bonnes performances en boucle fermée. Les algorithmes d'optimisation, qui sont connus comme des outils puissants pour l'optimisation globale, sont proposés pour répondre à ce besoin et pour minimiser certains critères

D'après ses résultats, nous n'avons constaté que la minimisation d'erreur ITAE avec la fonction d'optimisation `fminsearch` donne un minimum de dépassement avec un temps de réponse minimal.

**IV.5.1.2. Correction du système par PID classique :** La fonction de transfert de ce correcteur PI classique est donnée par :

$$C(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D$$

Où  $K_I = K_p / T_I$  et  $K_D = K_p \times T_D$

➤ Critère ISE :

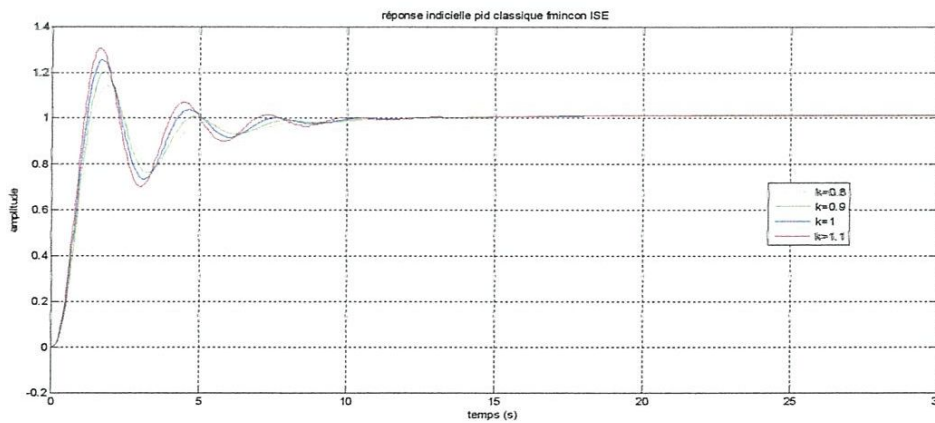
La fonction de transfert de correcteur PID optimal en minimisant le critère ISE par les fonctions d'optimisation fminsearch et fmincon sont respectivement :

$$\left(5.3723 + \frac{0.0779}{s} + 19.6905s\right) \text{ et } \left(5.3735 + \frac{0.0787}{s} + 19.683s\right)$$

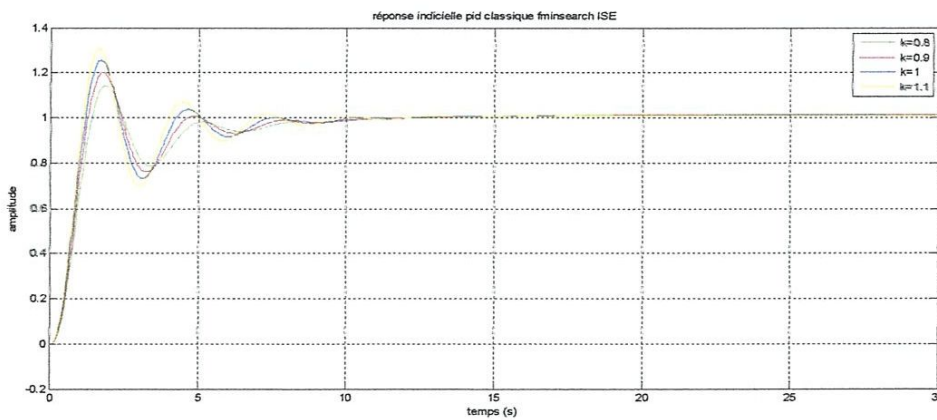
**Tableau IV.4 :** Les caractéristiques de la réponse temporelle du système commandé par un PID classique avec critère ISE.

En utilisant les deux fonctions d'optimisation fminsearch et fmincon .

ISE	$K_p$	$K_I$	$K_D$	D%	Tr
Fminsearch	5.3723	0.0779	19.6905	23%	7s
Fmincon	5.3735	0.0787	19.683	23.3%	7.2s



**Figure IV.13 :** Réponse indicielle du système en BF avec gain variable.(PID class-Fminsearch-ISE)



**Figure IV.14 :** Réponse indicielle du système en BF avec gain variable.(PID class-Fmincon-ISE).

Les figures (IV.13) et (IV.14) présentent les réponses du système commandé par PID optimal pour différentes valeurs du gain.

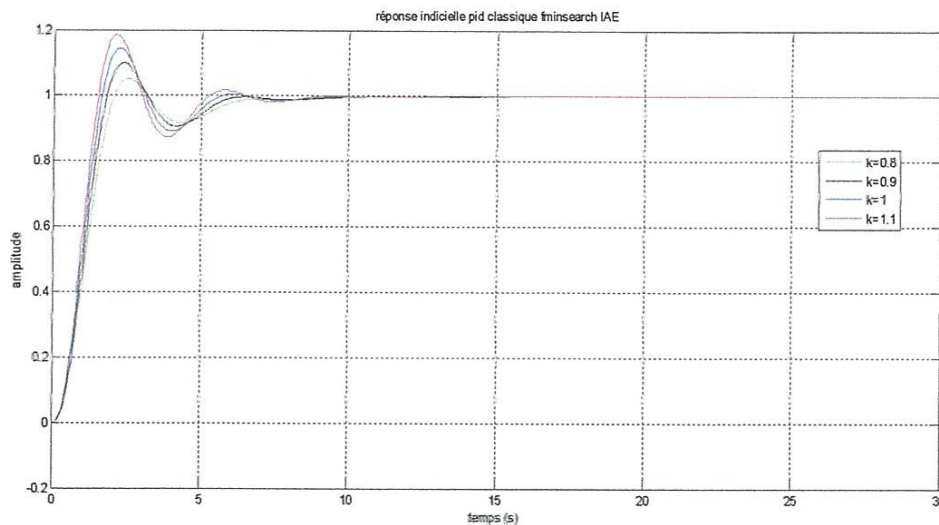
➤ Critère IAE :

La fonction de transfert de correcteur PID optimal en minimisant le critère IAE par les fonctions d'optimisation fminsearch et fmincon sont respectivement :

$$\left(5.7776 + \frac{0.000491}{s} + 11.2142s\right) \text{ et } \left(9.0111 + \frac{0.86046}{s} + 16.0645s\right)$$

**Tableau IV.5 :** Les caractéristiques de la réponse temporelle du système commandé par un PID classique avec critère IAE, en utilisant les deux fonctions d'optimisation fminsearch et fmincon .

IAE	$K_P$	$K_I$	$K_D$	D%	Tr
Fminsearch	5.7776	0.000491	11.2142	16.5%	5.75s
Fmincon	9.0111	0.86048	16.0645	31%	9.5s



**Figure IV.15 :**Réponse indicielle du systeme en BF avec gain variable.(PID class-Fminsearch-IAE)

- Comparaison différents régulateurs optimaux PID : IAE, ISE et ITAE :

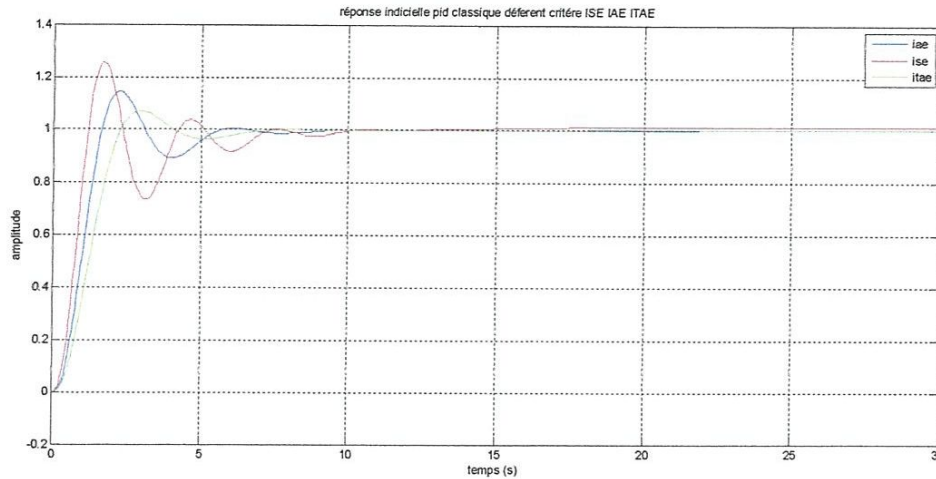


Figure IV.19: Réponse indicielle du système en BF des différents régulateurs optimaux PID (IAE, ISE et ITAE)

**Remarque :**

D'après ses résultats, nous n'avons constaté que la minimisation d'erreur ITAE avec la fonction d'optimisation `fminsearch` donne un minimum de dépassement (7%) avec un temps de réponse minimal. (5s).

Et changer la valeur de gain du système pour tester la robustesse de régulateur PID optimal, donc et bien robuste.

**IV.5.2 Réglage optimal des paramètres des correcteurs fractionnaires :**

**IV.5.2.1. Correction du système par  $PI^\alpha$  fractionnaire :** La fonction de transfert de ce correcteur  $PI^\alpha$  fractionnaire est donnée par :

$$C(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s^\alpha} \right) = K_p + \frac{K_I}{s^\alpha}$$

Où  $K_I = K_p/T_i$

Est la fonction de ce correcteur approchée et implémenté dans Simulink donnée par :

$$C(s) = K_p + \frac{1}{T_i} \sum_{k=0}^Q \frac{\mu_k}{s + \xi_k}$$



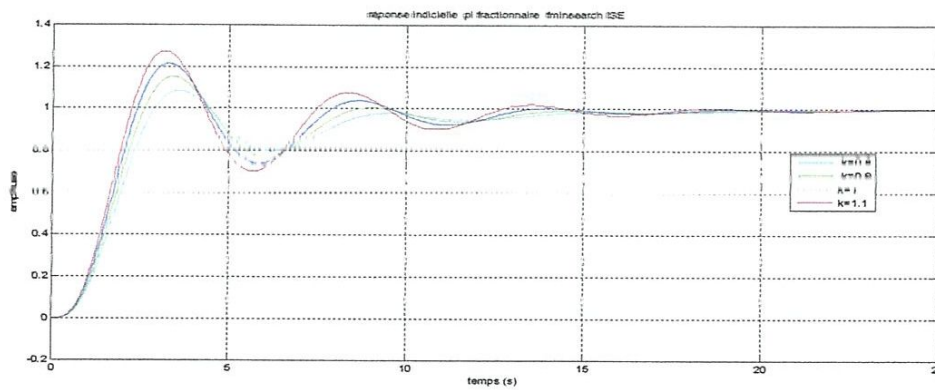
➤ Critère ISE :

La fonction de transfert de correcteur  $PI^a$  optimal en minimisant le critère ISE par les fonctions d'optimisation `fminsearch` et `fmincon` sont respectivement  $(15.1554 - \frac{2.2694}{s^{1.2315}})$  et  $(3.7502 + \frac{1.490 \times 10^{-8}}{s^{0.90}})$

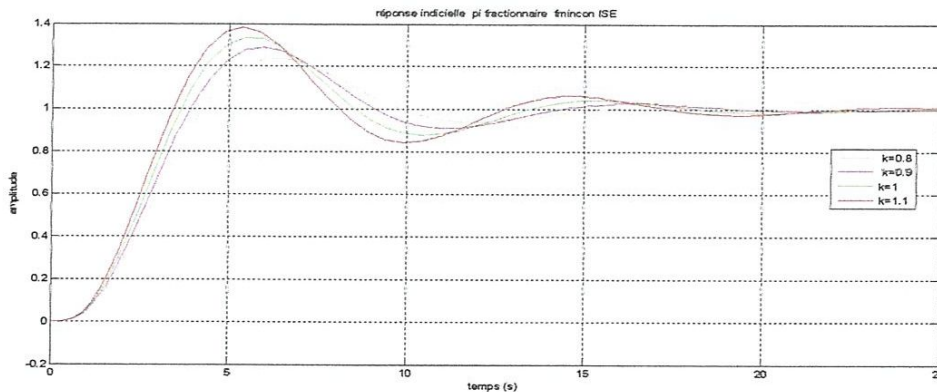
**Tableau IV.7 :** Les caractéristiques de la réponse temporelle du système commandé par un  $PI^a$  d'ordre fractionnaire avec critère ISE .

En utilisant les deux fonctions d'optimisation `fminsearch` et `fmincon` .

ISE	$K_p$	$K_I$	$a$	D%	Tr
fminsearch	15.1554	-2.2694	1.2315	21%	13.5s
Fmincon	3.7502	$1.490 \times 10^{-8}$	0.90	31%	16s



**Figure IV.20:**Réponse indicielle du systeme en BF avec gain variable.(PI fract-  
Fminsearch-ISE)



**Figure IV.21:**Réponse indicielle du systeme en BF avec gain variable.(PI fract-  
Fmincon-ISE)

Les figures (IV.20) et (IV.21) présentent les réponses du système commandé par  $PI^\alpha$  optimal pour différentes valeurs du gain.

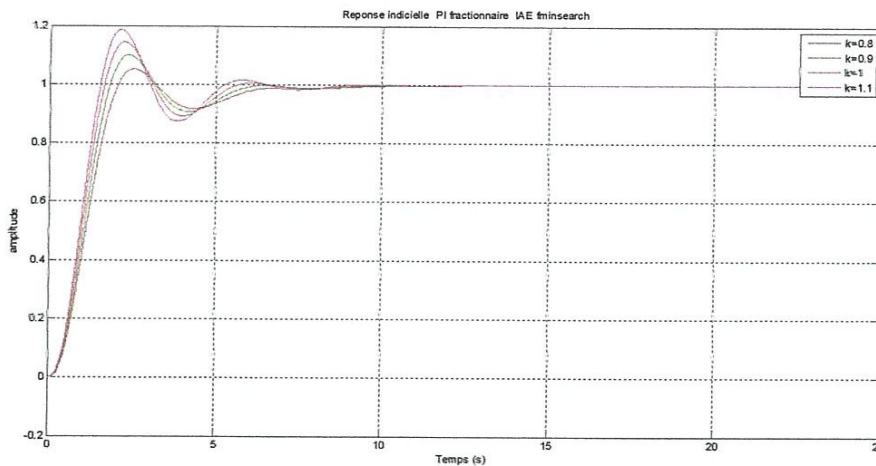
➤ Critère IAE :

La fonction de transfert de correcteur fractionnaire  $PI^\alpha$  optimal en minimisant le critère IAE par les fonctions d'optimisation fminsearch et fmincon sont respectivement :

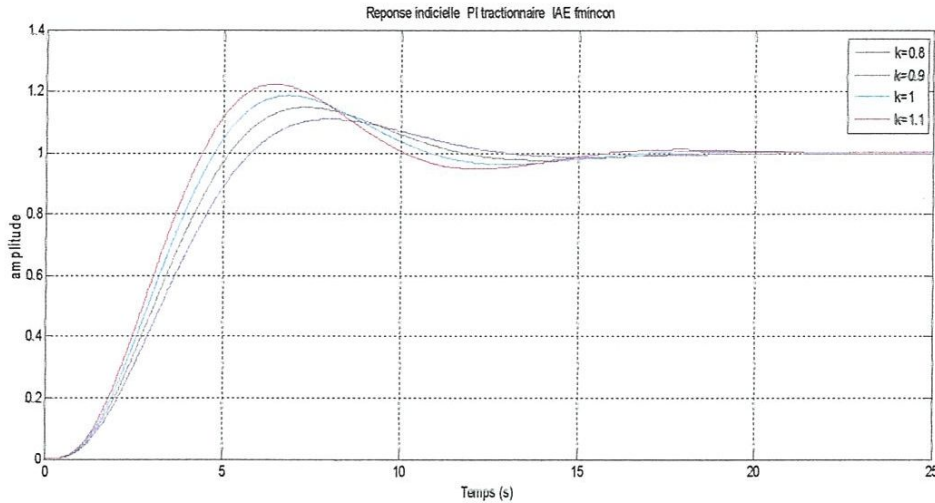
$$\left(9.1256 - \frac{1.1596}{s^{1.9828}}\right) \text{ et } \left(2.6166 + \frac{3.2466}{s^{1.001}}\right)$$

**Tableau IV.8 :**Le tableau regroupe les caractéristiques de la réponse temporelle du système commandé par un  $PI^\alpha$  d'ordre fractionnaire avec critère IAE, n utilisant les deux fonctions d'optimisation fminsearch et fmincon .

IAE	$K_p$	$K_I$	$\alpha$	D%	Tr
fminsearch	9.1256	-1.1596	1.9828	17%	8.1s
fmincon	2.6166	3.2466	1.0001	19%	14.5s



**Figure IV.22:**Réponse indicielle du systeme en BF avec gain variable.(PI fract-  
Fminsearch-IAE)



**Figure IV.23: Réponse indicielle du système en BF avec gain variable. (PI fract- Fmincon-IAE)**

Les figures (IV.22) et (IV.23) présentent les réponses du système commandé par  $PI^\alpha$  optimal pour différentes valeurs du gain.

➤ **Critère ITAE :**

La fonction de transfert de correcteur  $PI^\alpha$  optimal en minimisant le critère ITAE par les fonctions d'optimisation fminsearch et fmincon sont respectivement  $(5.7884 - \frac{0.62399}{s^{1.2717}})$  et  $(1.9873 + \frac{1.0832}{s^{0.999}})$

**Tableau IV.9:** Les caractéristiques de la réponse temporelle du système commandé par un  $PI^\alpha$  d'ordre fractionnaire avec critère ITAE, en utilisant les deux fonctions d'optimisation fminsearch et fmincon.

ITAE	$K_p$	$K_I$	$\alpha$	D%	Tr
fminsearch	5.7854	-0.62399	1.2717	9%	6s
fmincon	1.9873	1.0832	0.999	10%	15s

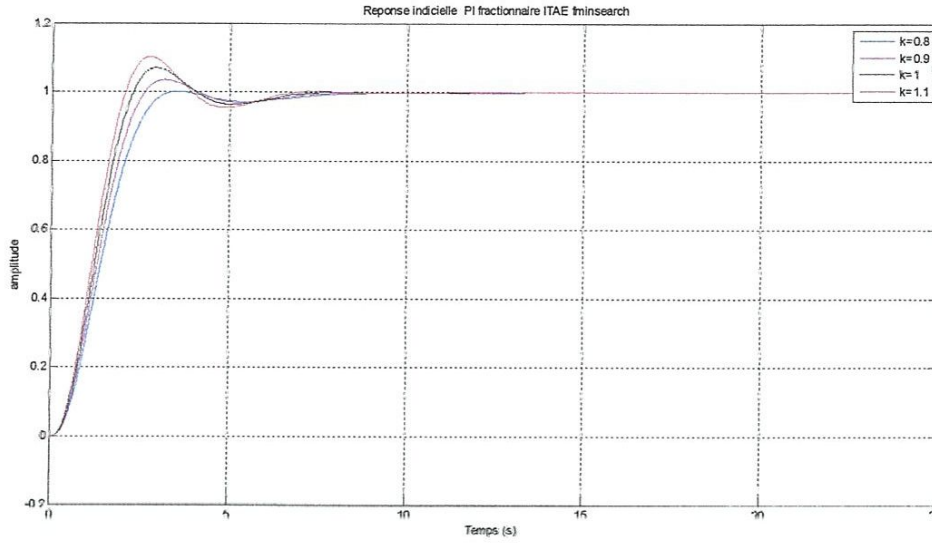


Figure IV.24: Réponse indicielle du système en BF avec gain variable. (PI fract-  
Fminsearch-ITAE)

Les figures (IV.24) et (IV.25) présentent les réponses du système commandé par  $PI^a$  optimal pour différentes valeurs du gain.

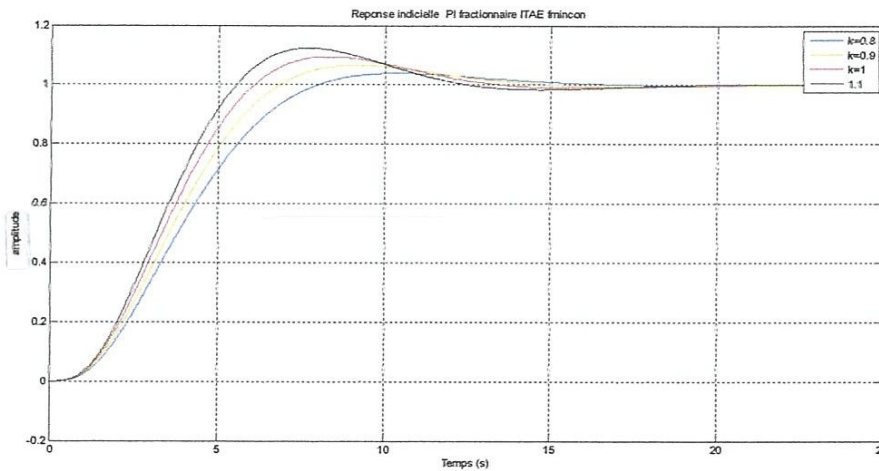


Figure IV.25: Réponse indicielle du système en BF avec gain variable. (PI fract-  
Fminsearch-ITAE)  
*fmincon*

- Comparaison différents régulateurs optimaux d'ordre fractionnaire  $PI^\alpha$  (IAE, ISE et ITAE) :

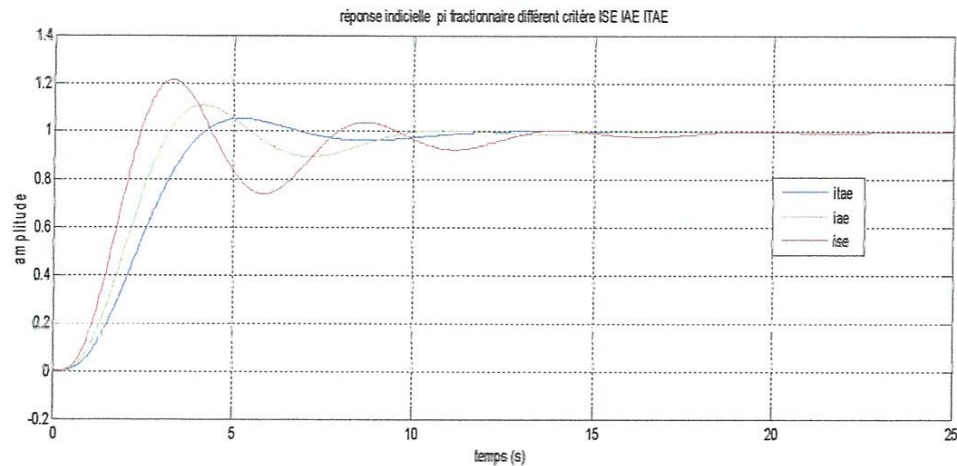


Figure IV.26: Réponse indicielle du système en BF des différents régulateurs optimaux  $PI$  fractionnaire (IAE, ISE et ITAE)

**Remarque :**

Pour cet exemple, les meilleurs résultats, dans le sens qu'ils améliorent toutes les performances du système, sont obtenus avec le critère ITAE, le temps de réponse (6s) et dépassement (9%) avec la fonction d'optimisation `fminsearch` donc plus stable et l'erreur statique nulle.

- Comparaison entre les correcteurs classique  $PI$  et fractionnaire  $PI^\alpha$ :

Nous comparerons les performances du système de commande pour les deux correcteurs le correcteur  $PI$  classique et le correcteur d'ordre fractionnaire  $PI^\alpha$  optimal avec la variation du gain du système. Les figures suivantes présentent les réponses indicielles du système de commande en boucle fermée dans les trois cas de critère (ISE, IAE et ITAE) par les fonctions d'optimisation `fminsearch` :

➤ Critère ISE :

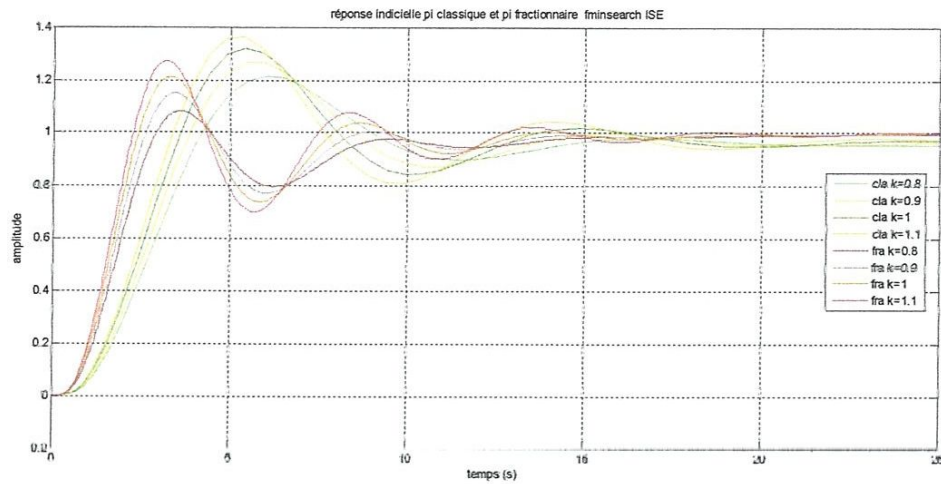


Figure IV.27: Réponse indicielle  $PI$  classique et  $PI^{\alpha}$  fractionnaire du système en BF avec gain variable (ISE)

➤ IAE :

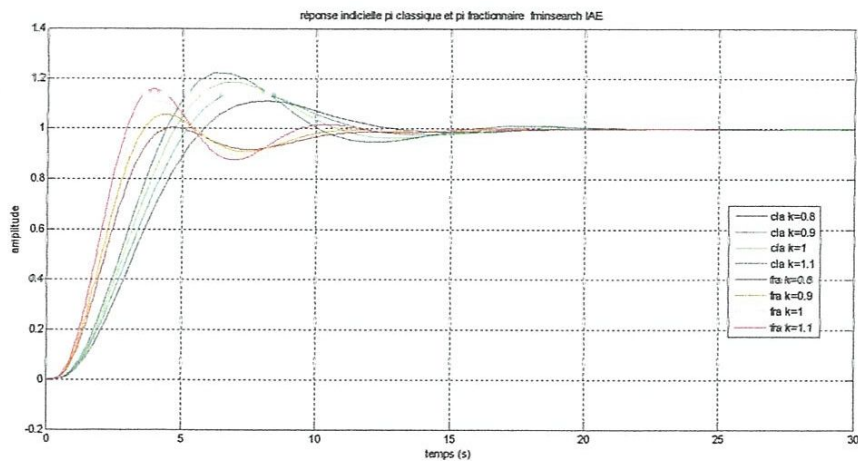
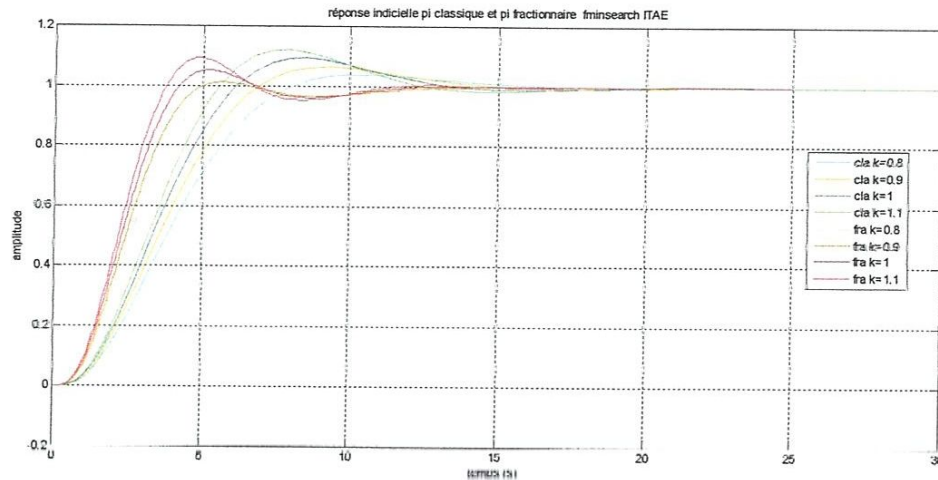


Figure IV.28 : Réponse indicielle  $PI$  classique et  $PI^{\alpha}$  fractionnaire du système en BF avec gain variable (IAE)

## ➤ ITAE :



**Figure IV.29: Réponse indicielle  $PI$  classique et  $PI^{\alpha}$  fractionnaire du système en BF avec gain variable (ITAE)**

. Les résultats de comparaison sont donnés comme suit :

- - Le temps de réponse du système de commande à retour unitaire avec le correcteur  $PI^{\alpha}$  d'ordre fractionnaire plus petit avec le correcteur  $PI$  classique. Avec les trois cas de critère (ISE, IAE et ITAE )
- -Le dépassement du système de commande de retour unitaire avec le correcteur  $PI^{\alpha}$  d'ordre fractionnaire est plus petit avec le correcteur  $PI$  classique. Avec les trois cas de critère (ISE, IAE et ITAE )
- Et constaté que la minimisation d'erreur ITAE Le temps de réponse du système d'un correcteur  $PI^{\alpha}$  d'ordre fractionnaire (6s) et 50% plus petit que celui avec le correcteur  $PI$  classique (12s) et Le dépassement du système d'un correcteur  $PI^{\alpha}$  d'ordre fractionnaire (9%) et 22.41% plus petit que celui avec le correcteur  $PI$  classique (11.6%) et donc la stabilité s'est améliorée aussi .
- pour une variation du gain du système. nous pouvons facilement voir que le système de commande avec le correcteur  $PI^{\alpha}$  d'ordre fractionnaire a moins de changements de ses caractéristiques de fonctionnement. Nous pouvons dire que l'utilisation du correcteur  $PI$  d'ordre fractionnaire fournit de bonnes performances et robustesse.

IV.5.2.2. Correction du système par  $PI^\alpha D^\beta$  fractionnaire :

$$C(s) = K_P \left( 1 + \frac{1}{T_I s^\alpha} + T_D s^\beta \right) = K_P + \frac{K_I}{s^\alpha} + K_D s^\beta$$

Ou  $K_I = K_P/T_I$  et  $K_D = K_P \times T_D$

Est la fonction de cette correcteur approchée et implémenté dans simulink donnée par :

$$C(s) = K_P + \frac{1}{T_i} \sum_{k=0}^Q \frac{\mu_k}{s + \xi_k} + T_d \frac{1}{\sum_{k=0}^Q \frac{c_k}{s + \xi_k}}$$

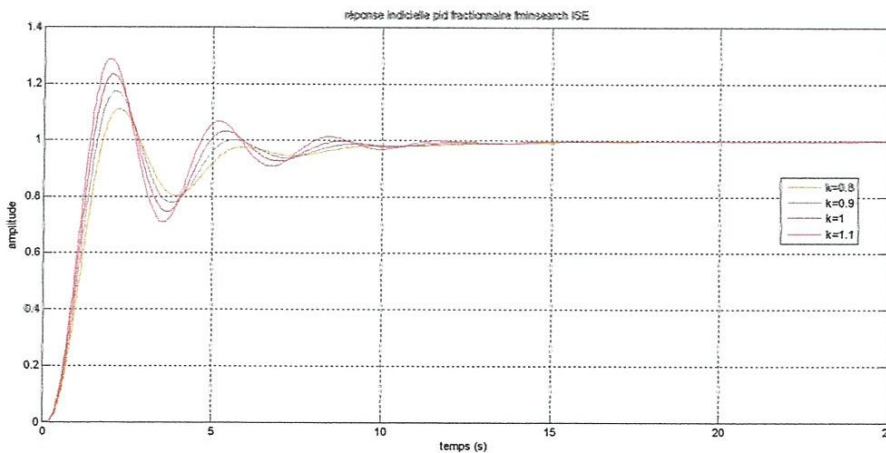
➤ Critère ISE :

La fonction de transfert de correcteur  $PI^\alpha D^\beta$  optimal en minimisant le critère ISE par la fonction d'optimisation fminsearch :

$$\left( 4.7964 + \frac{-0.0012}{s^{-0.7354}} + 19.5998s^{-0.7354} \right)$$

**Tableau IV.10 :** Les caractéristiques de la réponse temporelle du système commandé par un  $PI^\alpha D^\beta$  fractionnaire avec critère ISE, en utilisant la fonction optimisation fminsearch :

ISE	$K_P$	$K_I$	$K_D$	$\alpha$	$\beta$	D%	Tr
fminsearch	4.7964	-0.0012	19.5998	-0.7354	-0.1579	22%	7s



**Figure IV.30:**Réponse indicielle du système en BF avec gain variable.(PID fract- Fminsearch-ISE)

Critère IAE :

La fonction de transfert de correcteur  $PI^\alpha D^\beta$  optimal en minimisant le critère IAE par la fonction d'optimisation fminsearch :  $\left( 429.390 - \frac{570.671}{s^{9.4937}} - 17.8334s^{6.5911} \right)$



Tableau IV.11 : Les caractéristiques de la réponse temporelle du système commandé par un  $PI^\alpha D^\beta$  fractionnaire avec critère IAE, en utilisant la fonction d'optimisation fminsearch :

IAE	$K_P$	$K_I$	$K_D$	$\alpha$	$\beta$	D%	Tr
fminsearch	429.3904	-570.671	-17.8334	9.4937	6.5911	9%	4.1s

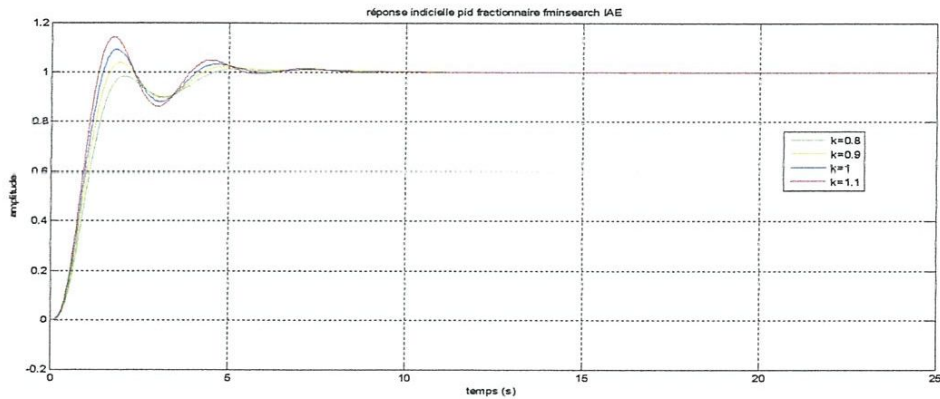


Figure IV.31 :Réponse indicielle du systeme en BF avec gain variable.(PID fract- Fminsearch-IAE)

➤ Critère ITAE :

la fonction de transfert de correcteur  $PI^\alpha D^\beta$  optimal en minimisant le critère ITAE par la fonctions d'optimisation fminsearch:

$$\left( 245.28 - \frac{323.647}{s^{0.828}} - 7.523s^{-1.3381} \right)$$

Tableau IV.12 : Les caractéristiques de la réponse temporelle du système commandé par un  $PI^\alpha D^\beta$  fractionnaire avec critère ITAE.

En utilisé la fonction d'optimisation fminsearch.

ITAE	$K_P$	$K_I$	$K_D$	$\alpha$	$\beta$	D%	Tr
fminsearch	245.28	-323.647	-7.523	0.828	-1.3381	4%	2.5s

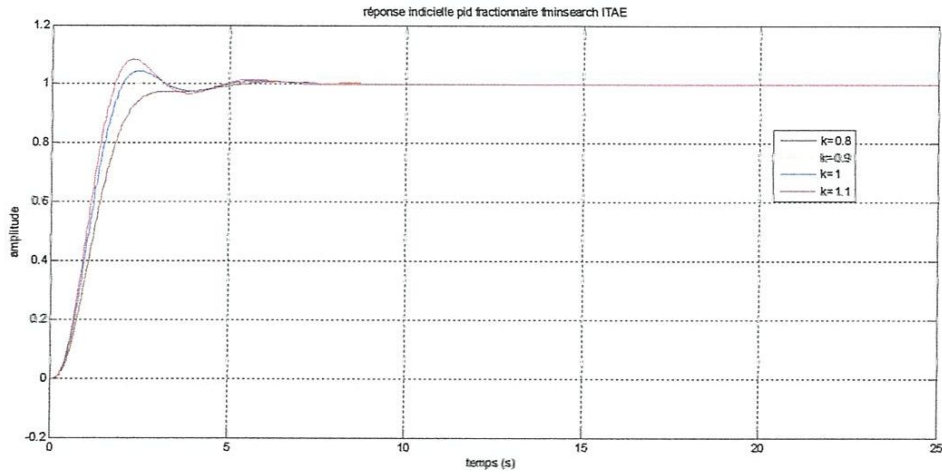


Figure IV.32 : Réponse indicielle du système en BF avec gain variable. (PID fractionnaire Fminsearch-ITAE)

- Comparaison différents régulateurs optimaux d'ordre fractionnaire  $PI^\alpha D^\beta$  (IAE, ISE et ITAE) :

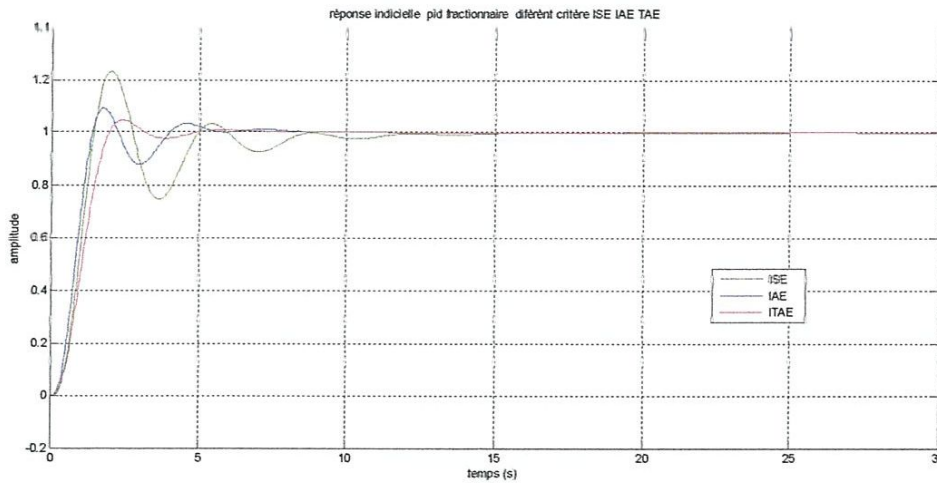


Figure IV.33: Réponse indicielle du système en BF des différents régulateurs optimaux PID fractionnaires (IAE, ISE et ITAE)

Et obtenue la même remarque avec correcteurs PI fractionnaire.

- Comparaison entre les correcteurs classique  $PID$  et fractionnaire  $PI^\alpha D^\beta$ :

➤ Critère ISE :

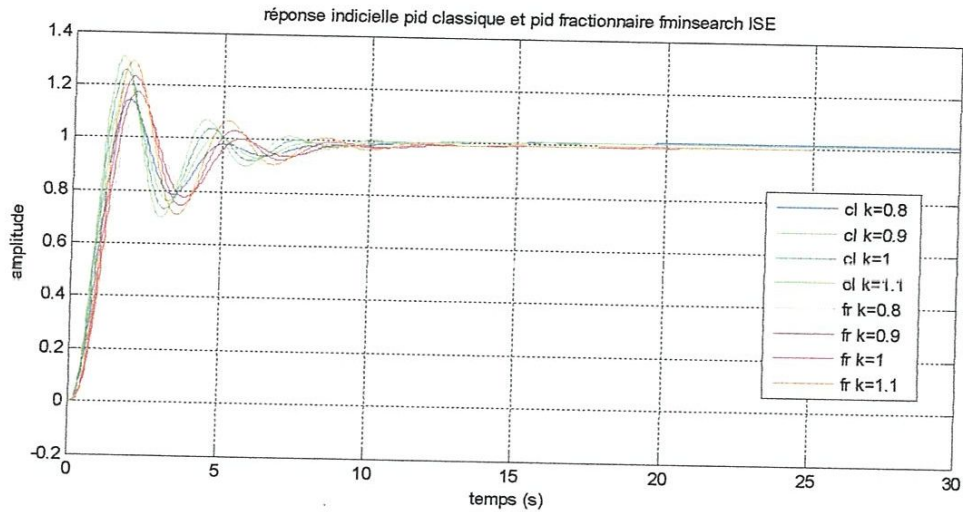


Figure IV.34: Réponse indicielle  $PID$  classique et  $PI^\alpha D^\beta$  fractionnaire du système en BF avec gain variable (ISE)

➤ Critère IAE :

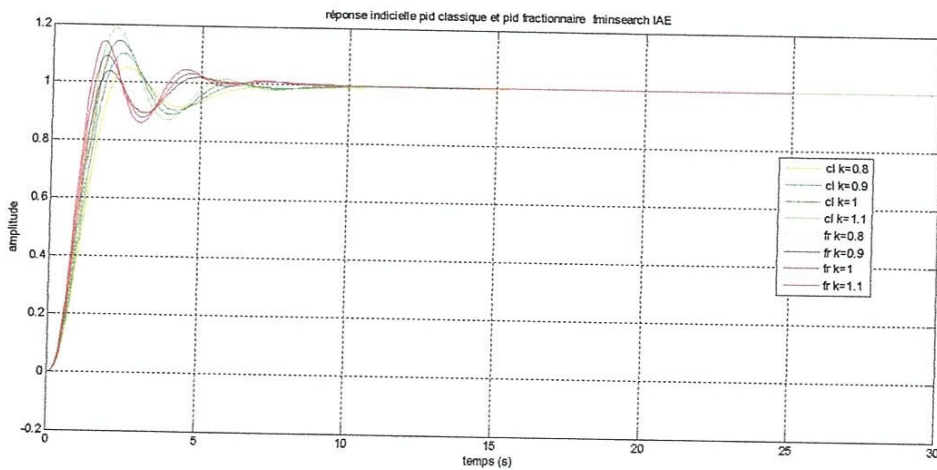


Figure IV.35: Réponse indicielle  $PID$  classique et  $PI^\alpha D^\beta$  fractionnaire du système en BF avec gain variable (IAE)

## ➤ Critère ITAE :

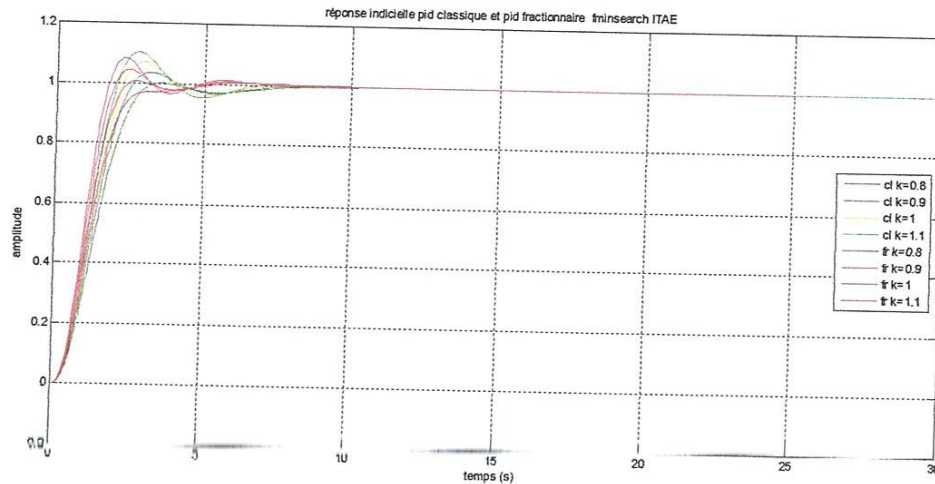


Figure IV.36: Réponse indicielle  $PID$  classique et  $PI^\alpha D^\beta$  : fractionnaire du système en BF avec gain variable (ITAE)

Les résultats de comparaison sont donnés comme suit :

- - Le temps de réponse du système de commande à retour unitaire avec le correcteur  $PI^\alpha D^\beta$  d'ordre fractionnaire plus petit avec le correcteur PID classique. Avec les trois cas de critère (ISE, IAE et ITAE)
- - Le dépassement du système de commande de retour unitaire avec le correcteur  $PI^\alpha D^\beta$  d'ordre fractionnaire est plus petit avec le correcteur PID classique. Avec les trois cas de critère (ISE, IAE et ITAE)
- Et constaté que la minimisation d'erreur ITAE Le temps de réponse du système d'un correcteur  $PI^\alpha D^\beta$  d'ordre fractionnaire (2.5s) et 52.83% plus petit que celui avec le correcteur PID classique (5.3s) et Le dépassement du système d'un correcteur  $PI^\alpha D^\beta$  d'ordre fractionnaire (4%) et 33.33% plus petit que celui avec le correcteur PID (6%) et donc la stabilité s'est améliorée aussi.

#### IV.5.3. Comparaison globale entre les correcteurs classiques et fractionnaires :

**Tableau IV .13:** Les caractéristiques de la réponse temporelle de système commandé par les correcteurs classiques et fractionnaires avec les critères ISE, IAE et ITAE.

En utilisant la fonction d'optimisation `fminsearch` à partir de cette résultat en fait la comparaison entre les dépassements et les temps de réponse du système :

		ISE	IAE	ITAE
PI classique	D%	32%	18%	11.6%
	Tr	22s	14.8s	12s
PI fractionnaire	D%	21%	17%	9%
	Tr	13.5s	8.1s	6s
PID classique	D%	23%	16.5%	6%
	Tr	7s	5.75s	5.3s
PID fractionnaire	D%	22%	9%	4%
	Tr	7s	4.1s	2.5s

Après cette étude, Nous avons montré, par exemple de simulation, que les performances obtenues par un système de commande  $PI^\alpha D^\beta$  calculé par cette technique, sont clairement meilleures que celles obtenues par les commandes PID classique, L'intérêt pour ce type de correcteur est justifié par une meilleure flexibilité dans la conception de la commande puisqu'il à deux paramètres en plus qui sont les ordres fractionnaires des actions d'intégration et de dérivation.

#### IV.6.Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté le réglage des paramètres des correcteurs PI et PID (classique et fractionnaire). Les paramètres  $K_p$ ,  $K_i$ ,  $K_d$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  sont la solution du problème de minimisation ISE, IAE et ITAE avec les algorithmes d'optimisation `fminsearch` et `fmincon`. Nous avons appliqué cette technique au système d'ordre 4 avec variation du gain. Nous n'avons constaté que la minimisation d'erreur ITAE avec la fonction d'optimisation `fminsearch` donne un minimum de dépassement avec un temps de réponse minimal. Nous avons fait une comparaison globale entre les correcteurs classiques et fractionnaires. Nous avons constaté que les correcteurs fractionnaires donnent des meilleures performances. Ils sont plus robuste aux variations du gain.



**CONCLUSION**  
**GÉNÉRALE**

### Conclusion générale :

Le but de ce travail est d'introduire une méthode de réglage optimal des paramètres des correcteurs classiques et fractionnaires.

Nous avons présentés les notions de base des systèmes d'ordre fractionnaires. Une description générale de ce type des systèmes a été introduite en particulier les correcteurs fractionnaires.

Les correcteurs d'ordre fractionnaire sont des cas général des correcteurs classiques, ils sont flexibles. Il est possible de réaliser des correcteurs fractionnaires avec des fonctions de transfert rationnelle de façon non héréditaire grâce à la représentation diffusive, où l'approximation devient plus simple et souple, il suffit bien choisir et calculer les paramètres de l'approximation numérique pour avoir une meilleure approximation.

L'ajustement des paramètres des deux correcteurs classique et fractionnaire est basé sur la minimisation d'une fonctionnelle du coût constituée des indices de performances de type ISE, IAE et ITAE. La formulation mathématique de problème d'optimisation est basées sur l'approximation des fonctions de transfert irrationnelle des correcteurs fractionnaires implémenté dans Simulink /Matlab.

Nous constatons que les paramètres des deux régulateurs PID classique et fractionnaire par la fonction d'optimisation `fminsearch` est le meilleur avec l'indice de l'intégrale de l'erreur absolue multipliée par le temps (ITAE).

D'après une étude comparative avec la structure de commande PID classique, nous a montré que cette nouvelle technique de réglage donne des résultats remarquables.

Les résultats des simulations montrent que la méthode proposée était plus robuste, flexible et efficace en termes de performances dynamiques comme la réduction du dépassement maximal, le temps de montée, le temps de réponse et l'erreur .

## BIBLIOGRAPHIE

---

### Bibliographie :

- [1] M. ETIQUE, Haute Ecole d'ingénierie et de Gestion du canton de Vaud (HIEG-Vd) 2cours complet régulation filière électronique, octobre 2005.
- [2] P. Prouvost, livre : Automatique (contrôle et régulation).
- [3] M. ETIQUE, Régulation automatique ( mars ,Yverdon-les-Bains), Haute Ecole d'Ingénierie et de Gestion du canton de Vaud (HEIG-VD) , p164 ,172 ,179-180.2007.
- [4] B. SOFIANE & S. ABDERRAOUF, « Theme Optimisation d'un régulateur PID par Les Colonies de Fourmis Artificielles (ACO) »,03 Juin 2012.
- [5] A. BESANCON-VODA et S.GENTIL Laboratoire d'automatique de Grenoble "Régulateurs PID analogiques et numériques".
- [6] K. B. OLDHAM and J. SPANIER, Fractional Calculus, Academic Press, New York, 1974.
- [7] I. POUDLUBNY, Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego, USA, 1999.
- [8] K. BETTOU, « analyse et réalisation de correcteurs analogiques d'ordre fractionnaire » Thèse doctorat Spécialité : Electronique université Constantine mémoire de magistère 2011.
- [9] Mr. N. FERGANI, « Réglage de PID Fractionnaire pour une Réponse Désirée en Boucle Fermée», Mémoire de magister, université Mentouri Constantine 2009.
- [10] B.M. VINAGRE, V. FELIÚ, proc: 41st IEEE conference on decision and control, Las Vegas, December 9, 2002.
- [11] M. ASSABAA, A. CHAREF, Modeling and analysis of multiple fractional order systems, EMP, Bordj-El- Bahri, Alger. , CGE'05,16 avril 2007.
- [12] M. ASSABAA, « modélisation et analyse des équations différentielles d'ordre fractionnaire », Mémoire de magister, université de Mentouri, Constantine, 2006.
- [13] A. RUMEAU, Modélisation comportementale en génie électrique sous représentation diffusive : Méthodes et Applications l'université de Toulouse 2009.
- [14] L. LAUDEBAT, « approche des phénomènes de relaxions diélectrique par réalisation Diffusive », sixième conférence des jeunes chercheurs en Génie Electrique Saint-Nazaire,5-6juin 2003.
- [15] G. MONTSENY, représentation diffusive : élément et extension' rapport n31077 Toulouse cedex 4,France, 2000.



## BIBLIOGRAPHIE

---

- [16] J-C. TRIGEASSOU et T. POINOT "Action thématique "les systèmes à dérivées non entières" Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle Ecole Supérieure d'Ingénieurs de Poitiers 40, Ave du Recteur Pineau, 86022 POITIERS cedex – France .
- [17] C. CASENAVE , « Représentation diffusive et inversion opératorielle pour l'analyse et la Toulouse, Toulouse. Décembres 2009.
- [18] L. SCHWARTZ, "Théorie des distributions", Tomes1et 2, Hermann, Paris, 1950-1951.
- [19] M. VILLAIN, Méthodes déterministes d'identification, systèmes asservis linéaires, tome 2, page 68.
- [20] P. ATHERTON, PID Controller Design Copyright ©2007 by the Society for Industrial and Applied Mathematics. This electronic version is for personal use and may not be duplicated or distributedrésolution de problèmes dynamiques non locaux », Thèse de doctorat de l'Université de