

17/6/2014

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 – Guelma
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Electrotechnique et Automatique



Domaine : Sciences et Technologie
Filière : Automatique et Informatique Industrielle
Spécialité : Commande et Diagnostic des Systèmes Industriels



**Mémoire de fin d'études
pour l'obtention du diplôme de Master Académique**

**Conception des contrôleurs d'ordre fractionnaire à base de
modèle de référence en boucle fermée**

Présenté par :

- Belouar Mohammed Ilyas
- Belhassani Brahim

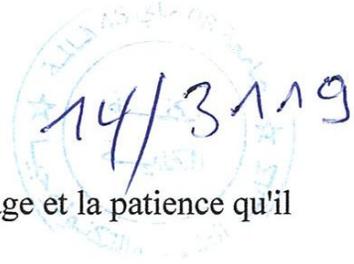
Sous la direction de :

Dr Boudjehem Badreddine

Juin 2014



Remerciements :



✎ Nous tenons à remercier le bon **ALLAH** pour le courage et la patience qu'il nous a offert pour aboutir à la réalisation de ce mémoire.

✎ Nos sincères et profond remerciement pour notre encadreur **Mr Boudjehem Badreddine** pour l'aide qu'il a apporté pour mener ce travail.

✎ A tous les enseignants de la filière d'automatique.

✎ A tous ceux qui ont contribués de près ou de loin la finalisation de ce travail. Nous tenons à leur exprimer notre vive gratitude.

✎ Enfin, nos respectueuses salutations et remerciement aux membres du jury **Mr Aidoud** et **Mr Debbeche** qui ont l'honneur d'apprécier et de juger ce modeste travail.

MERCI

DÉDICACE :

*Je dédie ce modeste travail à
mon père **BELOUER**
RABEH rabi yarhimou*

MOHAMMED ILYAS ET BRAHIM



Liste des tableaux :

Tableau 3.1 : avantages et inconvénients des correcteurs classiques.....	33
Tableau 3.2 : résultats des spécifications du gain et de la phase pour le système $G(s) = \frac{1}{(1+s)^5}$ corrigé avec un correcteur PI classique et fractionnaire.....	44
Tableau 3.3 : résultats des spécifications du gain et de la phase pour le système $G(s) = \frac{1}{(1+s)^5}$ corrigé avec un correcteur PID classique et fractionnaire.....	44

Sommaire

Sommaire :

I INTRODUCTION GENERALE	01
II CHAPITRE 01 : CORRECTEURS FRACTIONNAIRES	
1. Historique	03
2. Introduction au calcul fractionnaire.....	03
3. Opérateurs d'ordre fractionnaire	04
3.1. Définitions fondamentales	04
3.1.1. Définition de Riemann-Liouville	04
3.1.2. Définition de Caputo	05
3.1.3. Définition de Gründwald-Leitnikov	05
3.2. Propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire	06
3.3. Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire	07
3.3.1. Dérivée de Riemann-Liouville	07
3.3.2. Dérivée de Gründwald-Leitnikov	07
3.4. Inconvénients du calcul fractionnaire	07
4. Systèmes d'ordre fractionnaire	07
4.1. Définition	07
4.2. Fonction de transfert	08
4.2.1. Modèle d'état	09
4.2.2. Systèmes d'ordre fractionnaire de base.....	10
5. Domaines d'application	11
6. Correcteurs d'ordre fractionnaire	11
6.1. Définition	11
6.1.1. Correcteurs PID d'ordre fractionnaire	12
6.2. Correcteur PI fractionnaire PI^λ	12

Sommaire

6.2.1. Réponse fréquentielle	13
6.3. Correcteur PD fractionnaire PD^u	13
6.3.1. Réponse fréquentielle	14
6.4. correcteur PID fractionnaire $PI^\lambda D^u$	14
6.4.1. Réponse fréquentielle	15
7. Conclusion	15

III CHAPITRE 02 : APPROXIMATION D'ORDRE FRACTIONNAIRE

1. Introduction	16
2. Approche CRONE	16
2.1. La version idéale	16
2.2. Version réel	17
3. Droite de lissage de gain	18
4. Droite de lissage phase	18
5. SIMULATION	20
5.1. Simulation d'un dérivateur d'ordre fractionnaire	20
5.2. Simulation d'un intégrateur d'ordre fractionnaire	23
6. Simulation des correcteurs fractionnaires approchés par CRONE.....	27
6.1. Simulation de PI fractionnaire	27
6.2. Simulation du PD fractionnaire	28
6.3. Simulation du PID fractionnaire	29
7. Conclusion	29

IV CHAPITRE 03 : CONCEPTION DES CONTROLEURS A BASE DE MODELE DE REFERENCE

1. Introduction	32
-----------------------	----

Sommaire

2. Correcteurs classiques	32
2.1. Correcteur PI	32
2.2. Correcteur PD	33
2.3. Correcteur PID	33
2.4. Avantages et inconvénients des correcteurs classiques	33
3. Synthèse des correcteurs classiques	34
3.1. Synthèse du correcteur classique	34
3.1.1. Système d'un système du premier ordre	34
3.1.2. Système du deuxième ordre	35
3.1.3. Systèmes avec temps de retard	36
3.2. Synthèse du correcteur d'ordre fractionnaire à base de modèle de référence	36
3.2.1. Réglage des paramètres	38
4. applications	39
4.1. Modèle de référence sans retard	39
4.2. Modèle de référence avec retard	41
5. Conclusion	45
V CONCLUSION GENERALE.....	46

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Introduction générale

Introduction générale

La régulation a pour ambition de garantir un fonctionnement du procédé conforme à l'objectif final, en imposant des ajustements, suivant les lois d'évolution par le concepteur, lorsqu'un écart par rapport à cet objectif décelé.

Le rôle des correcteurs est de modifier automatiquement le comportement du système afin d'imposer les performances désirés.

Les correcteurs classiques présentent plusieurs avantages tel que une précision parfaite, diminution de temps de monter, stabilisation du système, diminution du dépassement et amélioration de la sensibilité. Lorsque le système présent des retards important, les perturbations sont trop grand ou des grandes variations de ces paramètres, les correcteurs classiques devient incapables d'assurer les performances désirées ce qui donc limite l'utilisation de ces correcteurs dans certain cas.

Dans le but d'améliorer les performances de la boucle de commande notamment la robustesse, des recherches sont orientées vers l'utilisation d'un concept basé sur le calcul fractionnaire. Ce type des systèmes est utilisé pour améliorer les performances de la commande et obtenir des modèles mathématiques plus précis.

Les correcteur fractionnaire permettent d'avoir un système plus robuste, améliorent la stabilité et mieux adaptés pour les systèmes d'ordre non entiers. Le problème qui lié à ces correcteurs est le comportement héréditaire et la forme non standard de ses fonctions de transfert ce qui rend la réalisation difficile.

Introduction générale

Dans le but de réaliser les systèmes d'ordre fractionnaire de façon non héréditaire et d'avoir une fonction de transfert rationnel, une approche dite « approche CRONE » est mieux adapté à l'étude et à l'analyse des systèmes contenant ces opérateurs.

Ce travail est divisé en trois chapitres :

Le premier chapitre consacre à l'étude et l'analyse des systèmes fractionnaires. Nous parlons sur les notions nécessaires pour les calculs fractionnaires et les correcteurs d'ordre fractionnaire.

Le deuxième chapitre introduit la représentation du model CRONE des systèmes fractionnaires et ainsi de son approximation numérique.

Le troisième chapitre illustre la conception des correcteurs classiques et fractionnaires basée sur l'utilisation d'un modèle de référence d'ordre fractionnaire.

CHAPITRE I :
CORRECTEURS
FRACTIONNAIRES

1. Historique :

L'une des théories qui connaissent actuellement une grande popularité parmi les chercheurs aussi bien dans les sciences fondamentales qu'en ingénierie, le Calcul Fractionnaire dont les premières prémices datent de plus de trois siècles.

Au début c'était presque un jeu de l'esprit pour certains mathématiciens de renommée, qui voulaient généraliser la notion de différentiation d'ordre entier par des opérateurs d'ordre fractionnaire, permettant le calcul de la dérivée d'une fonction différentiable $f(t)$, où t serait un réel non nécessairement entier, voire un nombre complexe.

Il est clair que jusqu'à une période très récente, une telle notion mathématique n'avait aucune explication réelle ou pratique. Ce n'est qu'au début des années 1950 que Van Der Ziel, dans ses recherches sur les spectres de bruit des semi-conducteurs, puis Davidson et Cole dans leurs travaux sur la relaxation diélectrique dans certains liquides, ont pu mettre à jour des phénomènes naturels dont les modèles faisaient appel à la dérivée d'ordre fractionnaire.

Depuis ces découvertes, beaucoup de travaux de recherche scientifique ont montré l'importance des systèmes d'ordre fractionnaire et leur intérêt en mathématique, en traitement du signal et en automatique. Les applications concernent des domaines très variés des sciences physiques, tels que la mécanique, l'électricité, la chimie, la biologie, l'économie, la modélisation, l'identification aussi bien dans le domaine temporel que fréquentiel et notamment la commande des processus, la mécatronique et la robotique.

2. Introduction au calcul fractionnaire

Le calcul fractionnaire est le champ de l'analyse mathématique et l'application des intégrales et des dérivées d'ordre arbitraire. Le calcul fractionnaire peut être considéré comme un sujet ancien et encore nouveau. Ces dernières années l'intérêt considérable pour le calcul fractionnaire a été stimulé par ses applications dans les différents domaines de la physique et de l'ingénierie. La représentation mathématique des systèmes fractionnaires dans le domaine fréquentiel donne des fonctions irrationnelles qui, dans le domaine temporel, correspondent à des équations différentielles difficiles à exploiter. Vu l'absence des méthodes mathématiques, les systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire étaient jusque-là étudiés de façon marginale seulement, que ce soit en théorie ou en application. Pour des raisons d'analyse, de synthèse, et de simulation de tels systèmes, l'utilisation des fonctions rationnelles pour l'approximation

s'avère d'une grande importance. Alors pour analyser et concevoir les systèmes de commande d'ordre fractionnaire il faut les approximer par des fonctions rationnelles.

3. Opérateurs d'ordre fractionnaire ^[1] :

Le calcul d'ordre fractionnaire (intégration et différenciation d'ordre fractionnaire) est un vieux concept qui date de l'époque de Cauchy, Riemann Liouville et Leitnikov au 19^{ème} siècle. Il a été utilisé en mécanique depuis les années 1930 et en électrochimie depuis les années 1960. Dans le domaine de la commande, des travaux intéressants ont été réalisés par

I.A. Brin, et plus tard plusieurs mathématiciens et physiciens ont étudié les opérateurs différentiels et les systèmes d'ordre fractionnaire.

L'opérateur intégro-différentiel m :

D , m et t sont les limites de l'opération est défini ainsi:

$$D_t^m = \begin{cases} \frac{d^m}{dt} R(m) > 0 \\ 1 & R(m) = 0 \\ \int_c^t (d\tau)^{-m} R(m) < 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Où m est l'ordre de l'opération, généralement $m \in \mathfrak{R}$

3.1. Définitions fondamentales ^[1] :

Il existe plusieurs définitions mathématiques pour l'intégration et la dérivation d'ordre fractionnaire. Ces définitions ne mènent pas toujours à des résultats identiques mais sont équivalentes pour un large panel de fonctions.

3.1.1. Définition de Riemann-Liouville ^[1] :

L'intégrale dite de Riemann-Liouville est définie ainsi :

- **Définition 1** : Soient C et \mathfrak{R} les anneaux des nombres complexes et réels respectivement,

$\Re(\cdot)$ symbolise la partie réelle d'un nombre complexe.

Soient $\lambda \in C$ avec $\Re(\lambda) > \in \mathfrak{R} \ 0 \ \lambda \ 0$, t et f une fonction localement intégrable définie sur $[t_0, +\infty]$.

L'intégrale d'ordre λ de f de borne inférieure t_0 est définie par :

$$I_{t_0}^\lambda f(t) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_{t_0}^t (1 - \varepsilon)^{\lambda-1} f(\varepsilon) d(\varepsilon) / (2)\Gamma \quad (1.2)$$

Avec $t \geq t_0$ n et $D_{t_0}^u f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-u)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{n-u-1} f(\tau) d\tau$ La fonction gamma d'Euler.

• **Définition 2 :** Soient $\mu \in C$ avec $\Re(\mu) > 0$, n, un entier positif, $\in \Re(0)$ t et f une fonction localement intégrable définie sur $[t_0, + \infty]$. La dérivée d'ordre μ de f de borne inférieure à t_0 est définie par:

$$D_{t_0}^u f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \left\{ I_{t_0}^{(n-u)} f(t) \right\} \quad (1.3)$$

Où le nombre entier n est tel que $(n - 1) < \mu < n$.

Cette dérivée d'ordre fractionnaire peut aussi être définie à partir de l'équation comme suit:

$$D^u f(t) = \frac{d^u}{dt^u} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-u} \sum_{j=0}^u (-1)^j \binom{u}{j} f(kh - jh) \quad (1.4)$$

• **Remarque:** pour simplifier l'écriture, on notera dans la suite I^λ pour I_0^λ et D^u pour D_0^u

3.1.2. Définition de Caputo [1] :

Caputo a reformulé la définition de la dérivée d'ordre fractionnaire comme suit :

$${}_{t_0} D_t^\alpha f(t) \triangleq I^{n-\alpha} D^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \quad (1.5)$$

Où $n - 1 < \alpha < n, n \in N$

Pour $t_0 = 0$, entre les deux définitions (5) et (6), il existe deux relations suivantes :

$$D^\alpha f(t) = D^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0^+) \quad (1.6)$$

$$D^\alpha \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0^+) \frac{t^k}{k!} \right) = D^\alpha f(t) \quad (1.7)$$

3.1.3. Définition de Gröndwald-Leitnikov [1] :

La dérivée d'ordre fractionnaire d'ordre $\mu > 0$ de G-L est donnée par:

$$w_j^u = \binom{u}{j} = \frac{\Gamma(u+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(u-j+1)} \quad (1.8)$$

Où h est la période d'échantillonnage et les coefficients Avec $w_0^u = \binom{u}{0} = 1$ Sont les coefficients du binôme suivant :

$$(1 - z)^u = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{u}{j} z^j = \sum_{j=0}^{\infty} w_j^u z^j \quad (1.9)$$

La définition de Gründwald-Leitnikov de l'intégrale d'ordre fractionnaire est formuléecomme suit:

$$I^\lambda f(t) = D^{-\lambda} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^\lambda \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{-\lambda}{j} f(k_h - j_h) \quad (1.10)$$

Où h est la période d'échantillonnage et les coefficients $w_j^{-\lambda}$ avec $w_0^{-\lambda} = \binom{-\lambda}{0} = 1$ sont les coefficients du binôme suivant :

$$(1 - z)^{-\lambda} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{-\lambda}{j} z^j = \sum_{j=0}^{\infty} w_j^{-\lambda} z^j \quad (1.11)$$

3.2. Propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire ^[1] :

Les principales propriétés des dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire sont les suivantes:

1. Si $f(z)$ est une fonction analytique de z , alors sa dérivée d'ordre fractionnaire $D_\alpha f(z)$ est une fonction analytique de z et α .
2. pour $\alpha = n$, ou n est un entier, l'opération $D_\alpha f(z)$ donne le même résultat que la différentiation classique d'ordre entier n .
3. pour $\alpha = 0$ l'opération $D_\alpha f(z)$ est l'opérateur identité : $D_0 f(z) = f(z)$.
4. la différentiation et l'intégration d'ordre fractionnaire sont des opérations linéaires:

$$D^\alpha a f(z) + D^\alpha b g(z) = a D^\alpha f(z) + b D^\alpha g(z) \quad (1.12)$$

5. la loi additive (propriété du semi-groupe)

$$D^\alpha D^\beta f(z) = D^\beta D^\alpha f(z) = D^{\alpha+\beta} f(z) \quad (1.13)$$

Est valable sous certaines contraintes sur la fonction $f(z)$.

3.3. Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire ^[1] :

Nous citons dans ce qui suit la transformée de Laplace des différentes définitions de la dérivée.

3.3.1. Dérivée de Riemann-Liouville :

$$L\{D^\mu f(t)\} = s^\mu F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} S^k [D^{u-k-1} f(t)]_{t=0} \tag{1.14}$$

Avec $(n-1) < \mu < n$. Cette transformée de Laplace de la dérivée de Riemann-Liouville est bien connue (voir [1, 13]). Mais son applicabilité en pratique est limitée à cause de l'absence d'interprétation physique des valeurs limites des dérivées d'ordre fractionnaire pour $t = 0$.

3.3.2. Dérivée de Gröndwald-Leitnikov :

$$L\{D^\mu f(t)\} = s^\mu F(s) \tag{1.15}$$

3.4. Inconvénients du calcul fractionnaire ^[4] :

Les difficultés liées au calcul fractionnaire peuvent être résumées à :

Les opérateurs sont héréditaires et à noyau singulier (les opérations de convolution prennent en compte toute l'évolution passée du système).

L'approximation numérique est très difficile et demande un très grand stockage.

Le système n'est pas sous la forme abstraite de l'automatique :

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \tag{1.16}$$

4. Systèmes d'ordre fractionnaire ^[2] :

4.1. Définition :

Le comportement d'un système d'ordre fractionnaire est complètement déterminé par leur équation différentielle d'ordre fractionnaire qui est définie par l'expression de Caputo suivante :

$$H(D^{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_m})(y_1, y_2, \dots, y_l) = G(D^{\beta_0 \beta_1 \dots \beta_n})(u_1, u_2, \dots, u_k) \tag{1.17}$$

où :

y_i, u_i : sont des fonctions du temps.

H,G :sont des combinaisons des lois d'opérateur de dérivée fractionnaire.

Pour un système linéaire mono variable invariant dans le temps d'entrée u(t) et de sortie y(t), on peut obtenu l'équation :

$$H(D^{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_m}) y(t) = G(D^{\beta_0 \beta_1 \dots \beta_n}) u(t) \quad (1.18)$$

Qui peut se mettre sous la forme :

$$a_n D^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} D^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots a_0 D^{\alpha_0} y(t) = b_m D^{\beta_m} u(t) + b_{m-1} D^{\beta_{m-1}} u(t) + \dots b_0 D^{\beta_0} u(t) \quad (1.19)$$

où :

$\alpha_n \beta_m$: sont des nombre réelles.

a_n, b_m : sont des constants arbitraires.

4.2. Fonction de transfert :

Par l'application de la TL de l'équation avec des conditions initiales zéro, la représentation d'entrée/sortie de système fractionnaire est :

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_m s^{\beta_m} + b_{m-1} s^{\beta_{m-1}} + \dots b_0 s^{\beta_0}}{a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots a_0 s^{\alpha_0}} \quad (1.20)$$

où :

$$\alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_0 \geq 0, \beta_m \beta_{m-1} \dots \beta_0 \geq 0$$

On peut écrire :

$$G(s) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m s^{\beta_m}}{\sum_{n=0}^N a_n s^{\alpha_n}} \quad (1.21)$$

On peut classifier les systèmes linéaires invariants dans le temps (LTI) suivant l'ordre de l'équation différentielle comme suit :

$$\text{Systèmes LTI} \begin{cases} \text{ordre entier} \\ \text{ordre non entier} \end{cases} \begin{cases} \text{ordre non commensurable} \\ \text{ordre commensurable} \end{cases} \begin{cases} \text{ordre rationnel} \\ \text{ordre non rationnel} \end{cases}$$

4.2.1. Modèle d'état :

On peut obtenir la représentation d'espace d'état d'un système fractionnaire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} D^\alpha x = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (1.22)$$

Où :

u : le vecteur d'entrée, x : le vecteur d'état, y : le vecteur de sortie, A : la matrice d'état, B : la matrice d'entrée, C : la matrice de sortie et D : la matrice de transmission directe.

Alors, dans le cas des systèmes mono variable donné par la fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{\sum_{k=0}^m h_k (s^\alpha)^k}{\sum_{k=0}^n a_k (s^\alpha)^k} \quad (1.23)$$

La représentation d'état, en utilisant la forme canonique de commandabilité, serait donnée par l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} D^\alpha x_1 \\ D^\alpha x_2 \\ \vdots \\ D^\alpha x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

$$y = [b_m b_{m-1} \dots b_0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

De la même manière, on peut obtenir la représentation d'état correspondre à d'autres formes canoniques habituelles dans la théorie du contrôle pour les systèmes linéaires invariants dans le temps, tel que la forme canonique de l'observateur et la forme canonique modal.

Par TL de l'équation et en tenant en compte la définition de Caputo pour la dérivée fractionnaire, on obtient :

$$\{X(s) = (s^\alpha I A)^{-1} B U(s) + (s^\alpha I - A)^{-1} X(0) \quad (1.26)$$

Dans le cas des conditions initiales zéro, la fonction de transfert du système peut être obtenue à partir de la représentation d'état comme suit :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(s^\alpha I - A)^{-1} B + D \quad (1.27)$$

Et la TL⁻¹ est donnée par :

$$X(t) = L^{-1}\{X(s)\} = L^{-1}\{(s^\alpha I A)^{-1} BU(s) + (s^\alpha I - A)^{-1} X(0)\} \quad (1.28)$$

En déduisant :

$$Q(t) = L^{-1}\{(s^\alpha I - A)^{-1}\}; t \geq 0 \quad (1.29)$$

où $Q(t)$: la matrice de transition.

4.2.2. Systèmes d'ordre fractionnaire de base ^[3] :

Bode a proposé une forme idéale de la fonction de transfert de la boucle de commande dans son travail sur la conception de feedbacks amplificateurs ^[15], cette fonction de transfert a la forme :

$$L(s) = \left(\frac{w_c}{s}\right)^\gamma; \gamma \in R \quad (1.30)$$

Où w_c est la fréquence de coupure désirée et le paramètre γ la pente de la caractéristique idéale du gain. En fait, la fonction de transfert $L(s)$ est un dérivateur d'ordre fractionnaire pour $\gamma < 0$ et un intégrateur d'ordre fractionnaire pour $\gamma > 0$.

Les diagrammes de Bode de $L(s)$ ($1 < \gamma < 2$) sont très simple (figure (1.1)). La courbe d'amplitude est une ligne droite de pente constante $-20\gamma \text{ dB / dec}$, et la courbe de phase est un trait horizontal à $-\gamma\pi/2$ rads. La courbe de Nyquist se réduit à une ligne droite passant par l'origine avec $\arg L(jw) = -\gamma\pi/2$ rad.

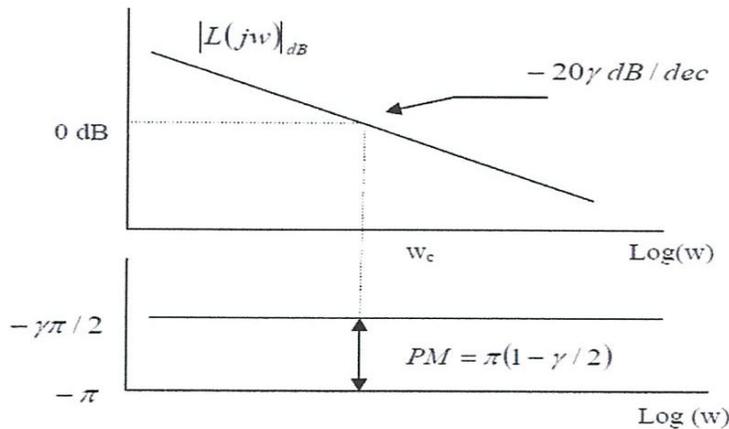


Figure 1.1. Diagramme de Bode d'amplitude et de phase de $L(s)$ pour $1 < \gamma < 2$

Maintenant considérons le système à retour unitaire représenté sur la figure (1.2) avec

$L(s)$ est la fonction de transfert idéal de Bode. Ce choix de $L(s)$ donne un système en boucle fermé avec la propriété souhaitable d'être peu sensible au gain change. Si le gain change la fréquence de coupure w_c changera mais la marge de phase de système $PM = \Pi (1 - \gamma/2)$ rad, reste indépendamment de la valeur du gain (figure (1.1)).

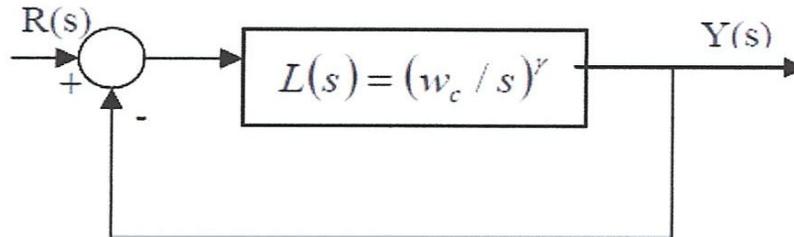


Figure 1.2. Système d'ordre fractionnaire avec la fonction de transfert idéal de Bode $L(s)$.

5. Domaines d'application ^[4] :

L'application des méthodes basées sur les systèmes différentielles fractionnaire est de plus en plus fréquente dans les différents domaines scientifiques. Elles sont utilisées essentiellement comme outils de modélisation en mécanique, automatique, rhéologie...etc.

A titre d'exemple, ces méthodes sont actuellement utilisés pour :

- Modéliser le comportement des matériaux.
- Réaliser des composants électroniques à impédance fractionnaire.
- Commander des machines électronique par des correcteurs fractionnaires.
- Modéliser asymptotiquement une flamme sphérique.

6. Correcteurs d'ordre fractionnaire :

6.1. Définition :

Les correcteurs d'ordre fractionnaire sont des cas généraux des correcteurs classiques qu'ils sont basés sur les calculs fractionnaires.

On utilise ce type des correcteurs pour améliorer les performances de la boucle de commande.

6.1.1. Correcteurs PID d'ordre fractionnaire ^[3] :

Les correcteurs PID d'ordres fractionnaires notés $PI^\lambda D^\mu$ sont proposés par Podlubny. Ces correcteurs sont des correcteurs de trois actions proportionnelles, intégrales et dérivées dont l'ordre de l'intégration μ et de la dérivation λ est d'ordre réel.

La figure (1.3) présente un exemple d'un système commandé par correcteur à action d'ordre fractionnaire avec :

$\mu = 0$: action proportionnelle.

$\mu = -1$: action intégrale.

$\mu = 1$: action dérivée.

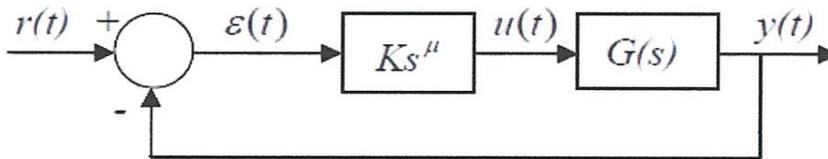


Figure 1.3 : système avec correcteur fractionnaire.

6.2. Correcteur PI fractionnaire PI^λ :

L'équation différentielle qui décrit la dynamique d'un correcteur PI^λ est donnée par :

$$u(t) = ke(t) + T_i D_t^{-\lambda} e(t) \quad (1.31)$$

Par TL on obtient la fonction de transfert :

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = k + \frac{1}{T_i s^\lambda} \quad (1.32)$$

où :

K : gain proportionnel.

T_i : constante de temps de l'action intégral.

λ : ordre d'intégration.

6.2.1. Réponse fréquentielle :

La réponse fréquentielle d'un PI fractionnaire est :

$$C(j\omega) = k + \frac{1}{T_i(j\omega)^\lambda} \quad (1.33)$$

Le module et la phase d'un PI fractionnaire sont donnés par les expressions suivantes :

- **Le module :**

$$|C| = U_p \frac{((1+T_i\omega^\lambda \cos \frac{\lambda\pi}{2})^2 + (T_i \sin \frac{\lambda\pi}{2})^2)^{\frac{1}{2}}}{T_i\omega^\lambda} \quad (1.34)$$

- **La phase :**

$$\arg(C) = \arctan \left[\frac{T_i\omega^\lambda \sin(\frac{\lambda\pi}{2})}{1+T_i\omega^\lambda \cos(\frac{\lambda\pi}{2})} - T_i\lambda \frac{\pi}{\lambda} \right] \quad (1.35)$$

L'avantage d'un correcteur PI fractionnaire c'est qu'il permet d'avoir un système plus robuste aux variations du gain (avoir même dépassement).

6.3. Correcteur PD fractionnaire PD^u :

Un correcteur PD fractionnaire délivre un signal de commande $u(t)$ donné par l'expression suivante :

$$U(t) = Ke(t) + T_d D_t^u e(t) \quad (1.36)$$

Par TL on obtient la fonction de transfert suivante :

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K + T_d S^u \quad (1.37)$$

où :

k : gain proportionnel.

T_d : constante de temps de l'action dérivée.

u : ordre de dérivation.

6.3.1. Réponse fréquentielle :

Le module et la phase d'un PD fractionnaire sont donnés par les expressions suivantes :

- **Le module :**

$$|C| = U_p \left[(1 + T_i w^\lambda \cos u \frac{\pi}{2})^2 + (T_i \sin u \frac{\pi}{2})^2 \right]^{1/2} \quad (1.38)$$

- **La phase :**

$$\arg(C) = \arctan \left(\frac{T_d w^\mu \sin u \frac{\pi}{2}}{1 + T_d w^\mu \cos u \frac{\pi}{2}} \right) \quad (1.39)$$

L'avantage principal de correcteur PD fractionnaire est d'améliorer la stabilité.

6.4. Correcteur PID fractionnaire $PI^\lambda D^\mu$:

La relation entrée/sortie d'un correcteur PID fractionnaire est donnée par l'équation suivante :

$$u(t) = u \cdot e(t) + T_i D_t^{-\lambda} e(t) + T_d D_t^\mu e(t) \quad (1.40)$$

où :

k : gain proportionnel.

T_d : constante de temps de l'action dérivée.

T_i : constante de temps de l'action intégrale.

μ et λ : sont des nombres réels arbitraires.

Par TL on obtient la fonction de transfert suivante :

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = k + T_i s^{-\lambda} + T_d s^\mu \quad (1.41)$$

Suivant l'ordre λ et μ on peut envisager plusieurs cas :

- $0 < \lambda < 1$; $0 < \mu < 1$: on obtient le correcteur PID fractionnaire.
- $\lambda = 1$; $\mu = 1$: on obtient le correcteur PID classique.
- $T_d = 0$: on obtient le correcteur PI fractionnaire.
- $\mu = 0$; $\lambda = 1$: on obtient le correcteur PI classique.
- $T_i = 0$: on obtient un correcteur PD fractionnaire.
- $T_i = 0$; $\mu = 1$: on obtient un correcteur PD classique.

On constate que tous les types de correcteur sont des cas particuliers de correcteur PID fractionnaire.

6.4.1. Réponse fréquentielle :

Le module et la phase d'un correcteur PID fractionnaire sont donnés respectivement par les expressions suivantes :

- **Le module :**

$$|C| = k_p \frac{((1 + T_i w^\lambda \cos \frac{\pi}{2} + T_i T_d w^{\mu+\lambda} \cos(\mu+\lambda) \frac{\pi}{2})^2 + (T_i w^\lambda \sin \frac{\pi}{2} + T_i T_d w^{\mu+\lambda} \sin(\mu+\lambda) \frac{\pi}{2})^2)^{\frac{1}{2}}}{T_i w^\lambda} \quad (1.42)$$

- **La phase :**

$$\text{arc}(C) = \arctan \left(\frac{T_i w^\lambda \sin \frac{\pi}{2} + T_i T_d w^{\mu+\lambda} \sin(\mu+\lambda) \frac{\pi}{2}}{1 + T_i w^\lambda \cos \frac{\pi}{2} + T_i T_d w^{\mu+\lambda} \cos(\mu+\lambda) \frac{\pi}{2}} \right) \quad (1.43)$$

Les avantages du correcteurs PID fractionnaire sont ^[5] :

- Mieux adapter pour les systèmes d'ordre fractionnaire.
- Structure plus générale donc un correcteur plus flexible.

7. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté l'étude et l'analyse des systèmes d'ordre fractionnaire. La dynamique de ces systèmes est décrite par une équation différentielle d'ordre réelle dont la fonction de transfert non standard de type irrationnel.

Aussi on a vu une étude et une analyse des correcteurs PI, PD, PID d'ordre fractionnaire.

Dans le chapitre suivant, on parlera sur l'approche CRONE qui permet de réaliser les correcteurs fractionnaires de façon non héréditaire et présente une grande souplesse pour l'approximation numérique.

CHAPITRE II :
APPROXIMATION
DES SYSTÈMES
D'ORDRE
FRACTIONNAIRE

1. Introduction :

Ce chapitre consiste à introduire l'approximation par approche CRONE (commande robuste d'ordre non entier). Cette approche permet d'avoir un transfert rationnel standard.

Cette approche est basée sur la distribution des pôles et des zéros estimés à partir de l'approximation du diagramme de Bode par des droites en escaliers d'un dérivateur fractionnaire pur présenté dans le plan de Bode.

2. Approche CRONE

A. Oustaloup [6] [7] a montré qu'il existe un lien étroit entre dérivation « ou intégration » non entière et récursivité. Ces travaux ont abouti une réalisation d'un système d'ordre fractionnaire dont la réponse fréquentielle est une fonction rationnelle décrite par des zéros et des pôles.

2.1- La version idéale :

L'approche Crone à phase constante est définie par La transmittance d'ordre non entier de la forme :

$$C_m(p) = c_0 \left(\frac{1 + p/\omega_b}{1 + p/\omega_h} \right)^m \quad (2.1)$$

Dont les diagrammes de Bode sont donnés sur la figure suivante :

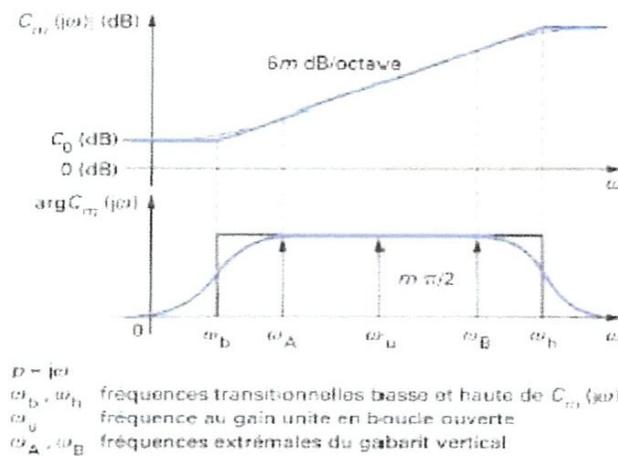


Figure 2.1 : Diagramme de Bode de l'approche CRONE idéal

3- Version réel

La version idéale de l'approche Crone à phase constante est définie par une transmittance d'ordre entier résultant d'une distribution récursive de zéros et de pôles, dont les diagrammes asymptotiques de Bode sont donnés par la figure 2.

La figure 2 présentes le diagramme asymptotique de transmittance (2.2) sur cette figure, les coefficients α et η sont les coefficients récurifs de distribution.

Leur relation via à vis des pulsations de la transmittance (2.2) sont donnés par :

$$C_n(p) = c_0 \prod_{i=1}^N \frac{1+p/\omega_i}{1+p/\omega'_i} \quad (2.2)$$

avec :

$$\frac{\omega'_{i+1}}{\omega'_i} = \frac{\omega_{i+1}}{\omega_i} = \alpha\eta > 1 \quad (2.3)$$

$$\frac{\omega_i}{\omega'_i} = \alpha \text{ et } \frac{\omega'_{i+1}}{\omega_i} = \eta \quad (2.4)$$

$$\alpha\eta = \left(\frac{\omega_N}{\omega_b}\right)^{1/N} \quad (2.5)$$

$$\alpha = (\alpha\eta)^m \text{ et } \eta = (\alpha\eta)^{1-m} \quad (2.6)$$

$$\omega'_i = \omega_b \eta^{1/2} \text{ et } \omega_N = \omega_b \eta^{-1/2} \quad (2.7)$$

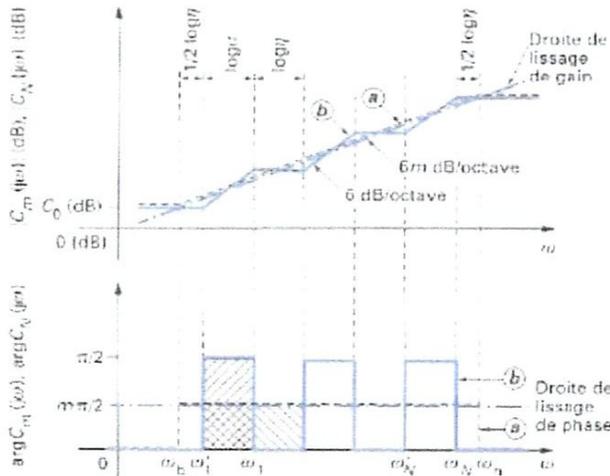


Figure 2.2 : Diagrammes asymptotiques de Bode du régulateur CRONE idéal (a) et réel (b) pour $m \in [0,1]$

CHAPITRE 2 Approximation des systèmes d'ordre fractionnaire

La synthèse paramétrique s'effectue généralement en se fixant une valeur de N qui assure une valeur de α et η de l'ordre de 5, ce choix pratique qu'il convient de considérer pour des raisons de simplicité peut néanmoins être affiné par une réduction d'ordre optimale fondée sur l'énergie ou les moments de la réponse impulsionnelle.

En ce qui concerne les expressions des facteurs récurrents α et η donné par (2.6), leur détermination exige celle de m en fonction de α et η .

Deux possibilités s'offrent pour déterminer la relation qui lie l'ordre m à ces coefficients récurrents.

3. Droite de lissage de gain :

Le lissage des marches de l'escalier qui constitue le diagramme asymptotique de gain $C_n(s)$ entre ω_b et ω_h , peut être matérialisé par une droite appelée droite de lissage de gain de pente inférieure à 6dB/oct, soit 6α dB/oct avec α compris entre 0 et 1.

Cette droite supporte l'asymptote de gain $C(s)$ entre ω_b et ω_h . En désignant par Δ la hauteur des marches d'escalier, les pentes de la droite de lissage de gain et d'une contre marche (pentes de segments AB et $A'B'$) sont respectivement données par les équations :

$$6\alpha \text{ dB/oct} = \frac{\Delta \text{dB}}{\log m + \log \eta} \quad (2.8)$$

et :

$$6 \text{ dB} = \frac{\Delta}{\log m} \text{ dB} \quad (2.9)$$

Desquelles on tire, en effectuant leur rapport, l'expression de l'ordre non entier α en fonction des facteurs m et η :

$$n = \frac{\log m}{\log(m\eta)} \quad (2.10)$$

4. Droite de lissage phase :

Le lissage de créneaux qui constitue le diagramme asymptotique de phase de $C_N(s)$ entre ω_b et ω_h , peut être matérialisé par une droite appelée droite de lissage de phase d'ordonnée inférieure à $\pi/2$, soit $\alpha\pi/2$ avec α compris entre 0 et 1. Cette droite supporte l'asymptote de phase de $C(s)$ entre ω_b et ω_h . En désignant par S l'aire des surfaces

CHAPITRE 2 Approximation des systèmes d'ordre fractionnaire

hachurées, l'ordonnée de la droite de lissage de phase et la hauteur d'un créneau s'exprime respectivement par les équations :

$$n \frac{\pi}{2} = \frac{s}{\log m + \log \eta} \quad (2.11)$$

Et :

$$\frac{\pi}{2} = \frac{s}{\log m} \quad (2.12)$$

Dont se déduit, en effectuant leur rapport, l'expression de m obtenue à partir du gain, soit :

$$n = \frac{\log m}{\log(m\eta)} \quad (2.13)$$

En déduit alors le rapport entre les fréquences transitionnelles ω_h et ω_b de $D(s)$, soit :

$$\frac{\omega_h}{\omega_b} = (\alpha\eta)^{2N+1} \quad (2.14)$$

Par ailleurs le produit des facteurs récurrents α et η :

$$\alpha\eta = \left(\frac{\omega_h}{\omega_b}\right)^{1/(2N+1)} \quad (2.15)$$

On peut alors déterminer le facteur récurrent α en fonction du produit $\alpha\eta$:

$$\alpha = (\alpha\eta)^n \quad (2.16)$$

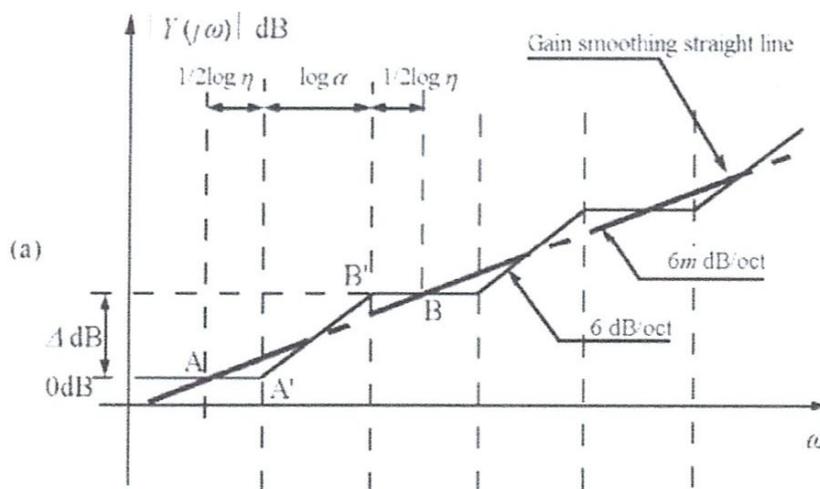


Figure 2.3 : Droite de lissage de gain par l'approche CRONE.

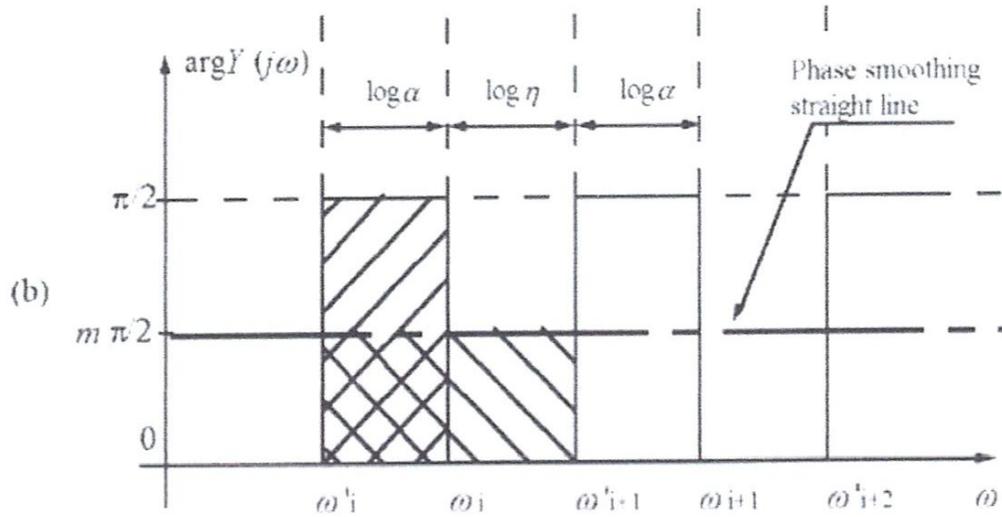
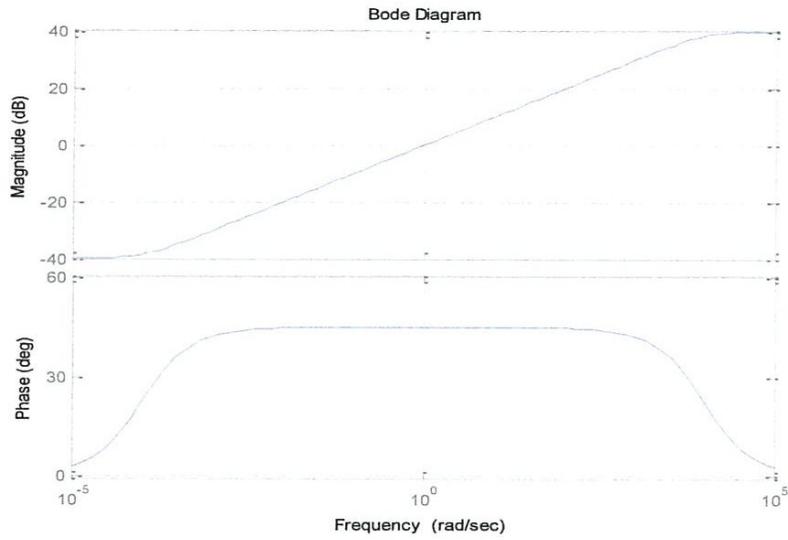


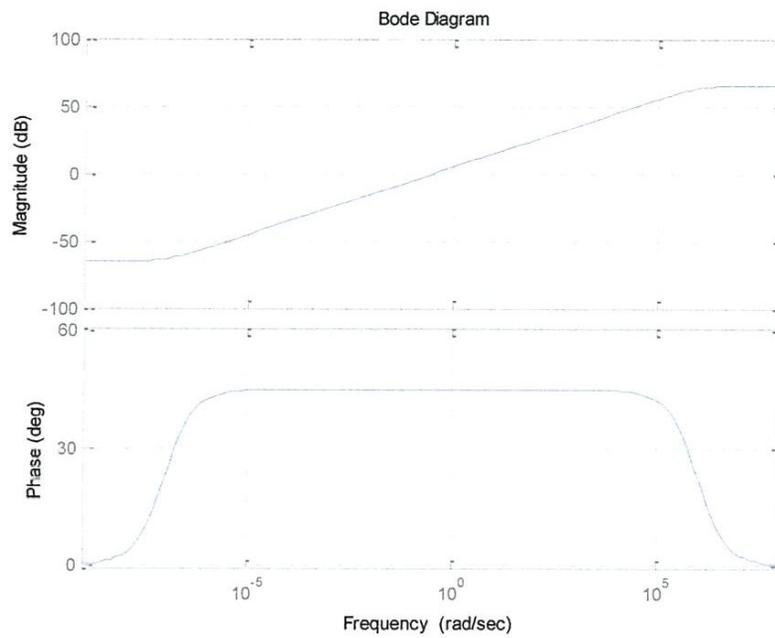
Figure 2.4 : Droite de lissage de phase par l'approche CRONE.

5. SIMULATION :

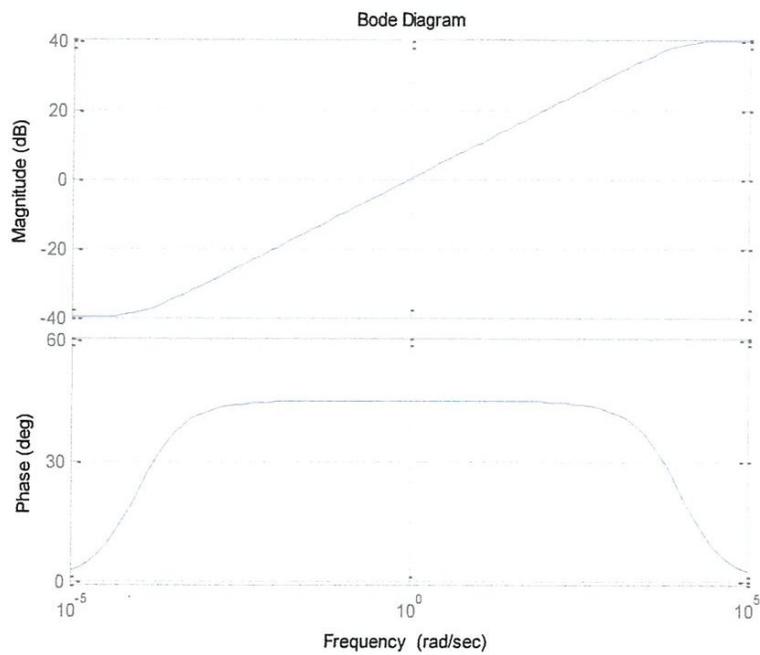
5.1. Simulation d'un dérivateur d'ordre fractionnaire :



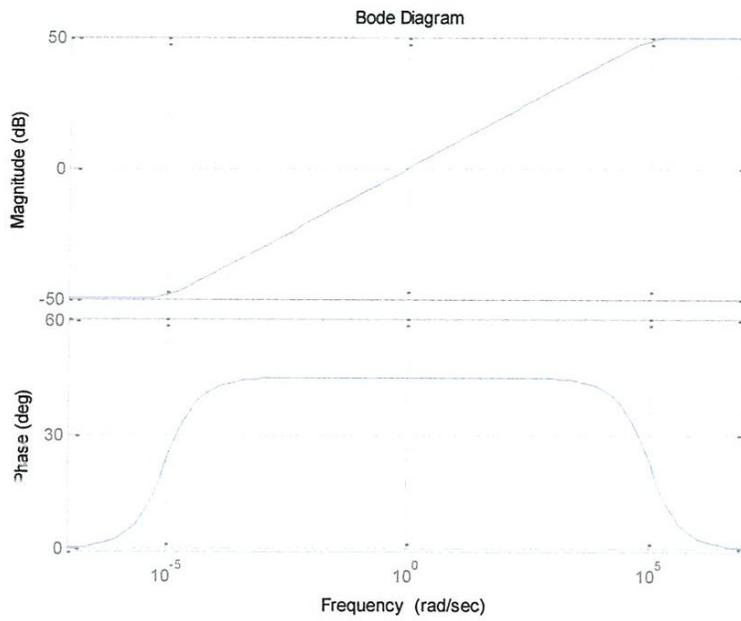
wb=0.001 ;wh=1000 ;N=50



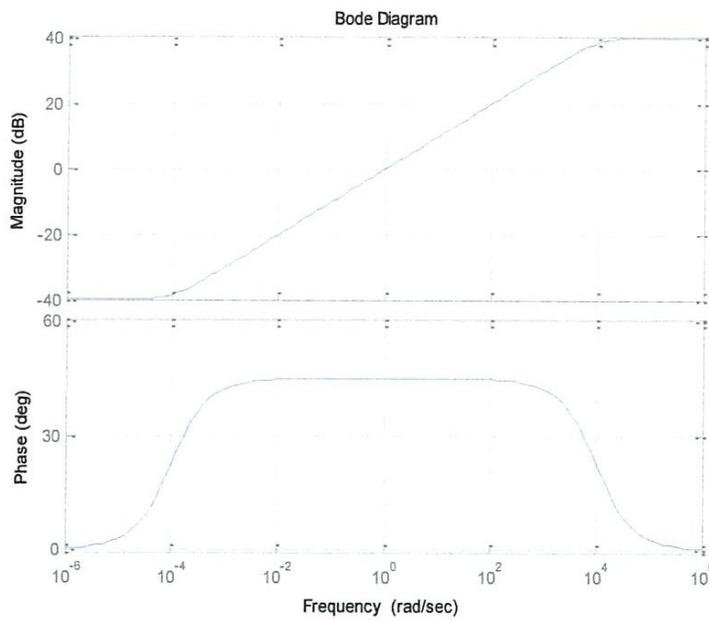
$w_b=0.000001 ; w_b=100000 ; N=40$



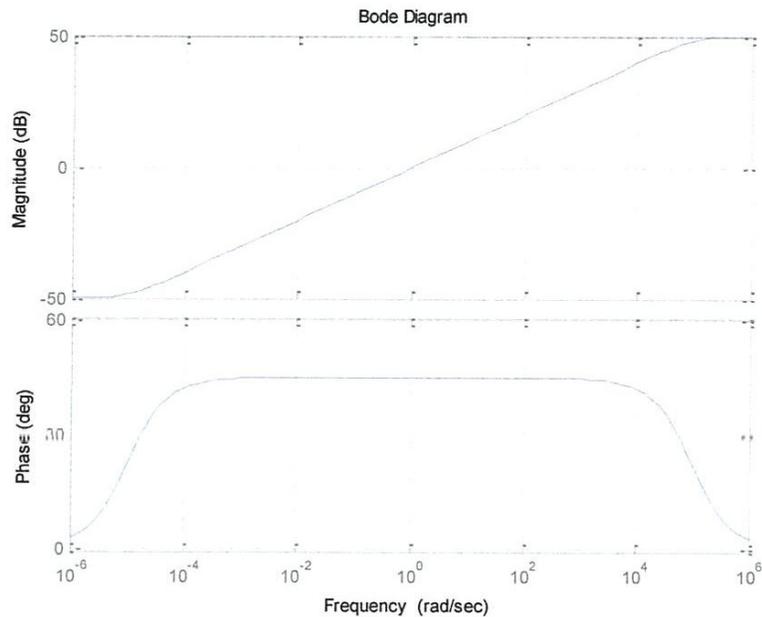
$w_b=0.0001 ; w_h=1000 ; N=10$



$w_b=0.0001 ; w_h=10000 ; N=20$



$w_b=0.001 ; w_h=1000 ; N=30$



$w_b=0.0001 ; w_h=10000 ; N=60$

Figure 2.5 : Simulation d'un dérivateur d'ordre $\frac{1}{2}$.

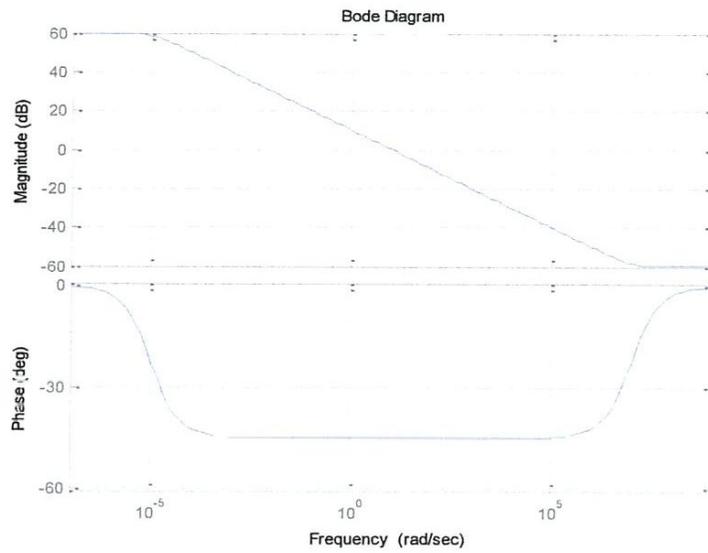
La figure 2.5 présente les résultats de simulation d'un dérivateur fractionnaire d'ordre $\frac{1}{2}$. Cette figure montre qu'un bon choix des paramètres du modèle Oustaloup discrétisé garantit une bonne approximation dans une bande qui dépend des pulsations du système.

On constate que pour $k=1 ; N=60 ; w_b=0.0001 ; w_h=10000$ on obtient une meilleure approximation du dérivateur fractionnaire d'ordre $\frac{1}{2}$.

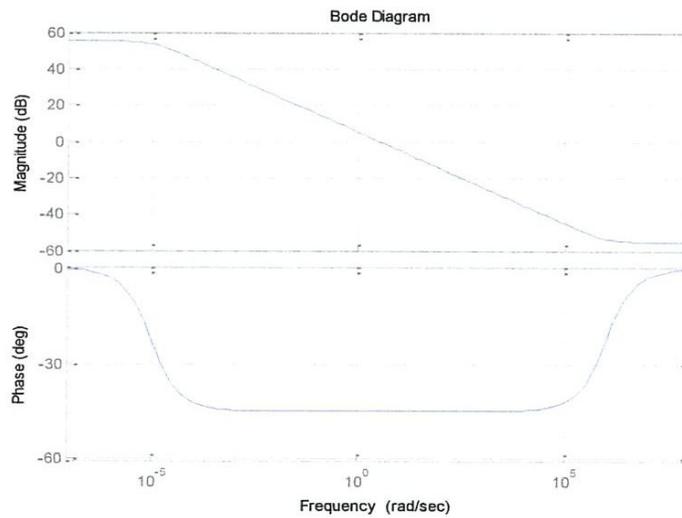
5.2. Simulation d'un intégrateur d'ordre fractionnaire :

La figure 2.6 présente l'approximation numérique d'un intégrateur fractionnaire d'ordre $\frac{1}{2}$. D'après les résultats de la simulation démontrée il suffit de bien choisir et calculer les paramètres de l'approximation numérique pour avoir une bonne approximation.

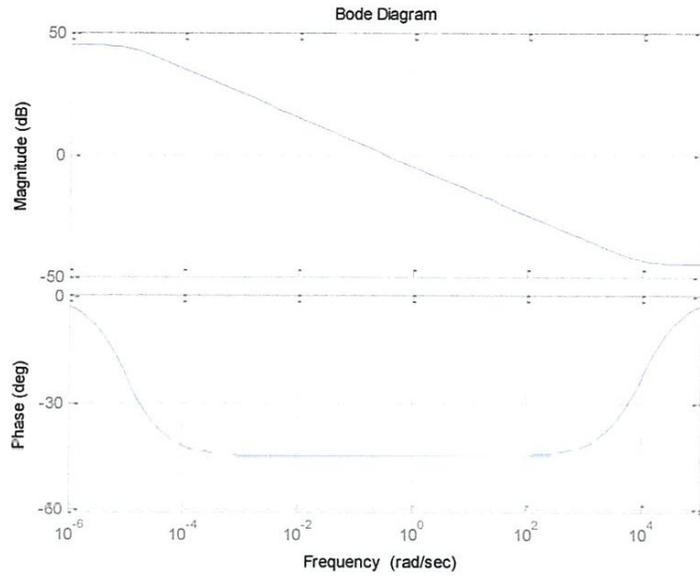
On constate que pour $k=1 ; w_b=0.000001 ; w_h=1000000 ; N=50$, on obtient une meilleure approximation « pente de -10 dB et une phase de -45° .



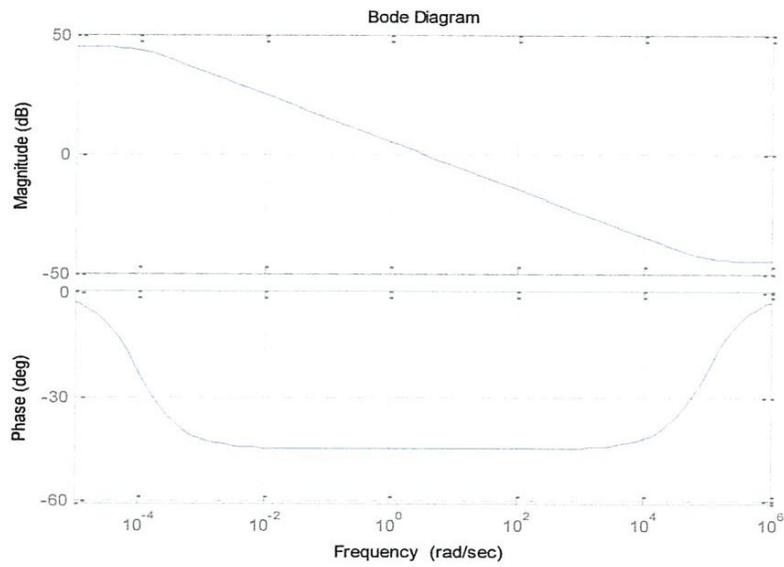
$w_b=0.0001$; $w_h=1000000$; $N=20$



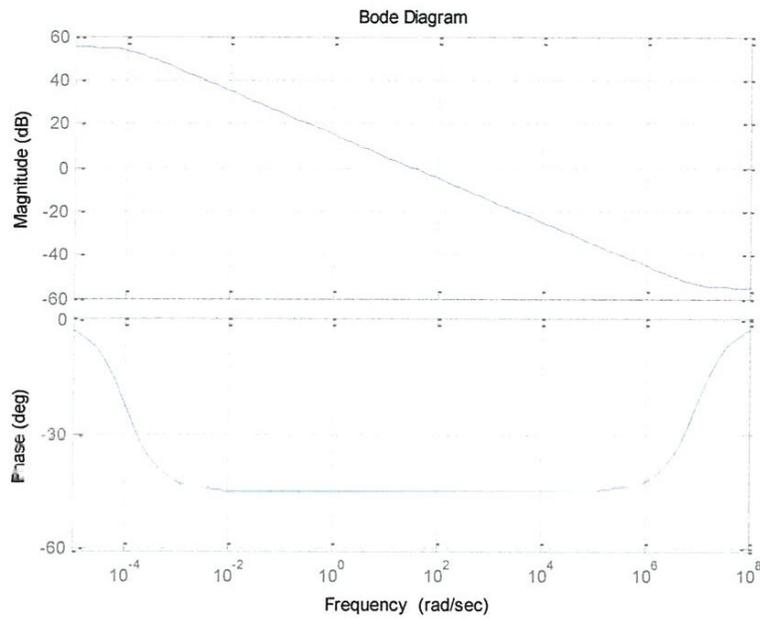
$w_b=0.0001$; $w_h=100000$; $N=30$



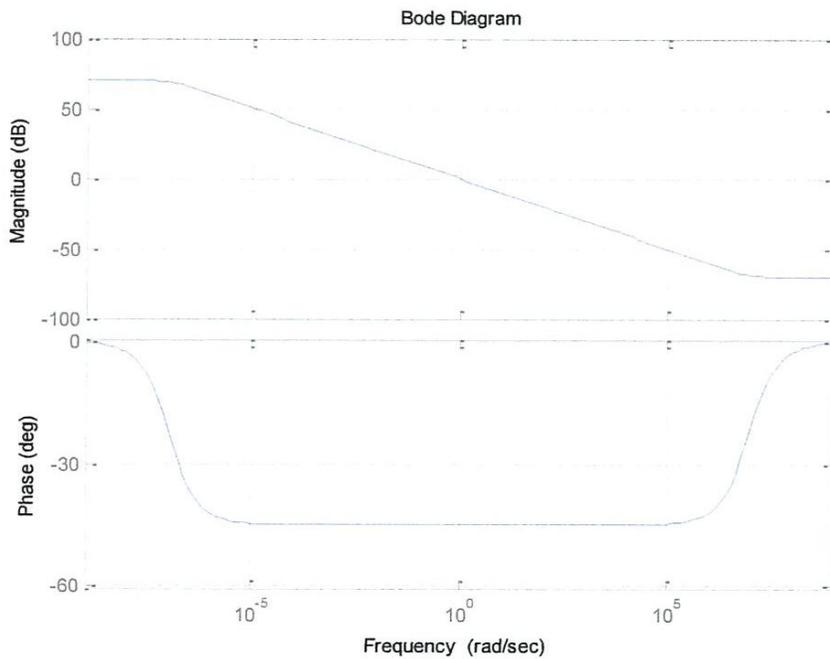
$w_b=0.0001 ; w_h=1000 ; N=40$



$w_b=0.001 ; w_h=10000 ; N=45$



$w_b=0.001 ; w_h=1000000 ; N=10$



$w_b=0.000001 ; w_h=1000000 ; N=50$

Figure 2.6 : simulation d'un intégrateur d'ordre 1/2.

6. Simulation des correcteurs fractionnaire approchés par CRONE :

6.1. Simulation de PI fractionnaire :

La figure 2.7 présente l'approximation d'un PI fractionnaire d'ordre $\frac{1}{2}$ approché par CRONE. La figure 2.8 présente l'approximation d'un PI fractionnaire d'ordre r pour $r \in]0,1]$

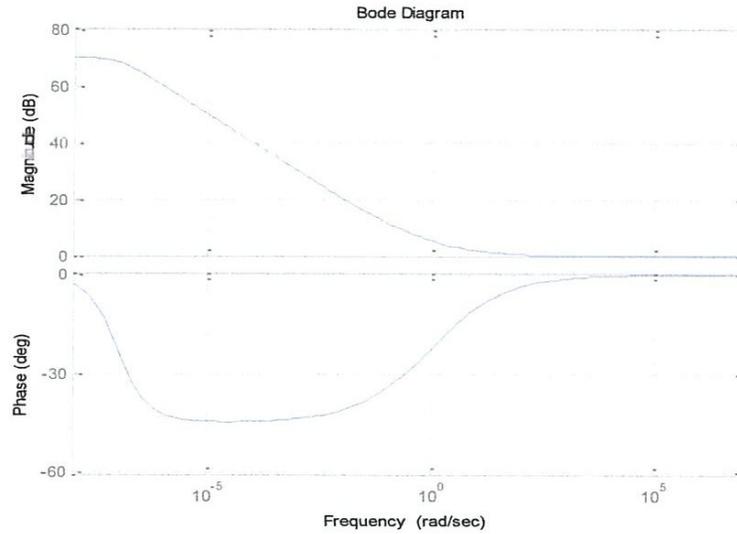


Figure 2.7 : .Diagrame de Bode d'un régulateur $PI^{0.5}$ fractionnaire.

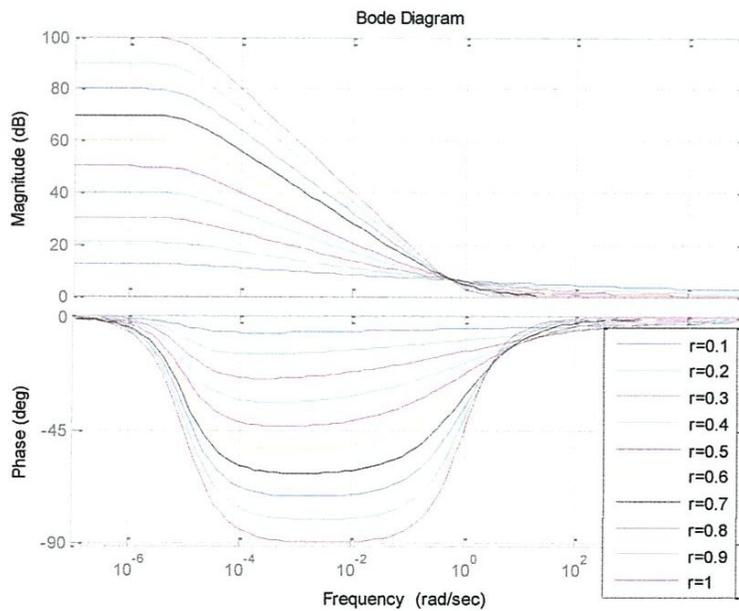


Figure 2.8 : Diagrame de Bode d'un régulateur PI fractionnaire pour $r \in]0,1]$

6.2. Simulation du PD fractionnaire :

La figure 2.9 présente l'approximation d'un PD fractionnaire d'ordre $\frac{1}{2}$ approché par CRONE. La figure 2.10 présente l'approximation d'un PD fractionnaire d'ordre r pour $r \in]0,1]$

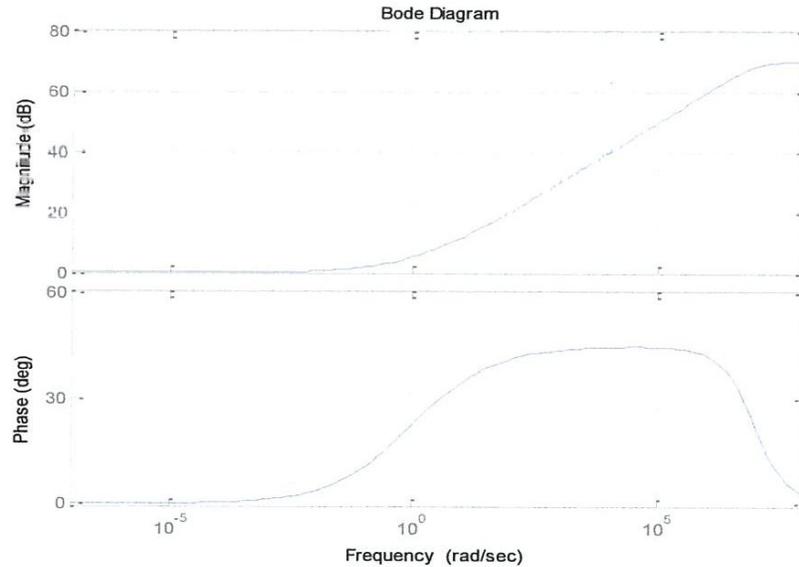


Figure 2.9 : diagramme de Bode d'un régulateur $PD^{0.5}$ fractionnaire.

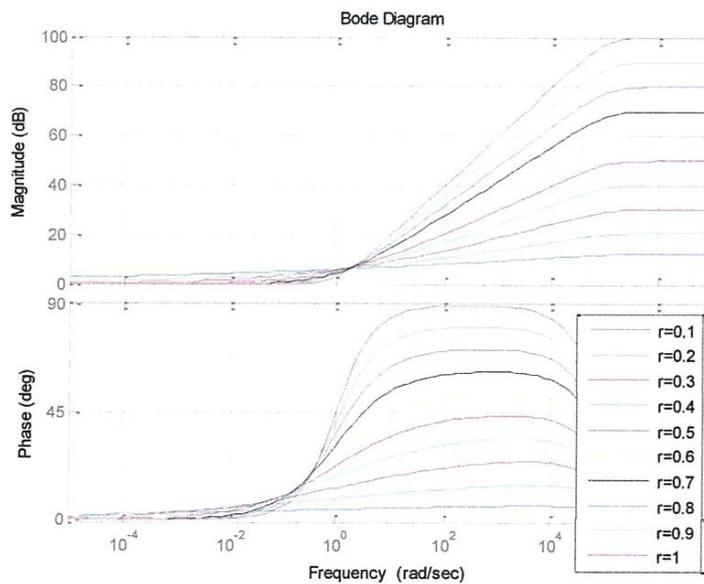


Figure 2.10 : Diagramme de Bode d'un régulateur PD fractionnaire pour $r \in]0,1]$

6.3. Simulation du PID fractionnaire :

La figure 2.11 présente l'approximation d'un PID fractionnaire approché par CRONE.

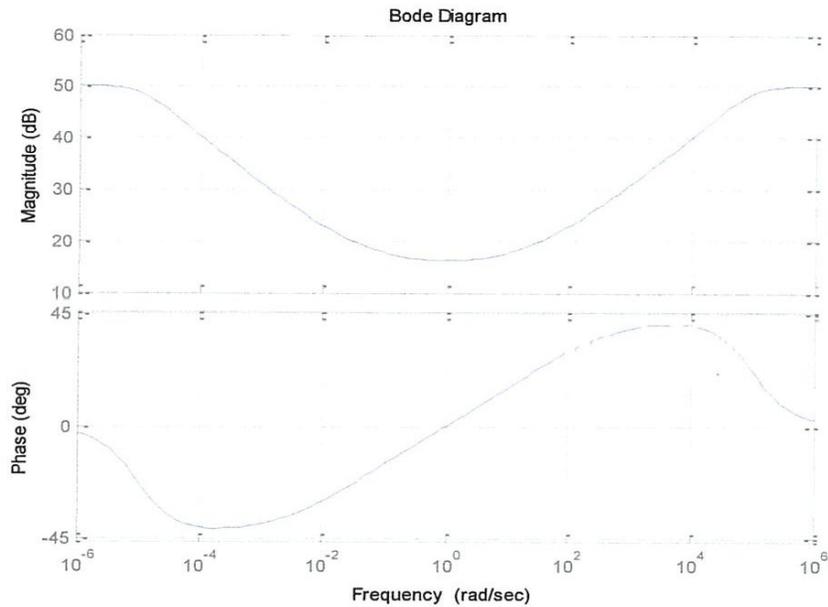


Figure 2.11 : .Diagrame de Bode d'un régulateur PID fractionnaire.

7. Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons présenté la théorie de l'approche CRONE qui permet de réaliser les opérateurs fractionnaires de façon non héréditaire. Les résultats de la simulation montrent qu'un bon choix des paramètres de l'approche CRONE donne une bonne approximation. Aussi on a vu la simulation des correcteurs d'ordre fractionnaire approchés par CRONE.

CHAPITRE III :
CONCEPTION DES
CORRECTEURS À
BASE DE MODÈLE
DE RÉFÉRENCE

Conception des Contrôleurs à Base de Model de Reference

1. Introduction :

Les systèmes peuvent présenter une précision insuffisante, de l'instabilité, un temps de réponse trop lent, un dépassement trop important, des vibrations, une grande sensibilité aux perturbations. Pour cela, il est nécessaire de corriger leurs comportements à l'aide de l'asservissement. Le système asservi doit comporter un réseau correcteur (contrôleur) dont l'objectif est de respecter les performances du système asservi. Le rôle de l'ingénieur consiste précisément à dimensionner un correcteur ayant une fonction de transfert telle que sa combinaison avec celle du système à asservir assure les performances attendues. Il y'a deux approches essentielles à ce problème.

Dans ce chapitre on va étudier comment synthétiser un correcteur (classique et fractionnaire) à base de modèle de référence.

2. Correcteurs classiques ^[14] :

2.1. Correcteur PI :

Pour ne pas altérer la stabilité réglée par l'action proportionnelle (gain K), le correcteur doit donc procurer une augmentation du gain aux "basses fréquences" uniquement.

Le plus simple serait d'introduire un intégrateur pur qui donnerait un gain infini aux "basses fréquences" et de ce fait entraînerait une erreur statique nulle. Malheureusement, il aurait pour effet immédiat de déstabiliser le système en retirant 90° de phase à toutes les fréquences.

On préfère utiliser un correcteur qui présente les mêmes caractéristiques aux basses fréquences" mais sans ajouter de phase aux "hautes fréquences".

Ce correcteur est défini par la fonction de transfert suivante :

$$C(p) = k_p + \frac{1}{T_i s} \quad (3.1)$$

Avec :

k_p : le gain proportionnel.

T_i : constante de temps de l'action intégral.

Conception des Contrôleurs à Base de Model de Reference

2.2. Correcteur PD :

On modifie avec ce type de correction le comportement du système aux alentours de la pulsation de coupure à 0 dB (w_u) de la FTBO.

Ce correcteur est défini par la fonction de transfert suivante :

$$C(p) = K + T_d s \quad (3.2)$$

Avec :K est le gain proportionnel et T_d est la constante de temps de l'action dérivée.

2.3. Correcteur PID :

Le correcteur "dérivé" et le correcteur "intégral" concernent des domaines de fréquences très différents (basses fréquences pour l'intégrale et haute fréquence pour le dérivé), il est parfois judicieux d'associer les deux correcteurs en un seul. On obtient alors un correcteur **PID** qui améliore les performances globales.

Ce correcteur est défini par la fonction de transfert suivante :

$$C(p) = K \left(1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p \right) \quad (3.3)$$

Avec :

K : le gain proportionnel.

T_i : constante de temps de l'action intégrale.

T_d : constante de temps de l'action dérivée.

2.4. Avantages et inconvénients des correcteurs classiques :

Le tableau 3.1 résume les avantages et les inconvénients de ces correcteurs classiques

Tableau 3.1 : avantages et inconvénients des correcteurs classiques.

Correcteurs	Avantages	Inconvénients
P	Simplicité Meilleure précision	Risque d'instabilité si $K_c \gg 1$
PI	Simplicité Erreur statique nulle	Système parfois lent en BF
PD	Améliore stabilité et rapidité	Sensibilité du système aux bruits
PID	Très utilisé en industrie Action PI + PD	Réglage des paramètres plus difficile

3. Synthèse des correcteurs ^{[11] [12] [13]} :

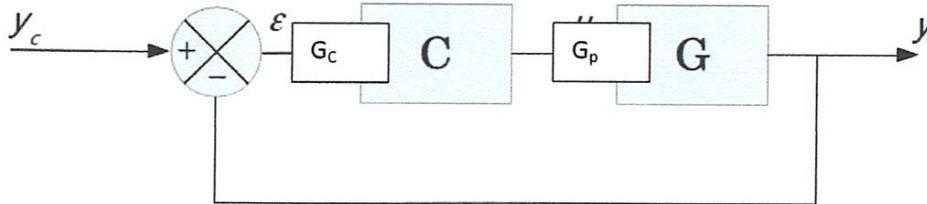


Figure 3.1 : Système de commande en boucle fermée à retour unitaire.

Considérons la structure de commande en boucle fermée à retour unitaire donné par la figure 3.7 où G_c est la fonction de transfert du correcteur et G_p est la fonction de transfert du système à commander.

La fonction de transfert en boucle fermée noté G_{BF} est donnée par:

$$G_{BF} = \frac{G_c G_p}{1 + G_c G_p} \quad (3.4)$$

D'après cette fonction, on obtient la fonction de transfert du correcteur suivante :

$$G_c = \frac{1}{G_p} \frac{G_{BF}}{1 - G_{BF}} \quad (3.5)$$

Donc il est possible de déterminer le correcteur qui peut imposer la réponse désiré donnée par G_{BF} , on l'appelle parfois c'est le modèle de référence.

3.1. Synthèse des correcteurs classiques :

Dans ce cas, nous considérons que la réponse désirée est sous la forme d'une action intégral,

$$\frac{1}{\tau s}$$

3.1.1. Système d'un système du premier ordre :

Si le système à commander est un sous la forme d'une système du 1^{er} ordre :

$$G_p = \frac{k_p}{\tau_p s + 1} \quad (3.6)$$

Où k_p est le gain statique du système et τ_p est sa constante du temps. D'où la fonction de transfert du correcteur est de la forme :

$$G_c = \frac{1}{\frac{k_p}{\tau_p s + 1}} \frac{1}{\tau_c s} = \frac{\tau_p s + 1}{k_p \tau_c s} = \frac{\tau_p}{k_p \tau_c} \left(1 + \frac{1}{\tau_p s} \right) \quad (3.7)$$

Qui sous la forme d'un correcteur PI, avec les paramètres suivants :

$$k_c = \frac{\tau_p}{k_p \tau_p} \text{ et } T_i = \tau_p \quad (3.8)$$

avec :

k_c : Le gain proportionnel.

T_i : Constante du temps de l'action intégrale.

3.1.2. Système du deuxième ordre :

Si nous considérons que la fonction du transfert d'un système de commande est sous la forme d'un système de 2^{ème} ordre de constantes de temps τ_1 et τ_2 : suivante

$$G_p = \frac{k_p}{\tau_1 s + 1} \frac{1}{\tau_2 s + 1} \quad (3.9)$$

D'où, nous obtenons la fonction de transfert du correcteur :

$$G_c = \frac{\tau_1 s + 1}{k_p} (\tau_2 + 1) \left(\frac{1}{\tau_c s} \right) = \frac{\tau_1 \tau_2 s^2 + (\tau_1 + \tau_2) s + 1}{k_p \tau_c s} \quad (3.10)$$

Qui est sous la forme d'un correcteur PID dont les paramètres sont :

$$k_c = \frac{\tau_1 + \tau_2}{k_p \tau_c}, T_i = \tau_1 + \tau_2 \text{ et } T_d = \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 + \tau_2} \quad (3.11)$$

Avec :

k_c : Le gain proportionnel.

T_i : Constante du temps de l'action intégrale.

T_d : Constante du temps de l'action dérivée.

3.1.3. Systèmes avec temps de retard :

Si nous considérons que la fonction du transfert d'un système de commande est sous la forme d'un système de 1^{er} ordre avec retard suivant :

$$G_p = \frac{k_p e^{-L_p s}}{\tau_p s + 1} \quad (3.12)$$

D'où on obtient la fonction de transfert du correcteur :

$$G_c = \frac{\tau_p s + 1}{k_p e^{-L_p s} \tau_c s} = \frac{\tau_p}{k_p \tau_c} \left(1 + \frac{1}{\tau_p s} \right) e^{-L_p s} \quad (3.13)$$

Cela ne correspond pas à une stratégie de correcteur (à cause du terme exponentiel). En fait, ce terme exponentielle montre une exigence pour la prédication de ce qui va se passer, si cela ne peut être réalisé physiquement dans une stratégie de correcteur.

Si nous voulions vraiment le faire à travers, nous pourrions approcher le terme exponentiel avec un développement limité de **Taylor** :

$$e^{-L_p s} = 1 + L_p s \quad (3.14)$$

Alors :

$$G_c = \frac{\tau_p}{k_p \tau_c} \left(1 + \frac{1}{\tau_p s} \right) (1 + L_p s) = \frac{\tau_p + L_p}{k_p \tau_c} \left(1 + \frac{1}{\tau_p + L_p} \frac{1}{s} + \frac{\tau_p L_p}{\tau_p + L_p} s \right) \quad (3.15)$$

Et c'est un correcteur PI, avec les paramètres suivants :

$$k_c = \frac{\tau_p + L_p}{k_p \tau_c}, T_i = \tau_p + L_p \text{ et } T_d = \frac{\tau_p L_p}{\tau_p + L_p} \quad (3.16)$$

3.2. Synthèse du correcteur d'ordre fractionnaire à base de modèle de référence ^[10] :

Un grand nombre de processus industriel peut être approximée par l'une des fonctions de transfert suivantes ^[9] :

- **1^{ère} cas** : Système d'un intégrateur avec temps de retard :

$$G_m(s) = \frac{k_m}{s} e^{-L_m s} \quad (3.17)$$

- **2^{ème} cas** : Système du 1^{er} ordre avec temps de retard :

Conception des Contrôleurs à Base de Model de Reference

$$G_m(s) = \frac{k_m}{\tau s + 1} e^{-L_m s} \quad (3.18)$$

- **3^{ème} cas** : Système dU 1^{er} ordre et un intégrateur avec temps de retard :

$$G_m(s) = \frac{k_m}{(\tau s + 1)s} e^{-L_m s} \quad (3.19)$$

- **4^{ème} cas** : Système de 2^{ème} ordre avec temps de retard :

$$G_m(s) = \frac{k_m}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} e^{-L_m s} \quad (3.20)$$

où s est la variable de Laplace; L_m est temps de retard ; τ_1, τ_2 et τ_3 et sont les constantes de temps, et est k_m gain statique.

Si nous définissons G_m être le modèle de l'approximation de G alors, la réponse souhaitée de la fonction de transfert en boucle ouverte est définie par l'intégrateur fractionnaire avec retard :

$$C(s)G_m(s) = \frac{K}{s^\alpha} e^{-L_m s} \quad (3.21)$$

On note que le modèle de fonction de transfert est seulement utilisé pour concevoir le correcteur fractionnaire.

Alors la fonction de transfert du correcteur est :

$$C(s) = \frac{K}{G_m(s)} \frac{1}{s^\alpha} e^{-L_m s} \quad (3.22)$$

On obtient alors les fonctions de transfert des correcteurs des systèmes précédents, suivantes :

$$- \text{1^{ère} cas} : C(s) = K_c \frac{1}{s^{\alpha-1}} \quad (3.23)$$

$$- \text{2^{ème} cas} : C(s) = K_c \frac{1+Ts}{s^\alpha} = K_c \left(\frac{1}{s^\alpha} + Ts^{\alpha-1} \right) \quad (3.24)$$

Avec : $T=\tau$.

$$• \text{3^{ème} cas} : C(s) = K_c \frac{1+Ts}{s^{\alpha-1}} \quad (3.25)$$

Avec : $T=\tau$.

Conception des Contrôleurs à Base de Model de Reference

- 4^{ème} cas :
$$C(s) = K_c \frac{1+(T_1+T_2)s+(T_1T_2)s^2}{s^\alpha} \quad (3.26)$$

Avec : $T_1=\tau_1$ et $T_2=\tau_2$.

Il semble que les correcteurs précédents sont des cas particuliers du correcteur PID fractionnaire avec : $K_c = K/K_m$ est le gain statique.

3.2.1. Réglage des paramètres :

Maintenant il nous reste que la détermination des paramètres α et K_c . Ces paramètres sont ajustés pour remplir les spécifications désirées données par le cahier du charge.

Dans le domaine fréquentiel, les spécifications désirées, généralement sont la marge de phase et la marge de gain (A_m et φ_m) ou bien la marge de phase et la pulsation de coupure (φ_m et ω_g). Et ils sont définis par les équations suivantes :

$$\arg(C(j\omega_p)G_m(j\omega_p)) = \pi \quad (3.27)$$

$$A_m = \frac{1}{|C(j\omega_p)G_m(j\omega_p)|} \quad (3.28)$$

$$|C(j\omega_p)G_m(j\omega_p)| = 1 \quad (3.29)$$

$$\varphi_m = \pi + \angle C(j\omega_g)G_m(j\omega_g) \quad (3.30)$$

Avec : ω_g et ω_p sont les pulsations de gain et de phase respectivement.

Si les paramètres du model désiré sont donnés par les marges de gain et de phase, les relations des marge de gain et marge de phase s'écrivent :

$$|C(j\omega)G_m(j\omega)| = \frac{K_c K_m}{\omega^\alpha} \quad (3.31)$$

$$\varphi = -L_m - \alpha \frac{\pi}{2} \quad (3.32)$$

D'après les équations (de 3.27 au 3.32), on détermine que α est la solution de l'équation suivante :

$$A_m = \left(\frac{\pi - \alpha \frac{\pi}{2}}{\pi - \varphi_m - \alpha \frac{\pi}{2}} \right)^\alpha \quad (3.33)$$

Conception des Contrôleurs à Base de Model de Reference

Le gain statique est donné par l'équation :

$$K_c = \frac{\omega_g^\alpha}{K_m} \quad (3.34)$$

Si les paramètres désirés sont donnés par $(\varphi_m \text{ et } \omega_g)$, l'ordre α et le gain statique K_c sont déterminer facilement des équations (3.29) par :

$$\alpha = \frac{\pi}{2} (\pi - \varphi_m - L_m \omega_g) \quad (3.35)$$

$$K_c = \frac{\omega_g^\alpha}{K_m} \quad (3.36)$$

4. Applications :

4.1. Modèle de référence sans retard :

On considère la fonction de transfert suivante :

$$G_p(s) = \frac{K_0}{s(\tau s + 1)} = \frac{0.25}{s(s+1)} \quad (3.37)$$

Le système en boucle fermée doit garantir les spécifications suivantes :

- la marge de phase $MP=48.5^\circ$
- fréquence du gain unité $\omega_u = 1.00 \text{ rad/s}$

Pour réaliser une MP constante de 48.5° avec une fréquence du gain unité $\omega_u = 1.00 \text{ rad/s}$ dans un intervalle de fréquence autour de ω_u donné par $[\omega_b, \omega_h] = [0.1\omega_u, 10\omega_u] = [0.1 \text{ rad/s}, 10 \text{ rad/s}]$, la fonction de transfert en boucle ouverte $G(s) = C(s)G_p(s)$ du système asservi doit être égale à la fonction de transfert idéal de Bode comme suit :

$$G(s) = C(s)G_p(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_u}\right)^\alpha}$$

où α est un nombre réel tel que $1 < \alpha < 2$. Pour avoir une $MP = 48.5^\circ$ on doit avoir $MP = \pi + \text{phase}(C(s)G_p(s))_{w=\omega_u} = 48.5^\circ$ Alors $48.5^\circ = 180 - \alpha 90^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{263}{180} \approx 1.46$.

On décompose $G_p(s)$ en $G_{p1}(s) = \frac{1}{s}$ et $G_{p2}(s) = \frac{1}{s+1}$ tel que $G_{p1}(s)$ contienne Les pôles et les zéros qui se trouvent à l'extérieur de l'intervalle de fréquence $[\omega_b, \omega_h]$ et $G_{p2}(s)$ contienne le reste des pôles et des zéros. Donc la fonction de transfert en boucle Ouverte est :

$$G(s) = G_{p1}(s)G_{p2}(s)C(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_u}\right)^\alpha}. \text{ En mettant } G_{p2}(s)C(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_u}\right)^m}$$

Conception des Contrôleurs à Base de Model de Reference

Tel que $0 < m < 1$, on obtient : $\frac{1}{s} \frac{1}{(\frac{s}{w_u})^m} = \frac{1}{(\frac{s}{w_u})^\alpha} \Rightarrow (1+m) = \alpha \Rightarrow m = 0.46$

Alors : $C_S(s) = G_{p2}(s)$

C'est un intégrateur d'ordre fractionnaire d'ordre $m=0,46$. Pour : $U_1 = \frac{1}{w_u^m}$

$$\frac{1}{(\frac{s}{w_u})^m} \approx U_1 \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \approx C(s) \frac{1}{(s+1)}$$

$$C(s) = \frac{(s+1)}{(\frac{s}{w_u})^m} \approx (s+1)k_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)}$$

$$\approx k_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^{n_1} \left(1 + \frac{s}{p_i}\right) \prod_{i=n_1+2}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)}$$

Avec : $P_{n_1+1} \approx -1$, alors :

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)} \frac{k_D \prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^{n_1} \left(1 + \frac{s}{p_i}\right) \prod_{i=n_1+2}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \approx \frac{1}{(\frac{s}{w_u})^\alpha}$$

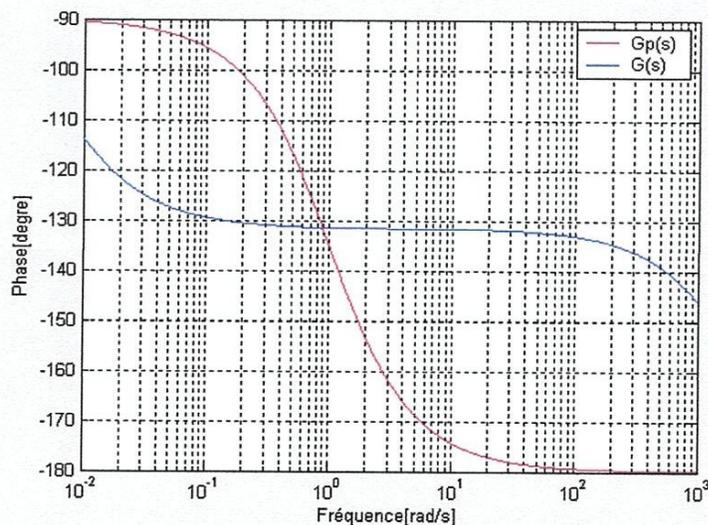


Figure 3.2 : Phase de la fonction de transfert du processus $G_p(s)$ et de la fonction de transfert en boucle ouverte $G(s)$.

Conception des Contrôleurs à Base de Model de Reference

On remarque que dans la plage de fréquence $[0.1w_u, 10w_u]$, la phase de $G(s)$ la fonction de transfert en boucle ouverte est de -131.5° ce qui correspond à une $MP = 48.5^\circ$, et la fréquence du gain unité est $w_u=1.00$ rad/sec. Figure (3.10) représente la réponse indicielle du système en boucle fermée.

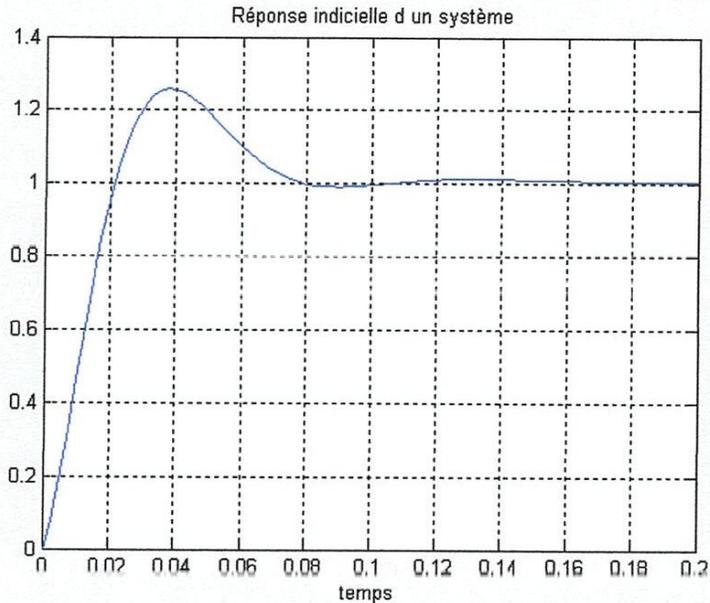


Figure 3.3 : La réponse indicielle du système en boucle fermée.

4.2. Modèle de référence avec retard :

Considérons le système d'ordre 5 suivant :

$$G(s) = \frac{1}{(1+s)^5} \quad (3.38)$$

Les modèles approchés du 1^{er} ordre et de second ordre sont respectivement :

$$G_{m1}(s) = \frac{e^{-2.93s}}{1+2.73s} \quad (3.39)$$

et :

$$G_{m2}(s) = \frac{e^{-1.73s}}{(1+1.89s)^2} \quad (3.40)$$

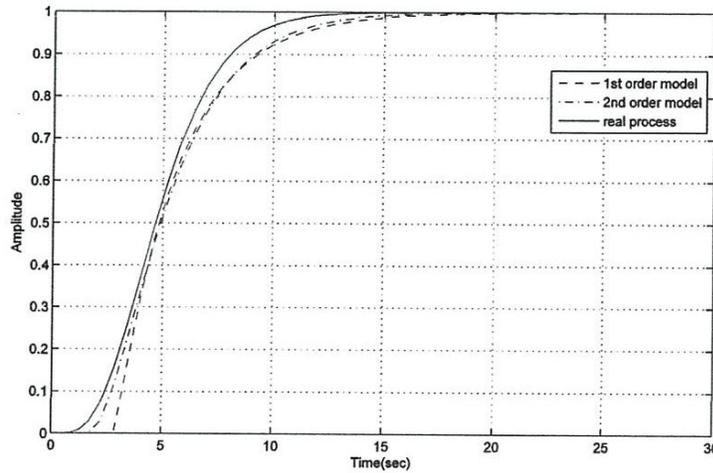


Figure 3.4 : Réponse indicielle du système et des modèles approchés.

Les spécifications désirées sont données en termes marge de gain et marge de phase

$$(A_m, \phi_m) = (4, 60)$$

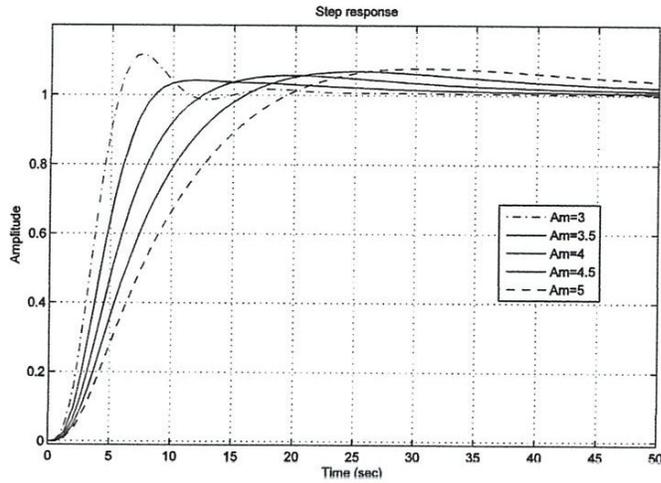
En appliquant la méthode précédente, nous obtenons les correcteurs d'ordre fractionnaire pour chaque modèle respectivement :

$$C_{11}(s) = 0.123 \frac{1 + 2.73s}{s^{1.079}}$$

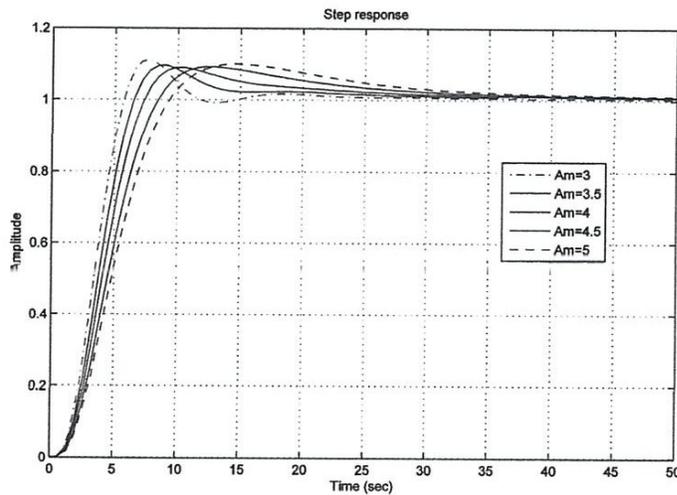
$$C_{12}(s) = 0.216 \frac{(1 + 1.89s)^2}{s^{1.07}}$$

Les paramètres des correcteurs classiques PI et PID sont respectivement:

$$K_{pi} = 0.357, T_i = 2.56 \quad \text{et} \quad K_{pid} = 0.419, T_i = 1.758, T_d = 1.89$$



(a)



(b)

Figure 3.5 : Réponse temporelle du système pour différentes valeurs de marge de gain et de phase

La figure 3.5 présente la réponse temporelle du système commandé obtenus par les correcteurs fractionnaire (a) obtenu par le modèle d'ordre 1 et (b) obtenu par le modèle d'ordre 2.

Les tableaux 1 et 2 résument les principaux résultats obtenus par les correcteurs classiques et les correcteurs d'ordre fractionnaire

Conception des Contrôleurs à Base de Model de Reference

Tableau 3.2 : résultats des spécifications du gain et de la phase pour le système

$G(s) = \frac{1}{(1+s)^5}$ corrigé avec un correcteur PI classique et fractionnaire.

correcteur	$\phi_m(^{\circ})$	A_m	α	K_c	K_{pi}	T_i	$\phi_m^*(^{\circ})$	A_m^*	Erreur $\phi_m(\%)$	$A_m(\%)$
Fractionnaire(PI)	55	3.5	1.101	0.056	-	-	59.31	3.88	7.87	10.85
	60	4	1.079	0.123	-	-	63.5	4.32	5.83	8
PI	55	3.5	-	-	0.404	2.50	65.80	3.86	19.83	10.25
	60	4	-	-	0.357	2.56	69.74	4.46	16.23	11.5

On remarque que l'erreur avec le PI fractionnaire est petite para port à cela du PI classique.

Tableau 3.3 : résultats des spécifications du gain et de la phase pour le système

$G(s) = \frac{1}{(1+s)^5}$ corrigé avec un correcteur PID classique et fractionnaire.

correcteur	$\phi_m(^{\circ})$	A_m	α	K_c	K_{pid}	T_i, T_d	$\phi_m^*(^{\circ})$	A_m^*	Erreur $\phi_m(\%)$	$A_m(\%)$
Fractionnaire(PID)	55	3.5	1.1	0.229	-	-	59.04	3.64	7.34	4
	60	4	1.07	0.216	-	-	63.81	4.08	6.35	2
PID	55	3.5	-	-	0.474	1.707,1.89	64.32	3.69	16.94	5.42
	60	4	-	-	0.419	1.758,1.89	69.08	4.27	10.13	6.75

On remarque que l'erreur avec le PID fractionnaire est plus petite para port à cela du PID classique.

5. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté une étude et une analyse des correcteurs PI, PD, PID classiques et d'ordre fractionnaire.

Nous avons aussi montré la synthèse des correcteurs et le choix de ces paramètres avec un modèle de référence. Et on a étudié deux systèmes l'un sans retard et l'autre avec retard. L'approximation des systèmes fractionnaires a été réalisée par l'approche CRONE.

**CONCLUSION
GÉNÉRALE**

Conclusion générale

Conclusion générale :

Le but de ce travail est introduire la notion des systèmes de commande d'ordre fractionnaire, en l'occurrence les correcteurs fractionnaire. Nous avons donné une description générale sur ce type des correcteurs.

Les correcteurs fractionnaires sont des cas générales des correcteurs classiques, ils sont plus flexible, le problème liée à ce type des correcteurs est le produit de convolution ce qui rend l'approximation numérique très difficile.

La réalisation des systèmes fractionnaires de façon non héréditaire peut être s'effectué par l'approche CRONE, cette méthode permet d'avoir un système standard sans aucun produit de convolution. Ainsi que une fonction de transfert rationnel.

La mise en œuvre numérique est simple et souple il suffit de bien choisir et calculer les paramètres de l'approximation numérique pour avoir une bonne approximation.

On a montré comment synthétiser un correcteur et de calculer ces paramètres. Et nous avons proposé deux applications une avec retard et l'autre sans retard avec deux correcteurs PI et PID (classique et fractionnaire).

Nous avons vu que les correcteurs fractionnaires assurent une robustesse plus forte et précis mieux que les correcteurs classiques.

Référence :

- [1] **M.A. Al-Alaoui**. Novel digital integrator and differentiator. *Electronics Letters*, 29(4) :376–378, 1993.
- [2] **B. M. Vinage, C. A. Monje and A. J. Calderon**, “ Fractional order systems and fractional order control action”, *IEEE, ‘fractional calculus applications in automatic control and robotics, Las Vegas, UAS, dec 2002’*.
- [3] **B.M.Vinarge, Y.O.Chen**, “fractional calculus application in automatic control and robotic”. *Las vegas, USA, Dec 2002*.
- [4] **B. Boudjehem**, “control déffusif d’un bras flexible”, mémoire de magister centre universitaire de 08 mai 45 Guelma.
- [5] **B. Vinrage & I.Podlubny, L. Dorcak & V.Feliu**, « on fractional PID controllers : a frequency Domain Approach », *IEEE, Fractional calculus applications in Automatic control and robotics, Las Vegas, USA, Dec 2002*.
- [6] **A. Oustaloup, X. Mathieu**, « Commande CRONE: Principe et exemples d’application », *Technique de l’ingénieur R7 422*.
- [7] **A. Oustaloup, X. Moreau, P.Serrier**, « La dérivation non entière en isolation vibratoire : application au control global de la suspension de véhicule », équipe CRONE-IAPS-UMR 5131CNRS-ENSEIRB- Université Bordeaux1.
- [8] **A.Oustaloup, J.Sabatier, P.Lanusse, P.Melchior, X.Moreau**, « sur les remarques formulées sur la ‘suspension CRONE’ », *Conférence International Francophone d’Automatique, Nantes, 8-10 juillet 2002*.
- [9] **Normey-Rico JE et Camacho EF**, « control of dead time processes », *London: Springer-Verlag, 2007*.
- [10] **Badreddine Boudjehem and Djalil Boudjehem** “, Fractional order controller design for desired response”, *Institution of Mechanical Engineers, Journal of systems and control engineering*.

- [11] **M.ETIQUE** Haute Ecole d'ingénierie et de Gestion du canton de Vaud (HIEG-Vd)
2cours complet régulation filière électronique, octobre 2005
- [12] Patrick Prouvost « Automatique (contrôle et régulation):»
- [13] **Bonabeau, E. and Theraulaz, G.** Intelligence Collective. Hermes. 1994).
- [14] **Régulation automatique** (Prof. Michel ETIQUE, mars 2007,Yverdon-les-Bains),
Haute Ecole d'Ingénierie et de Gestion du canton de Vaud (HEIG-VD) , p164 ,172 ,179-180.
- [15] **W. Jifenf and L. Yuanakai**, “ Frequency domain analysis and application for fractional order control systems”, journal of physics: conference series, Vol.13 2005, pp 268-273