

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université 8Mai 1945 – Guelma
Faculté des sciences et de la Technologie
Département d'Electronique et Télécommunications



**Mémoire de fin d'étude
pour l'obtention du diplôme de Master Académique**

Domaine : **Sciences et Technologie**
Filière : **Electronique**
Spécialité : **Systèmes Electroniques**

**Une solution par la méthode de Dichotomie de la loi de
commande prédictive généralisée sous contrainte**

Présenté par :
ATIETALLAH Ahmed

MEDJELDI Mehdi

Sous la direction de :

Dr : **SEDRAOUI Moussa**

Juin 2016



Dédicace

Je dédie ce Mémoire

A ma famille

*Spécialement à ma mère qui m'a soutenu avec ses
prières*

*A mon père qui n'a cessé de m'encourager et de me
soutenir*

A mes frères et sœurs et aussi tous mes amis.

AHMED

Dédicace

Je dédie ce Mémoire

A ma famille

*Spécialement à ma mère qui m'a soutenu avec ses
prières*

*A mon père qui n'a cessé de m'encourager et de me
soutenir*

*A mes frères (Ali. Rassim) et ma sœur et aussi tous
mes amis (Bassem. Saber Nabil. Ammar. Djamel.
Amine. Saleh. fateh).*

MEHDI

Remerciements

*Mes remerciements vont en premier lieu à
ALLAH Tout Puissant qui a illuminé mon
chemin de la lueur du savoir et de la science et
pour la volonté, la santé et la patience qu'il ma
prodiguées durant toutes ces années d'études.
Je tiens aussi à exprimer ma reconnaissance et ma
profonde gratitude à Monsieur
SEDRAOUI MOUSSA, Dr à l'université 8 mai
1945 de Guelma, pour avoir
Assuré l'encadrement de ce travail. Son aide, sa
grande disponibilité ont joué un
Rôle essentiel dans l'aboutissement de ce travail.
Enfin, mes remerciements vont aussi à mes
parents pour leur patience, leurs
Encouragements continus et leur soutien
inconditionnel.*

Sommaire

Introduction générale.....	1
----------------------------	---

Chapitre I *la commande prédictive généralisée sans contraintes*

I.1 Introduction.....	4
I.2 GPC mono-variable.....	4
I.2.1 Modèle CARIMA.....	4
I.2.2 Critère à minimiser.....	6
I.2.3 Prédicteur optimal.....	7
I.2.4 Calcul de commande	10
I.3 Choix des paramètres de synthèse	12
I.4 Test de simulation.....	14
I.5 Conclusion.....	20

Chapitre II *la commande prédictive généralisée sous contraintes*

II.1 Introduction.....	21
II.2 Les contraintes.....	22
II.3 Formulation de critère	24
II.3.1 Contraintes sur les incréments de commandes.....	24
II.3.2 Contraintes sur l'amplitude du signal de commande.....	25
II.3.3 Contraintes sur les signaux de sorties.....	26
II.3.4 Contraintes terminales de type égalité.....	26
II.3.5 Autres types de contraintes	27
II.4 La programmation quadratique.....	27
II.5 Resultats de simulation.....	30
II.6 Conclusion.....	34

Chapitre III *Application de la méthode de Dichotomie*

III.1 Introduction.....	36
III.2 La méthode de Dichotomie.....	37
III.2.1 Cas d'une fonction à une seul variable.....	37
III.2.2 Cas d'une fonction à plusieurs variables.....	39
III.3 Test de simulation.....	43
III.4 Conclusion.....	46
Conclusion générale.....	47

Figure I.1 : Modèle de CARIMA.....	05
Figure I.2 : Le principe de base de la commande prédictive à base de modèle..	07
Figure I .3 : Valeur de N_1 pour un système à déphasage non minimal.....	13
Figure I.4 : Choix de λ pour un système a déphasage non minimal.....	13
Figure I .5. : Sortie du premier système pour le choix de réglage.....	15
Figure I .6. : Commandes du premier système pour le choix de réglage.....	16
Figure I .7. : Incrément de commande fournie par la loi de GPC.....	16
Figure I .8. : Commande fournie par la méthode GPC ($\lambda = 5, N_u = 2, N_2 = 8$)	17
Figure I .9. : Commande fournie par la méthode GPC ($\lambda = 11, N_u = 5, N_2 = 14$) ..	17
Figure I .10. : Sortie du second système pour ($\lambda = 0.1, N_u = 3, N_2 = 5$)	19
Figure I .11. : Commande du second système pour ($\lambda = 0.1, N_u = 3, N_2 = 5$)	19
Figure I .12. : Incrément de commande du second système	20
Figure II.1. Signal de commande avec des contraintes.....	22
Figure II.2. Classification des contraintes.....	23
Figure II.3. Sortie fournie par la loi de GPC sous contraintes.....	30
Figure II.4. Commande fournie par la loi de GPC sous contraintes.....	31
Figure II.5. Incrément de commande fournie par la loi d GPC.....	31
Figure II.6. Sortie du système bouclé.....	33

Figure II.7. Commande du système bouclé.....33

Figure II.8 Incréments de commande du système bouclé.....34

Figure III.1. Sorties obtenue via la méthode de Dichotomie43

Figure III.2. Commande fournie par la méthode de Dichotomie.....44

Figure III.3. Incrément de commande fournie par la méthode de Dichotomie...44

FigureIII.4. Comparaison des sorties obtenues via Dichotomie et *Quadprog*....45

FigureIII.5. Comparaison des commandes obtenues via Dichotomie et *Quadprog*45

FigureIII.6. Comparaison des incréments de commandes obtenus via Dichotomie et *Quadprog*.....46

Introduction générale

INTRODUCTION GENERALE

Actuellement, avec les progrès observés dans le domaine des ordinateurs numériques, il est presque impossible de trouver un secteur de l'activité humaine qui ne soit touché par ce phénomène.

L'emploi de l'ordinateur dans les processus de commande a permis l'implantation de techniques compliquées et sophistiquées qui permettent le développement de stratégies efficaces tout en restant de coût raisonnable ce qui était pratiquement impossible d'envisager avec les mécanismes et les dispositifs précédents. Des exemples de telles techniques incluent la commande non linéaire, la commande multi variable, la commande robuste et la commande prédictive.

La commande prédictive est née d'un besoin réel dans le monde industriel. Un besoin de systèmes de régulation capable d'assurer des performances plus élevées que les contrôleurs classiques, à savoir PID, tout en respectant des contraintes de fonctionnement et de production toujours plus élevées.

La commande prédictive se différencie des autres techniques de commande par le fait que doit être résolu en ligne, elle consiste à optimiser, à partir des entrées/sorties d'un système (état, couples,...), le comportement futur prédit du système considéré. La prédiction est faite à partir d'un modèle interne du système sur un intervalle de temps fini appelé horizon de prédiction. La solution du problème d'optimisation est un vecteur de commande dont la première entrée de la séquence optimale est injectée au système. Le problème est à nouveau résolu sur l'intervalle de temps suivant en utilisant les données du système mises à jour.

La commande prédictive est également appelée commande à horizon glissant ou fuyant, en référence à la manière dont la fenêtre de temps considérée pour les calculs est décalée à chaque itération. Le principal atout de la commande prédictive est sa capacité à prendre en compte dans son expression même les contraintes fonctionnelles et les contraintes d'exploitation du système considéré. L'inconvénient d'une telle méthode est le temps de calcul surtout lorsque le modèle utilisé est non linéaire.

C'est la raison pour laquelle elle a été essentiellement utilisée dans l'industrie du génie des procédés où les systèmes contrôlés sont suffisamment lents pour en permettre une mise en œuvre avec des périodes d'échantillonnage assez élevées.

La commande prédictive peut être utilisée pour commander des systèmes complexes comportant plusieurs entrées et sorties où le simple régulateur PID est insuffisant. Cette technique est particulièrement intéressante lorsque les systèmes possèdent des retards importants, des réponses inverses et de nombreuses perturbations. Les principaux utilisateurs de la commande prédictive sont les raffineries de pétroles, l'industrie chimique et agroalimentaire, la métallurgie, l'aérospatiale.

Un avantage considérable de la méthode GPC c'est leurs applications en présence des contraintes physiques. Ces contraintes à pour des raison de sécurité des équipements ainsi que le bon fonctionnement des instruments de mesure installés dans la boucle de commande à savoir la marge de fonctionnement des capteurs,...etc. Le but ici est d'assurer des commandes satisfaisant toutes les contraintes imposées à l'avance par l'utilisateur. Il faut noter ici que l'application de cette méthode de commande en présence des contraintes peut dégrader la qualité de la dynamique de poursuite du système bouclé. L'intérêt ici est toujours d'assurer une marge de sécurité des matériels ainsi d'augmenter la fiabilité et la durée de bon fonctionnement de ces équipements. Cet objectif peut être achevé si le problème de GPC est formulé sous forme d'un problème d'optimisation sous contraintes et puis la fonction du Matlab *Quadprog* (quadratic programming) est appliquée pour résoudre ce problème pour chaque instant du temps.

Pratiquement, la méthode GPC basée sur la fonction *Quadprog* offre des meilleurs résultats pour plusieurs applications industrielles. Néanmoins, pour certaines lois de commandes, cette fonction est appliquée avec certaines restrictions. Dans notre travail, une méthode très simple sera proposée pour résoudre le problème de la fonction de cout de GPC et cela peut se faire sans la nécessité de calcul de la dérivée de la fonction objective à minimiser. L'idée de cette méthode proposée s'est basée sur le principe de

Dichotomie où les contraintes imposées sont des contraintes de bornes. L'algorithme de cette dernière sera adapté de tel sort que leur introduction dans les démarches de l'algorithme de GPC devient aussi simple que possible.

Ce travail sera donc organisé comme suit :

- Chapitre1 : nous allons présenter les concepts de base de la méthode GPC en absence des contraintes. Cette partie sera achevée par des résultats de simulation qui montrent l'efficacité de cette méthode de commande.
- Chapitre2 : cette partie décrit le formalisme de la commande prédictive en se basant sur le cas le plus populaire GPC où on présente la solution du problème sous contraintes à partir de l'application de la fonction *Quadprog* pour chaque instant du temps. Cette partie sera terminée par une application sur deux systèmes discrets déjà commandés dans le premier chapitre en absence des contraintes.
- Chapitre3 : dans cette partie, l'application de la commande prédictive généralisée GPC sous contraintes sera achevée en utilisant la méthode de Dichotomie qui permet de résoudre avec efficacité le cas des contraintes de bornes imposées dans le problème d'optimisation.
- Conclusion générale.

Chapitre I
La Commande
Prédictive Généralisée
sans contrainte

I-1 Introduction

La commande prédictive généralisée GPC est une des derniers membres de la famille des commandes à horizon étendu LRPHC [1] *Long range horizon predictive control*. Elle présente une généralisation des algorithmes de cette famille. Elle se base sur les concepts suivants :

- Le modèle de prédiction utilisé est un modèle de *CARIMA Controlled Auto Regressive Intégral Moving Average* qui est une extension du modèle CARMA comportant une action intégrale dans le but d'éliminer l'écart permanent et l'effet des perturbations constantes [?]
- L'utilisation de la prédiction à horizon étendu.
- La résolution récursive de l'équation de Diophantienne (voir annexe).
- L'introduction de la pondération sur les incréments de commande dans le critère à minimiser.
- Le choix de l'horizon de commande à partir duquel tous les incréments sont pris nuls.

La combinaison de ces concepts, issus de plusieurs algorithmes, a permis l'obtention d'une méthode de commande puissante et performante qui a donné des résultats très satisfaisants dans plusieurs applications industrielles.

I.2. GPC mono-variable [3,5]:

I.2.1. Modèle CARIMA:

Toute commande prédictive nécessite la connaissance d'un modèle afin de prédire le comportement futur du système. Dans la commande GPC, le modèle utilisé est celui de *CARIMA* donné par :

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t-1) + \frac{C(q^{-1})}{\Delta(q^{-1})}\xi(t) \quad (1.1)$$

$A(q^{-1})$, $B(q^{-1})$ et $C(q^{-1})$ sont des polynômes dans l'opérateur retard q^{-1} , définis par :

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) &= 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{n_a} q^{-n_a} \\ B(q^{-1}) &= b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_{n_b} q^{-n_b} \\ C(q^{-1}) &= 1 + c_1 q^{-1} + \dots + c_{n_c} q^{-n_c} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Où les degrés des polynômes A , B et C sont respectivement n_a , n_b et n_c .

$u(t)$, $y(t)$ et $\xi(t)$ sont respectivement l'entrée, la sortie et le signal de perturbation du système.

- $\xi(t)$ est considéré aléatoire de moyenne nulle et de variance constante.
- C est un polynôme qui modélise l'influence du bruit qui affecte sur le système à commander.

L'introduction de l'opérateur de retard $\Delta(q^{-1}) = 1 - q^{-1}$ dans le modèle de bruit assure une action intégrale dans le correcteur et permet, donc, d'annuler toutes erreurs statiques vis-à-vis d'une entrée de perturbation en échelon.

La présence de perturbations de charge en échelon dans de nombreux processus industriels, celui-ci garantissant donc un comportement avec une erreur statique nulle face aux perturbations considérées. Ceci est une conséquence directe du principe du modèle interne.

Ce modèle *CARIMA* peut le représenter par la figure I.1 [6,7].

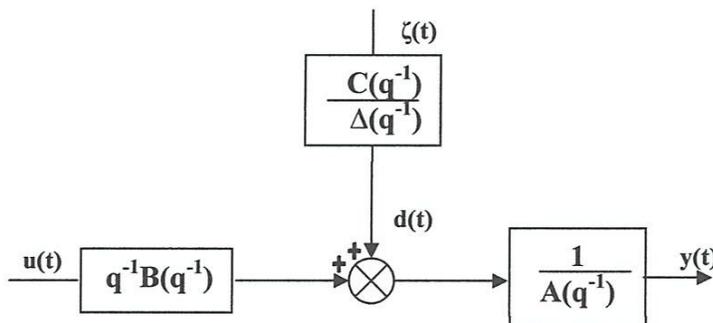


Figure I.1 : Modèle de CARIMA

I.2.2. Critère à minimiser :

La loi de GPC est obtenue à partir d'une minimisation d'un critère quadratique portant sur les erreurs futures λ avec un terme de pondération sur les incréments de commande :

$$J = esp \left[\sum_{j=N_1}^{N_2} [w(t+j) - \hat{y}(t+j)]^2 + \lambda \sum_{j=1}^{N_u} [\Delta u(t+j-1)]^2 \right] \quad (1.3)$$

Tenant compte la contrainte suivante :

$$\Delta u(t+j) = 0 \quad \text{Pour } j \geq N_u.$$

Où N_1 : représente l'horizon minimal de prédiction de sortie. Ce dernier est supposé dans la suite de ce travail, égal à 1.

N_2 : est l'horizon maximal de prédiction de sortie.

N_u : représente l'horizon de prédiction sur la commande.

λ : est un facteur de pondération de l'énergie de commande.

$\Delta u(t+j-1)$: est un incrément de commande appliqué à l'instant $t+j-1$. $w(t+j)$, $\hat{y}(t+j)$ représentent, respectivement, l'entrée de consigne, la sortie prédite appliquées à l'instant $t+j$.

L'idée de base de cette loi de commande est de calculer une séquence de commande telle que l'écart entre la sortie prédite et la consigne désirée soit minimale par rapport au critère (1.3), et ce sur un horizon de prédiction N_2 (voir la figure I.2).

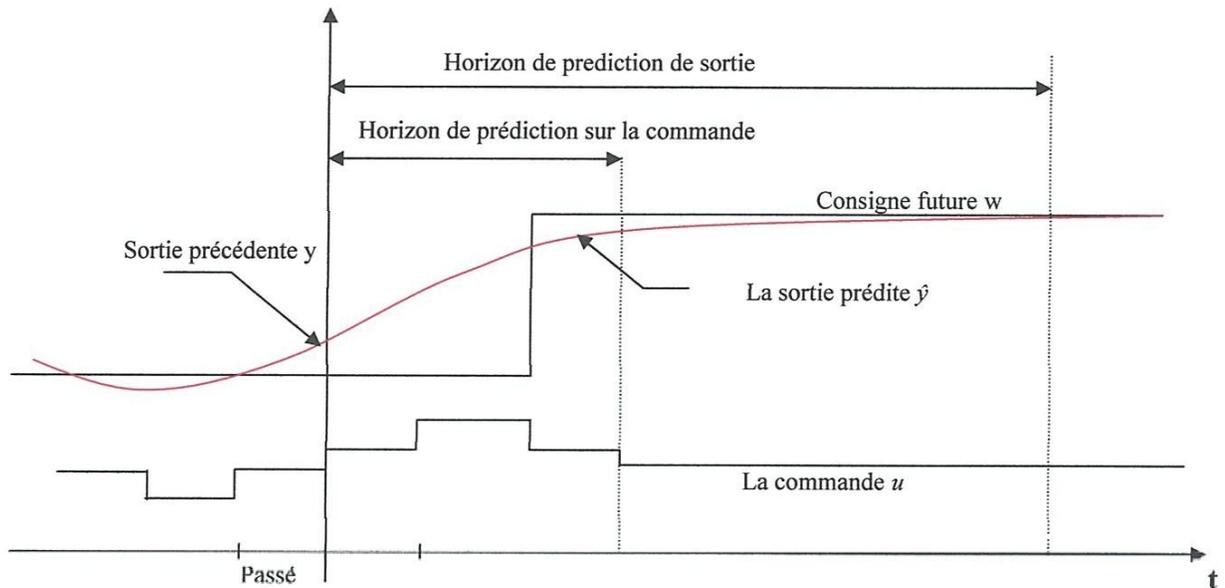


Figure I.2 : Le principe de base de la commande prédictive à base de modèle

I.2.3. Prédicteur optimal [8]:

On s'intéresse ici à prédire la sortie du modèle à l'instant j , en fonction des données connues, c'est à dire, la sortie jusqu'à l'instant t et la commande jusqu'à l'instant $t-1$. La démarche suivie est la suivante :

- La valeur de la sortie à l'instant $t+j$ est compte tenu de (1.1) soit :

$$y(t+j) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(t+j-1) + \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})\Delta(q^{-1})} \xi(t+j) \quad (1.4)$$

- Le terme $\frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})\Delta(q^{-1})} \xi(t+j)$ peut être décomposé en une partie dépendante des valeurs futures de ξ et en une deuxième partie dépendante des valeurs passées de ξ , d'où :

$$y(t+j) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(t+j-1) + E_j(q^{-1}) \xi(t+j) + \frac{F_j(q^{-1})}{A(q^{-1})\Delta(q^{-1})} \xi(t) \quad (1.5)$$

- Les deux polynômes E_j et F_j sont donnés par la résolution de l'équation diophantienne suivante [9] :

$$C = E_j A \Delta + q^{-j} F_j \quad (1.6)$$

$$\text{Avec : } \begin{aligned} E_j &= e_0^j + e_1^j q^{-1} + \dots + e_{j-1}^j q^{-j+1} \\ F_j &= f_0^j + f_1^j q^{-1} + \dots + f_{nf}^j q^{-nf} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Sachant que : $nf = \max(na, nc - j)$

La résolution des équations (1.6) de manière récursive est décrite en *annexe*.

En opérant (1.1) par $E_j q^j$, on obtient :

$$E_j A \Delta y(t+j) = E_j B \Delta u(t+j-1) + E_j C \zeta(t+j) \quad (1.8)$$

La substitution de $E_j A \Delta$ provenant de l'équation (1.6) donne alors :

$$(C - q^{-j} F_j) y(t+j) = E_j B \Delta u(t+j-1) + E_j C \zeta(t+j) \quad (1.9)$$

On obtient après le développement et en exploitant la forme particulière de C :

$$y(t+j) = C^{-1} F_j y(t) + C^{-1} E_j B \Delta u(t+j-1) + E_j \zeta(t+j) \quad (1.10)$$

Dans cette dernière équation, toutes les références à des valeurs de la perturbation pour des instants d'échantillonnage passés et présents ont été supprimées. Il ne subsiste donc plus que la combinaison linéaire $E_j \zeta(t+j)$ de valeurs futures de la perturbation ou du bruit. Or ces valeurs sont par définition indépendantes de signaux mesurables à l'instant t . Il est donc clair que la prédiction optimale à l'instant t de $y(t+j)$ notée $\hat{y}(t+j)$ au sens du minimum de la variance de l'erreur, obtenue grâce à des grandeurs dont la valeur est connue à l'instant t est donnée par :

$$\hat{y}(t+j) = C^{-1} F_j y(t) + C^{-1} E_j B \Delta u(t+j-1) \quad (1.11)$$

On peut noter que ce résultat est classique pour la détermination de prédictions optimales. Il met clairement en évidence que le terme C permet de modifier la dynamique de l'observateur (le prédicteur de la sortie). Ainsi, l'ajustement de C dans le modèle (1.1) permet de conférer au correcteur des propriétés de filtrage du bruit.

Dans l'équation (1.11), le terme $E_j B \Delta u(t+j-1)$ est une combinaison linéaire de valeurs définis à des instants d'échantillonnage compris entre les instants $(t-nb+d)$ et $(t+j-1-d)$, (d : retard) mais la fonction de coût (1.3) implique seulement les valeurs futures et la valeur présente de Δu . Aussi allons-nous chercher à séparer ces valeurs des valeurs passées dans l'équation (1.11). Cette séparation peut être obtenue grâce à la résolution d'une seconde équation Diophantienne en G_j et H_j comme suite :

$$E_j B = C G_j + q^{-j} H_j \quad (1.12)$$

Avec :

$$\begin{aligned} G_j &= g_0^j + g_1^j q^{-1} + \dots + g_{j-1}^j q^{-j+1} \\ H_j &= h_0^j + h_1^j q^{-1} + \dots + h_{n_h}^j q^{-n_h} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Sachant que : $n_h = \max(n_c, n_b + d) + 1$

L'équation Diophantienne (1.12) peut la résoudre récursivement à l'aide de la méthode rappelée en *annexe*.

L'utilisation de (1.12) dans (1.11) conduit finalement à l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \hat{y}(t+j) &= C^{-1} F_j y(t) + G_j \Delta u(t+j-1) + C^{-1} H_j \Delta u(t-1) \\ &= G_j \Delta u(t+j-1) + C^{-1} [H_j \Delta u(t-1) + F_j y(t)] \end{aligned} \quad (1.14)$$

Le premier terme de la somme désigne la réponse « forcée » du système, qui est due aux commandes future, et le second terme représente la réponse « libre ».

Dans le sens qu'elle est la conséquence, dans le futur, des commandes qui ont été appliquées jusqu'à l'instant t .

I.2.4. Calcul de commande [10,11]:

Soit f une matrice de dimension $(N_2 - N_1 + 1) \times 1$ constituée de la prédiction de la réponse libre du système pour les instants d'échantillonnage supérieurs à $t + N_1$ (horizon d'initialisation) et ainsi, inférieurs à $t + N_2$ (horizon de prédiction) :

$$f = \begin{bmatrix} C^{-1} [H_{N_1} \Delta u(t-1) + F_{N_1} y(t)] \\ C^{-1} [H_{N_1+1} \Delta u(t-1) + F_{N_1+1} v(t)] \\ \vdots \\ C^{-1} [H_{N_2} \Delta u(t-1) + F_{N_2} y(t)] \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

Soit ΔU un vecteur de dimension $N_u \times 1$ contenant les incréments de u sachant que

$\Delta u(t+j) = 0$ pour $(j \geq N_u)$ avec :

$$\Delta U = [\Delta u(t) \quad \Delta u(t+1) \quad \dots \quad \Delta u(t+N_u-1)]^T \quad (1.16)$$

De plus, soit \hat{y} le vecteur de dimension $(N_2 - N_1 + 1) \times 1$ contenant les prédictions des sorties à partir de l'horizon d'initialisation défini par :

$$\hat{Y} = [\hat{y}(t+N_1) \quad \hat{y}(t+N_1+1) \quad \dots \quad \hat{y}(t+N_2)]^T \quad (1.17)$$

On peut donc écrire, pour $N_1 \leq j \leq N_2$, l'équation de prédicteur sous forme matricielle suivante :

$$\hat{Y} = G \cdot \Delta U + f \quad (1.18)$$

Avec :

$$G = \begin{bmatrix} G_{N1} & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & G_{N1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{N2} & \dots & \dots & \dots & G_{N2} - G_{N1} \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

Les termes g_k avec $0 \leq k \leq N_2 - 1$ sont les coefficients de la matrice G (solution de l'équation 1.12).

L'expression du critère (1.3) peut donc s'écrire sous forme matricielle, compte tenu des notations précédentes, il vient :

$$J = (\hat{Y} - W)^T (\hat{Y} - W) + \lambda \cdot \Delta U^T \cdot \Delta U \quad (1.20)$$

Où W est un vecteur de dimension $(N_2 - N_1 + 1) \times 1$ contenant les signaux de référence futurs à partir de l'horizon d'initialisation avec :

$$W = [w(t + N_1) \quad w(t + N_1 + 1) \quad \dots \quad w(t + N_2)]^T \quad (1.21)$$

En utilisant les deux équations (1.18) et (1.20) pour réécrire le critère (1.3) sous la forme vectorielle suivante :

$$J = (G \cdot \Delta U + f - W)^T (G \cdot \Delta U + f - W) + \lambda \cdot \Delta U^T \cdot \Delta U \quad (1.22)$$

La loi de commande est obtenue par la minimisation de l'équation (1.22) par rapport à ΔU d'où :

$$\Delta U_{opt} = (G^T G + \lambda I)^{-1} G^T (W - f) \quad (1.23)$$

On définit la matrice $K \in \mathfrak{R}^{N_u \times (N_2 - N_1 + 1)}$ par la relation :

$$K = (G^T G + \lambda I)^{-1} G^T \quad (1.24)$$

La loi de la commande optimale ΔU_{opt} peut la trouver sous forme d'un retour avec:

$$\Delta U_{opt} = -K(W - f) \quad (1.25)$$

De plus, seule la première ligne de commande ΔU_{opt} est appliquée au système (la première ligne correspondent au calcul de la commande à l'instant t , les $N_u - 1$ autres correspondent aux instants $t+1, \dots, t+N_u - 1$ quand $(N_u > 1)$). La commande réellement appliquée au système au temps t vaut :

$$u(t) = u(t-1) + \Delta u_{opt}(t) \quad (1.26)$$

Avec :

$$\Delta u_{opt}(t) = K_1(W - f) \text{ et } K_1 \text{ représente la première ligne de } (G^T G + \lambda I)^{-1} G^T$$

I.3. Choix des paramètres de synthèse [12]:

De nombreuses études ont permis aux utilisateurs de la méthode de GPC d'énoncer le choix suivant :

I. 3.1. Horizons de prédictive :

a. l'horizon minimal de prédictive de la sortie du système

Le produit $N_1 T_e$ (T_e période d'échantillonnage) est choisi égal au retard pur du système. De plus, pour un système ne présentant pas de retard ou un retard mal connu ou variable, N_1 est choisi égal à 1. Cependant, dans le cas d'un système à déphasage non minimal, N_1 est pris égal à la valeur N_0 indiquée sur la figure (I .3).

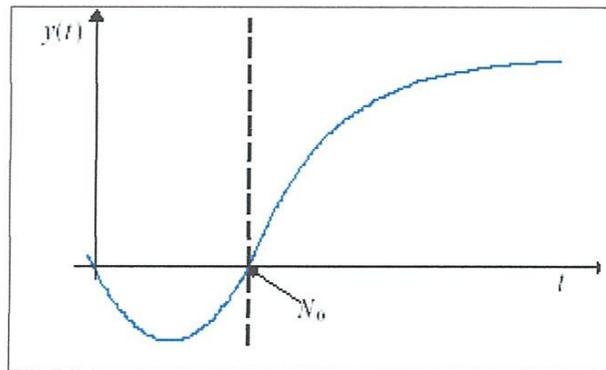


Figure I.3 : Valeur de N_1 pour un système à déphasage non minimal

b. L'horizon maximal de prédictive de la sortie du système

N_2 est choisi de sorte que le produit $N_2 T_e$ soit limité par la valeur du temps de réponse souhaitée. En effet, augmenter la prédiction au delà du temps de réponse n'apporte aucune information supplémentaire et complexifie la résolution. Par ailleurs, plus N_1 est grand, plus le système corrigé est stable et lent.

Notons sur le schéma de la figure (I.4) le choix de N_2 dans le cas d'un système à déphasage non minimal.

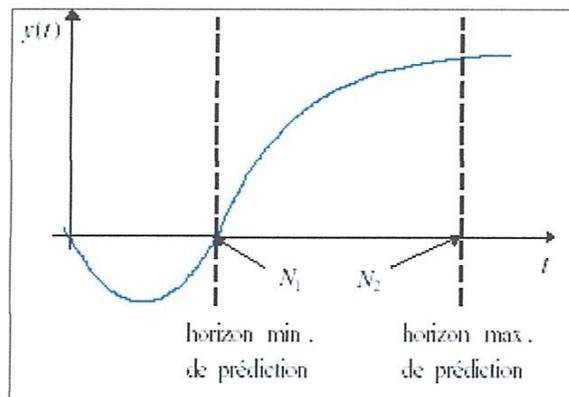


Figure I.4 : Choix de N_2 pour un système à déphasage non minimal

I. 3.2. Horizon de commande :

Pour les processus simples, le choix de l'horizon de commande (N_u) égal à 1 donne souvent de bons résultats, par contre, pour les processus complexes (N_u) doit être égal au moins au nombre des pôles instables ou mal amortis.

L'horizon de commande ne doit en aucun cas avoir une valeur supérieure à celle de l'horizon de prédiction maximal de sortie.

I. 3.3. La pondération :

Le bon choix de la pondération ($\lambda = 0$) donne généralement des résultats satisfaisants, mais des fois on prend $\lambda = \text{eps}$ (eps très faible) pour améliorer la robustesse.

Si (λ) est suffisamment grand, le système en boucle fermée est instable si le processus en boucle ouverte est instable.

I.4. Test de simulation

Dans cette section, on présente l'étude en simulation de la méthode de GPC pour commander deux systèmes instables linéaires invariants dans le temps. L'objectif ici est de montrer l'efficacité de cet algorithme qui dépend notamment par un choix adéquat des paramètres de réglage de cette méthode de commande. Les modèles de CARIMA considérés dans cette simulation sont les suivants :

1.4.1. Modèle 1 :

La dynamique du système est décrite par le modèle de CARIMA ci-après :

$$A(q^{-1}) = 1 - 0.72q^{-1}$$

$$B(q^{-1}) = 1.5 + 0.32q^{-1},$$

D'où la fonction de transfert discrète est celle donnée par :

$$G(q^{-1}) = \frac{1.5 + 0.32q^{-1}}{1 - 0.72q^{-1}}$$

Ici, le polynôme de filtrage $C(q^{-1})$ est supposé égal à 1 ainsi que l'entrée de référence est définie par :

$$W(t) = \begin{cases} 1 : 0 \leq t \leq 100 \\ 0 : 100 \leq t \leq 200 \\ 1 : 200 \leq t \leq 300 \end{cases}$$

L'application de la méthode GPC sur le système ci-dessus donne les résultats montrés par les figures suivantes :

- c. Les figures (I.5) et (I.6) représentent les signaux de sortie, et de commande du système bouclé, tandis que les figures (I.7), (I.8), (I.9) présentent les signaux des incréments de commande fournis par la loi de GPC pour différents réglages de N_u , N_2 et λ

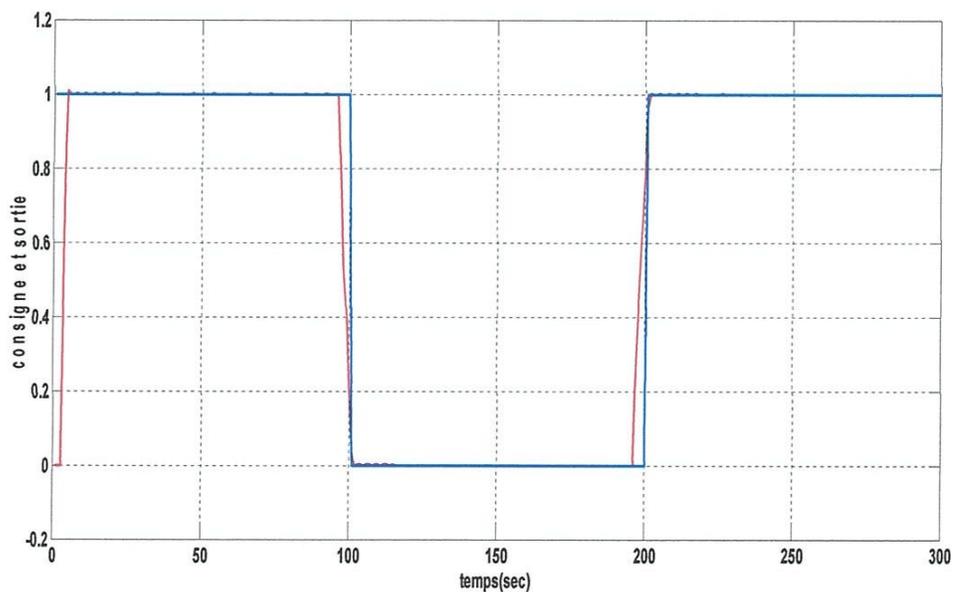


Figure I.5 : Sortie du premier système pour le choix de réglage :
($\lambda = 0.1$, $N_u = 3$, $N_2 = 5$)

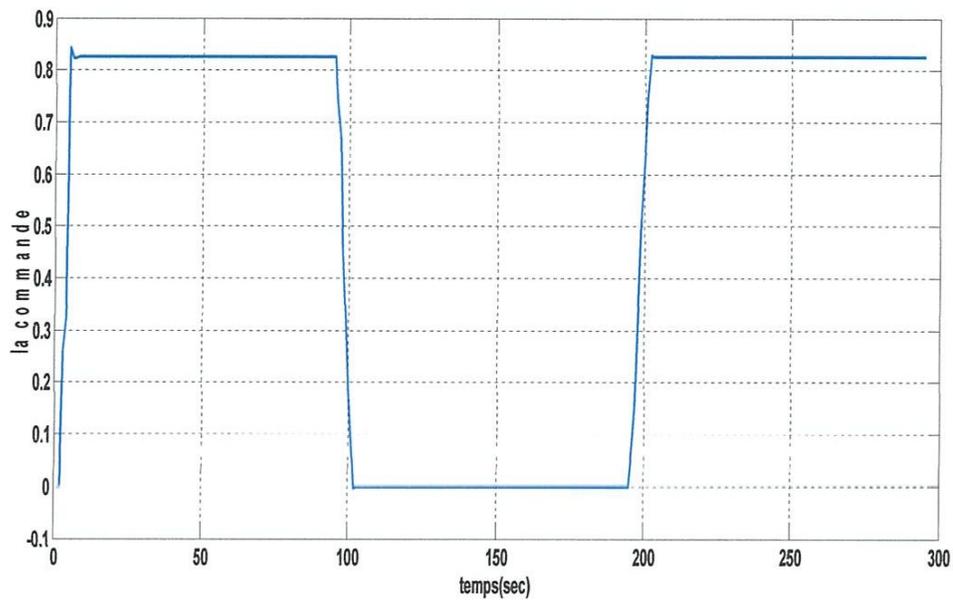


Figure I.6. : Commandes du premier système pour le choix de réglage :
($\lambda = 0.1, N_u = 3, N_2 = 5$)

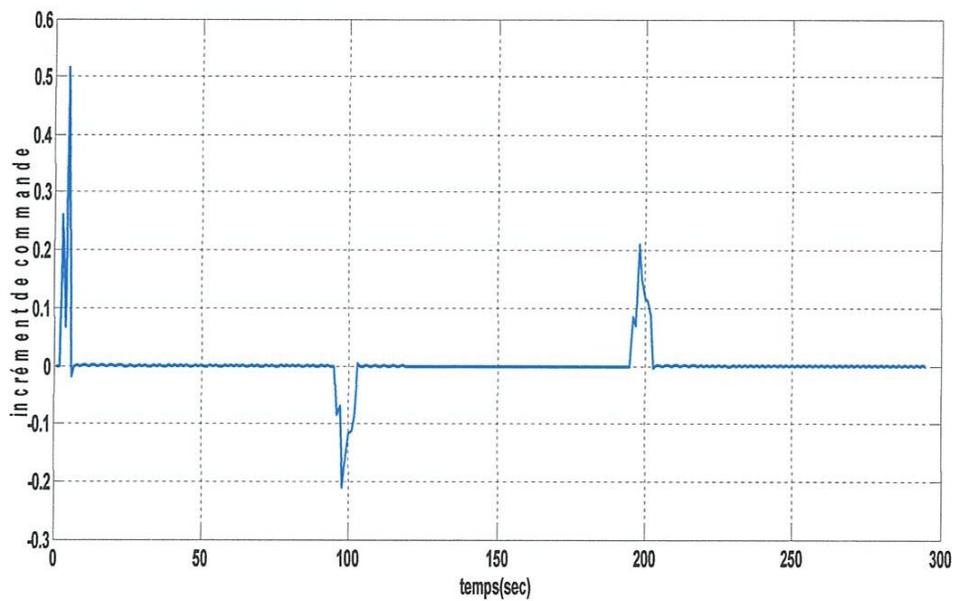


Figure I.7. : Incrément de commande fourni par la loi de GPC pour
($\lambda = 0.1, N_u = 3, N_2 = 5$)

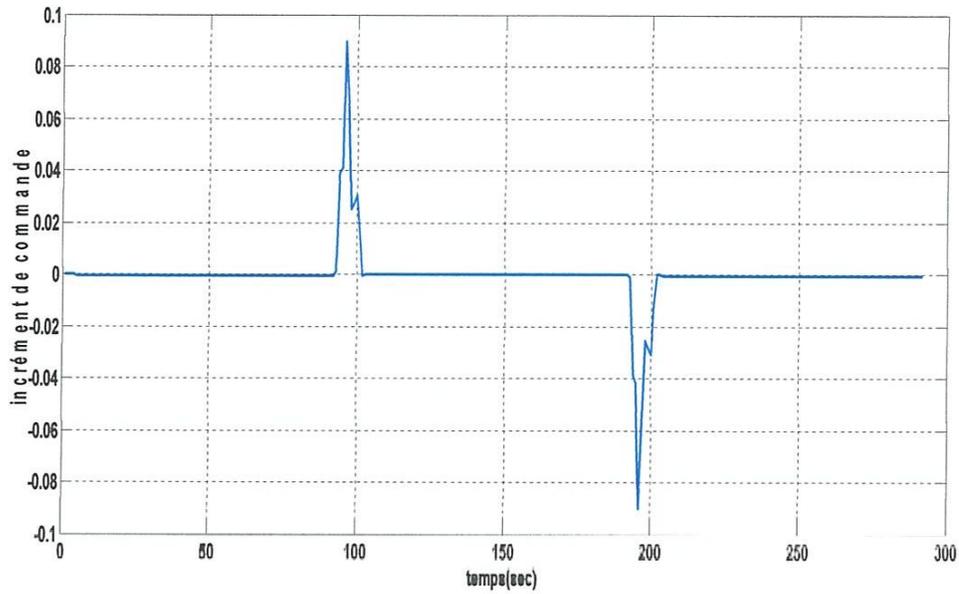


Figure I.8. : Commande fournie par la méthode GPC ($\lambda = 5, N_u = 2, N_2 = 8$)

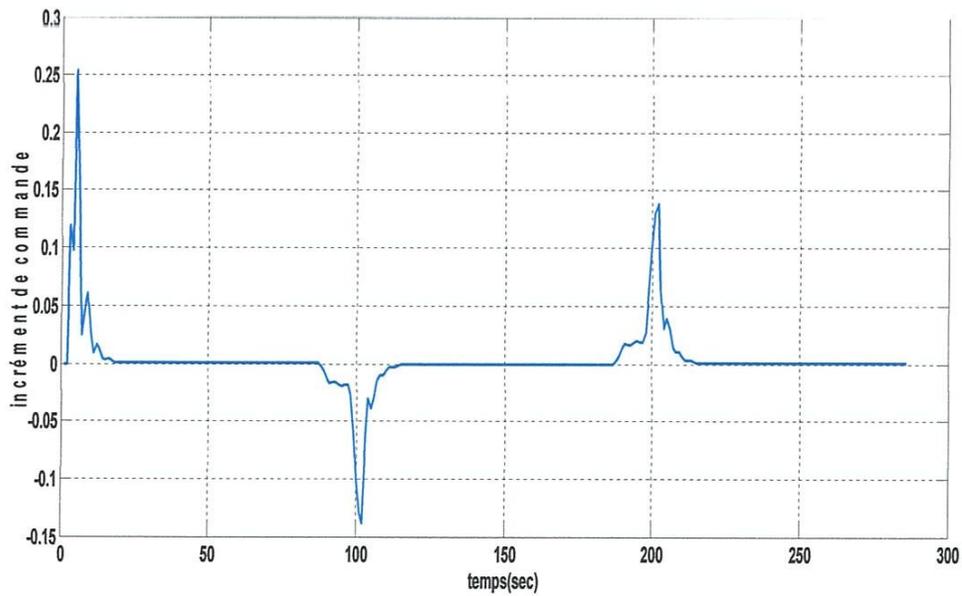


Figure I.9. : Commande fournie par la méthode GPC ($\lambda = 11, N_u = 5, N_2 = 14$)

D'après les résultats obtenus, on peut remarquer notamment dans les régimes permanents :

- d. Une erreur statique très réduite.
- e. Des commandes stables.
- f. Des incréments de commande inversement proportionnel à la valeur de λ .

1.4.2. Modèle 2 :

Dans cette partie de simulation, la méthode de GPC est appliquée sur un système discret du deuxième ordre. Sa fonction de transfert est définie par:

$$G(q^{-1}) = \frac{0.1012 + 0.0852q^{-1}}{1 - 2.443q^{-1} + 1.492q^{-2}}$$

A partir de cette dernière expression, le modèle de CARIMA est celui donné par :

$$A(q^{-1}) = 0.1012 + 0.0852q^{-1}$$

$$B(q^{-1}) = 1 - 2.443q^{-1} + 1.492q^{-2},$$

L'entrée de référence est choisie par le système d'équation suivant :

$$W(t) = \begin{cases} 1 & : 0 \leq t \leq 100 \\ 0 & : 100 \leq t \leq 200 \\ 1 & : 200 \leq t \leq 300 \end{cases}$$

Ici, les paramètres de réglage qui assurent la bonne dynamique de poursuite du système bouclé sont: $\lambda = 0.1, N_u = 3, N_2 = 5$.

Les figures (I.10) (I.11) représentent les signaux de sortie, et de commande du système bouclé, tandis que la figure (I.12), présente le signal de l'incrément de commande fournies par la loi de GPC.

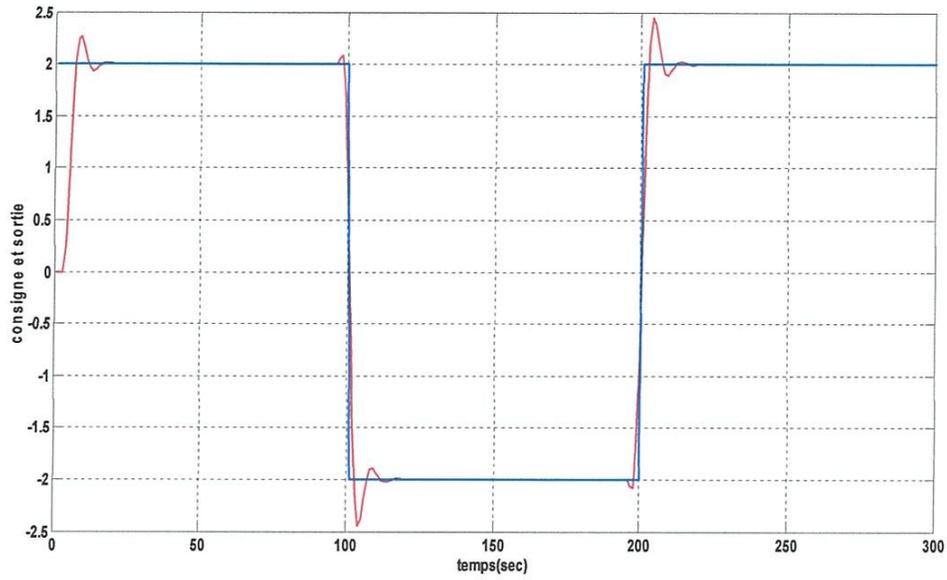


Figure I.10. : Sortie du second système pour ($\lambda = 0.1, N_u = 3, N_2 = 5$)

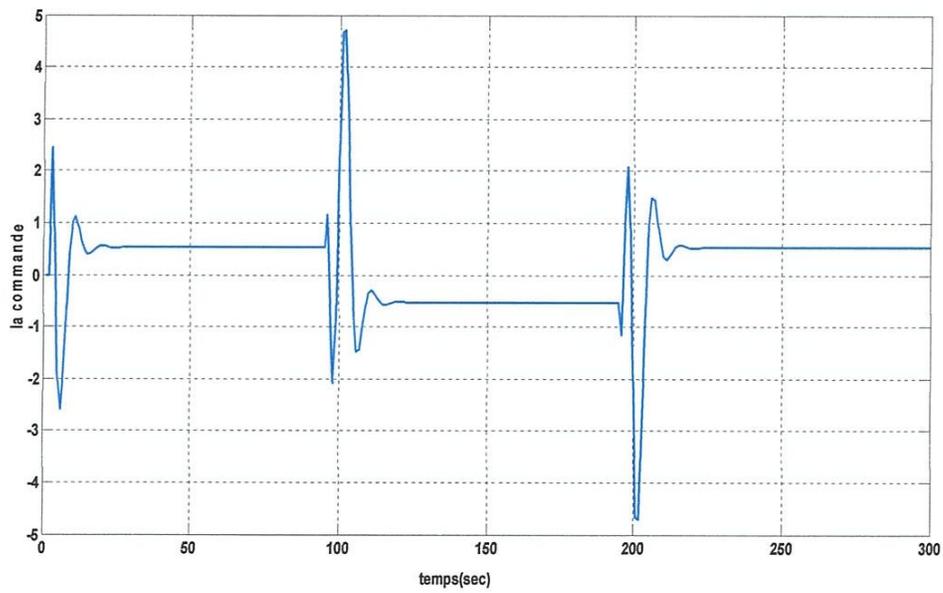


Figure I.11. : Commande du second système pour ($\lambda = 0.1, N_u = 3, N_2 = 5$)

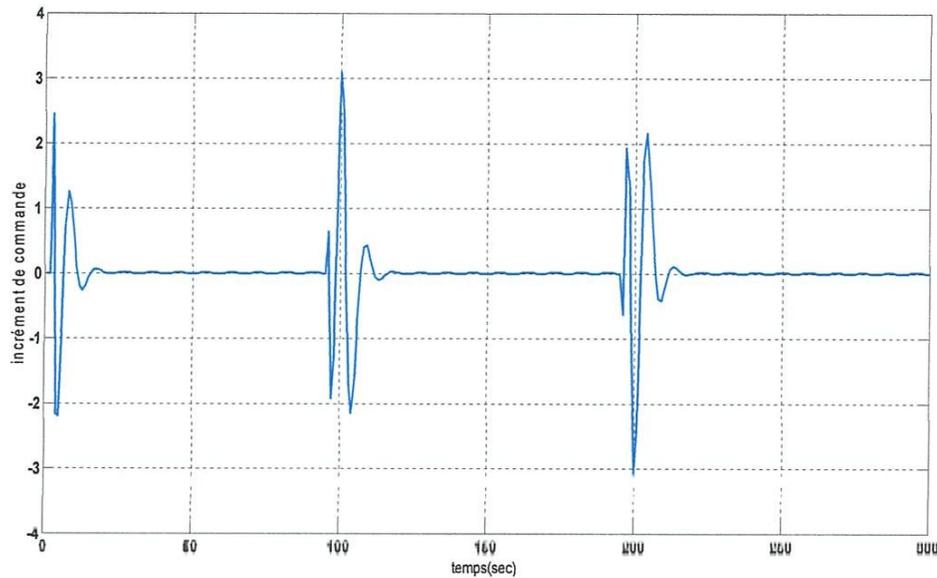


Figure I.12. : Incrément de commande du second système pour
 $(\lambda = 0.1, N_u = 3, N_2 = 5)$

D'après les figures précédentes, on peut constater :

- Des sorties tendent vers des valeurs constantes (valeurs de consignes).
- Des commandes stables.
- Plus la valeur de λ devient petite, la loi de GPC offre une commande très économique.
- Pour toutes valeurs de λ , on obtient des commandes stables.

I.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté l'algorithme de la commande prédictive généralisée mono-variable algorithmique sans contraintes, cette dernière est appliquée sur deux systèmes discrets. Cette méthode de commande donne des résultats de simulation très encourageants, ainsi que les performances obtenues sont liées directement par un choix adéquat des paramètres de synthèse qui sont (N_2, N_u, λ) .

Chapitre II

La Commande
Prédictive Généralisée
sous contrainte

II.1.Introduction

Le problème de commande qui a été formulé dans le chapitre précédent, considère que tous les signaux possèdent une gamme illimitée, malheureusement ceci, n'est pas très réaliste parce que dans la pratique tous les processus sont soumis à des contraintes.

Ces contraintes peuvent être de toutes sortes et ce pour plusieurs raisons : Limitation physique des actionneurs, spécifications de qualité d'un produit, exigence de sécurité, etc. En outre, dans la pratique, les points de fonctionnement des systèmes sont déterminés pour satisfaire des buts économiques et pour se trouver à l'intersection de certaines contraintes.

Si les contraintes ne sont pas considérées dans la conception de la commande, il résulte une dégradation des performances en boucles fermée et même un risque d'avoir un comportement indésirable. Bien que les restrictions à l'entrée et à la sortie du processus se traitent de même manière, comme sera montré en ce chapitre, les implications de chaque type de contraintes sont différentes.

Les restrictions en sortie sont fondamentalement dues à des raisons de sécurité opérationnelles, et doivent être contrôlées à l'avance puisqu'elles peuvent endommager les équipements physiques et causer des pertes dans la production. Dans le cas des variables d'entrée, elles peuvent toujours être bornées dans leurs limites permises en fonction des mécanismes de saturation, en coupant l'action de commande pour une valeur qui satisfait des contraintes d'amplitude et de variation. Les techniques de la commande MPC intègrent les contraintes pendant la phase de synthèse et d'implantation du contrôleur, permettant à l'ingénieur de présenter les contraintes d'une façon directe de sorte que l'algorithme trouve automatiquement la meilleure solution admissible.

Le système de commande, particulièrement dans le cas de la commande prédictive avec de grands horizons de prédiction, doit prévoir la violation des restrictions et corriger d'une forme appropriée.

Dans ce qui va suivre, nous allons exposer la formulation du problème de la loi de GPC en présence des contraintes à savoir sur les incréments de commandes, sur les commandes ainsi sur la sortie du système à commander. Ces contraintes sont ensuite

reformulées sous forme matricielle et la fonction *Quadprog*, qui est disponible dans le Toolbox/Matlab, offre la possibilité de développer une loi de commande qui assure une bonne minimisation du critère avec une bonne satisfaction de toutes les contraintes imposées au préalable par le constructeur. Des résultats de simulation sont ensuite insérés à la fin de ce chapitre afin de confirmer l'efficacité de cette méthode d'optimisation sous contraintes.

II. 2. Les contraintes [13-16] :

En pratique il est habituel d'employer le GPC standard pour calculer le signal $u(t)$, sans contraintes, puis, de le saturer à ses limites permises. Cette façon de procéder ne garantit pas que soit obtenue l'optimalité quand les contraintes sont violées par la solution sans contraintes.

Afin d'illustrer ce fait, et pour considérer le cas de la violation des contraintes dans l'amplitude du signal d'entrée est représenté sur la figure II.1 un problème de GPC avec vecteur de commande de valeur 2. Sont tracées les courbes de valeur constante d'une fonction objective quadratique qui dépend de deux variables $\{u_1, u_2\}$.

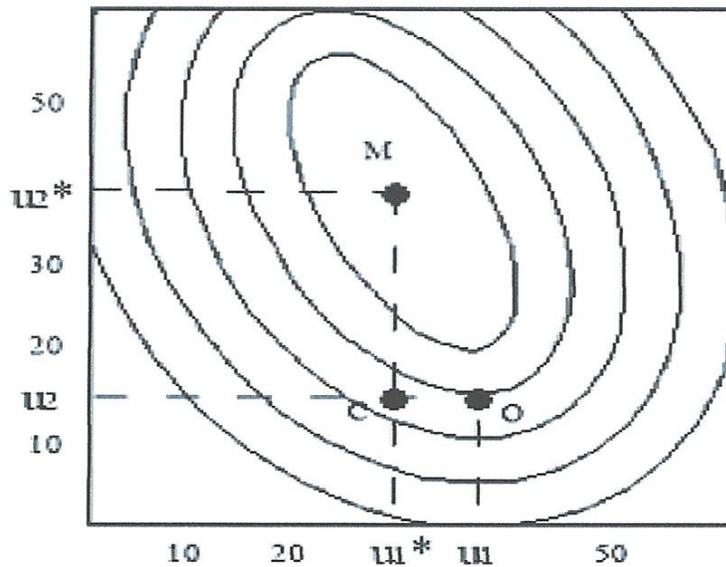


Figure II.1. Signal de commande avec des contraintes

Si les contraintes n'existent pas, la solution optimale de coût minimum est clairement donnée par $\{u_1^*, u_2^*\}$.

Si l'action de commande u_2 a une limite supérieure u_2 la solution appliquée par une stratégie ne prenant pas en compte des contraintes dans la minimisation sera $\{u_1^*, u_2\}$ qui correspond au point C de la figure.

Si l'action u_2 de commande a une limite supérieure u_2 et si les contraintes sont considérées dans l'optimisation, la solution optimale correspond au point O dans la figure : se maintient à sa valeur maximum u_2 mais u_1 est déplacé de sa valeur initiale u_1^* pour compenser la saturation de u_2 .

Le fait de ne pas considérer les contraintes dans les variables manipulables peut causer une détérioration de la fonction objectif et conduire à un comportement peu désirable du système commandé.

Pratiquement, les différentes contraintes qui existent peuvent être classées selon le schéma suivant [17] :

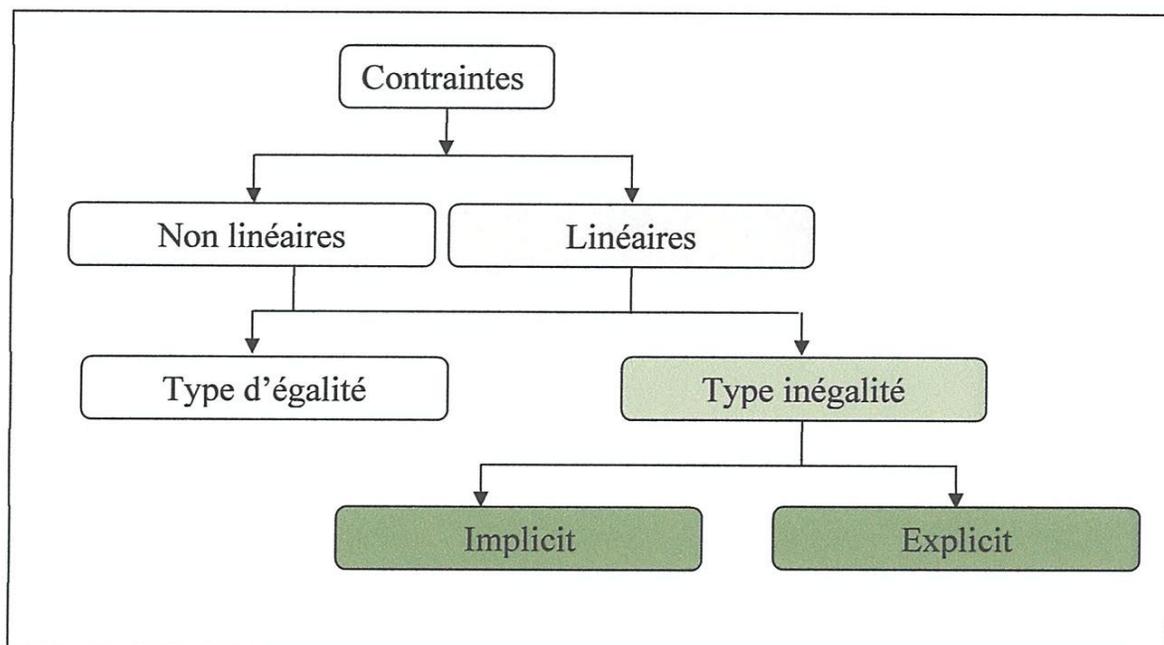


Figure II.2. Classification des contraintes

II. 3. Formulation de critère [18,19]:

La proposition principale du GPC, qui est d'appliquer la meilleure action de commande possible en vue de minimiser la fonction objective, ne sera pas atteinte de cette façon. Les différentes méthodologies de la commande GPC permettent d'anticiper la violation des contraintes compte tenu de leur caractère prédictif.

Les prochains paragraphes se proposent d'analyser les différentes contraintes considérées habituellement dans l'industrie des processus (autant du point de vue des contraintes physiques et de la sécurité, que du point de vue du comportement désiré), et de présenter la forme dans laquelle elles doivent être formulées pour les décrire dans l'étape d'optimisation.

II.3.1. Contraintes sur les incréments de commandes

Ces contraintes sont appelées « contraintes de saturations ». Dans ce travail, on s'intéresse ici par les contraintes linéaires d'inégalité explicite. Ces dernières sont données sous forme:

$$\begin{aligned} \Delta u_{\min} \leq \Delta u(t+j) \leq \Delta u_{\max} \\ N_{\min} \leq j \leq N_{\max} \end{aligned} \quad (2.1)$$

L'expression matricielle pour ce type de contraintes, en particulier les horizons de prédiction de commande $N_{\min} = 0$ et $N_{\max} = N_u - 1$, est donnée comme suit:

On obtient :

$$\begin{bmatrix} \Delta u_{\min} \\ \Delta u_{\min} \\ \vdots \\ \Delta u_{\min} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \Delta u(t+0) \\ \Delta u(t+1) \\ \vdots \\ \Delta u(t+N_u-1) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \Delta u_{\max} \\ \Delta u_{\max} \\ \vdots \\ \Delta u_{\max} \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \Delta U \leq \begin{bmatrix} \Delta u_{\max} \\ \Delta u_{\max} \\ \vdots \\ \Delta u_{\max} \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix} \Delta U \leq \begin{bmatrix} -\Delta u_{\min} \\ -\Delta u_{\min} \\ \vdots \\ -\Delta u_{\min} \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

II. 3.2. Contraintes sur l'amplitude du signal de commande

Les contraintes sur l'amplitude du signal de la commande, assez fréquentes en pratique (pour prendre en compte, par exemple, des effets de saturation à forts signaux), peuvent s'exprimer au moyen de l'inégalité suivante :

$$U_{\min} \leq u(t) \leq U_{\max} \quad (2.2)$$

Pour un processus de entrées et de sorties avec des contraintes sur tout l'horizon fuyant N d'optimisation

$$I \times U_{\min} \leq U(k) \leq I \times U_{\max} \quad (2.3)$$

Où $U(k) = [u(k) \ u(k+1) \ \dots \ u(k+N-1)]^T$. I est une matrice d'identité de dimension $N_u \times N_u$. Il convient parfois de représenter cette contrainte en fonction des accroissements successifs $\Delta u(t)$ de la commande, soit

$$I \times U_{\min} \leq T \times \Delta U \leq +I \times u(K-1) \leq I \times U_{\max} \quad (2.4)$$

Où T est une matrice triangulaire inférieure de dimension $N_u \times N_u$

II.3.3. Contraintes sur les signaux de sorties:

On s'intéresse ici par les contraintes linéaires d'inégalité implicite :

$$\begin{aligned} y_{\min} \leq y(t+j) \leq y_{\max} \\ N_{\min} \leq j \leq N_{\max} \end{aligned} \quad (2.5)$$

L'expression matricielle pour ce type de contraintes, en particulier les horizons de prédiction de sortie $N_{\min} = N_1 - 1$ et $N_{\max} = N_2 + N_1 - 1$, est donnée comme suit:

$$\begin{bmatrix} y_{\min} \\ y_{\min} \\ \vdots \\ y_{\min} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} y(t+j) \\ y(t+j) \\ \vdots \\ y(t+j) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} y_{\max} \\ y_{\max} \\ \vdots \\ y_{\max} \end{bmatrix}$$

En utilisant la relation (1.18) (i.e. $\hat{Y} = G \cdot \Delta U + f$) d'où l'expression (2.5) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} G \cdot \Delta U \leq \begin{bmatrix} -f(t+N_1-1) + y_{\max} \\ -f(t+N_1) + y_{\max} \\ \vdots \\ -f(t+N_2+N_1-1) + y_{\max} \end{bmatrix} \\ -G \cdot \Delta U \leq \begin{bmatrix} f(t+N_1-1) - y_{\min} \\ f(t+N_1) - y_{\min} \\ \vdots \\ f(t+N_2+N_1-1) - y_{\min} \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (2.6)$$

II.3.4. Contraintes terminales de type égalité:

Les contraintes terminales de type égalité peuvent être exigées pour forcer la sortie prédite de suivre la référence prédite durant un certain nombre d'échantillonnages N_s l'horizon N_2 . Ces contraintes peuvent prendre la structure :

$$\begin{aligned}
 y(t+j) &= w(t+j) \\
 j &= N_2 + 1, \dots, N_s
 \end{aligned}
 \tag{2.7}$$

Il s'agit encore une fois de contraintes linéaires d'égalité implicite. Le formalisme (2.8) peut être exprimé comme un ensemble de contraintes d'égalité sur les incréments de commandes future, en utilisant l'expression suivante :

$$\begin{cases}
 G_{N_s} \cdot \Delta U = y_{\max_{N_s}} - f \\
 -G_{N_s} \cdot \Delta U = -y_{\min_{N_s}} + f
 \end{cases}
 \tag{2.8}$$

$$\begin{cases}
 G_{N_s} \cdot \Delta U = y_{\max_{N_s}} - f \\
 -G_{N_s} \cdot \Delta U = -y_{\min_{N_s}} + f
 \end{cases}
 \tag{2.9}$$

II.3.5. Autres types de contraintes [20-21] :

En plus des contraintes décrites précédemment, d'autres contraintes peuvent être rencontrées lors des applications, comme par exemple imposer un comportement monotone pour éviter les oscillations, ou encore imposer des contraintes agissant sur le comportement des systèmes à déphasage non minimal.

II. 4. La programmation quadratique

En considérant l'optimisation « programmation quadratique », comme un ensemble particulier des problèmes de programmation non linéaires, où on peut souligner quelques points.

L'un des résultats importants de la programmation mathématique, est d'élaborer des concepts de convexité, ainsi, si le problème de programmation non linéaire, connu sous le nom de problème de programmation convexe, aura les propriétés suivantes :

- $J(u)$ est une fonction convexe.
- Chaque contrainte d'inégalité est une fonction convexe (Les contraintes forment un ensemble convexe), lors le minimum local est également un minimum global.

Dans les problèmes de programmation linéaire la fonction objective est toujours convexe, et les contraintes forment un ensemble convexe, ainsi, l'optimum local est toujours un optimum global. Pour la programmation quadratique la fonction objective est convexe si $u^T H u$ est semi défini positif, par conséquent H *doive* être semi défini positif.

Supposant que le problème de programmation quadratique à une fonction objective convexe, la deuxième condition doit avoir des contraintes qui forment un ensemble convexe.

Le point faisable ou le vecteur de programmation quadratique est n'importe quel vecteur qui satisfait les contraintes d'égalité et d'inégalité. L'ensemble de tous les vecteurs qui satisfont les contraintes constitue un domaine de fonction faisable. Un optimum sous contrainte est un ensemble dans lequel l'optimum local se trouve sur la frontière de la région faisable.

En relation avec juste les contraintes d'inégalité par point peuvent être classifiés comme point intérieur (un point faisable) ou un point extérieur (un point non faisable). Ainsi, un point intérieur est un point pour lequel toutes les contraintes d'inégalité sont strictement respectées. L'ensemble des points pour lesquels la fonction objective a une valeur constante s'appelle le contour de la fonction coût.

Dans le cas de la programmation non linéaire avec des contraintes d'inégalité et d'égalité, nous définissons un point à être un minimum local si la fonction objective ne peut pas diminuer le long d'aucun arc lisse dirigé de ce point dans la région faisable. Puisque les méthodes de programmation linéaires sont appliquées avec succès à des problèmes de grand dimensionnel (contenant des contraintes linéaires d'inégalité), la linéarisation du problème non linéaire semble être une approche sensible à la résolution de tels problèmes.

II. 4.1 Respect des contraintes :

Comme a été montré précédemment, les incréments de commande calculés par la stratégie GPC sont obtenus par la minimisation d'une fonction objective quadratique :

$$J = (y - w)^T (y - w) + \lambda \Delta u^T \Delta u \quad (2.10)$$

Avec w est futures références, y ordre de futures prédictions constituées par la réponse forcée et libre :

$$y = G \times \Delta u + f$$

Δu Sont les futurs incréments de commande, G matrice contient les coefficients de la réponse indicielle de la boucle ouverte du système et f contient les termes de présent et de passé des sorties et de passé des entrées de modèle (sortie de système si les incréments de commande sont égale à zéro) .Par la substitution des futures sorties dans la fonction de coût :

$$J = \frac{1}{2} \Delta u^T H \Delta u + b^T \Delta u + f_0 \quad (2.11).$$

Avec $H = 2(G^T G + \lambda I)$ et $b^T = 2(f - w)^T G$

La solution optimale sans contraintes est linéaire $\Delta u = -H^{-1}b$. Quand des contraintes sont prises en considération, il n'y a aucune solution explicite et des algorithmes d'optimisation doivent être employés. Dans ce cas-ci, le problème peut être posé comme une fonction de coût quadratique avec des contraintes linéaires d'inégalité et d'égalité en incrément de commande. C'est un problème de programmation quadratique. Les différentes contraintes qui peuvent être prises en considération sont montrées dans les paragraphes précédents.

II.5. Resultats de simulation

Dans cette partie, on désire appliquer la loi de GPC en présence des contraintes sur les signaux de commandes, de sorties ainsi que le signal de l'incrément de commande, et cela pour les deux systèmes discrets cités précédemment dans le chapitre 1.

II. 5.1. Modèle 1 :

Pour le premier système, les contraintes à satisfaire par la fonction *quadprog* sont imposées sur le signal d'incrément de commande comme suit :

$$-0.2 \leq \Delta u(t+j) \leq 0.2 \text{ où } j = 0, \dots, N_u - 1,$$

Les paramètres de réglage de la méthode GPC sont fixés comme ceux donnés dans le chapitre 1 avec : $N_2 = 5$, $N_u = 3$ et $\lambda = 0.1$

L'application de la fonction *Quadprog* pour chaque pas de discrétisation donne les résultats présentés par les figures suivantes :

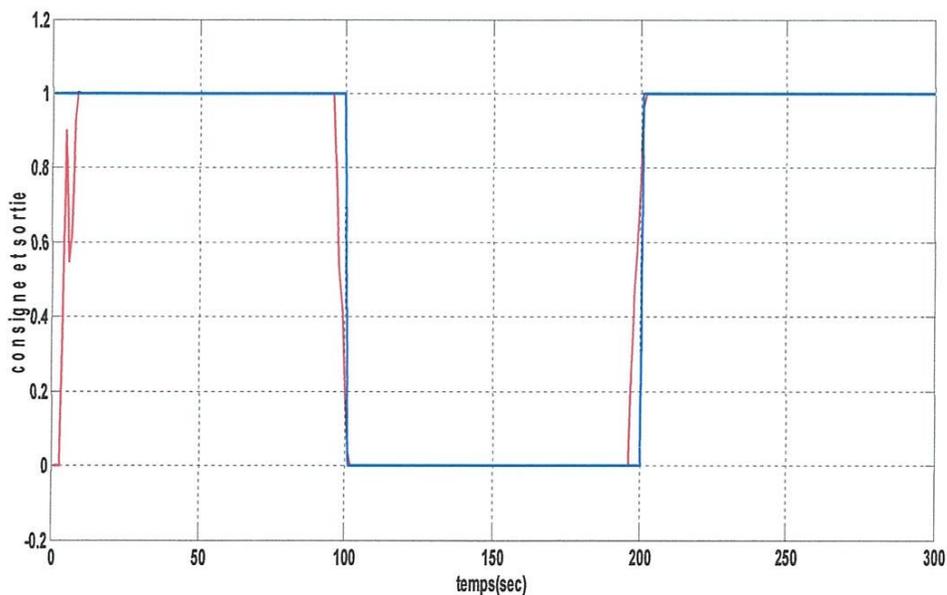


Figure II.3. Sortie fournie par la loi de GPC sous contraintes

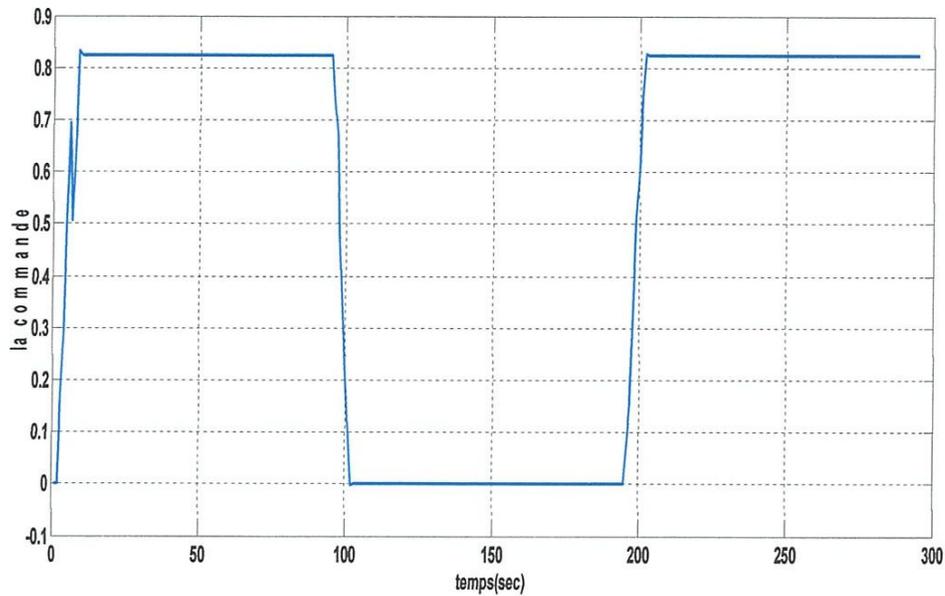


Figure II.4. Commande fournie par la loi de GPC sous contraintes

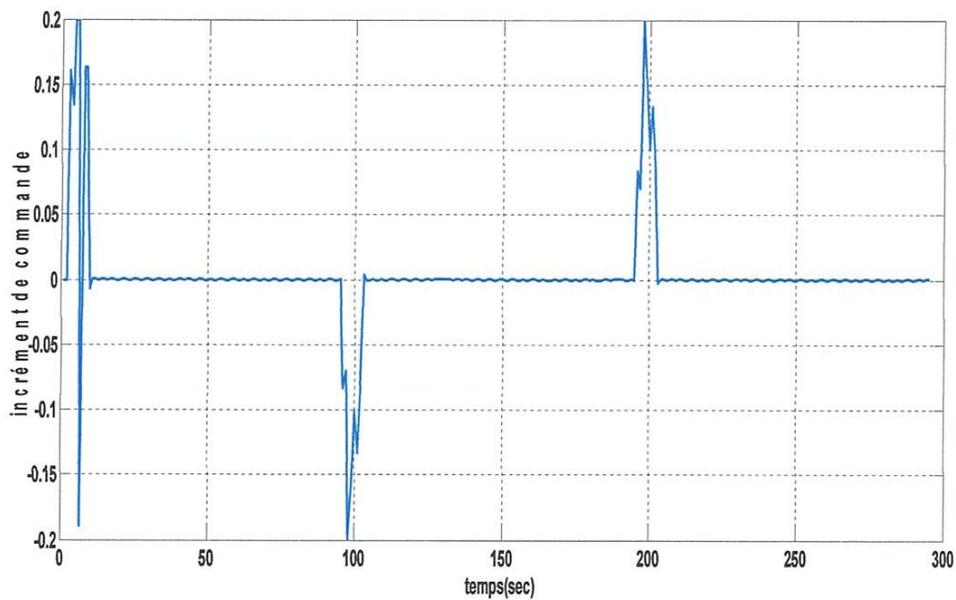


Figure II.5. Incrément de commande fournie par la loi d GPC

D'après la figure précédente, on a pu constater que toutes les contraintes imposées sont très satisfaisantes. de plus, la loi de GPC assure une bonne dynamique de poursuite de la trajectoire de référence. La qualité de cette dynamique est interprétée par un meilleur temps de réponse avec un temps de montée très rapide ainsi qu'une erreur statique presque nulle.

II.5.2. Modèle 2 :

Dans cette partie, les contraintes imposées sur le deuxième système (cité dans le chapitre1) sont définies par :

1- Sur l'incrément de commande avec:

$$-0.6 \leq \Delta u(t+j) \leq 0.6 \text{ où } j = 0, \dots, N_u - 1.$$

2- Sur la commande avec:

$$-0.6 \leq u(t+j) \leq 0.8 \text{ où } j = 0, \dots, N_u - 1.$$

3- Sur la sortie avec:

$$-2 \leq y(t+j) \leq 2 \text{ où } j = 0, \dots, N_2 - 1.$$

Les paramètres de réglage de la méthode GPC sont fixés comme ceux donnés dans le chapitre 1 avec : $N_2 = 9$, $N_u = 2$ et $\lambda = 0.01$. On obtient les figures suivantes :

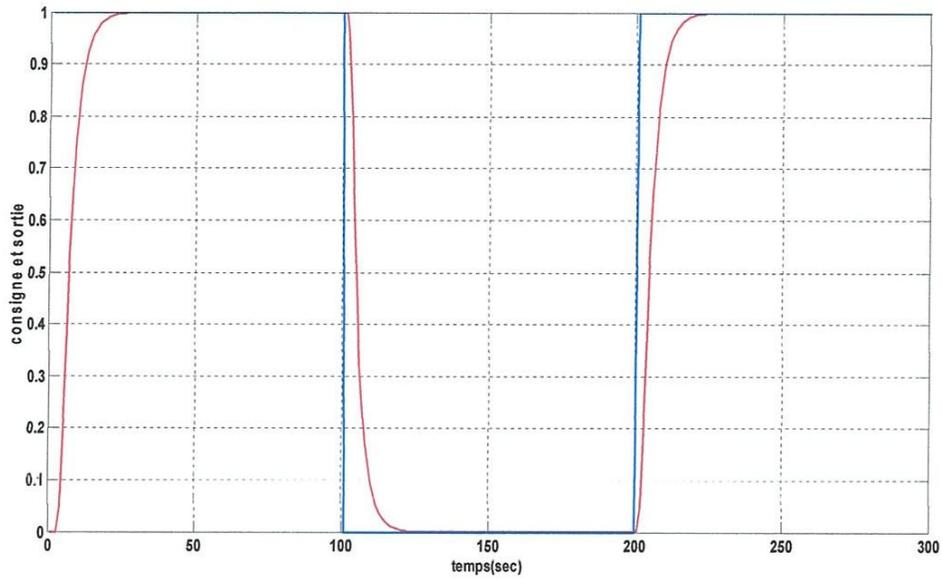


Figure II.6. Sortie du système bouclé

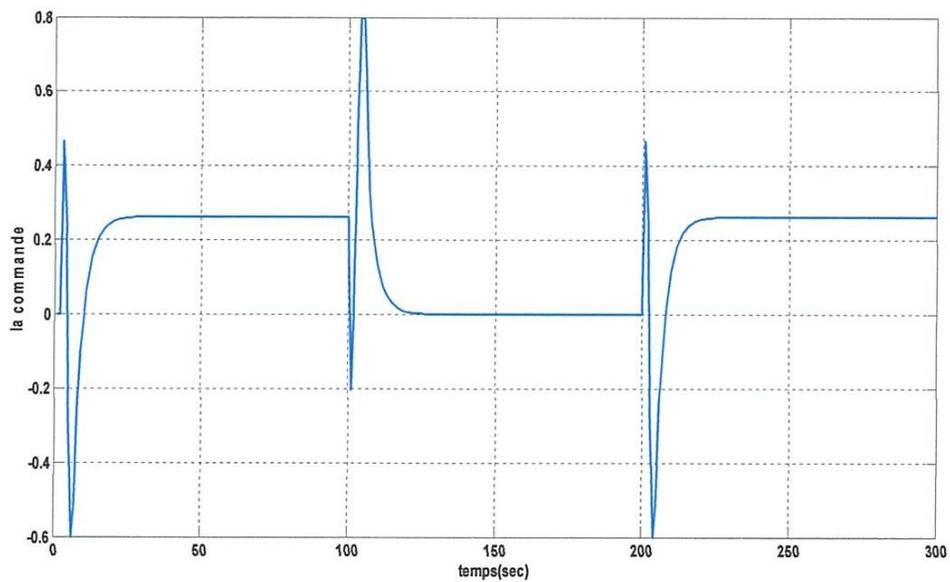


Figure II.7. Commande du système bouclé

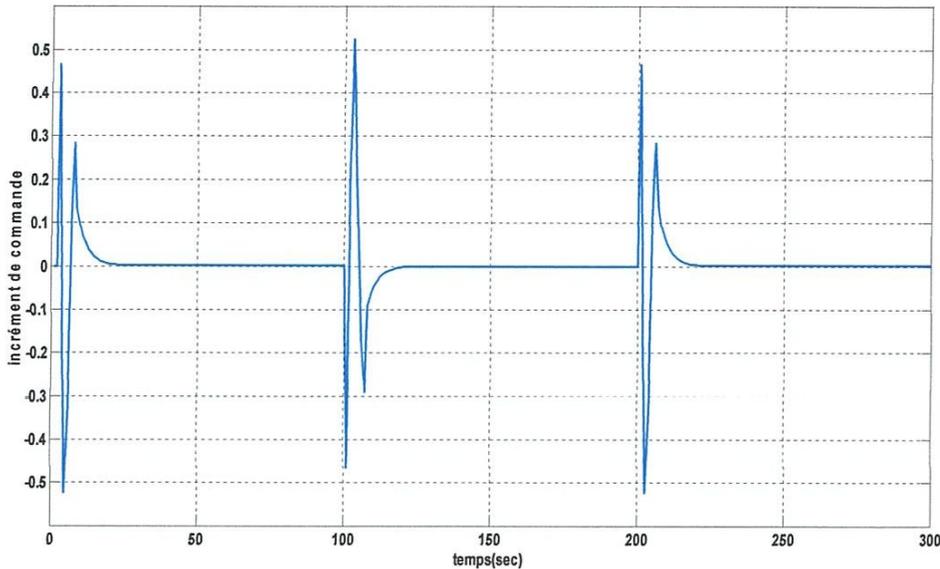


Figure II.8 Incréments de commande du système bouclé

D'après les figures précédentes, les résultats de simulation obtenus via la fonction *Quadprog* confirment que cette méthode de commande assure une bonne dynamique de poursuite avec une commande satisfaisant toutes les contraintes imposées par l'utilisateur.

II.6. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté la commande prédictive généralisée en présence des contraintes. Cette dernière est appliquée sur deux systèmes mono-variables. Ces contraintes sont classées suivant la nature exigée par l'utilisateur.

Ce type de commande peut être appliqué à des procédés difficiles à commander, à savoir, instable en boucle ouverte ou /et à phase minimale. Ceci grâce à un choix particulier des paramètres de réglage de GPC à savoir l'horizon de prédiction maximal du signal de sortie (N_2), l'horizon de prédiction de commande (N_u) et finalement, le coefficient de pondération λ .

Nous avons montré à partir d'une simulation effectuée sur deux systèmes mono-variables que la fonction *quadprog* offre une bonne minimisation du critère de GPC. Les performances de cette fonction du Matlab dépendent du choix des contraintes physiques imposées à l'avance par l'utilisateur. Dans le chapitre suivant, nous allons essayer de remplacer cette méthode d'optimisation par celle de dichotomie où cette dernière sera adaptée pour résoudre le problème de minimisation du critère de GPC.

Chapitre III
Application de la
méthode de
Dichotomie

III.1. Introduction :

Dans toute industrie, nous obtenons des produits finis en associant plusieurs techniques qui agissent simultanément à l'amélioration de notre produit, cela nous oblige à perfectionner une bonne méthode de commande ; l'automatique fait des progrès immenses dans ce sens.

La plupart des processus réels, pour ne pas dire tous, décrivent par des dynamiques non linéaires peuvent poser de sérieuses difficultés pour la synthèse d'un contrôleur, puisque la plupart des méthodes de commande les plus avancées opèrent avec un modèle linéaire. Parmi les méthodes les plus récentes et les plus performantes on trouve la méthode de GPC qui nécessite un modèle linéaire afin de développer une loi de commande satisfaisante.

L'application de la commande prédictive mono-variable utilisant la fonction *Quadprog* sur un système électromécanique, cité précédemment, donne une meilleure dynamique de poursuite, cette dernière dépend directement du choix donné avec précaution de l'ensemble des contraintes. Un tel choix peut limiter cette application du point de vue pratique.

Le domaine d'exploitation de cette méthode de commande dans l'industrie est étroit à cause de non linéarité des processus à commander. L'avancée de la recherche à donner une naissance à des méthodes de modélisation permettant de linéariser le système à commander autour d'un ou plusieurs points de fonctionnement. Parmi les plus utilisées on cite : la modélisation à base d'un modèle flou, modélisation par un réseau de neurone...etc. Leurs objectifs sont de représenter un processus non linéaire par un ensemble de modèles linéaires pour pouvoir appliquer la méthode de GPC dans tous les domaines industriels.

III. 2. Méthode de Dichotomie :

On commence par le cas unidimensionnel pour illustrer le principe de Dichotomie, ensuite on essaiera de le généraliser pour le cas multidimensionnel.

III. 2.1. Cas d'une fonction à une seule variable [22] :

Cette méthode permet, à chaque pas, de diviser par deux la longueur de l'intervalle contenant l'optimum en calculant la fonction J en deux points déterminés. En acceptant N évaluations de la fonction $J(\Delta U)$, on peut ainsi réduire la longueur initiale L^1 , dans un rapport de réduction :

$$\frac{L^n}{L^1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad (3.1)$$

Où n représente le nombre nécessaire pour réduire l'intervalle initial de L^1 à L^n

Les démarches à suivre pour localiser une solution d'un problème quadratique sous contraintes des bornes peuvent être résumées comme suit :

a) Au début (pour l'itération $k = 1$), on part de l'intervalle initiale $[\Delta u_{\min}^k \quad \Delta u_{\max}^k]$.

En considérant le point milieu c^k et les deux points de support Δu_1^k et Δu_2^k tels que :

$$c^k = \frac{\Delta u_{\max}^k + \Delta u_{\min}^k}{2} \quad (3.2)$$

$$\Delta u_1^k = \frac{\Delta u_{\min}^k + c_1^k}{2} \quad (3.3)$$

$$\Delta u_2^k = \frac{c_1^k + \Delta u_{\max}^k}{2} \quad (3.4)$$

- b) En évaluant la fonction J dans les trois points ci-dessus. Après, il est facile de voir que l'on peut toujours éliminer deux des quatre sous intervalles (parce que l'optimum ne peut y être situé) et qu'il subsiste seulement deux sous intervalles contigus :

$$\left\{ \left[\Delta u_{\min}^k \quad \Delta u_1^k \right], \left[\Delta u_1^k \quad c^k \right] \right\} \text{ où } \left\{ \left[c^k \quad \Delta u_2^k \right], \left[\Delta u_2^k \quad \Delta u_{\max}^k \right] \right\}.$$

- c) Le nouvel intervalle $\left[\Delta u_{\min}^{k+1} \quad \Delta u_{\max}^{k+1} \right]$ doit être choisit à partir de ces deux conditions :

$$\Delta u_{\min}^{k+1} \leftarrow c^k; \quad c^{k+1} \leftarrow \Delta u_2^k \quad \text{Si: } J(\Delta u_1^k) > J(\Delta u_2^k) \quad (3.5)$$

$$\Delta u_{\max}^{k+1} \leftarrow c^k; \quad c^{k+1} \leftarrow \Delta u_1^k \quad \text{Si: } J(\Delta u_1^k) < J(\Delta u_2^k) \quad (3.6)$$

- On se ramène ainsi au même problème sur le segment $\left[\Delta u_{\min}^{k+1} \quad \Delta u_{\max}^{k+1} \right]$ de longueur moitié et de point milieu c^{k+1} . Pour l'itération suivante, on aura uniquement deux évaluations de la fonction objective dans les points de support Δu_1^{k+1} et Δu_2^{k+1} .
- On réitère ce processus de réduction $(n-1)$ fois, la longueur de l'intervalle final sera alors :

$$L^n = \Delta u_{\max}^n - \Delta u_{\min}^n \quad (3.7)$$

Cette dernière peut être exprimée en fonction de l'intervalle initial avec :

$$L^n = \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \left(\Delta u_{\max}^1 - \Delta u_{\min}^1 \right) \quad (3.8)$$

On réalise trois évaluations de la fonction objective à la première itération, puis deux expériences à chaque itération suivante, soit au total :

$$N = 2(n-1)+1 \quad (3.9)$$

La relation entre le nombre d'évaluation de J et le rapport de

réduction $R_{dichotomie} = \frac{L^n}{L^1}$ s'écrit :

$$N = 1 + 2 \times \frac{\log(R_{dichotomie})}{\log\left(\frac{1}{2}\right)} \quad (3.10)$$

$$\text{Soit : } N = 1 - 2.89 \times \log(R_{dichotomie}) \quad (3.11)$$

Le tableau suivant, donne le rapport de réduction de l'intervalle initiale en fonction de nombre N de d'évaluations de la fonction J

$R_{dichotomie}$	N
10^{-2}	17
10^{-3}	23
10^{-4}	29

III. 2.2. Cas d'une fonction à plusieurs variables:

Le principe de la recherche multidimensionnelle de la solution du problème quadratique sous contraintes explicites par la méthode de Dichotomie est illustré par le cas tridimensionnel \mathfrak{R}^3 ci-dessous. Ce principe est généralisé, à chaque fois, pour l'ensemble de l'espace $\mathfrak{R}^n (n = N_u . m)$.

Considérons le problème quadratique sous contraintes de bornes dont les variables de la fonction objective J sont données par le vecteur $\Delta U = (\Delta u_1 \quad \Delta u_2 \quad \Delta u_3)^T$.

Supposons que l'on peut limiter la région de faisabilité par l'ensemble des contraintes :

$$\begin{cases} \gamma'_{1\min} \leq \Delta u_1 \leq \gamma'_{1\max} \\ \gamma'_{2\min} \leq \Delta u_2 \leq \gamma'_{2\max} \\ \gamma'_{3\min} \leq \Delta u_3 \leq \gamma'_{3\max} \end{cases} \quad (3.12)$$

Au départ, on suppose, pour $k = 1$, les intervalles $[\Delta u_{i\min}^k \quad \Delta u_{i\max}^k]_{i=1,\dots,n}$ donnés par :

$$[\Delta u_{i\min}^k \quad \Delta u_{i\max}^k] = [\gamma'_{i\min} \quad \gamma'_{i\max}] \quad (3.13)$$

Ces derniers peuvent être partitionnés tel que :

$$\text{voie}_i \rightarrow \Delta u_{i\min}^k \leq \Delta u_{i1}^k \leq c_i^k \leq \Delta u_{i2}^k \leq \Delta u_{i\max}^k \quad (3.14)$$

Avec:

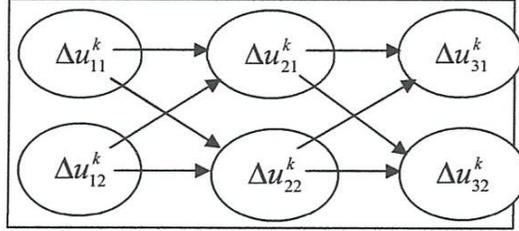
$$c_i^k = \frac{\Delta u_{i\min}^k + \Delta u_{i\max}^k}{2} \quad (3.15)$$

$$\Delta u_{i1}^k = \frac{\Delta u_{i\min}^k + c_i^k}{2} \quad (3.16)$$

$$\Delta u_{i2}^k = \frac{c_i^k + \Delta u_{i\max}^k}{2} \quad (3.17)$$

- A partie de ces points de supports, on peut construire

$s = 2^n$ vecteurs $y_{s(s=1,\dots,n)}$ selon la structure :



Avec:

$$y_1 = (\Delta u_{11}^k \quad \Delta u_{21}^k \quad \Delta u_{31}^k)^T, y_2 = (\Delta u_{11}^k \quad \Delta u_{21}^k \quad \Delta u_{32}^k)^T, y_3 = (\Delta u_{11}^k \quad \Delta u_{22}^k \quad \Delta u_{31}^k)^T, \\ y_4 = (\Delta u_{11}^k \quad \Delta u_{22}^k \quad \Delta u_{32}^k)^T \quad (3.18)$$

$$y_5 = (\Delta u_{12}^k \quad \Delta u_{21}^k \quad \Delta u_{31}^k)^T, y_6 = (\Delta u_{12}^k \quad \Delta u_{21}^k \quad \Delta u_{32}^k)^T, y_7 = (\Delta u_{12}^k \quad \Delta u_{22}^k \quad \Delta u_{31}^k)^T, \\ y_8 = (\Delta u_{12}^k \quad \Delta u_{22}^k \quad \Delta u_{32}^k)^T \quad (3.19)$$

- On évalue la fonction J pour chaque vecteur y_s , et on détermine celui qui fourni la plus petite valeur de J . noter le par $y_{r(1 \leq r \leq s)}$.

- A partir des composantes de y_r , on peut construire un nouveau intervalle

$[\Delta u_{\min}^{k+1} \quad \Delta u_{\max}^{k+1}]$ telles que les deux conditions suivantes :

- Si: $\Delta u_{ij(r)}^k < c_i^k \Rightarrow [\Delta u_{i \min}^{k+1} \quad \Delta u_{i \max}^{k+1}] = [\Delta u_{i \min}^k \quad c_i^k]$ (3.20)

- Sinon: $[\Delta u_{i \min}^{k+1} \quad \Delta u_{i \max}^{k+1}] = [c_i^k \quad \Delta u_{i \max}^k]$ (3.21)

- Si l'on suppose, par exemple, que $y_s = y_7$ le nouvel intervalle accepté sera :

$$\left[\Delta u_{\min}^{k+1} \quad \Delta u_{\max}^{k+1} \right] : \begin{cases} \Delta u_{12}^k > c_1^k \rightarrow \left[\Delta u_{1 \min}^{k+1} \quad \Delta u_{1 \max}^{k+1} \right] = \left[c_1^k \quad \Delta u_{1 \max}^k \right] \\ \Delta u_{22}^k > c_2^k \rightarrow \left[\Delta u_{2 \min}^{k+1} \quad \Delta u_{2 \max}^{k+1} \right] = \left[c_2^k \quad \Delta u_{2 \max}^k \right] \\ \Delta u_{31}^k < c_3^k \rightarrow \left[\Delta u_{3 \min}^{k+1} \quad \Delta u_{3 \max}^{k+1} \right] = \left[\Delta u_{3 \min}^k \quad c_3^k \right] \end{cases} \quad (3.22)$$

- On se ramène ainsi au même problème sur les segments $\left[\Delta u_{i \min}^{k+1} \quad \Delta u_{i \max}^{k+1} \right]$ de

$$\text{longueur égale à } L_i^{k+1} = \frac{1}{2} \left(\Delta u_{i \max}^k - \Delta u_{i \min}^k \right) \quad (3.23)$$

- On réitère ce processus de réduction $(n-1)$ fois, la longueur obtenue dans toutes les voies est égale à L^n et le nombre d'évaluation de la fonction objective devient alors :

$$N = 3^{m \times N_u} + 2^{m \times N_v} \cdot (n-1) \quad (3.24)$$

$$\text{Avec: } n = \max(n_1, n_2, \dots, n_n) \quad (3.25)$$

$$\text{Et : } n_i = 1 + \frac{\log\left(\frac{L^n}{L_i^1}\right)}{\log\left(\frac{1}{2}\right)} \quad (3.26)$$

III.3 Test de Simulation :

La loi de GPC sous contraintes utilisant la méthode de Dichotomie est appliquée sur le premier système cité précédemment dont les paramètres de réglage précédents sont toujours conservés.

Pour le système, les contraintes à satisfaire par la méthode de Dichotomie sont imposées sur le signal d'incrément de commande comme suit :

$$-0.2 \leq \Delta u(t + j) \leq 0.2 \text{ où } j = 0, \dots, N_u - 1.$$

Les paramètres de réglage de la méthode GPC sont fixés comme ceux donnés dans le chapitre 1 avec : $N_2 = 5$, $N_u = 3$ et $\lambda = 0.1$

L'application de la méthode de Dichotomie pour chaque pas de discrétisation donne les résultats présentés par les figures suivantes :

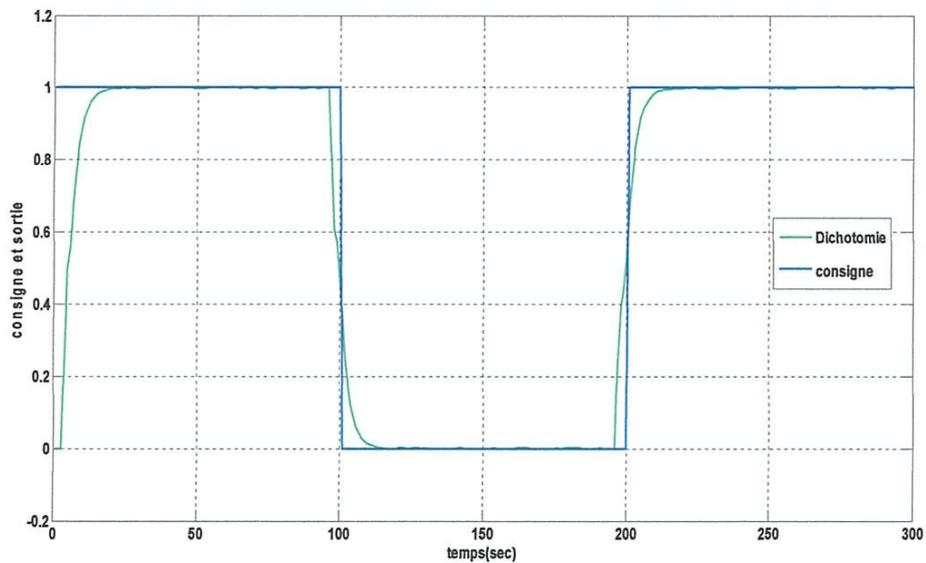


Figure III.1. Sorties obtenues via la méthode de Dichotomie

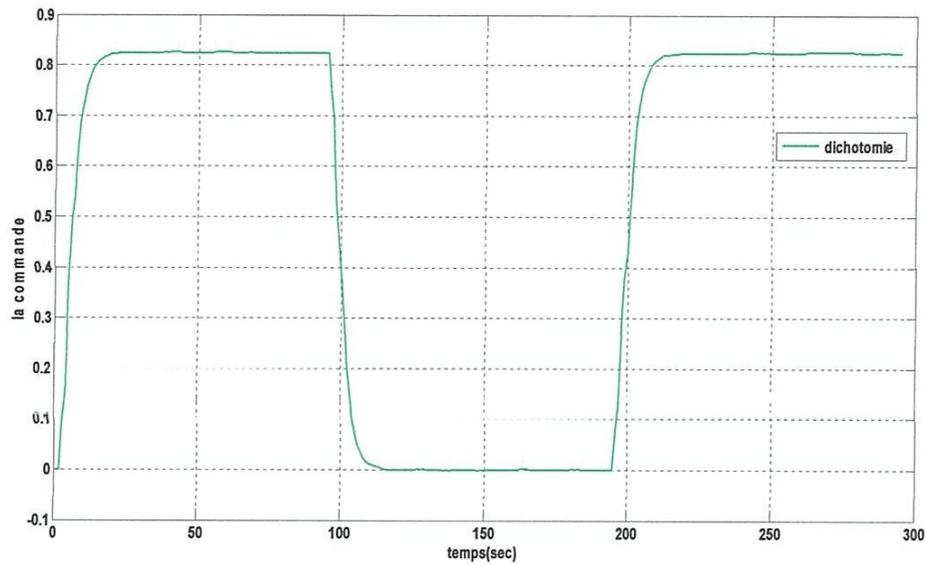


Figure III.2. Commande fournie par la méthode de Dichotomie

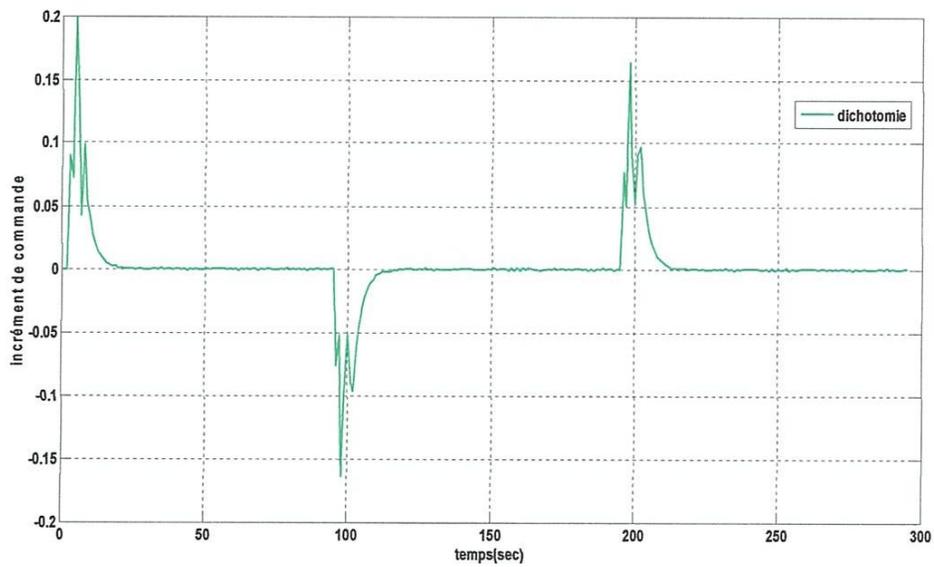


Figure III.3. Incrément de commande fournie par la méthode de Dichotomie

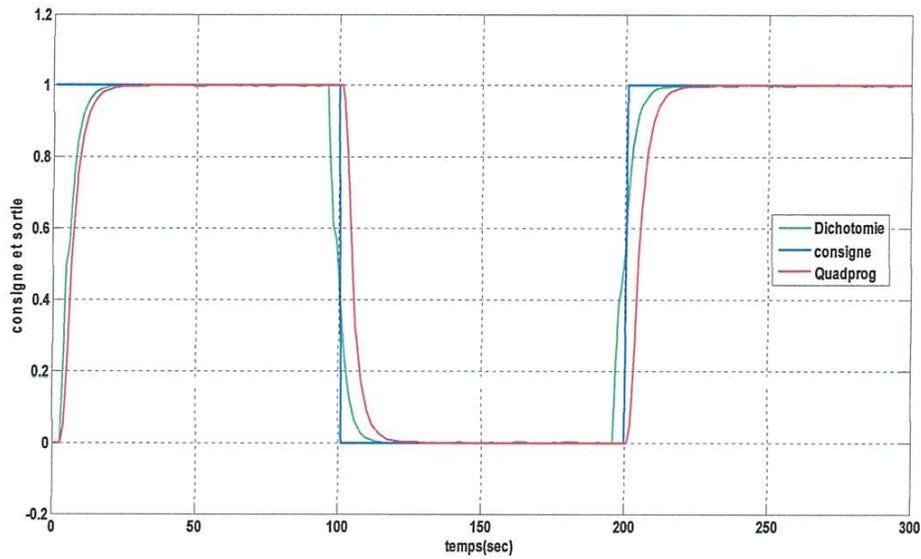


Figure III.4. Comparaison des sorties obtenues via Dichotomie et *Quadprog*

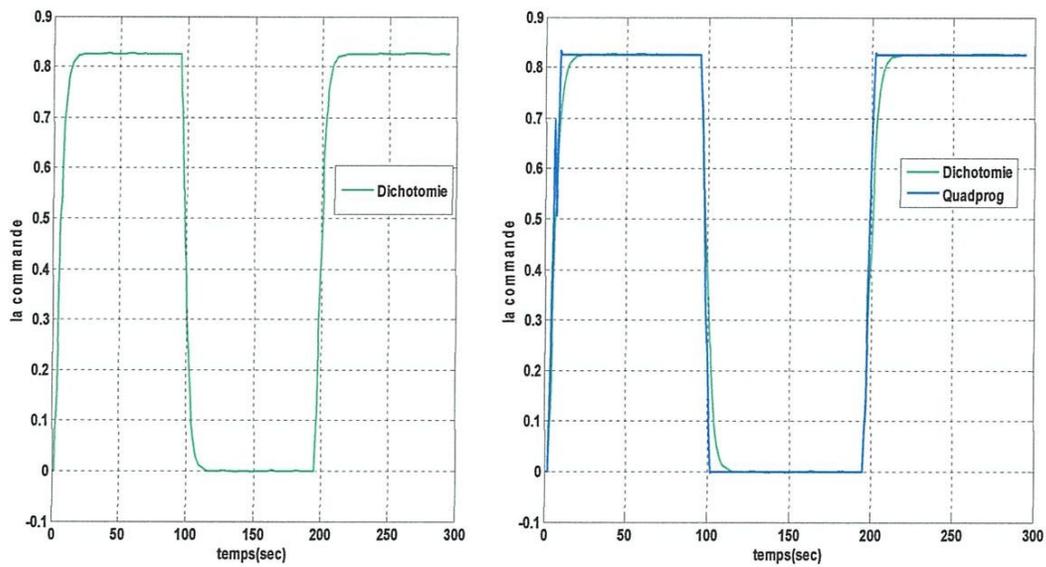


Figure III.5. Comparaison des commandes obtenues via Dichotomie et *Quadprog*

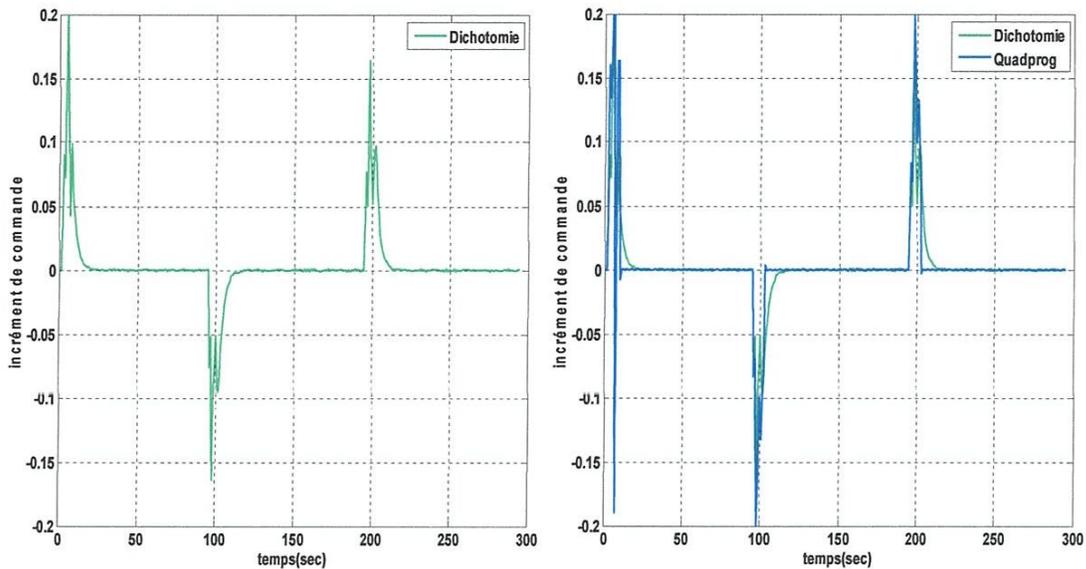


Figure III.6. Comparaison des incréments de commandes obtenus via Dichotomie et *Quadprog*

D'après les figures précédentes on peut constater que la méthode GPC basée sur la Dichotomie offre des meilleurs résultats par rapport à ceux fournis par la méthode de GPC utilisant la fonction de *Quadprog*. Ceci est traduit par l'obtention d'un temps de montée plus rapide que celui donné par la fonction *Quadprog*.

III.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les démarches de la méthode de Dichotomie ainsi que l'intégration de cette méthode dans l'algorithme de GPC. Cette méthode permet avec efficacité de minimiser le critère de performance de GPC où toutes les contraintes sur l'incrément de commande sont satisfaisantes.

L'application de cette méthode en présence d'autres contraintes comme celle imposées sur les signaux de commande ainsi que sur la sortie du système à commander reste toujours une porte ouverte pour d'autres ultérieures recherches.

Conclusion générale

CONCLUSION

Dans ce travail on a étudié la commande prédictive généralisée comme étant une technique moderne, On a présenté le principe et la philosophie de la commande prédictive généralisé, et la GPC avec son approche algorithmique.

On a vu que les polynôme du modél CARIMA joue un rôle d'observateur de la loi de commande et peut être utilisé comme un paramètre de réglage, Dans la suite on a traité le problème des contraintes qui apparaît souvent dans les systèmes industriels.

On a utilisé, dans la phase d'optimisation, la méthode *Quadprog* pour la minimisation de la fonction coût de GPC. Cette dernière est donnée sous forme quadratique où sa minimisation assure une solution optimale.

On a présenté, à la fin de ce mémoire, une application de la commande prédictive généralisée à base de la méthode de Dichotomie qui donne de meilleurs résultats avec un domaine de variation des incréments et des commandes moins réduites par rapport à la méthode *Quadprog*.

Annexe

A.1. Calcul de prédicteur

La quantité $\hat{y}(t+j/t)$ fera la référence au prédicteur de la sortie du processus calculée à l'instant courante t , depuis l'instant $t+N_1$ jusqu'à l'instant $t+N_2$.

On pose que :

$$C(q^{-1}) = E_j(q^{-1}) \cdot \Delta + q^{-j} F_j(q^{-1}) \quad (1)$$

Cette dernière équation (1) est appel : équation de DIOPHANTINE, et puisque :

$C(q^{-1}) = 1$, on a :

$$1 = E_j A(q^{-1}) \cdot \Delta + q^{-j} F_j(q^{-1}) \quad (2)$$

Pour obtenir la quantité $y(t+j)$, on multiplie l'équation (1.7) par la quantité

$E_j \cdot \Delta \cdot q^j$ On aura :

$$A \cdot E_j \cdot \Delta \cdot y(t+j) = B \cdot E_j \cdot \Delta \cdot u(t+j-1) + e(t) \cdot E_j \cdot q^j$$

Sachant que $e(t) \cdot q^j = e(t+j)$, on obtient :

$$A \cdot E_j \cdot \Delta \cdot y(t+j) = B \cdot E_j \cdot \Delta \cdot u(t+j-1) + E_j \cdot e(t+j) \quad (3)$$

D'après l'équation (2), on a : $E_j \cdot A \cdots \Delta + 1 - q^{-j} \cdot F_j$

Alors :

$$(1 - q^{-j} \cdot F_j) \cdot y(t+j) = B \cdot E_j \cdot \Delta \cdot u(t+j-1) + E_j e(t+j)$$

D'où :

$$y(t+j) = F_j \cdot y(t) + B \cdot E_j \cdot \Delta \cdot u(t+j-1) + e(t+j) \cdot E_j \quad (4)$$

Avec :

$$\Delta \cdot u(t+j-1) = u(t+j-1) - u(t+j-2)$$

Le prédicteur

$$\hat{y}(t+j/t) = B \cdot E_j \cdot \Delta u(t+j-1) + F_j \cdot y(t)$$

$$G_j = B \cdot E_j$$

$$y(t+j/t) = G_j \Delta u(t+j-1) + F_j y(t) \quad (5)$$

Où :

$$G_j = g_{j0} + g_{j1} \cdot q^{-1} + g_{j2} q^{-2} + \dots + g_{jnb+j-1} \cdot q^{-(nb+j-1)}$$

$$E_j = e_{j0} + e_{j1} q^{-1} + \dots + e_{jj} z^{-(j-1)} \quad (e_{j0} = 1)$$

$$F_j = f_{j0} + f_{j1}q^{-1} + \dots + f_{jna}q^{-na}.$$

$$y(t+1/t) = G_1 \Delta u(t) + F_1 y(t)$$

$$= g_{10} \Delta u(t) + (G_1 - g_{10}) \Delta u(t) + F_1 y(t) \quad (6)$$

$$= g_{10} \Delta u(t) + f(t+1) \quad (7)$$

$$y(t+2/t) = G_2 \Delta u(t+1) + F_2 y(t) \quad (8)$$

$$= g_{20} \Delta u(t+1) + g_{21} \Delta u(t) + (G_2 - g_{20} - g_{21}q^{-1}) \Delta u(t+1) + F_2 y(t) \quad (9)$$

$$= g_{20} \Delta u(t+1) + g_{21} \Delta u(t) + f(t+2) \quad (10)$$

$$\hat{y} = f + G \cdot u \quad (11)$$

$$\dot{y} = [y(t+1), y(t+2), \dots, y(t+N)] \quad (12)$$

$$u^T = [\Delta u(t), \Delta u(t+1), \dots, \Delta u(t+N-1)] \quad (13)$$

$$f_{co} = [f(t+1), f(t+2), \dots, f(t+N)] \quad (14)$$

$$J = E[(\hat{y} - w)^T \cdot (\hat{y} - w) + \lambda \cdot u^T \cdot u] \quad (15)$$

$$J = (G \cdot u + f - w)^T (G \cdot u + f - w) + \lambda \cdot u^T \cdot u \quad (16)$$

$$u = [G^T \cdot G + \lambda \cdot I]^{-1} \cdot G^T \cdot (w - f)$$

References

Références:

- [1] E.F.Camacho, “*Constrained Generalised Predictive Control*”, IEEE Transaction. on Automatic Control, AC-38, pp.327-332, (2)1993.
- [2] E.F.Camacho, C. Bordons, “ *Model Predictive Control* ”, edition Springer-Verlag London,GB,1999
- [3] P.J. Campo, M. Morari, “*infinity-norm formulation of model predictive control problems*”, in proc. American Control conf., Seattle, WA, pp.339-342, 1986.
- [4] Clark, D. W., C. Mohtadi,” *Properties of generalized predictive control*”. Automatica, pp.859-875, (26)1989.
- [5] D. W.Clark, , C. Mohtadi, and P.S. Tuffs, “*Generalized Predictive Control –Part I : The basic algorithm – Part II: extensions and interpretation*”, Automatica, pp.137-160, (23)1987.
- [6] D.W. Clarke, C.Mohtadi, P.S. Tuffs. “*Predictive application of constrained receding horizon control to the benchmark problem*” European control conf. Rome, Italy, pp. 22-24, Sep. 1995.
- [7] C.R.Cutler, B.L.Ramaker, “*Dynamic matrix control: a computer control algorithm*”. Proc. of the Joint American Control Conference.San Francisco, California, USA, pp 36-38, 1986.
- [8] T.S.Chang, D.E.Seborg, “*A linear approach programming for multivariables feedback control with inequality constraints*”, Int. J. of control, pp.583-597, (37)1983.
- [9] D.W.Clark,F.R.Scattolini,“*Constrained Receding Horizon Predictive Control* ”, (CRHPC),*IEE Proceedings*, .vol. 138, July, (4)1991.
- [10] R.Y. Chiang and M. G. Safonov, “*Robust control tool Box: Users Guides*”, version 2, 1999.
- [11] L.Cuvillon, “*Compensation Du Battement Cardiaque en Chirurgie Robotisée : Asservissement Visuel D’un Robot Médical Avec Flexibilités*”, Thèse présentée pour obtenir le grade de Docteur de l’Université Louis Pasteur Strasbourg I, 2006.
- [12] J.M Dion, L. Dugard, T. Nguyenminh. “*Some developments on the order adaptive multi-variable*”, lab. of car. Grenoble, (Uacnrs 228), 24-145-170, pp.144 – 168, 1990.
- [13] R. Fletcher, ” *Practical method of optimisation* ”, (John Wiley and Sons, 1990).

-
- [14] A.Gourdin, M.Boumahrat, «*Méthode numériques appliquées* », seconde édition, O.P.U, pp.87-94, 1991
- [15] C.E. Garcia, D.M. Prett, A.M. Morshedi, “*Quadratic programming Solution of Dynamic matrix control (QDMC)*”, Chem, Eng. Commun. pp.73-87, (46)1986
- [16] A.Ishikawa, M. Ohshima, M. Tanigaki, “*A practical method of removing ill-conditioning in industrial constrained predictive control*”, Computer chem Engng, Vol. 21, Suppl, pp. S1093-S1098, Elsevier Science Ltd Printed in Great Britain,1997.
- [17] A.G. Kuznetsov, D. W. Clarke, “*Application of constrained GPC for improving performance of controlled plants*”, in D.W. Clarke (Ed.), *Advances in model-Based Predictive Control*, Oxford Science. pp.318-329, 1984.
- [18] R.M.C.de Keyzer, A.R.van Cauwenberghe,” *Extended prediction self-adaptive control*”. IEEE Transactions on Automatic Control, pp.831-847, (34)1989.
- [19] B. Kouvaritakis, J.A. Rossiter, A.O.T.Chang, “*Stable GPC: n algorithm with guaranteed stability*”, *IEE Proceeding*, part D, vol.139, pp.349-362, (4)1992.
- [20] D.R Lewing, “*Stable robust performance specifications for uncertain SISO systems*”, Int. J. Control, pp.1263-1281, (53)1989.
- [21] G.Lightbody,G.W.Irwin, “*Non linear Control Structures Based on Embedded Neural System Models*”, *IEEE Transaction.on Neural Networks*, pp.553-567, (8)1997.
- [22] A.Gourdin, M.Boumahrat, «*Méthode numériques appliquées* », seconde édition, O.P.U, pp.87-94, 1991
-

