الجمـــهورية الجزائريـــة الديمقراطيـــة الشعبيـــة
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Université 8 mai 1945 Guelma

وزارة التعليم العالــي
و البحث العلمي
جامعة 8 مــاي 1945 قالمــة

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière

Département de Mathématiques

THÈSE

Présentée en vu de l'obtention du diplôme de Doctorat

Option : Mathématiques Appliquées

Intitulée

Sur quelques inégalités intégrales de type Pachpatte -Bihari et Hermite-Hadamard à une et à deux variables et applications

Par

Tarik CHIHEB

Devant le jury composé de :

Mr. F. ELLAGGOUNE	Prof. Université de Guelma	Président
Mr. K. BOUKERRIOUA	MCA. Université d'Annaba	Encadreur
Mr. A. CHAOUI	Prof. Université de Guelma	Co-Encadreur
Mme. A. GUEZANE-LAKOUD	Prof. Université d'Annaba	Examinateur
Mr. R.KHALDI	Prof. Université d'Annaba	Examinateur
Mme. A.FRIOUI	MCA. Université de Guelma	Examinateur

Thèse soutenue le : 12 juillet 2018

Remerciement

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur **K. BOUKERRIOUA**, Maître de conférences à l'Université d'Annaba, de m'avoir proposé ce sujet. C'est à sa grande disponibilité, ses conseils judicieux que j'ai pu mener à bien ce travail.

Je tiens à remercier Monsieur **F. ELLAGGOUNE**, Professeur à l'Université de Guelma pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de cette thèse.

Je remercie également Madame **A. Guezane-Lakoud**, Professeur à l'Université d'Annaba, Monsieur **R. Khaldi**, Professeur à l'Université d'Annaba, Monsieur **A. CHAOUI**, Professeur à l'Université de Guelma et Madame **A. Frioui**, Maître de conférences à l'Université de Guelma de leurs consentements à faire partie du jury.

Je n'oublierai jamais l'aide et l'accompagnement de mon ami **B. Meftah**, Maître de conférences à l'Université de Guelma et que je ne trouve pas les mots pour lui exprimer ma reconnaissance et mes remerciements.

Que toute ma famille et tous mes amis ainsi que toute personne ayant contribué de près ou de loin, à la réalisation de cette thèse, trouvent ici l'expression de ma connaissance pour leurs soutiens, leurs aides et leurs encouragements durant ces années de travail.

Résumé

L'objectif de cette thèse est d'établir de nouvelles inégalités intégrales de type Pachpatte-Bihari sur les échelles de temps pour les fonctions à deux variables. Ainsi que de nouvelles généralisations des inégalités de type Hermite-Hadamard classiques et fractionnaires.

Concernant les inégalités de type Pachpatte-Bihari, nous exposerons dans un premier temps certains résultats classiques pour les fonctions à une et à deux variables sur les échelles de temps, ensuite nous présenterons des nouvelles généralisations qui ont fait l'objet de la publication internationale

K. Boukerrioua, D.Diabi and **T. Chiheb**, Further nonlinear integral inequalities in two independent variables on time scales and their applications. Malaya J. Mat. 5 (2017), no. 1, 109--114.

Concernant les inégalités intégrales de type Hermite-Hadamard, nous avons introduit de nouvelles classes de non convexité pour les fonctions à une et deux variables ce qui nous ont permis d'établir de nouvelles généralisations, ces dernières ont fait l'objet des publications suivantes :

- **K. Boukerrioua**, **T. Chiheb** and B. Meftah, Fractional Hermite-Hadamard type inequalities for functions whose second derivative are (s,r)-convex in the second sense. Kragujevac J. Math. 40 (2016), no. 2, 172--191.

- **K. Boukerrioua**, B. Meftah and **T. Chiheb**, Note on some Iyengar integral inequalities. Commun.Nonlinear Anal.3 (2017), 87--90.

- B. Meftah, **K. Boukerrioua** and **T. Chiheb**, New Hadamard's inequalities for (s_1,s_2)-preinvex functions on coordinates. Kragujevac Journal of Mathematics. 39 (2015), no. 2, 231-254.

- B. Meftah, **K. Boukerrioua** and **T. Chiheb**, Hadamard type inequalities for R (s,r)-preinvex functions in the first sense. Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications Vol. 5 (2017) no. 2, pp. 170-190.

- B. Meftah, **K. Boukerrioua** and **T. Chiheb**, On some new Hadamard type inequalities for (s,r)-preinvex functions in the second sense. Konuralp Journal of Mathematics. 5 (2017), no. 1, 24-42.

Mots clés :

Inégalités intégrales, équation dynamique, échelle de temps, inégalité de Pachpatte-bihari, inégalité de Hermite-Hadamard.

Abstract

The aim of this thesis is to establish new integral Pachpatte-Bihari inequalities on time scales for functions of two independent variable. As well as new generalizations of classical and fractional Hermite-Hadamard inequalities.

Concerning the Pachpatte-Bihari inequalities, we will first present some classical results for functions of one and two variable on time scales, then we will present new generalizations that have been the subject of international publication.

K. Boukerrioua, D. Diabi and **T. Chiheb**, Further nonlinear integral inequalities in two independent variables on time scales and their applications. Malaya J. Mat.5 (2017), no. 1, 109--114.

Concerning integral inequalities of the Hermite-Hadamard type, we introduced new classes of non-convexity for the functions with one and two variables which allowed us to establish new generalizations, these were the subject of the following publications:

- **K. Boukerrioua**, **T. Chiheb** and B. Meftah, Fractional Hermite-Hadamard type inequalities for functions whose second derivative are (s, r) -convex in the second sense. Kragujevac J. Math. 40 (2016), no. 2, 172-191.

- **K. Boukerrioua**, B. Meftah and **T. Chiheb**, Note on some Iyengar integral inequalities. Common. Nonlinear Anal.3 (2017), 87--90.

- B. Meftah, **K. Boukerrioua** and **T. Chiheb**, New Hadamard's inequalities for (s_1, s_2) -preinvex functions on coordinates. Kragujevac Journal of Mathematics. 39 (2015), no. 2, 231-254.

- B. Meftah, **K. Boukerrioua** and **T. Chiheb**, Hadamard type inequalities for R (s, r)-preinvex functions in the first sense. Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications Vol. 5 (2017) no. 2, pp. 170-190.

- **B. Meftah**, K. Boukerrioua and **T. Chiheb**, On some new Hadamard type inequalities for (s, r)-preinvex functions in the second sense. Konuralp Journal of Mathematics. 5 (2017), no. 1, 24-42.

Keywords:

Integral inequalities, dynamic equation, time scale, Pachpatte-Bihari inequality, Hermite-Hadamard inequality.

ملخص

الهدف من هذه الأطروحة هو إنشاء متباينات جديدة من نوع بشبات-بيهاري على السلاسل الزمنية، حيث قمنا في البداية بسرد بعض النتائج المعروفة ثم قدّمنا نتائج جديدة لهذا النوع من المتباينات فيما يخص الدوال ذات متغيرين.

أما فيما يخص المتراجحات التكاملية من نوع هرميت-هدامارد عرّفنا بعض فئات اللاتحدّب كما قمنا بإنشاء متباينات جديدة من نوع هرميت-هدامارد الكلاسيكية و الكسرية، أسفرت هذه الدراسة على ستة منشورات دولية.

الكلمات المفتاحية:

المتراجحات التكاملية، معادلة الحركة، السلاسل الزمنية، متراجحات بشبات-بيهاري، متراجحات هرميت-هدامارد.

Table des matières

Introduction

Les inégalités jouent un rôle important dans divers branches de mathématiques modernes telles que la théorie des probabilités et des statistiques, l'analyse réelle, l'analyse complexe, l'analyse numérique. En particulier les inégalités intégrales ont connues un grand développement et des nouvelles idées et techniques sont apparues ce qui a contribué à la résolution de nombreux problèmes importants en théorie de l'approximation et en analyse numérique où l'estimation des erreurs d'approximation est exigée. Par ailleurs l'importance de ces inégalités intégrales intervient en grande partie dans l'étude des équations intégrales et plus généralement dans le cadre des équations différentielles ordinaires au point de vue existence des solutions et stabilité des points d'équilibres. La littérature dans ce sens est très riche et connaît une croissance explosive en théorie et aux applications, pour plus de détails on peut consulter les travaux de : Pachpatte [63], Burton [22], Corduneanu [23-25], Gripenberg et al. [32], Tricomi [73], Beckenbach et Bellman [8], Lakshmikantham et Leela [41], Filatov et Sharov [30], Mitrinović, Pečarić et Fink [51-53], Bainov et Simeonov [6] et Dragomir [28].

L'objectif principale de cette thèse est d'établir, dans un premier temps de nouvelles généralisations des inégalités intégrales de type Pachpatte-Bihari pour les fonctions à deux variables indépendantes sur des échelles de temps. Et dans un second temps en se basant sur le travail [43], nous introduisons de nouvelles classes de convexité pour les fonctions à une et à deux variables. Ensuite, nous établissons de nouvelles inégalités intégrales de type Hermite-Hadamard classique et fractionnaire.

Cette thèse est structurée comme suit :

Le premier chapitre donne quelques notions de base concernant la théorie des échelles de temps, ainsi que quelques résultats importants d'analyse qui seront utilisés ultérieurement.

Le second chapitre concerne les inégalités intégrales de type Pachpatte-Bihari, nous commençons par citer quelques résultats classiques de type Gronwall-Bellman à une et à deux variables, puis nous établissons de nouvelles généralisations concernant les inégalités intégrale de type Pachpatte-Bihari en dimension deux sur une échelle de temps quelconque et nous concluons ce chapitre par des exemples illustratifs des nouveaux résultats. Ces exemples traitent l'estimation de la solution d'un type d'équations différentielles partielles non linéaires. Ce travail a fait l'objet de la publication suivante :

- **K. Boukerrioua, D. Diabi and T.Chiheb**, Further nonlinear integral inequalities in two independent variables on time scales and their applications. Malaya J. Mat. 5 (2017), no. 1, 109–114.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude des inégalités intégrales de type Hermite-Hadamard à une et à deux variables. Nous présentons de nouvelles définitions portées sur la convexité, puis nous établissons de nouvelles inégalités intégrales de type Hermite-Hadamard généralisant des résultats connus dans la littérature [7, 26, 54, 58, 59, 74, 68, 80]. Les résultats obtenus ont fait l'objet des publications :

- **B. Meftah and K. Boukerrioua and T. Chiheb**, New Hadamard's inequalities for (s_1, s_2)-preinvex functions on coordinates. Kragujevac Journal of Mathematics. 39 (2015), no. 2, 231–254.

- **B. Meftah and K. Boukerrioua and T. Chiheb**, Hadamard type inequalities for (s, r)-preinvex functions in the first sense. Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications Vol. 5 (2017) no. 2, pp. 170-190.

- **B. Meftah and K. Boukerrioua and T. Chiheb** , On some new Hadamard type inequalities for (s, r)-preinvex functions in the second sense. Konuralp Journal of Mathematics. 5 (2017), no. 1, 24-42.

Le quatrième chapitre sera consacré à l'étude des inégalités intégrales fractionnaire de type Hermite-Hadamard via l'opérateur de Riemann-Liouville dont les résultats obtenus ont fait l'objet de la publication suivante : :

- **K. Boukerrioua, T. Chiheb and B. Meftah**, Fractional Hermite-Hadamard type inequalities for functions whose second derivative are (s, r)-convex in the second sense. Kragujevac J. Math. 40 (2016), no. 2, 172–191.

Chapitre 1

Notations et préliminaires

Dans ce chapitre, nous introduisons en premier temps les échelles de temps. Nous présentons également des résultats usuels relatifs à la dérivation et l'intégration pour des fonctions définies sur des échelles de temps arbitraires, puis dans un second temps, nous rappelons quelques résultats classiques sur la convexité, le calcul fractionnaire et quelques lemmes importants qui seront très utiles dans la suite.

1.1 Introduction aux échelles de temps

La théorie des échelles de temps est une nouvelle théorie introduite par Stefane Hilger [36] dans sa thèse de doctorat en 1988, dont le but essentiel est d'unifier le cas continu et le cas discret, où il a notamment défini la Δ-dérivée. C'est à partir de cette définition qu'ont été introduites les équations aux échelles de temps qui ont la même forme qu'une équation différentielle ou presque, à titre d'exemple : une équation du premier ordre dont la dérivée (u') est remplacée par la Δ-dérivée (u^{Δ}). Nous verrons plus loin que si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, la Δ-dérivée équivaut à la dérivée au sens classique et les équations aux échelles de temps deviennent des équations différentielles. Si $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, les équations aux échelles de temps deviennent des équations aux différences finies. D'ailleurs, l'intérêt pour ce dernier type d'équations a connu un essor considérable au cours des dernières années pour expliquer plusieurs phénomènes discrets notamment en économie, psychologie, génie et en informatique, ainsi les équations aux différences finies sont abondamment utilisées pour faire avancer cette science. En plus de $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}$, il est possible d'utiliser toutes sortes d'autres échelles de temps comme par exemple, pour une constante $q > 0$, l'échelle $\mathbb{T} := \{qz : z \in \mathbb{Z}\}$. Pour cette dernière échelle, les équations aux échelles de temps sont appelées les équations aux q-différences (q-difference equations) sont utilisées en physique. Ainsi, la théorie des équations aux échelles de temps vient dans un premier temps unifier les résultats des études réalisées dans le domaine des équations différentielles et des équations aux différences finies. En travaillant sous l'angle d'une échelle de temps générale, il est possible de faire progresser simultanément ces deux champs de mathématiques. Dans un deuxième temps, la théorie développée autour des échelles de temps permet l'étude des phénomènes se modélisant d'une façon qui fait appel simultanément au discret et au continu. Ainsi, une équation définie sur une échelle de temps de la forme $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} [2n, 2n+1]$ est très utile pour décrire des phénomènes saisonniers. Par exemple : l'étude d'une population d'insectes qui après un certain temps disparaît, pour réapparaître ultérieurement après avoir vécu pendant un certain temps sous forme de larve.

1.1.1 Terminologie

Définition 1.1 *Une échelle de temps $\mathbb{T}$ est un sous ensemble fermé non vide de $\mathbb{R}$.*

Exemple 1.1 *Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $[0, 1] \cup [2, 3]$ et les ensembles de Cantor sont des échelles de temps.*

Exemple 1.2 *Les ensembles $\mathbb{Q}$, $(0, 1)$ ne sont pas des échelles de temps.*

1.1.2 Opérateurs de saut

Définition 1.2 *Soit* $\mathbb{T}$ *une échelle de temps, pour* $t \in \mathbb{T}$, *l'opérateur de saut avant* $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, *est défini comme suit*

$$\sigma(t) = \inf \{s \in \mathbb{T} : s > t\}. \tag{1.1}$$

Définition 1.3 *Soit* $\mathbb{T}$ *une échelle de temps, pour* $t \in \mathbb{T}$, *l'opérateur de saut arrière* $\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, *est défini comme suit*

$$\rho(t) = \sup \{s \in \mathbb{T} : s < t\}. \tag{1.2}$$

1.1.3 Classification des points

Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps, t un point de $\mathbb{T}$.

Définition 1.4 *On dit que* t *est un point dense à droite de* $\mathbb{T}$, $t < \sup \mathbb{T}$ (*resp. un point dense à gauche de* $\mathbb{T}$), *si* $\sigma(t) = t$ *resp.* $(\rho(t) = t)$.

Définition 1.5 *On dit que* t *est un point dense s'il est simultanément dense à droite et à gauche.*

Définition 1.6 *On dit que* t *est un point dispersé à droite de* $\mathbb{T}$ (*resp. un point dispersé à gauche de* $\mathbb{T}$), *si* $\sigma(t) > t$ (*resp.* $\rho(t) < t$).

Définition 1.7 t *est dit point isolé s'il est simultanément dispersé à droite et à gauche.*

Définition 1.8 *On appelle fonction de granulation les fonctions définies par*

$$\mu(t) = \sigma(t) - t \text{ et } \nu(t) = t - \rho(t). \tag{1.3}$$

Exemples sur la nature des points

Nous illustrons les définitions précédentes par les exemples suivants

Exemple 1.3 *Soit* $\mathbb{T}=\mathbb{R}$, *pour tout* $t\in\mathbb{R}$, *nous avons*

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \inf\{s\in\mathbb{T}: s>t\}=\inf(t,\infty)=t,\\ \rho(t) &= \sup\{s\in\mathbb{T}: s<t\}=\sup(t,\infty)=t.\end{aligned}$$

Ainsi tous les points de $\mathbb{R}$ *sont denses. Les fonctions de granulation* μ,ν *valles :*$\mu(t)=0$ *et* $\nu(t)=0$.

Exemple 1.4 *Soit* $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$, *pour tout* $t\in\mathbb{Z}$, *nous avons*

$\sigma(t)=\inf\{s\in\mathbb{T}: s>t\}=\inf\{t+1,t+2,......\}=t+1,$

$\rho(t)=\sup\{s\in\mathbb{T}: s<t\}=\sup\{.....,t-2,t-1\}=t-1,$

ainsi tous les points de $\mathbb{Z}$ *sont isolés. Les fonctions de granulation* μ,ν *sont :* $\mu(t)=1$ *et* $\nu(t)=1$.

Exemple 1.5 *Soit* $\mathbb{T}=[0,1]\cup[2,3]$ *on a :*

$$\sigma(t)=\begin{cases} t \ si \ t\in[0,1[\cup[2,3] \\ 2 \ si \ t=1,\end{cases}$$

et

$$\rho(t)=\begin{cases} t \ si \ t\in[0,1]\cup]2,3] \\ 1 \ si \ t=2.\end{cases}$$

Ainsi

$$\mu(t)=\begin{cases} 0 \ si \ t\in[0,1[\cup[2,3] \\ 1 \ si \ t=1,\end{cases}$$

et

$$\nu(t)=\begin{cases} 0 \ si \ t\in[0,1]\cup]2,3] \\ 1 \ si \ t=2.\end{cases}$$

1.1.4 Les sous ensembles dérivés d'une échelle de temps

Nous notons que de chaque échelle de temps nous pouvons extraire les sous ensembles suivants

Définition 1.9 *Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps, l'ensemble $\mathbb{T}^k$ est défini comme suit*

$$\mathbb{T}^k = \begin{cases} \mathbb{T}\diagup\left]\rho\left(\sup\mathbb{T}\right),\mathbb{T}\right] & si\ \sup\mathbb{T} < \infty \\ \mathbb{T} & si\ \sup\mathbb{T} = \infty. \end{cases}$$

Remarque 1.1 *De la même manière nous pouvons définir les sous ensembles $\mathbb{T}_k$ et $\mathbb{T}_k^k$.*

Définition 1.10 *Pour deux points $a, b \in \mathbb{T}$, l'intervalle d'échelle de temps est défini par :*

$$[a,b]_{\mathbb{T}} = \{t \in \mathbb{T} \ : a \leq t \leq b\}.$$

Remarque 1.2 *Nous notons par $[a,b]^k = [a,b) = [a,\rho(b)]$ dans le cas où b est un point dispersé à gauche sinon $[a,b]^k = [a,b]$.*

1.1.5 Dérivation sur les échelles de temps

Dans cette section nous rappelons la définition de la Δ-Dérivée dite aussi la dérivée au sens de Hilger.

Définition 1.11 *Soit la fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$, f est dit Δ-différentiable en $t \in \mathbb{T}^k$s'il existe un vecteur $f^{\Delta}(t) \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage U de t satisfaisant*

$$\left\|f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)\right\| \leq \varepsilon\left|\sigma(t) - s\right|,$$

pour tout $s \in U$. Si f est Δ-différentiable en tout point $t \in \mathbb{T}$, alors $f^{\Delta} : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}^n$ est dite la Δ-dérivée de f sur $\mathbb{T}^k$.

Théorème 1.1 *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ une fonction et $t \in \mathbb{T}$.*

(i) Si f est Δ-différentiable en t, alors f est continue en t.

(ii) Si f est continue en t et si t est dispersé à droite, alors f est Δ-différentiable en t, de plus nous avons :

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}. \tag{1.4}$$

(iii) Si t est dense à droite, alors f est Δ-différentiable en t si et seulement si

$$\lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s},$$

existe et est finie. Dans ce cas nous avons :

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}.$$

(iv) Si f est différentiable en t, alors

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t) f^{\Delta}(t). \tag{1.5}$$

Exemples de calcul des dérivées

Maintenant, nous donnons quelques exemples concernant le calcul de la Δ-dérivée.

Exemple 1.6 *Considérons la fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = t^2$ où $\mathbb{T} = \left\{\frac{n}{2}, n \in \mathbb{N}_0\right\}$.*

Pour tout $t \in \mathbb{T}$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}_0 : t = \frac{n_0}{2}$. Donc

$$\sigma(t) = \frac{n_0 + 1}{2},$$

comme

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t},$$

alors

$$\begin{aligned} f^{\Delta}(t) &= \frac{\left(\dfrac{n_0+1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{n_0}{2}\right)^2}{\dfrac{n_0+1}{2} + \dfrac{n_0}{2}} \\ &= \frac{n_0+1}{2} + \frac{n_0}{2} \\ &= \frac{2n_0}{2} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

D'où

$$f^{\Delta}(t) = 2t + \frac{1}{2}.$$

Exemple 1.7 *Considérons la fonction* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(t) = t^2$ *où* $\mathbb{T} = \{\sqrt{n}, n \in \mathbb{N}_0\}$.

Pour tout $t \in \mathbb{T} : \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : t = \sqrt{n_0}$, *et donc*

$$\sigma(t) = \sqrt{n_0 + 1},$$

comme

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t},$$

alors

$$\begin{aligned} f^{\Delta}(t) &= \frac{\left(\sqrt{n_0+1}\right)^2 - \left(\sqrt{n_0}\right)^2}{\sqrt{n_0+1} - \sqrt{n_0}} \\ &= \sqrt{n_0+1} + \sqrt{n_0}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$f^{\Delta}(t) = \sqrt{t^2+1} + t.$$

Remarque 1.3 *Si* $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, *alors d'après* (iii) *du théorème précédent la fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est* Δ*-différentiable en* $t \in \mathbb{R}$, *si et seulement si*

$$f'(t) = \lim_{t \to s} \frac{f(t) - f(s)}{t - s},$$

existe et de plus $f^{\Delta}(t) = f'(t)$.

Remarque 1.4 *Si* $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ *d'après (ii) la fonction* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ *est* Δ*-différentiable en* $t \in \mathbb{Z}$ *et nous aurons*

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t} = \frac{f(t+1) - f(t)}{1} = f(t+1) - f(t) = \Delta f(t).$$

1.1.6 Propriétés de la Δ-dérivée

Théorème 1.2 *Si* $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *sont* Δ*-différentiables en* $t \in \mathbb{T}^k$*, alors :*

(i) $f + g$ *est* Δ*-différentiable en* t *de plus*

$$(f+g)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) + g^{\Delta}(t).$$

(ii) (αf) *est* Δ*-différentiable en* t *pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$ *et nous avons :*

$$(\alpha f)^{\Delta}(t) = \alpha f^{\Delta}(t).$$

(iii) fg *est* Δ*-différentiables en* t *et nous avons :*

$$\begin{aligned}(fg)^{\Delta}(t) &= f^{\Delta}(t)\, g(t) + f(\sigma(t))\, g^{\Delta}(t) \\ &= f(t)\, g^{\Delta}(t) + f^{\Delta}(t)\, g(\sigma(t)).\end{aligned}$$

(iv) Si $g(t)g(\sigma(t)) \neq 0$*, alors* $\dfrac{f}{g}$ *est* Δ*-différentiable en* t *nous avons :*

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t) = \frac{f^{\Delta}(t)\, g(t) - f(t)\, g^{\Delta}(t)}{g(t)g(\sigma(t))}.$$

Théorème 1.3 *Soit* $\mathbb{W}$ *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et* t *un point dense à droite de* $\mathbb{T}$*. Si* $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ *est* Δ*-différentiable en* t *et si* $f : \mathbb{W} \to \mathbb{R}$ *est différentiable en* $g(t) \in \mathbb{W}$*, alors* $f \circ g$ *est*

Δ*-différentiable en* t *et nous avons :*

$$(f \circ g)^{\Delta} = \left\langle f\acute{} (g(t)), g^{\Delta}(t) \right\rangle .$$

Définition 1.12 *Une fonction* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ *est dit* rd*-continue si elle est continue en tout point dense à droite de* $\mathbb{T}$ *et si sa limite à gauche existe et est finie en tout point dense à gauche de* $\mathbb{T}$.

Remarque 1.5 *L'ensemble de toutes les fonctions* rd*-continues est noté par* C_{rd} *ou* $C_{rd}(\mathbb{T})$.

Remarque 1.6 *L'ensemble de toutes les fonctions* Δ*-différentiables et* rd*-continues est noté par* C^1_{rd} *ou* $C^1_{rd}(\mathbb{T})$.

Exemple 1.8 *Considérons l'échelle de temps* $\mathbb{T} = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} [2k, 2k+1]$. *Nous avons :*

$$\mu(t) = \begin{cases} 0 \ si \ t \in \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} [2k, 2k+1[\\ 1 \ si \ t \in \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \{2k+1\}, \end{cases}$$

nous supposons $t \in [0,1] \cap \mathbb{T}$, *alors nous avons :*

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}, \ t \in [0, 1[.$$

Montrons que cette limite existe, nous avons :

$$f^{\Delta}(1) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1}.$$

Montrons que f *est continue en* $t = 1$, f *est définie sur* $\mathbb{T}$ *par*

$$f(t) = \begin{cases} 1 \ si \ t \in [0, 1[\\ 2 \ si \ t \geq 1. \end{cases}$$

En effet pour $t = 1$, f *est rd-continue car* $\left(\lim_{t \to 1^-} f(t) = 1\right)$ *par contre elle n'est pas continue en* $t = 1$ *car* $(f(1) = 2)$.

1.1.7 Calcul d'intégrales sur les échelles de temps

Définition 1.13 *La fonction* $F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, *est dite primitive de* $f : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}$, *si elle vérifie* $F^{\Delta}(t) = f(t)$ *pour tout* $t \in \mathbb{T}^k$.

Théorème 1.4 *Toute fonction rd-continue* $f : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}$, *admet une primitive* $F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, *et nous notons*

$$\int_s^r f(t)\,\Delta t = F(r) - F(s) \quad \text{pour tout } r, s \in \mathbb{T}.$$

Théorème 1.5 *Si* $f \in C_{rd}(\mathbb{T}^k)$, *nous avons :*

$$\int_t^{\sigma(t)} f(\tau)\,\Delta\tau = \mu(t) f(t), \quad t \in \mathbb{T}^k.$$

Théorème 1.6 *Soit* $a, b, c \in \mathbb{T}, \lambda \in \mathbb{R}$ *et* $f, g \in C_{rd}\left(\mathbb{T}^k\right)$ *alors :*

$\int_a^b [f(t) + g(t)]\,\Delta t = \int_a^b f(t)\,\Delta t + \int_a^b g(t)\,\Delta t$.

$\int_a^b (\lambda f(t))\,\Delta t = \lambda \int_a^b f(t)\,\Delta t$.

$\int_a^b f(t)\,\Delta t = -\int_b^a f(t)\,\Delta t$.

$\int_a^b f(t)\,\Delta t = \int_a^c f(t)\,\Delta t + \int_c^b f(t)\,\Delta t$.

$\int_a^a f(t)\,\Delta t = 0$.

Si $|f(t)| \leq g(t)$ *sur* $[a, b]_{\mathbb{T}^k}$, *alors* $\left|\int_a^b f(t)\,\Delta t\right| \leq \int_a^b g(t)\,\Delta t$.

Proposition 1.1 *Pour* $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, *nous avons :*

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Proposition 1.2 *Pour $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$, nous avons :*

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t=\begin{cases}\sum\limits_{t=a}^{b-1} f(t) & si\ a<b\\ 0 & si\ a=b\\ -\sum\limits_{t=b}^{a-1} f(t) & si\ a>b.\end{cases}$$

Proposition 1.3 *Si $[a,b]$ ne contient que des points isolés alors :*

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t=\begin{cases}\sum\limits_{t\in[a,b[} \mu(t) f(t) & si\ a<b\\ 0 & si\ a=b\\ \sum\limits_{t\in[b,a[} \mu(t) f(t) & si\ a>b.\end{cases}$$

Δ-Intégration par partie

Proposition 1.4

$$\begin{aligned}\int_a^b f^{\sigma}(t)\,g^{\Delta}(t)\,\Delta t &= [(fg)(t)]_{t=a}^{t=b}-\int_a^b f^{\Delta}(t)\,g(t)\,\Delta t,\\ \int_a^b f(t)\,g^{\Delta}(t)\,\Delta t &= [(fg)(t)]_{t=a}^{t=b}-\int_a^b f^{\Delta}(t)\,g^{\sigma}(t)\,\Delta t.\end{aligned}$$

Définition 1.14 *Les fonctions $g_k, h_k : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$ définies par récurrence par :*

$$\begin{aligned}g_0(t,s) &= h_0(t,s)=1. \qquad s,t\in\mathbb{T},\\ g_{k+1}(t,s) &= \int_s^t g_k(\sigma(\tau),s)\,\Delta\tau,\ h_{k+1}(t,s)=\int_s^t h_k(\tau,s)\,\Delta\tau,\quad k\in\mathbb{N}_0,\ s,t\in\mathbb{T}.\end{aligned}$$

Sont appelées les polynômes d'échelle de temps.

Définition 1.15 *Soit $p:\mathbb{T}^k\to\mathbb{R}$, p est dite régressive si elle vérifie :*

$$1+\mu(t)\,p(t)\neq 0.$$

Remarque 1.7 *Pour tout $t \in \mathbb{T}^k$, l'ensemble des fonctions régressives et rd-continues est noté par $\Re$.*

Définition 1.16 *L'ensemble de toutes les fonctions régressives positives est défini par :*

$$\Re^+ = \left\{ p \in \Re : 1 + \mu(t)\, p(t) > 0, \ \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}^k \right\}. \tag{1.6}$$

Définition 1.17 *Pour $h > 0$, la transformation cylindrique : $\xi_h : \mathbb{C}_h \rightarrow \mathbb{Z}_h$, est définie par :*

$$\xi_h(z) = \frac{1}{h} \log(1 + zh),$$

où

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_h &= \left\{ z \in \mathbb{C} : z \neq -\frac{1}{h} \right\} \\ \mathbb{Z}_h &= \left\{ z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{h} < \operatorname{Im}(z) \leq \frac{\pi}{h} \right\}, \mathbb{Z}_0 = \mathbb{C}, \end{aligned}$$

et log *est le logarithme principal. Pour $h = 0$, nous aurons : $\xi_0(z) = z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.*

Théorème 1.7 *Nous supposons que $p \in \Re$ et $t_0 \in \mathbb{T}$ un point fixé, alors le problème à valeur initiale*

$$y^{\Delta}(t) = p(t)\, y(t), \ y(t_0) = 1, \tag{1.7}$$

admet une unique solution dans $\mathbb{T}$.

Définition 1.18 *Soit $p \in \Re$ et $t_0 \in \mathbb{T}$, la fonction exponentielle est définie comme solution du problème (1.7) et nous avons*

$$y(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta\tau \right),$$

nous la notons souvent par

$$e_p(t, t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta\tau \right),$$

où ξ_μ est la transformation cylindrique donnée par la définition 1.17.

Remarque 1.8 *Il est clair que*

$$e_p(\sigma(t), t_0) = (1 + \mu(t) p(t)) e_p(t, t_0).$$

Remarque 1.9 *Pour $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, la fonction exponentielle est donnée par :*

$$e_p(t, t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} p(\tau) d\tau\right),$$

où t, $t_0 \in \mathbb{R}$ et $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction continue.

Remarque 1.10 *Pour $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, la fonction exponentielle est donnée par :*

$$e_p(t, t_0) = \prod_{\tau=t_0}^{\tau=t} [1 + p(\tau)],$$

où $t, t_0 \in \mathbb{Z}$, $t_0 < t$ et $p : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, une suite vérifiant :

$$p(t) \neq -1 \text{ pour tout } t \in \mathbb{Z}.$$

Théorème 1.8 *Soit $a \in \mathbb{T}^k$, $b \in \mathbb{T}$ et $L : \mathbb{T} \times \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}$, est continue en (t, t), pour $t \in \mathbb{T}^k$, $t > a$ et $L^\Delta(t, .)$ est rd-continue dans $[a, \sigma(t)]$, nous supposons que pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists\, U$ voisinage de t indépendant de $\tau \in [a, \sigma(t)]$ telle que :*

$$\left|L(\sigma(t), \tau) - L(s, \tau) - L^\Delta(t, \tau)(\sigma(t) - s)\right| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|, \qquad \forall s \in U.$$

où f^Δ dénote la dérivée de f par rapport à la $1^{ière}$ variable alors nous avons :

$$g(t) = \int_a^t L(t, \tau) \Delta\tau \Rightarrow g^\Delta(t) = \int_a^t L^\Delta(t, \tau) \Delta\tau + L(\sigma(t), \tau),$$

et

$$h(t)=\int_t^b L(t,\tau)\,\Delta\tau \Rightarrow h^{\Delta}(t)=\int_t^b L^{\Delta}(t,\tau)\,\Delta\tau - L(\sigma(t),\tau).$$

Théorème 1.9 *Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, une fonction continue et différentiable et $g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$, Δ-différentiable sur $\mathbb{T}^k$, alors $f\circ g$ est Δ-différentiable et nous avons :*

$$(f\circ g)^{\Delta}(t)=\left\{\int_0^1 f'\left(g(t)+h\mu(t)\,g^{\Delta}(t)\right)dh\right\}\times g^{\Delta}(t), \quad t\in\mathbb{T}^k.$$

Lemme 1.1 *Supposons que u, $b\in C_{rd}$ et $a\in\Re^+$. Si*

$$u^{\Delta}(t)\leq a(t)\,u(t)+b(t),\ t\geq t_0,\ t\in\mathbb{T}^k,$$

alors

$$u(t)\leq u(t_0)\,e_a(t,t_0)+\int_{t_0}^t e_a(t,\sigma(s))\,b(s)\,\Delta s,\ t\geq t_0,\quad t\in\mathbb{T}^k.$$

1.1.8 Dérivation des fonctions à plusieurs variables

Soient $\mathbb{T}_1$ et $\mathbb{T}_2$ deux échelles de temps, σ_1, σ_2 les opérateurs de saut avant par rapport à $\mathbb{T}_1$ et $\mathbb{T}_2$ respectivement et Δ_1, Δ_2 les opérateurs de dérivation. Supposons $a<b$ deux points de $\mathbb{T}_1$, $c<d$ deux points de $\mathbb{T}_2$.

Soit f une fonction à valeurs réelles sur $\mathbb{T}_1\times\mathbb{T}_2$.

Définition 1.19 *On dit que f admet une dérivée partielle $f^{\Delta_1}(s,t)$ au point $(s,t)\in\mathbb{T}_1\times\mathbb{T}_2$ (par rapport à s) si pour chaque $\varepsilon>0$, il existe un voisinage U_s de s tel que nous avons*

$$\left|f(\sigma_1(s),t)-f(\alpha,t)-f^{\Delta_1}(s,t)(\sigma_1(s)-\alpha)\right|\leq\varepsilon\left|\sigma_1(s)-\alpha\right|,$$

pour tout $\alpha\in U_s$.

Définition 1.20 *On dit que f admet une dérivée partielle $f^{\Delta_2}(s,t)$ au point $(s,t)\in\mathbb{T}_1\times\mathbb{T}_2$ (par rapport à t) si pour chaque $\varepsilon>0$, il existe un voisinage U_t de t tel que nous* *avons*

$$\left|f\left(s,\sigma_2\left(t\right)\right)-f\left(s,\beta\right)-f^{\Delta_2}\left(s,t\right)\left(\sigma_2\left(t\right)-\beta\right)\right|\leq\varepsilon\left|\sigma_2\left(t\right)-\beta\right|,$$

pour tout $\beta\in U_t$.

Définition 1.21 *Soit f une fonction à valeurs réelles sur $\mathbb{T}_1\times\mathbb{T}_2$. f est dite rd-continue en t si pour chaque $\alpha\in\mathbb{T}_1$, la fonction $f\left(\alpha,t\right)$ est rd-continue sur $\mathbb{T}_2$. La fonction f est dite rd-continue en s, si pour chaque $\beta\in\mathbb{T}_2$, la fonction $f\left(s,\beta\right)$ est rd-continue sur $\mathbb{T}_1$.*

Définition 1.22 *toute fonction f définie sur $\mathbb{T}_1\times\mathbb{T}_2$, est dite de classe CC_{rd}, si elle vérifie les conditions suivantes :*

(i) f est rd-continue en s.

(ii) f est rd-continue en t.

(iii) f est continue en $(s,t)\in\mathbb{T}_1\times\mathbb{T}_2$ où s,t sont des points denses à droite ou maximal.

(iv) Si s et t sont des points denses à gauche, et la limite de $f\left(s,\beta\right)$ existe quand (s,β) approche (s,t) par n'importe quel chemin de la région $\{(s,\beta):\alpha\in[a,s]\cap\mathbb{T}_1,\beta\in[c,t]\cap\mathbb{T}_2\}$.

Définition 1.23 *On note par CC_{rd}^1 l'ensemble de toute les fonctions CC_{rd} dont les dérivées partielles f^{Δ_1} et f^{Δ_2} existent et appartiennent à CC_{rd}.*

Pour plus de détails, le lecteur pourra consulter $[1,14,37]$.

1.2 Rappels sur quelques types de convexité

Dans cette section, nous donnerons un petit rappel concernant quelques types de convexité, nous notons I un intervalle de $\mathbb{R}$, K un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$, $\eta:K\times K\to\mathbb{R}^n$ une fonction continue, Δ intervalle de $[0,\infty)^2$ où $\Delta=:[a,b]\times[c,d]$ avec $a<b$, $c<d$, $k=(b-a)(d-c)$ et par $f_{\lambda\alpha}$ la dérivée mixte $\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda\partial\alpha}$.

Définition 1.24 ([71]) *Une fonction $f:I\to\mathbb{R}$, est dite convexe, si l'inégalité*

$$f\left(tx+\left(1-t\right)y\right)\leq tf\left(x\right)+\left(1-t\right)f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ *et tout* $t \in [0,1]$.

Définition 1.25 ([71]) *Une fonction positive* $f : I \to \mathbb{R}$, *est dite logarithmique convexe, si l'inégalité*

$$f(tx + (1-t)y) \ \leq [f(x)]^t \, [f(y)]^{1-t}$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ *et tout* $t \in [0,1]$.

Définition 1.26 ([8]) *Une fonction positive* $f : I \subset [0, \infty) \to \mathbb{R}$, *est dite* s*-convexe au second sens pour un certain nombre fixé* $s \in (0,1]$, *si l'inégalité*

$$f(tx + (1-t)y) \ \leq t^s f(x) + (1-t)^s f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ *et tout* $t \in [0,1]$.

Définition 1.27 ([2]) *Une fonction positive* $f : I \subset [0, \infty) \to \mathbb{R}$, *est dite logarithmique* s*-convexe au second sens pour un certain nombre fixé* $s \in (0,1]$, *si l'inégalité*

$$f(tx + (1-t)y) \ \leq [f(x)]^{t^s} \, [f(y)]^{(1-t)^s}$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ *et tout* $t \in [0,1]$.

Définition 1.28 ([70]) *Une fonction positive* $f : I \to \mathbb{R}$, *est dite* r*-convexe sur* I, *où* $r \geq 0$, *si l'inégalité*

$$f(tx + (1-t)y) \leq \begin{cases} \left[t f^r(x) + (1-t) f^r(y)\right]^{\frac{1}{r}} \ si & r \neq 0 \\ [f(x)]^{1-t} \, [f(y)]^t \ \ si & r = 0 \end{cases}$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ *et tout* $t \in [0,1]$.

Nous notons aussi que dans [35], Hanson a introduit une nouvelle classe de fonctions convexes dite classe des fonctions invexes qui est une généralisation de cette dernière. D'autres chercheurs ont introduit le concept de fonctions préinvexes qui représente un cas spécial des fonctions invexes ainsi qu'une généralisation des fonctions convexes. Pour plus de détails concernant les propriétés de base et le rôle que joue ce type de fonctions, le lecteur pourra consulter [55, 56, 72, 78, 79].

Définition 1.29 ([78]) *L'ensemble K est dit invexe au point x par rapport à η, si*

$$x + t\eta(y, x) \in K$$

est valide pour tout $x, y \in K$ et $t \in [0, 1]$.

Remarque 1.11 *K est dit ensemble invexe par rapport à η, s'il l'est pour tout point x de K.*

Définition 1.30 ([78]) *Une fonction f sur l'ensemble invexe K est dite préinvexe par rapport à η, si l'inégalité*

$$f(x + t\eta(y, x)) \leq (1 - t) f(x) + tf(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in K$ et $t \in [0, 1]$.

Définition 1.31 ([55]) *Une fonction positive f sur l'ensemble invexe K est dite logarithmique préinvexe par rapport à η, si l'inégalité*

$$f(x + t\eta(y, x)) \leq [f(x)]^{(1-t)} [f(y)]^{t}$$

est satisfaite pour tout $x, y \in K$ et $t \in [0, 1]$.

Définition 1.32 ([76]) *Toute fonction positive f sur l'ensemble invexe $K \subseteq [0, \infty)$ est dite s-préinvexe au second sens par rapport à η, certain nombre fixé $s \in (0, 1]$, si l'inégalité*

$$f(x + t\eta(y, x)) \leq (1 - t)^{s} f(x) + t^{s} f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in K$ et $t \in [0, 1]$.

Définition 1.33 ([77]) *Une fonction positive f sur l'ensemble invexe $K \subseteq [0, \infty)$, est dite s-logarithmique préinvexe au second sens par rapport à η pour un certain nombre fixe $s \in (0, 1]$, si l'inégalité*

$$f(x + t\eta(y, x)) \leq [f(x)]^{(1-t)^s} [f(y)]^{t^s}$$

est satisfaite pour tout $x, y \in K$ et $t \in [0, 1]$.

Définition 1.34 ([4]) *Une fonction positive f sur l'ensemble invexe K, est dite r-préinvexe par rapport à η, où $r \geq 0$, si l'inégalité*

$$f(x + t\eta(y, x)) \leq \begin{cases} [(1-t) f^r(x) + t f^r(y)]^{\frac{1}{r}} & si \quad r \neq 0 \\ [f(x)]^{1-t} [f(y)]^t \quad si & \qquad r = 0 \end{cases}$$

est satisfaite pour tout $x, y \in K$ et $t \in [0, 1]$.

Définition 1.35 ([27]) *Soit $f : \Delta \to \mathbb{R}$, f est dite convexe sur Δ, si l'inégalité :*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)z, \lambda y + (1-\lambda)w) \leq \lambda f(x, y) + (1-\lambda) f(z, w)$$

est satisfaite pour tout $(x, y), (z, w) \in \Delta$ et $\lambda \in [0, 1]$.

Définition 1.36 ([42]) *Soit $f : \Delta \to \mathbb{R}$, f est dite à coordonnées convexes sur Δ, si l'inégalité :*

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda) t, \alpha y + (1-\alpha) v) &\leq \lambda \alpha f(x, y) + \lambda (1-\alpha) f(x, v) \\ &\quad + (1-\lambda) \alpha f(t, y) + (1-\lambda)(1-\alpha) f(t, v) \end{aligned}$$

est satisfaite pour tout $\lambda, \alpha \in [0, 1]$ et $(x, y), (x, v), (t, y), (t, v) \in \Delta$.

Définition 1.37 ([3]) *Soit la fonction positive $f : \Delta \subset [0, \infty)^2 \to \mathbb{R}$, f est dite s-convexe* *au second sens sur Δ, pour un certain nombre fixé $s \in (0,1]$, si l'inégalité :*

$$f(\lambda x+(1-\lambda)z, \lambda y+(1-\lambda)w) \leq \lambda^{s} f(x,y)+(1-\lambda)^{s} f(z,w)$$

est satisfaite pour tout $(x,y),(z,w) \in \Delta$ et $\lambda \in [0,1]$.

Définition 1.38 ([3]) *Soit $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, f est dite à coordonnées s-convexes sur Δ au second sens pour un certain nombre fixé $s \in (0,1]$, si l'inégalité :*

$$\begin{aligned} f\left(\lambda x+(1-\lambda) t, \alpha y+(1-\alpha) v\right) \leq\ & \lambda^{s} \alpha^{s} f(x,y)+\lambda^{s}(1-\alpha)^{s} f(x,v) \\ & +(1-\lambda)^{s} \alpha^{s} f(t,y)+(1-\lambda)^{s}(1-\alpha)^{s} f(t,v) \end{aligned}$$

est satisfaite pour tout $\lambda, \alpha \in [0,1]$ et $(x,y),(x,v),(t,y),(t,v) \in \Delta$.

Définition 1.39 ([62]) *Soit $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, f est dite à coordonnées r-convexes sur Δ, si l'inégalité*

$$\begin{aligned} & f\left(tx+(1-t) u, \lambda y+(1-\lambda) v\right) \\ \leq & \begin{cases} \left[t\lambda f^{r}(x,y)+t(1-\lambda) f^{r}(x,v)+(1-t) \lambda f^{r}(u,y)\right. \\ \left.+(1-t)(1-\lambda) f^{r}(u,v)\right]^{\frac{1}{r}} & si\ r \neq 0 \\ f^{t\lambda}(x,y) f^{t(1-\lambda)}(x,v) f^{(1-t)\lambda}(u,y) f^{(1-t)(1-\lambda)}(u,v) & si\ r=0 \end{cases} \end{aligned}$$

est satisfaite pour tout $t, \lambda \in [0,1]$ et $(x,y),(x,v),(u,y),(u,v) \in \Delta$.

Définition 1.40 ([43]) *Soient K_1, K_2 deux sous ensembles non vides de $\mathbb{R}^n$, $(u,v) \in K_1 \times K_2$. On dit que $K_1 \times K_2$ est invexe au point (u,v) par rapport à η_1 et η_2, si pour chaque $(x,y) \in K_1 \times K_2$ et $t,s \in [0,1]$, nous avons*

$$\left(u+t\eta_1(x,u), v+s\eta_2(y,v)\right) \in K_1 \times K_2,$$

$K_1 \times K_2$ est dit ensemble invexe par rapport à η_1 et η_2, s'il est invexe pour tout point $(u,v) \in K_1 \times K_2$.

Définition 1.41 **(**[43]**)** *Soit $K_1 \times K_2$ un ensemble invexe par rapport à $\eta_1 : K_1 \times K_1 \to \mathbb{R}^n$ et $\eta_2 : K_2 \times K_2 \to \mathbb{R}^n$. Soit la fonction $f : K_1 \times K_2 \to \mathbb{R}$, f est dite préinvexe, si l'inégalité*

$$f\left(u + t\eta_1\left(x,u\right), v + t\eta_2\left(y,v\right)\right) \leq (1-t)f(u,v) + \ tf(x,y),$$

est satisfaite pour tout $(x,y),(u,v) \in K_1 \times K_2$ et $t \in [0,1]$.

Définition 1.42 **(**[42]**)** *Soit $K_1 \times K_2$ un ensemble invexe par rapport à $\eta_1 : K_1 \times K_1 \to \mathbb{R}^n$ et $\eta_2 : K_2 \times K_2 \to \mathbb{R}^n$. Soit la fonction $f : K_1 \times K_2 \to \mathbb{R}$, f est dite à coordonnées préinvexes, si l'inégalité*

$$\begin{aligned} f\left(u + \lambda\eta_1\left(x,u\right), v + t\eta_2\left(y,v\right)\right) \quad &\leq \quad (1-\lambda)(1-t)f(u,v) + (1-\lambda)tf(u,y) \\ &\quad +(1-t)\lambda f(x,v) + \lambda tf(x,y), \end{aligned}$$

est satisfaite pour tout $(x,y),(x,v),(u,y),(u,v) \in K_1 \times K_2$ et $\lambda, t \in [0,1]$.

1.3 Calcul fractionnaire

L'histoire de la dérivée d'ordre non entier s'étale de la fin du 17 ^{ème} siècle jusqu'à nos jours. les spécialistes s'accordent pour faire remonter son début à la fin de l'année 1695 quand L'Hospital a soulevé une question à Leibniz en s'interrogeant sur la signification de $\frac{d^n y}{dx^n}$ lorsque $n = \frac{1}{2}$. Leibniz, dans sa réponse voulut engager une réflexion sur une possible théorie de la dérivation non entière, et à répondu à L'Hospital : "... cela conduirait à un paradoxe ...". Il a fallu attendre les années 1990 pour voir apparaître les premières "conséquences utiles". La première tentative sérieuse de donner une définition logique pour la dérivée fractionnaire est dû à Liouville qui a publié neuf documents dans ce sujet entre 1832 et 1837. Indépendamment, Riemann a proposé une approche qui s'est avérée essentiellement celle de Liouville, et c'est depuis qu'elle porte le non "Approche de Riemann-Liouville". Plus tard, d'autres théories on fait leurs apparitions comme celle de Grünwald-Leitnikov, de Weyl et de Caputo etc. Cette théorie ne cesse d'attirer l'attention des chercheurs vu l'ampleur de son champ d'application en traitement d'images, biologie, génie civil mécanique, équations différentielle.

Dans cette section nous allons nous restreindre uniquement à l'approche de Riemann-Liouville, nous rappelons les définitions de la dérivée et de l'intégration au sens de Riemann-Liouville ainsi que certaine de leurs propriétés.

1.3.1 Intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.43 ([39]) *Soit $f \in L_1[a,b]$, l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville $I_{a^+}^{\alpha} f(x)$ d'ordre $\alpha > 0$, où $a > 0$ est définie par*

$$I_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha\ )} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad x > a$$

Où $\Gamma(.)$ est la fonction gamma d'Euler.

Remarque 1.12 *Lorsque $\alpha = n$ l'intégrale de la définition précédente coïncide avec la $n^{ième}$ intégrale c'est-à-dire*

$$\begin{aligned} I_{a^+}^{n} f(x) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt \\ &= \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 .. \int_a^{t_{n-1}} f(t_n)dt_n, \end{aligned}$$

et pour $\alpha = 0$ on a $I_{a^+}^{0} f(x) = f(x)$.

Remarque 1.13 *Généralement nous utilisons les écritures suivantes*

$$\begin{aligned} J_{a^+}^{\alpha} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \qquad x > a > 0 \\ J_{b^-}^{\alpha} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt, \qquad b > x, \end{aligned}$$

où $f \in L([a,b])$, $\alpha > 0$, $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt$, *est la fonction gamma d'Euler et* $J_{a^+}^{0} f(x) = J_{b^-}^{0} f(x) = f(x)$.

1.3.2 Dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.44 **(**[39]**)** *Soit* $f \in L_1[a,b]$, *la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville* $D_{a^+}^{\alpha} f(x)$ *d'ordre* $\alpha > 0$, *où* $a > 0$ *est définie par*

$$\begin{aligned} D_{a^+}^{\alpha} f(x) &= \frac{d^n}{dt^n} \left(I_{a^+}^{n-\alpha} f(x) \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)dt, \;\; n = [\alpha] + 1 \quad x > a \end{aligned}$$

Où $[\alpha]$ *est la partie entière du nombre* α, $\Gamma(.)$ *et la fonction gamma d'Euler.*

Remarque 1.14 *Lorsque* $\alpha = n$ *la dérivée de la définition précédente coïncide avec la dérivée usuelle d'ordre* n *de la fonction* $f(t)$ *c'est-à-dire*

$$D_{a^+}^{n} f(x) = f^{(n)}(x).$$

Et pour $\alpha = 0$ *on a* $D_{a^+}^{0} f(x) = f(x)$.

1.3.3 Quelques propriétés de l'intégration et de la dérivation fractionnaire

– Pour toute fonction f continue et tout $\alpha, \beta > 0$, on a

$$I_{a^+}^{\alpha}(I_{a^+}^{\beta} f(x)) = I_{a^+}^{\beta}(I_{a^+}^{\alpha} f(x)) = I_{a^+}^{\alpha+\beta} f(x).$$

– Pour tout $\alpha > 0$, on a

$$D_{a^+}^{\alpha}(I_{a^+}^{\alpha} f(x)) = f(x).$$

– Pour toute fonction $f \ \in L_p$ où $1 \leq p \leq +\infty$ et tout $\alpha > \beta > 0$, on a

$$D_{a^+}^{\alpha}(I_{a^+}^{\beta} f(x)) = I_{a^+}^{\alpha-\beta} f(x).$$

– Pour tout $\alpha > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ on a

$$D_{a^+}^{m}(D_{a^+}^{\beta} f(x)) = D_{a^+}^{m+\alpha} f(x).$$

– Pour toute fonction f intégrable et tout $n-1 \leq \alpha < n$, on a

$$I_{a^+}^{\alpha}(D_{a^+}^{\alpha} f(x)) = f(x) - \sum_{j=1}^{n} \left[D_{a^+}^{\alpha-j} f(x)\right]_{x=a} \tfrac{(x-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)}.$$

– Pour tout $m-1 \leq \alpha < m$ et $n-1 \leq \beta < n$, on a

$$D_{a^+}^{\alpha}(D_{a^+}^{\beta} f(x)) = D_{a^+}^{\alpha+\beta} f(x) - \sum_{j=1}^{n} \left[D_{a^+}^{\beta-j} f(x)\right]_{x=a} \tfrac{(x-a)^{-\alpha-j}}{\Gamma(1-\alpha-j)}.$$

1.4 Quelques lemmes importants

Lemme 1.2 ([38]) *Supposons $a \geq 0$, $p \geq q \geq 0$ et $p \neq 0$, nous avons*

$$a^{\frac{q}{p}} \leq \tfrac{q}{p} K^{\frac{q-p}{p}} a + \tfrac{p-q}{p} K^{\frac{q}{p}},$$

pour tout $K > 0$.

Lemme 1.3 ([52]) *Soient* $a \geq 0$ *et* $b \geq 0$*, les inégalités suivantes sont satisfaites*

$$(a+b)^{\lambda} \leq 2^{\lambda-1}\left(a^{\lambda}+b^{\lambda}\right), \qquad si\ \lambda \geq 1$$

et

$$(a+b)^{\lambda} \leq a^{\lambda}+b^{\lambda}, \qquad si\ 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Lemme 1.4 ([5]) *Soient* $0 < \phi \leq 1 \leq \psi$ *et* $t, s \in [0,1]$*. Alors*

$$\phi^{t^s} \leq \phi^{st}$$

et

$$\psi^{t^s} \leq \psi^{st+1-s}.$$

Lemme 1.5 ([75]) *Pour* $\alpha > 0$*,* $k > 0$ *et* $z > 0$*, on a*

$$\begin{aligned} J(\alpha,k) &= \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} k^t dt = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\ln k)^{i-1}}{(\alpha)_i} < \infty \\ H(\alpha,k,z) &= \int_0^z t^{\alpha-1} k^t dt = z^{\alpha} k^z \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-z\ln k)^{i-1}}{(\alpha)_i} < \infty, \end{aligned}$$

où $(\alpha)_i = \prod_{j=0}^{i-1} (\alpha+j)$.

Lemme 1.6 ([81]) *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction deux fois différentiable sur* (a,b) *tel que* $0 \leq a < b$*. Si* $f \in L[a,b]$*, alors*

$$\begin{aligned} &\tfrac{f(a)+f(b)}{2} - \tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}} \left[J_{a^+}^{\alpha} f(b) + J_{b^-}^{\alpha} f(a)\right] \\ = &\tfrac{(b-a)^2}{2(\alpha+1)} \int_0^1 \left[1-(1-t)^{\alpha+1} - t^{\alpha+1}\right] f''(ta+(1-t)b)\, dt. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Lemme 1.7 ([43]) *Soit $K_1 \times K_2$ un sous ensemble ouvert et invexe de $\mathbb{R}^2$ par rapport à $\eta_1 : K_1 \times K_1 \to \mathbb{R}$ et $\eta_2 : K_2 \times K_2 \to \mathbb{R}$. Soit $f : K_1 \times K_2 \to \mathbb{R}$, une fonction deux fois différentiable telles que $\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \in L_1\left([a, a+\eta_1(b,a)] \times [c, c+\eta_2(d,c)]\right)$ et $\eta_1(b,a) \neq 0$, $\eta_2(d,c) \neq 0$ où $a, b \in K_1$ et $c, d \in K_2$. Alors l'égalité suivante à lieu*

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\left[f(a,c) + f(a, c+\eta_2(d,c)) + f(a+\eta_1(b,a), c) + f(a+\eta_1(b,a), c+\eta_2(d,c))\right] \\
&+\frac{1}{\eta_1(b,a)\eta_2(d,c)} \int_a^{a+\eta_1(b,a)} \int_c^{c+\eta_2(d,c)} f(x,y)\,dxdy - A \\
= &\ \frac{\eta_1(b,a)\eta_2(d,c)}{4} \int_0^1 \int_0^1 (1-2t)(1-2s) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a + t\eta_1(b,a), c + s\eta_2(d,c))dtds, \qquad (1.9)
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
A = &\ \frac{1}{2\eta_1(b,a)} \int_a^{a+\eta_1(b,a)} \left[f(x,c) + f(x, c+\eta_2(d,c))\right] dx \\
&+ \frac{1}{2\eta_2(d,c)} \int_c^{c+\eta_2(d,c)} \left[f(a,y) + f(a+\eta_1(b,a), y)\right] dy. \qquad (1.10)
\end{aligned}$$

Chapitre 2

Inégalités intégrales de type Pachpatte-Bihari

2.1 Introduction

Les inégalités intégrales jouent un rôle important dans l'étude des équations intégrales et plus généralement dans le cadre des équations différentielles ordinaires au point de vue existence des solutions et stabilité des points d'équilibres. D'autres travaux qui sont liés à ce type d'inégalités ont été établis pour les équations d'évolutions en présence des petites perturbations. Ces inégalités ont été introduites par Gronwall en 1919, et depuis leur apparition ces dernières ont trouvé leurs applications dans plusieurs domaines. En outre, la théorie de ces inégalités a connu une croissance rapide et un bon nombre de monographies ont été consacrées à ce sujet. Les applications des inégalités intégrales, ainsi que les inégalités différentielles, ont été développées de manière remarquable dans l'étude du comportement asymptotique des solutions, l'existence, l'unicité, la comparaison, la stabilité et la dépendance continue des conditions initiales.

Ces dernières années, une importante généralisation de ces inégalités s'est apparue et parmi ces généralisations, on peut citer celle de Belmann, Pachpatte et Bihari.

Nous aborderons ce chapitre en citant tout d'abord quelques résultats classiques concernant la célèbre inégalité de Gronwall ainsi que quelques unes de ces généralisations en dimension une, puis nous énoncerons quelques résultats concernant cette dernière en dimension deux, ensuite nous donnerons des nouvelles généralisations concernant les inégalités de type Pachpatte-Bihari en dimension deux sur une échelle de temps quelconque. Ces nouveaux résultats ont fait l'objet de publication :

K. Boukerrioua, D. Diabi and T. Chiheb, Further nonlinear integral inequalities in two independent variables on time scales and their applications. Malaya J. Mat. 5 (2017), no. 1, 109–114.

2.1.1 Quelques célèbres inégalités intégrales de type Gronwall en dimension une

En 1919, Gronwall a démontré une remarquable inégalité qui s'avère très utile dans l'étude des propriétés qualitatives des équations différentielles dont l'énoncé est :

Théorème 2.1 ([33]) *Soit $u(t)$ une fonction continue sur $I = [\alpha, \alpha + h]$, a et b deux constantes positives. Si l'inégalité*

$$0 \leq u(t) \leq \int_{\alpha}^{t} [bu(s) + a]\, ds, \ \ t \in I,$$

est vérifiée, alors

$$0 \leq u(t) \leq ah \exp(bh), \ \ t \in I.$$

En 1943, Bellman généralisa le résultat ci-dessus comme suit

Théorème 2.2 ([10]) *Soient u et f deux fonctions continues positives sur $I = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ et $c \geq 0$. Si*

$$u(t) \leq c + \int_{\alpha}^{t} f(s)u(s)ds, \ \ t \in I,$$

est satisfaite, alors

$$u(t) \leq c\exp(\int_{\alpha}^{t} f(s)ds),\ \ t \in I.$$

Une autre généralisation du théorème 2.1 a été élaborée par Bihari en 1956

Théorème 2.3 ([13]) *Soient u, f deux fonctions continues positives sur $[0,+\infty[$, w une fonction croissante et continue sur $[0,+\infty[$, vérifiant $w(x)>0$ pour tout $x>0$ et c une constante positive. Si*

$$u(t) \leq c + \int_{t_0}^{t} f(s)w\left(u\left(s\right)\right)ds,$$

est satisfaite pour tout $t \geq 0$, alors,

$$u(t) \leq G^{-1}\left(G\left(c\right) + \int_{t_0}^{t} f(s)ds\right) \quad \textit{pour tout} \ \ 0 \leq t \leq T,$$

où G est solution de l'équation intégrale suivante

$$G(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{w(s)}ds, \quad t > t_0 > 0,$$

G^{-1} est la fonction inverse de G, T est choisi de telle sorte que

$$\left\{G\left(c\right) + \int_{t_0}^{t} f(s)ds\right\} \in Dom\left(G^{-1}\right) \ \ \textit{pour tout}\ 0 \leq t \leq T.$$

En 1958, Bellman établissait une autre variante du théorème 2.2 comme suit :

Théorème 2.4 ([11]) *Soient u et g deux fonctions continues et positives sur $I=[\alpha,\beta]$ et soit $n(t)$ une fonction continue, positive et croissante définie sur I. Si l'inégalité*

$$u(t) \leq n(t) + \int_{\alpha}^{t} g(s)u(s)ds,\ \ t \in I,$$

est satisfaite, alors,

$$u(t) \leq n(t) \exp(\int\limits_{\alpha}^{t} g(s) ds), \ t \in I.$$

En 1969, Gollwitzer a étendu le résultat du théorème 2.4 comme suit :

Théorème 2.5 ([31]) *Soient u, f, g et h des fonctions continues et positives sur $I = [\alpha, \beta]$. Si l'inégalité*

$$u(t) \leq f(t) + g(t) \int\limits_{\alpha}^{t} h(s) u(s) ds, \ t \in I,$$

est satisfaite, alors,

$$u(t) \leq f(t) + g(t) \int\limits_{\alpha}^{t} h(s) f(s) \exp(\int\limits_{s}^{t} h(\sigma) g(\sigma) d\sigma) ds, \ t \in I.$$

Györi a établi en 1971 une variante du théorème 2.5 comme suit

Théorème 2.6 ([34]) *Soient u et β deux fonctions continues et positives sur $I = [t_0, \infty)$, et soient f, g et α des fonctions différentiables avec f positive et g, α deux fonctions positives et croissantes. Supposons que*

$$u(t) \leq f(t) + \alpha(t) \int\limits_{t_0}^{t} \beta(s) g(u(s)) ds.$$

Si

$$f'(t) \left\{ \frac{1}{g(\eta(t))} - 1 \right\} \leq 0, \ \text{sur } I,$$

pour toute fonction continue et positive $\eta(t)$, alors

$$u(t) \leq G^{-1} \left\{ G(f(t_0)) + \int\limits_{t_0}^{t} [\alpha(s)\beta(s) + f'(s)] ds \right\},$$

où G est solution de l'équation intégrale suivante

$$G(t)=\int_{t_0}^{t}\frac{1}{g(s)}ds, \quad t>t_0>0,$$

G^{-1} est la fonction inverse de G,

$$\left\{G\left(f(t_0)\right)+\int_{t_0}^{t}\left[\alpha(s)\beta(s)+f'\left(s\right)\right]ds\right\}\in Dom\left(G^{-1}\right).$$

Pour plus de détails, se référer à $[9,28,53,63]$.

2.1.2 Quelques inégalités intégrales de type Gronwall à noyau en dimension une

En 1987 Norbury et Stuart ont établi une variante de l'inégalité de Gronwall-Bellman (théorème 2.2) dans le cas où la fonction g dépendra du paramètre t (i.e. $g(s)=k\left(t,s\right)$), dont l'énoncé est le suivant :

Théorème 2.7 ([60]) *Soient u et f deux fonctions continues et positives sur $I=[\alpha,\beta]$ et $k(t,s)$ une fonction continue et positive sur le triangle Δ : $\alpha\leq s\leq t\leq\beta$,telle que $k(t,s)$ est croissante par rapport à t pour tout $s\in I$*

i) Si

$$u(t)\leq c+\int_{\alpha}^{t}k\left(t,s\right)u(s)ds,\ t\in I,$$

est satisfaite pour toute constante $c\geq 0$, alors

$$u(t)\leq c\exp\left(\int_{\alpha}^{t}k\left(t,s\right)ds\right),\ t\in I,$$

ii) Soit $n(t)$ une fonction continue, positive et croissante pour tout $t \in I$. Si

$$u(t) \leq n(t) + \int_{\alpha}^{t} k(t,s)\, u(s) ds, \ t \in I,$$

est satisfaite, alors

$$u(t) \leq n(t) \exp\left(\int_{\alpha}^{t} k(t,s)\, ds\right), \ t \in I,$$

Pachpatte a établi une version plus générale du théorème précédent comme suit :

Théorème 2.8 ([63]) *Soient u, p, q, r et f des fonctions continues et positives définies sur $I = [\alpha, \beta]$ et soit $k(t,s)$ et sa dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial s} k(t,s)$ deux fonctions positives et continues, pour $\alpha \leq s \leq t \leq \beta$. Si l'inégalité*

$$u(t) \leq p(t) + q(t) \int_{\alpha}^{t} k(t,s) \left[r(s)u(s) + f(s)\right] ds,$$

est satisfaite, alors

$$u(t) \leq p(t) + q(t) \left(\int_{\alpha}^{t} B(\sigma)(\exp \int_{\sigma}^{t} A(\tau) d\tau) d\sigma\right),$$

où

$$A(t) = k(t,t) r(t) q(t) + \int_{\alpha}^{t} \frac{\partial}{\partial t} k(t,s) r(s) q(s) ds$$

et

$$B(t) = k(t,t)\left[r(t)p(t) + f(t)\right] + \int_{\alpha}^{t} \frac{\partial}{\partial t} k(t,s) \left[r(s)p(s) + f(s)\right] ds.$$

En 2000, Pachpatte a établi aussi une nouvelle généralisation du théorème précédent comme suit :

Théorème 2.9 ([65]) *Supposons que les hypothèses du théorème précédent sont vérifiées. Soit, $k(t,s)$ et sa dérivée partielle $\dfrac{\partial}{\partial s}k(t,s)$ deux fonctions positives et continues, pour $0 \leq s \leq t \leq \infty$. Si l'inégalité*

$$u^p(t) \leq a(t) + b(t)\int_0^t k(t,s)\left[g(s)u^p(s) + h(s)u(s)\right]ds,$$

est satisfaite pour $p > 1$, alors nous avons

$$u(t) \leq \left\{a(t) + b(t)\int_0^t A(\sigma)(\exp\int_\sigma^t B(\tau)d\tau)d\sigma\right\}^{\frac{1}{p}},$$

où

$$\begin{aligned} A(t) &= k(t,t)\left\{g(t)a(t) + h(t)\left[\tfrac{a(t)}{p} + \tfrac{p-1}{p}\right]\right\} \\ &\quad + \int_0^t \frac{\partial}{\partial s}k(t,s)\left\{g(s)a(s) + h(s)\left[\tfrac{a(s)}{p} + \tfrac{p-1}{p}\right]\right\}ds \end{aligned}$$

et

$$B(t) = K(t,t)b(t)\left[g(t) + \tfrac{h(t)}{p}\right] + \int_0^t \frac{\partial}{\partial s}k(t,s)b(s)\left[g(s) + \tfrac{h(s)}{p}\right]ds.$$

Boukerrioua a généralisé le résultat de Norbury et Stuart sur les échelles de temps, donné par le théorème suivant :

Théorème 2.10 ([20]) *Soient $u(t), a(t), b(t)$ et $h_i(t)(i = 1, ...n) \in C_{rd}$, $a(t) > 0$ croissante pour $t \in \mathbb{T}$, il existe une suite de nombres réels positifs $p_1, p_2, ..., p_n$ telle que $p \geq p_i > 0, i = 1, ...n$. Si $L(t,.)$ est définie comme dans le théorème 1.8 (voir page 17), avec $L(t,s) \geq 0$ et $L^\Delta(t,s) \geq 0$ pour $t, s \in \mathbb{T}$ et $s \leq t$, si*

$$u^p(t) \leq a(t) + b(t)\int_{t_0}^t L(t,s)\sum_{i=1}^{i=n} h_i(s)u^{p_i}(s)\Delta s,\ t \in \mathbb{T}^k,$$

est satisfaite, alors

$$u(t) \leq (a(t) + b(t) \int_{t_0}^{t} e_B(t, \sigma(s))A(s)\Delta s)^{\frac{1}{p}}, \ t \in \mathbb{T}^k,$$

où

$$\begin{aligned} A(t) &= L(\sigma(t), t) \sum_{i=1}^{i=n} h_i(t) \left[\frac{p_i}{p} K^{\frac{p_i - p}{p}} a(t) + \frac{p - p_i}{p} K^{\frac{p_i}{p}} \right] \\ &\quad + \int_{t_0}^{t} L^{\Delta}(t, s) \sum_{i=1}^{i=n} h_i(s) \left[\frac{p_i}{p} K^{\frac{p_i - p}{p}} a(s) + \frac{p - p_i}{p} K^{\frac{p_i}{p}} \right] \Delta s \end{aligned}$$

et

$$B(t) = b(t)L(\sigma(t), t)(\sum_{i=1}^{i=n} h_i(t) \tfrac{p_i}{p} K^{\frac{p_i - p}{p}}) + \int_{t_0}^{t} b(s)L^{\Delta}(t, s) \sum_{i=1}^{i=n} h_i(s) \tfrac{p_i}{p} K^{\frac{p_i - p}{p}} \Delta s.$$

Pour plus de détails, le lecteur pourra consulter [6, 8-13, 15-20, 28-34].

2.1.3 Quelques célèbres inégalités intégrales de type Gronwall en dimension deux

L'analogue de l'inégalité de Gronwall pour les fonctions à deux variables dite aussi l'inégalité de Wendroff est donnée par le théorème suivant :

Théorème 2.11 ([6]) *Soient $u(x, y), c(x, y)$ deux fonctions positives et continues définies pour $x, y \in \mathbb{R}^+$, $a(x)$, $b(y)$ deux fonctions strictement positives, continues et croissantes sur $\mathbb{R}^+$. Si l'inégalité*

$$u(x, y) \leq a(x) + b(y) + \int_{0}^{x} \int_{0}^{y} c(t, s)u(t, s)dtds,$$

est satisfaite, alors

$$u(x,y) \leq E(x,y) \exp \left(\int_0^x \int_0^y c(t,s) dt ds \right),$$

où

$$E(x,y) = \frac{[a(x) + b(0)] \, [a(0) + b(y)]}{a(0) + b(0)}.$$

T.Nurimov, donna une version plus générale du théorème précédent dont l'énoncé est le suivant

Théorème 2.12 ([61]) *Soient $u(x,y), a(x,y), b(x,y)$ et $c(x,y)$ des fonctions positives et continues définies sur $D = [0, x_0] \times [0, y_0]$. Si l'inégalité*

$$u(x,y) \leq a(x,y) + b(x,y) \int_0^x \int_0^y c(t,s) u(t,s) dt ds$$

est satisfaite, alors

$$\begin{aligned} u(x,y) \quad \leq \quad & a(x,y) + b(x,y) \int_0^x \int_0^y \left[\exp \left(\int_\tau^x \int_\eta^y c(t,s) b(t,s) dt ds \right) \right. \\ & \left. \times \, a(\tau, \eta) c(\tau, \eta) \right] d\tau d\eta. \end{aligned}$$

La version du théorème 2.3 de Bihari pour les fonctions a deux variables fût élaborée par Bainov et Simeonov comme suit

Théorème 2.13 ([6]) *Soient $I = [0,a], J = [0,b]$, où $a, b \leq \infty$. Soient $c \geq 0$, $\varphi \in [0, \infty) \times [0, \infty)$ une fonction croissante vérifiant $\varphi(r) > 0$ pour $r > 0$, u et $f \in C(I \times J, [0, \infty))$. Si*

$$u(x,y) \leq c + \int_0^x \int_0^y f(t,s) \varphi(u(t,s)) dt ds, \ (x,y) \in I \times J,$$

est satisfaite, alors

$$u(x,y) \leq \Phi^{-1}\left[\Phi(c) + \int_0^x \int_0^y f(t,s)dtds\right],$$

pour tout $(x,y) \in [0,x_1] \times [0,y_1]$, *où*

$$\Phi(r) = \int_1^r \frac{1}{\varphi(s)} ds, \ r > 0,$$

Φ^{-1} *est l'inverse de* Φ, $(x_1,y_1) \in I \times J$ *est choisi de telle sorte que*

$$\left\{\Phi(c) + \int_0^x \int_0^y f(t,s)dtds\right\} \in Dom\left(\Phi^{-1}\right).$$

Pachpatte a généralisé le résultat de Bainov et Simeonov en remplaçant la fonction $f(t,s)$ par $k(x,y,s,t)$

Théorème 2.14 ([66]) *Soient* $u(x,y)$ *et* $a(x,y)$ *deux fonctions strictement positives continues définie sur* $\mathbb{R}_+^2$, $k(x,y,s,t)$, $D_1k(x,y,s,t)$, $D_1k(x,y,s,t)$ *et* $D_1D_2k(x,y,s,t) \in C(G_2,\mathbb{R}_+)$ *et c une constante positive où* $G_2 = \{(x,y,s,t) \in \mathbb{R}^4 : 0 \leq s \leq x < \infty \text{ et } 0 \leq t \leq y < \infty\}$.

(b_1) *Soit* $g(u)$*une fonction continue différentiable vérifiant pour* $u \geq 0$, $g(u) > 0$ *de plus* $g'(u) \geq 0$ *pour tout* $u \geq 0$ *et soit* $G(r) = \int_{r_0}^{r} \frac{ds}{g(s)}$, $r > 0$, G^{-1} *l'inverse de* G. *Si*

$$u(x,y) \leq c + \int_0^x \int_0^y k(x,y,s,t) g(u(s,t)) dtds,$$

est satisfaite pour tout $x,y \in \mathbb{R}_+$, *alors pour* $0 \leq x \leq x_1$, $0 \leq y \leq y_1$, $x,x_1,y,y_1 \in \mathbb{R}_+$, *nous avons*

$$u(x,y) \leq G^{-1}\left[G(c) + \int_0^x \int_0^y P(s,t)dtds\right],$$

où

$$\begin{aligned} P(x,y) &= k(x,y,x,y) + \int_0^x D_1 k(x,y,\sigma,y)d\sigma + \int_0^y D_2 k(x,y,x,\tau)d\tau \\ &+ \int_0^x \int_0^y D_1 D_2 k(x,y,\sigma,\tau)d\sigma d\tau, \end{aligned}$$

pour $x, y \in \mathbb{R}_+$ *et* $x_1, y_1 \in \mathbb{R}_+$ *sont choisis de sorte que*

$$G(c) + \int_0^x \int_0^y P(s,t)dtds \in Dom\left(G^{-1}\right),$$

pour tout x, y *dans* $[0, x_1], [0, y_1]$ *respectivement.*

(b_2) *Soient* g, G *et* G^{-1} *des fonctions définies comme dans* (b_1), *supposons que* g *est sous additive. Si*

$$u(x,y) \leq a(x,y) + \int_0^x \int_0^y k(x,y,s,t) g(u(s,t)) dtds,$$

est satisfaite pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+$, *alors pour* $0 \leq x \leq x_2$, $0 \leq y \leq y_2$, $x, x_2, y, y_2 \in \mathbb{R}_+$, *on a*

$$u(x,y) \leq a(x,y) + G^{-1}\left[G(E(x,y)) + \int_0^x \int_0^y P(s,t)dtds\right],$$

où P *est définie comme dans* (b_1), *et*

$$E(x,y) = \int_0^x \int_0^y k(x,y,s,t) g(a(s,t)) dtds$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+$ *et* $x_2, y_2 \in \mathbb{R}_+$ *dont* x_2, y_2 *sont choisis de sorte que*

$$G(E(x,y)) + \int_0^x \int_0^y P(s,t)dtds \in Dom\left(G^{-1}\right),$$

pour tout x, y *dans* $[0, x_2], [0, y_2]$ *respectivement.*

Ferreira et Torres, ont établi l'analogue généralisé du théorème de Wendroff sur les échelles de temps, comme suit :

Théorème 2.15 ([29]) *Soient* $u(t_1, t_2), a(t_1, t_2), f(t_1, t_2) \in C\left(\overline{\mathbb{T}}_1 \times \overline{\mathbb{T}}_2, \mathbb{R}_0^+\right)$ *où* $a(t_1, t_2)$ *est une fonction croissante par rapport à chacune de ces variables. Si*

$$u(t_1, t_2) \leq a(t_1, t_2) + \int_{a_1}^{t_1}\int_{a_2}^{t_2} f(s_1, s_2)\, u(s_1, s_2)\, \Delta_1 s_1 \Delta_2 s_2$$

pour $(a_1, a_2), (t_1, t_2) \in \overline{\mathbb{T}}_1 \times \overline{\mathbb{T}}_2$, *alors*

$$u(t_1, t_2) \leq a(t_1, t_2)\, e_{\int_{a2}^{t_2} f(t_1, s_2)\ \Delta_2 s_2}(t_1, a_1), \qquad (t_1, t_2) \in \overline{\mathbb{T}}_1 \times \overline{\mathbb{T}}_2$$

où $\mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2$ *sont deux échelles de temps et* $\overline{\mathbb{T}}_1 = [a_1, \infty) \cap \mathbb{T}_1$, $\overline{\mathbb{T}}_2 = [a_2, \infty) \cap \mathbb{T}_2$.

D. B. Pachpatte, a établi d'autres variantes du théorème précédent sur les échelles de temps, cités par les théorèmes suivants :

Théorème 2.16 ([67]) *Soient* $u, f \in C_{rd}(\Omega, \mathbb{R}_+)$, $k(x, y, s, t)$, $k^{\Delta_1}(x, y, s, t)$, $k^{\Delta_2}(x, y, s, t)$ *et* $k^{\Delta_1\Delta_2}(x, y, s, t) \in C_{rd}(\Omega \times \Omega, \mathbb{R}_+)$ *et* c *une constante positive. Si*

$$u(x, y) \leq c + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(s, t)\left[u(s, t) + \int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} k(s, t, \tau, \xi) u(\tau, \xi)\, \Delta\xi\Delta\tau\right]\Delta t\Delta s,$$

pour $(x, y) \in \Omega$, *alors nous avons*

$$u(x, y) \leq c\left[1 + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(s, t)\, e_{\int_{t_0}^{t}[f(\tau,\xi)+A(\tau,\xi)]\Delta\xi\Delta\tau}(x, x_0)\, \Delta t\Delta s\right],$$

où

$$
\begin{aligned}
A(x,y) &= k(x,y,\sigma(x),\sigma(y)) + \int_{x_0}^{x} k^{\Delta_1}(x,y,\tau,\sigma(y))\Delta\tau \\
&\quad + \int_{y_0}^{y} k^{\Delta_2}(x,y,\sigma(x),\xi)\Delta\xi + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} k^{\Delta_1\Delta_2}(x,y,\tau,\xi)\Delta\xi\Delta\tau,
\end{aligned}
$$

pour $(x,y) \in \Omega = \mathbb{T}_1 \times \mathbb{T}_2$ *où* $\mathbb{T}_1$ *et* $\mathbb{T}_2$ *sont deux échelles de temps.*

Théorème 2.17 ([67]) *Soient* u, f *et* $a \in C_{rd}(\Omega, \mathbb{R}_+)$, $k(x,y,s,t)$, $k^{\Delta_1}(x,y,s,t)$, $k^{\Delta_2}(x,y,s,t)$ *et* $k^{\Delta_1\Delta_2}(x,y,s,t) \in C_{rd}(\Omega \times \Omega, \mathbb{R}_+)$. *Si*

$$
u(x,y) \le a(x,y) + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(s,t)\left[u(s,t) + \int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} k(s,t,\tau,\xi)u(\tau,\xi)\,\Delta\xi\Delta\tau\right]\Delta t\Delta s,
$$

pour $(x,y) \in \Omega$, *alors*

$$
u(x,y) \le a(x,y) + h(x,y)\left[1 + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(s,t)\, e_{\int_{t_0}^{t}[f(\tau,\xi)+A(\tau,\xi)]\Delta\xi\Delta\tau}(x,x_0)\,\Delta t\Delta s\right],
$$

où

$$
h(x,y) = \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(s,t)\left[a(s,t) + \int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} k(s,t,\sigma(x),\xi)a(\tau,\xi)\,\Delta\xi\Delta\tau\right]\Delta t\Delta s,
$$

pour tout $(x,y) \in \Omega$, $A(x,y)$ *est définie comme dans (2.78) et* $\Omega = \mathbb{T}_1 \times \mathbb{T}_2$ *où* $\mathbb{T}_1$ *et* $\mathbb{T}_2$ *sont deux échelles de temps.*

Meftah et Boukerrioua ont établi une généralisation du théorème 2.15 comme suit

Théorème 2.18 ([46]) *Soient* $u(t,s)$, $a(t,s)$, $b(t,s)$ *et* $f(t,s)$ *des fonctions positives définies pour* $(t,s) \in \widetilde{\Omega}$ *continues en tout point dense à droite pour tout* $(t,s) \in \widetilde{\Omega}$, $\omega(x)$

une fonction positive croissante et continue pour $x \in \mathbb{R}_+$*, avec* $\omega(x) > 0$ *pour chaque* $x > 0$*. Supposons que* $a(t,s)$*,* $b(t,s)$ *sont croissantes pour* $(t,s) \in \widetilde{\Omega}$*. Si l'inégalité*

$$u(t,s) \leq a(t,s) + b(t,s) \int_{t_0}^{t} \int_{s_0}^{s} f(\tau,\eta)\omega\left(u(\tau,\eta)\right) \Delta\eta\Delta\tau \ ,$$

est satisfaite pour tout $(t,s) \in \widetilde{\Omega}$*, alors nous avons*

$$u(t,s) \leq G^{-1}\left[G\left(a(t,s)\right) + b(t,s)\int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s} f(\tau,\eta)\ \Delta\eta\Delta\tau\right] \ ,$$

pour tout $t_0 < t \leq t_1$ *et* $s_0 < s \leq s_1$*,* G^{-1}*est la fonction inverse de la fonction* G*. où* G *est une fonction croissante bijective, vérifiant*

$$G^{\Delta\tau}(u(\tau,\eta)) \ = \ \frac{u^{\Delta\tau}\ (\tau,\eta)}{\omega(u(\tau,\eta))}, \quad (\tau,\eta) \in \widetilde{\Omega}, \tag{2.1}$$

t_1*,* s_1 *sont choisis de telle sorte que*

$$\left\{G\left(a(t,s)\right) + b(t,s)\int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s} f(\tau,\eta)\ \Delta\eta\Delta\tau\right\} \in Dom\left(G^{-1}\right).$$

2.2 Nouvelles généralisations

2.2.1 Inégalité de type Pachpatte-Bihari

Le but de ce travail est de donner une estimation a priori de la solution des inégalités intégrales suivantes :

$$u^p(x,y) \leq c + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(t,s)\left[u^q(t,s) + \int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} L(t,s,\tau,\eta)g(u^r(\tau,\eta))\Delta_2\eta\Delta_1\tau\right]\Delta_2 s\Delta_1 t \text{ pour}$$

$(t,s) \in \Omega$,

$$u^p(x,y) \leq c + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(t,s) \left[g_1(u(t,s)) + \int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} L(t,s,\tau,\eta) g_2(u(\tau,\eta))\Delta_2\eta\Delta_1\tau\right]\Delta_2 s\Delta_1 t$$

pour $(t,s,\tau,\eta) \in \Omega \times \Omega$,

où f, g_1, g_2, L et r doivent remplir certaines conditions. Ces nouveaux résultats ont fait l'objet de la publication :

K. Boukerrioua, D. Diabi and T.Chiheb, Further nonlinear integral inequalities in two independent variables on time scales and their applications. Malaya J. Mat. 5(1)(2017) 109–114.

Nous mentionnons que les résultats obtenus représentent des généralisations des résultats obtenus dans [46].

Dans tout ce qui suit $\mathbb{T}_1$ et $\mathbb{T}_2$ représentent deux échelles de temps et $\Omega = \mathbb{T}_1 \times \mathbb{T}_2$ l'échelle de temps produit.

Théorème 2.19 *Soient $u(x,y), f(x,y)$ deux fonction positives définies pour $(x,y) \in \Omega$ continues en tout point dense à droite pour tout $(x,y) \in \Omega$ et $L(x,y,t,s) \in C_{rd}(\Omega \times \Omega, \mathbb{R}^+)$. c, p, q, $r \in \mathbb{R}_0^+$ telles que $p \geq q > 0$, $p \geq r > 0$. Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction différentiable et croissante sur $]0,+\infty[$ dont la dérivée première g' est continue et décroissante sur $]0,+\infty[$. Si*

$$u^p(x,y) \leq c + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(t,s) \left[u^q(t,s) + \int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} L(t,s,\tau,\eta) g(u^r(\tau,\eta))\Delta_2\eta\Delta_1\tau\right]\Delta_2 s\Delta_1 t \tag{2.2}$$

est satisfaite pour tout $(x,y) \in \Omega$, alors

$$u(x,y) \leq \left\{ P(x,y) e_{\int_{y_0}^{y} Q(\tau,\eta)\ \Delta_2\eta}(x,x_0) \right\}^{\frac{1}{p}}, \tag{2.3}$$

où

$$P\left(x,y\right)= \ c+\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}f(t,s)\left[\tfrac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}}+g(\tfrac{p-r}{p}K^{\frac{r}{p}})\int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t}L(t,s,\tau,\eta)\Delta_2\eta\Delta_1\tau\right]\Delta_2 s\Delta_1 t, \quad (2.4)$$

$$Q(t,s)=f(t,s)\left[\frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}+\frac{r}{p}g'(\tfrac{p-r}{p}K^{\frac{r}{p}})K^{\frac{r-p}{p}}\int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t}L(t,s,\tau,\eta)\Delta_2\eta\Delta_1\tau\right], \quad (2.5)$$

et $K>0$.

Preuve. Définissons la fonction $z(x,y)$ comme suit :

$$z(x,y)=c+\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}f(t,s)\ \left[u^q(t,s)+\int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t}L(t,s,\tau,\eta)g(u^r(\tau,\eta))\Delta_2\eta\Delta_1\tau\right]\Delta_2 s\Delta_1 t, \quad (2.6)$$

il est claire que

$$z(x_0,y)=z(x,y_0)=c, \quad (2.7)$$

et

$$u^p(x,y)\leq z(x,y). \quad (2.8)$$

Utilisons le lemme 1.2 (voir page27) pour l'inégalité précédente, nous obtenons

$$u(x,y)\leq z^{\frac{1}{p}}(x,y)\leq \frac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}z(x,y)+\tfrac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}}. \quad (2.9)$$

Substituons (2.9) dans (2.6), nous aboutissons à

$$z(x,y)\leq c+\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}f(t,s)\ \left[z^{\frac{q}{p}}(t,s)+\int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t}L(t,s,\tau,\eta)g(z^{\frac{r}{p}}(\tau,\eta))\Delta_2\eta\Delta_1\tau\right]\Delta_2 s\Delta_1 t. \quad (2.10)$$

Réutilisons le lemme 1.2 pour (2.10), on trouve

$$\begin{aligned} z(x,y) \leq\ & c + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(t,s)\ \Bigg[\frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}} z(t,s) + \frac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}} \\ & + \int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} L(t,s,\tau,\eta) g\left(\frac{r}{p}K^{\frac{r-p}{p}} z(\tau,\eta) + \frac{p-r}{p}K^{\frac{r}{p}}\right)\Delta_2\eta\Delta_1\tau\Bigg]\Delta_2 s\Delta_1 t, \end{aligned} \tag{2.11}$$

D'après le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction g, on a pour $x_1 \geq y_1 > 0$, il existe $c \in]y_1, x_1[$ telle que

$$g(x_1) - g(y_1) = g\acute{}(c)(x_1 - y_1) \leq g\acute{}(y_1)(x_1 - y_1).$$

Ainsi (2.11) peut être réécrite comme suit :

$$\begin{aligned} z(x,y) \leq\ & c + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(t,s)\left[\frac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}} + g\Big(\frac{p-r}{p}K^{\frac{r}{p}}\Big)\int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} L(t,s,\tau,\eta)\Delta_2\eta\Delta_1\tau\right]\Delta_2 s\Delta_1 t \\ & + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(t,s) z(t,s) \\ & \times \left[\frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}} + \frac{r}{p}K^{\frac{r-p}{p}} g'\Big(\frac{p-r}{p}K^{\frac{r}{p}}\Big)\int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} L(t,s,\tau,\eta)\Delta_2\eta\Delta_1\tau\right]\Delta_2 s\Delta_1 t. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Remplaçons (2.4) et (2.5) dans (2.11), on trouve

$$z(x,y) \leq P(x,y) + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} Q(t,s) z(t,s)\Delta_2 s\Delta_1 t. \tag{2.13}$$

Par le biais du théorème 2.15, (2.13) donne

$$z(x,y) \leq P(x,y) e_{\int_{y_0}^{y} Q(t,s)\Delta_2 s}(x, x_0)\,. \tag{2.14}$$

Le résultat désiré découle de (2.9) et (2.14). ■

Remarque 2.1 *Si on pose $g(x) = x$ dans (2.2), on retrouve le résultat du théorème 3.1 de* [45].

Théorème 2.20 *Soient $u(x,y), f(x,y)$ deux fonction positives définies pour $(x,y) \in \Omega$, continues en tout point dense à droite pour tout $(x,y) \in \Omega$ et $L(x,y,t,s) \in C_{rd}(\Omega \times \Omega, \mathbb{R}^+)$. Soient $g_1, g_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ des fonctions différentiables et croissantes sur $]0,+\infty[$ dont les dérivée premières sont continues et décroissantes sur $]0,+\infty[$.Si*

$$u^p(x,y) \leq c + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(t,s) \left[g_1(u(t,s)) + \int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} L(t,s,\tau,\eta) g_2(u(\tau,\eta)) \Delta_2\eta \Delta_1\tau \right] \Delta_2 s \Delta_1 t \tag{2.15}$$

est satisfaite pour tout $(x,y) \in \Omega$, alors

$$u(x,y) \leq \left\{ P_*(x,y) e_{\int_{y_0}^{y} Q_*(\tau,\eta)\ \Delta_2\eta}(x,x_0) \right\}^{\frac{1}{p}}, \tag{2.16}$$

où

$$P_*\ (x,y) = c + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(t,s) \left[g_1(\tfrac{p-1}{p} K^{\frac{1}{p}}) + g_2(\tfrac{p-1}{p} K^{\frac{1}{p}}) \int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} L(t,s,\tau,\eta) \Delta_2\eta \Delta_1\tau \right] \Delta_2 s \Delta_1 t, \tag{2.17}$$

$$Q_*(s,t) = f(s,t) \left[\frac{1}{p} K^{\frac{1-p}{p}} g_1'(\tfrac{p-1}{p} K^{\frac{1}{p}}) + \frac{1}{p} K^{\frac{1-p}{p}} g_2'(\tfrac{p-1}{p} K^{\frac{1}{p}}) \int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} L(s,t,\tau,\eta) \Delta_2\eta \Delta_1\tau \right]. \tag{2.18}$$

et $K > 0$.

Preuve. Définissons la fonction $z(x,y)$ comme suit :

$$z(x,y)=c+\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}f(t,s)\left[g_1(u(t,s))+\int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t}L(t,s,\tau,\eta)g_2(u(\tau,\eta))\Delta_2\eta\Delta_1\tau\right]\Delta_2 s\Delta_1 t, \tag{2.19}$$

il est claire que

$$u(x,y)\leq z^{\frac{1}{p}}(x,y). \tag{2.20}$$

Appliquons le théorème des accroissements finis aux fonctions $g_1$et g_2, utilisons (2.20) et le lemme 1.2 à l'inégalité (2.19), on obtient

$$\begin{aligned} z(x,y) \;\leq\; & c+\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}f(t,s)\left[g_1\left(\tfrac{r}{p}K^{\frac{r-p}{p}}z(t,s)+\tfrac{p-r}{p}K^{\frac{r}{p}}\right)\right. \\ & \left.+\int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t}L(t,s,\tau,\eta)g_2\left(\tfrac{r}{p}K^{\frac{r-p}{p}}z(\tau,\eta)+\tfrac{p-r}{p}K^{\frac{r}{p}}\right)\Delta_2\eta\Delta_1\tau\right]\Delta_2 s\Delta_1 t. \end{aligned} \tag{2.21}$$

On peut écrire cette dernière inégalité sous la forme

$$z(x,y)\leq P_*\ (x,y)+\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}Q_*\ (t,s)z(t,s)\Delta_2 s\Delta_1 t, \tag{2.22}$$

où P_* et Q_* sont données par (2.17) et (2.18) respectivement.

Appliquons le théorème 2.15 à l'inégalité (2.22), on trouve

$$z(x,y)\leq P_*(x,y)e_{\int_{y_0}^{y}Q_*(\tau,\eta)\ \Delta_2\eta}(x,x_0). \tag{2.23}$$

Substituons l'inégalité (2.23) dans (2.20), nous obtenons le résultat souhaité. ■

2.3 Application

On illustre les résultats du théorèmes 2.19 par une application aux équations dynamiques sur une échelle de temps quelconque. Pour cela on se propose d'étudier les propriétés de la solution de l'équation dynamique suivante :

$$(u^p(x,y))^{\Delta_2 y \Delta_1 x} = F(x,y,u^q(x,y), \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} h(t,s,\tau,\eta,u(\tau,\eta))\Delta\eta\Delta\tau). \tag{2.24}$$

Satisfaisant les conditions initiales suivantes

$$u(x,y_0) = \alpha(x), u(x_0,y) = \beta(y),\ \alpha(0) = \beta(0) = 0. \tag{2.25}$$

Où $u \in C_{rd}(\Omega, \mathbb{R}), h \in C_{rd}(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $F \in C_{rd}(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Proposition 2.1 *Supposons que*

$$\begin{aligned}
|h(x,y,s,t,u(t,s)| &\leq L(x,y,t,s)\arctan(|u(t,s)|^r) \\
|F(x,y,u,v)| &\leq f(x,y)(|u| + |v|), \\
|\alpha(x) + \beta(y)| &\leq c,
\end{aligned} \tag{2.26}$$

où L, f, c, p, q, r sont définies comme dans le théorème 2.19. Si $u(x,y)$ est solution de (2.24)-(2.25), alors

$$|u(x,y)| \leq \left\{ P(x,y) e_{\int_{y_0}^{y} Q(\tau,\eta)\ \Delta\eta}(x,x_0) \right\}^{\frac{1}{p}}, \tag{2.27}$$

où $P(x,y)$, $Q(x,y)$ sont définies comme dans (2.4)-(2.5) respectivement et $g(x)$ par $\arctan(x)$ *et $g'(x)$ par $\frac{1}{1+x^2}$.*

Preuve. La solution $u(x,y)$ s'écrit sous la forme

$$u^p(x,y) = \alpha(x) + \beta(y) + \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y} F(t,s,u^q(s,t), \int\limits_{s_0}^{s}\int\limits_{t_0}^{t} h(t,s,\tau,\eta,u(\tau,\eta))\Delta_2\eta\Delta_1\tau)\Delta_2 s\Delta_1 t, \tag{2.28}$$

Appliquons la valeur absolue, et utilisons (2.26), l'inégalité (2.28) devient

$$|u^p(x,y)| \leq c + \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y} f(t,s)(|u^q(t,s)| + \int\limits_{s_0}^{s}\int\limits_{t_0}^{t} L(t,s,\tau,\eta)\arctan|u(\tau,\eta)|^r \Delta_2\eta\Delta_1\tau)\Delta_2 s\Delta_1 t. \tag{2.29}$$

En appliquant le théorème 2.19, nous pourrons facilement trouver l'estimation (2.27). ■

Chapitre 3

Nouvelles généralisations des inégalités de type Hermite-Hadamard

3.1 Introduction

Les inégalités intégrales de type Hermite-Hadamard s'appliquent à presque tous les types de fonctions c.-à-d. aux fonctions dérivables, absolument continues, Lipchitziennes, monotones et aux fonctions à variation bornée, utilisées dans plusieurs domaines tels que les statistiques, l'intégration numérique et l'analyse non linéaire.

3.1.1 Inégalité de Hermite-Hadamard

Le 22 Novembre 1881, Hermite (1822-1901) a envoyé une lettre à la revue Mathesis, qui a été publiée dans "Mathesis 3" (1883, p. 82). Le propos de cette lettre est justifié par le théorème suivant :

Théorème 3.1 ([71]) *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, une fonction convexe, alors*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{3.1}$$

Cette courte note de Hermite n'est mentionnée nulle part dans la littérature mathématique. Le professeur Beckenbach, expert en histoire et en théorie des fonctions complexes, a mentionné que l'inégalité (3.1) a été prouvée par Hadamard en 1893 qui n'était apparemment pas au courant du résultat de Hermite, ce qui justifie l'appellation de l'inégalité de Hermite-Hadamard. Dans les dernières années, de nombreux articles ont été consacrés à la généralisation de cette inégalité, nous pouvons consulter [3, 5, 7, 26, 27, 40, 42-45, 54, 57-59, 68-70, 74-77, 80, 81].

Dans la suite, nous présentons trois nouvelles classes de non-convexité pour les fonctions à une et à deux variables dont l'objectif est l'établissement de nouvelles inégalités de type Hermite-Hadamard.

3.1.2 Inégalités de type Hermite-Hadamard pour les fonctions dont les modules des dérivées secondes sont à coordonnées (s_1, s_2)-préinvexes

Dans cette sous section, nous allons commencer par introduire de nouvelles classes de non-convexité pour les fonctions à deux variables ensuite, nous établirons de nouvelles inégalités de type Hermite-Hadamard pour ces nouvelles classes, généralisant ainsi les résultats de [43]. Ces résultats ont fait l'objet de la publication :

B. Meftah and K. Boukerrioua and T. Chiheb, New Hadamard's inequalit for (s_1, s_2)-preinvex functions on coordinates. Kragujevac Journal of Mathematics. 39 (2015), no. 2, 231–254.

Nous énoncerons uniquement les nouvelles définitions ainsi que quelques résultats liés aux inégalités de type Hermite-Hadamard, pour plus de détails voir [47].

Définition 3.1 *Soit $K_1 \times K_2 \subset [0,\infty)^n \times [0,\infty)^n$ un ensemble invexe par rapport à $\eta_1 : K_1 \times K_1 \to \mathbb{R}^n$ et $\eta_2 : K_2 \times K_2 \to \mathbb{R}^n$, et soit $f : K_1 \times K_2 \to \mathbb{R}$ une fonction positive. f est dite s-préinvexe au premier sens pour un certain nombre fixé $s \in (0,1]$, si l'inégalité*

$$f\left(u + t\eta_1\left(x,u\right), v + t\eta_2\left(y,v\right)\right) \leq (1-t^s)f(u,v) + \; t^s f(x,y)$$

est satisfaite pour tout $(x,y), (u,v) \in K_1 \times K_2$ et tout $t \in [0,1]$.

Définition 3.2 *Soit $K_1 \times K_2 \subset [0,\infty)^n \times [0,\infty)^n$ un ensemble invexe par rapport à $\eta_1 : K_1 \times K_1 \to \mathbb{R}^n$ et $\eta_2 : K_2 \times K_2 \to \mathbb{R}^n$, et soit $f : K_1 \times K_2 \to \mathbb{R}$ une fonction positive, f est dite s-préinvexe au second sens pour un certain nombre fixé $s \in (0,1]$, si l'inégalité*

$$f\left(u + t\eta_1\left(x,u\right), v + t\eta_2\left(y,v\right)\right) \leq (1-t)^s f(u,v) + \; t^s f(x,y)$$

est satisfaite pour tout (x,y), $(u,v) \in K_1 \times K_2$ et tout $t \in [0,1]$.

Définition 3.3 *Soit $K_1 \times K_2 \subset [0,\infty)^n \times [0,\infty)^n$ un ensemble invexe par rapport à $\eta_1 : K_1 \times K_1 \to \mathbb{R}^n$ et $\eta_2 : K_2 \times K_2 \to \mathbb{R}^n$, et soit $f : K_1 \times K_2 \to \mathbb{R}$ une fonction positive. f est dite à coordonnées s-préinvexes au premier sens pour un certain nombre fixé $s \in (0,1]$, si l'inégalité*

$$\begin{aligned} f\left(u + \lambda\eta_1\left(x,u\right), v + t\eta_2\left(y,v\right)\right) &\leq (1-\lambda^s)(1-t^s)f(u,v) + (1-\lambda^s)t^s f(u,y) \\ &\quad + (1-t^s)\lambda^s f(x,v) + \lambda^s t^s f(x,y) \end{aligned}$$

est satisfaite pour tout (x,y), (x,v), (u,y), $(u,v) \in K_1 \times K_2$ et tout λ, $t \in [0,1]$.

Définition 3.4 *Soit $K_1 \times K_2 \subset [0,\infty)^n \times [0,\infty)^n$ un ensemble invexe par rapport à $\eta_1 : K_1 \times K_1 \to \mathbb{R}^n$ et $\eta_2 : K_2 \times K_2 \to \mathbb{R}^n$, et soit $f : K_1 \times K_2 \to \mathbb{R}$ une fonction positive .f est dite à coordonnées s-préinvexes au second sens pour un certain nombre fixé $s \in (0,1]$,* *si l'inégalité*

$$\begin{aligned} f\left(u+\lambda\eta_1\left(x,u\right),v+t\eta_2\left(y,v\right)\right) &\leq (1-\lambda)^s(1-t)^s f(u,v)+(1-\lambda)^s t^s f(u,y) \\ &+(1-t)^s\lambda^s f(x,v)+\lambda^s t^s f(x,y) \end{aligned}$$

est satisfaite pour tout (x,y), (x,v), (u,y), $(u,v) \in K_1 \times K_2$ *et tout* λ, $t \in [0,1]$.

Définition 3.5 *Soit* $K_1 \times K_2 \subset [0,\infty)^n \times [0,\infty)^n$ *un ensemble invexe par rapport à* $\eta_1 : K_1 \times K_1 \to \mathbb{R}^n$ *et* $\eta_2 : K_2 \times K_2 \to \mathbb{R}^n$, *et soit* $f : K_1 \times K_2 \to \mathbb{R}$ *une fonction positive.* f *est dite à coordonnées* (s_1,s_2)*-préinvexes au premier sens pour certains nombres fixés* s_1, $s_2 \in (0,1]$, *si l'inégalité*

$$\begin{aligned} f\left(u+\lambda\eta_1\left(x,u\right),v+t\eta_2\left(y,v\right)\right) &\leq (1-\lambda^{s_1})(1-t^{s_2})f(u,v)+(1-\lambda^{s_1})t^{s_2}f(u,y) \\ &+(1-t^{s_2})\lambda^{s_1}f(x,v)+\lambda^{s_1}t^{s_2}f(x,y) \end{aligned}$$

est satisfaite pour tout (x,y), (x,v), (u,y), $(u,v) \in K_1 \times K_2$ *et tout* λ, $t \in [0,1]$.

Définition 3.6 *Soit* $K_1 \times K_2 \subset [0,\infty)^n \times [0,\infty)^n$ *un ensemble invexe par rapport à* $\eta_1 : K_1 \times K_1 \to \mathbb{R}^n$ *et* $\eta_2 : K_2 \times K_2 \to \mathbb{R}^n$, *et soit* $f : K_1 \times K_2 \to \mathbb{R}$ *une fonction positive.* f *est dite à coordonnées* (s_1,s_2)*-préinvexes au second sens pour certains nombres fixés* s_1, $s_2 \in (0,1]$, *si l'inégalité*

$$\begin{aligned} f\left(u+\lambda\eta_1\left(x,u\right),v+t\eta_2\left(y,v\right)\right) &\leq (1-\lambda)^{s_1}(1-t)^{s_2}f(u,v)+(1-\lambda)^{s_1}t^{s_2}f(u,y) \\ &+(1-t)^{s_2}\lambda^{s_1}f(x,v)+\lambda^{s_1}t^{s_2}f(x,y) \end{aligned}$$

est satisfaite pour tout (x,y), (x,v), (u,y), $(u,v) \in K_1 \times K_2$ *et tout* λ, $t \in [0,1]$.

Théorème 3.2 *Soit* $K_1 \times K_2$ *Un sous ensemble ouvert et invexe de* $[0,\infty) \times [0,\infty)$ *par rapport à* $\eta_1 : K_1 \times K_1 \to \mathbb{R}$ *et* $\eta_2 : K_2 \times K_2 \to \mathbb{R}$, $a,b \in K_1, c,d \in K_2$ *telles que* $\eta_1(b,a) > 0$ *et* $\eta_2(d,c) > 0$. *Soit* $f : K_1 \times K_2 \to \mathbb{R}$ *une fonction différentiable telle que* $\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda\partial t} \in L\left([a,a+\eta_1(b,a)] \times [c,c+\eta_2(d,c)]\right)$. *Si* $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda\partial t}\right|$ *est à coordonnées* (s_1,s_2)*-préinvexes* *au premier sens pour certains nombres fixés $s_1, s_2 \in (0,1]$, alors l'inégalité suivante est satisfaite*

$$\left|\frac{1}{4}\left[f\left(a,c\right)+f\left(a,c+\eta_2\left(d,c\right)\right)+f\left(a+\eta_1\left(b,a\right),c\right)+f\left(a+\eta_1\left(b,a\right),c+\eta_2(d,c)\right)\right]\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\eta_1\left(b,a\right)\eta_2\left(d,c\right)}\int\limits_a^{a+\eta_1(b,a)}\int\limits_c^{c+\eta_2(d,c)} f\left(x,y\right)dxdy-A\right| \leq \tfrac{\eta_1(b,a)\eta_2(d,c)}{4}$$
$$\times\left[\left[\tfrac{1}{2}-\tfrac{s_1+\left(\frac{1}{2}\right)^{s_1}}{(s_1+1)(s_1+2)}\right]\left[\tfrac{1}{2}-\tfrac{s_2+\left(\frac{1}{2}\right)^{s_2}}{(s_2+1)(s_2+2)}\right]\left|\tfrac{\partial^2 f}{\partial\lambda\partial t}\left(a,c\right)\right|\right.$$
$$+\left[\tfrac{1}{2}-\tfrac{s_1+\left(\frac{1}{2}\right)^{s_1}}{(s_1+1)(s_1+2)}\right]\tfrac{s_2+\left(\frac{1}{2}\right)^{s_2}}{(s_2+1)(s_2+2)}\left|\tfrac{\partial^2 f}{\partial\lambda\partial t}(a,d))\right|$$
$$+\tfrac{s_1+\left(\frac{1}{2}\right)^{s_1}}{(s_1+1)(s_1+2)}\left[\frac{1}{2}-\tfrac{s_2+\left(\frac{1}{2}\right)^{s_2}}{(s_2+1)(s_2+2)}\right]\left|\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda\partial t}(b,c)\right|$$
$$\left.+\ \tfrac{\left[s_1+\left(\frac{1}{2}\right)^{s_1}\right]\left[s_2+\left(\frac{1}{2}\right)^{s_2}\right]}{(s_1+1)(s_1+2)(s_2+1)(s_2+2)}\left|\tfrac{\partial^2 f}{\partial\lambda\partial t}(b,d)\right|\right], \tag{3.2}$$

où A est donnée par le Lemme 1.7 (voir page 29).

Preuve. Appliquons la valeur absolue aux deux côtes de l'égalité (1.9) (voir page 29), nous obtenons

$$\left|\frac{1}{4}\left[f\left(a,c\right)+f\left(a,c+\eta_2\left(d,c\right)\right)+f\left(a+\eta_1\left(b,a\right),c\right)+f\left(a+\eta_1\left(b,a\right),c+\eta_2(d,c)\right)\right]\right.$$
$$\left.+\quad\frac{1}{\eta_1\left(b,a\right)\eta_2\left(d,c\right)}\int\limits_a^{a+\eta_1(b,a)}\int\limits_c^{c+\eta_2(d,c)} f\left(x,y\right)dxdy-A\right| \leq \frac{\eta_1\left(b,a\right)\eta_2\left(d,c\right)}{4}$$
$$\times\int\limits_0^1\int\limits_0^1\left|1-2\lambda\right|\left|1-2t\right|\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\left(a+\lambda\eta_1\left(b,a\right),c+t\eta_2(d,c)\right)\right|d\lambda dt. \tag{3.3}$$

Utilisons la (s_1,s_2)-préinvexité des dérivées mixtes, nous trouvons

$$\left|\frac{1}{4}\left[f\left(a,c\right)+f\left(a,c+\eta_2\left(d,c\right)\right)+f\left(a+\eta_1\left(b,a\right),c\right)+f\left(a+\eta_1\left(b,a\right),c+\eta_2(d,c)\right)\right]\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\eta_1\left(b,a\right)\eta_2\left(d,c\right)}\int\limits_a^{a+\eta_1(b,a)}\int\limits_c^{c+\eta_2(d,c)} f\left(x,y\right)dxdy-A\right|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{\eta_1(b,a)\eta_2(d,c)}{4}\int_0^1\int_0^1 |1-2\lambda|\,|1-2t|\left[(1-\lambda^{s_1})(1-t^{s_2})\left|\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda\partial t}(a,c)\right|\right. \\
&\left. +(1-\lambda^{s_1})t^{s_2}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda\partial t}(a,d))\right| + (1-t^{s_2})\lambda^{s_1}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda\partial t}(b,c)\right| + \lambda^{s_1}t^{s_2}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda\partial t}(b,d)\right|\right] d\lambda dt \\
&= \frac{\eta_1(b,a)\eta_2(d,c)}{4}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda\partial t}(a,c)\right|\int_0^1\int_0^1 |1-2\lambda|\,|1-2t|\,(1-\lambda^{s_1})(1-t^{s_2})d\lambda dt \\
&+\frac{\eta_1(b,a)\eta_2(d,c)}{4}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda\partial t}(a,d))\right|\int_0^1\int_0^1 |1-2\lambda|\,|1-2t|\,(1-\lambda^{s_1})t^{s_2}d\lambda dt \\
&+\frac{\eta_1(b,a)\eta_2(d,c)}{4}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda\partial t}(b,c)\right|\int_0^1\int_0^1 |1-2\lambda|\,|1-2t|\,(1-t^{s_2})\lambda^{s_1}d\lambda dt \\
&+\frac{\eta_1(b,a)\eta_2(d,c)}{4}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda\partial t}(b,d)\right|\int_0^1\int_0^1 |1-2\lambda|\,|1-2t|\,\lambda^{s_1}t^{s_2}d\lambda dt. \qquad (3.4)
\end{aligned}
$$

Un simple calcul donne

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1\int_0^1 |1-2\lambda|\,|1-2t|\,(1-\lambda^{s_1})(1-t^{s_2})d\lambda dt \\
&= \left[\frac{1}{2}-\frac{s_1+\left(\frac{1}{2}\right)^{s_1}}{(s_1+1)(s_1+2)}\right]\left[\frac{1}{2}-\frac{s_2+\left(\frac{1}{2}\right)^{s_2}}{(s_2+1)(s_2+2)}\right],
\end{aligned}
$$

$$
\int_0^1\int_0^1 |1-2\lambda|\,|1-2t|\,(1-\lambda^{s_1})t^{s_2}d\lambda dt = \left[\frac{1}{2}-\frac{s_1+\left(\frac{1}{2}\right)^{s_1}}{(s_1+1)(s_1+2)}\right]\frac{s_2+\left(\frac{1}{2}\right)^{s_2}}{(s_2+1)(s_2+2)},
$$

$$
\int_0^1\int_0^1 |1-2\lambda|\,|1-2t|\,(1-t^{s_2})\lambda^{s_1}d\lambda dt = \frac{s_1+\left(\frac{1}{2}\right)^{s_1}}{(s_1+1)(s_1+2)}\left[\frac{1}{2}-\frac{s_2+\left(\frac{1}{2}\right)^{s_2}}{(s_2+1)(s_2+2)}\right],
$$

$$
\int_0^1\int_0^1 |1-2\lambda|\,|1-2t|\,\lambda^{s_1}t^{s_2}d\lambda dt = \frac{\left[s_1+\left(\frac{1}{2}\right)^{s_1}\right]\left[s_2+\left(\frac{1}{2}\right)^{s_2}\right]}{(s_1+1)(s_1+2)(s_2+1)(s_2+2)}. \qquad (3.5)
$$

Substituons (3.5) dans (3.4), nous trouvons le résultat souhaité. La preuve est ainsi achevée. ■

Théorème 3.3 *Soit $K_1 \times K_2$ un sous ensemble ouvert et invexe de $[0,\infty)\times[0,\infty)$ par rapport à $\eta_1 : K_1\times K_1 \to \mathbb{R}$ et $\eta_2 : K_2\times K_2 \to \mathbb{R}$, $a,b \in K_1, c,d \in K_2$ telles que $\eta_1(b,a) > 0$ et $\eta_2(d,c) > 0$. Soit $f : K_1 \times K_2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable telle que $\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda\partial t} \in L\left([a,a+\eta_1(b,a)]\times[c,c+\eta_2(d,c)]\right)$. Si $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda\partial t}\right|^q$ est à coordonnées (s_1,s_2)-préinvexes au second sens pour certains nombres fixés $s_1,s_2 \in (0,1]$ et $q \in [1,\infty)$, alors l'inégalité suivante est satisfaite*

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{4}\left[f(a,c)+f(a,c+\eta_2(d,c))+f(a+\eta_1(b,a),c)+f(a+\eta_1(b,a),c+\eta_2(d,c))\right]\right. \\
&\left.+\frac{1}{\eta_1(b,a)\eta_2(d,c)}\int\limits_a^{a+\eta_1(b,a)}\int\limits_c^{c+\eta_2(d,c)} f(x,y)\,dxdy - A\right| \\
\leq\ & \frac{\eta_1(b,a)\eta_2(d,c)}{4^{2-\frac{1}{q}}}\left(\left|\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda\partial t}(a,c)\right|^q\left[\frac{1}{2}-\frac{s_1+\left(\frac{1}{2}\right)^{s_1}}{(s_1+1)(s_1+2)}\right]\left[\frac{1}{2}-\frac{s_2+\left(\frac{1}{2}\right)^{s_2}}{(s_2+1)(s_2+2)}\right]\right. \\
&+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda\partial t}(a,d))\right|^q\left[\frac{1}{2}-\frac{s_1+\left(\frac{1}{2}\right)^{s_1}}{(s_1+1)(s_1+2)}\right]\frac{s_2+\left(\frac{1}{2}\right)^{s_2}}{(s_2+1)(s_2+2)} \\
&+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda\partial t}(b,c)\right|^q\frac{s_1+\left(\frac{1}{2}\right)^{s_1}}{(s_1+1)(s_1+2)}\left[\frac{1}{2}-\frac{s_2+\left(\frac{1}{2}\right)^{s_2}}{(s_2+1)(s_2+2)}\right] \\
&\left.+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda\partial t}(b,d)\right|^q\frac{\left[s_1+\left(\frac{1}{2}\right)^{s_1}\right]\left[s_2+\left(\frac{1}{2}\right)^{s_2}\right]}{(s_1+1)(s_1+2)(s_2+1)(s_2+2)}\right)^{\frac{1}{q}}, \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

où A est donnée par le Lemme 1.7.

Preuve. Appliquons le Lemme 1.7 et l'inégalité de la moyenne, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{4}\left[f(a,c)+f(a,c+\eta_2(d,c))+f(a+\eta_1(b,a),c)+f(a+\eta_1(b,a),c+\eta_2(d,c))\right]\right. \\
&\left.+\frac{1}{\eta_1(b,a)\eta_2(d,c)}\int\limits_a^{a+\eta_1(b,a)}\int\limits_c^{c+\eta_2(d,c)} f(x,y)\,dxdy - A\right| \leq \frac{\eta_1(b,a)\eta_2(d,c)}{4} \\
&\times\left(\int\limits_0^1\int\limits_0^1 |1-2t|\,|1-2\lambda|\left|\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda\partial t}(a+t\eta_1(b,a),c+s\eta_2(d,c))\right|^q dtd\lambda\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$\times\left(\int_0^1\int_0^1 |1-2t|\,|1-2\lambda|\,dtd\lambda\right)^{1-\frac{1}{q}}. \tag{3.7}$$

Utilisons la (s_1, s_2)-préinvexité des dérivées mixtes, nous trouvons

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{4}\left[f(a,c)+f(a,c+\eta_2(d,c))+f(a+\eta_1(b,a),c)+f(a+\eta_1(b,a),c+\eta_2(d,c))\right]\right.\\
&\left.+\frac{1}{\eta_1(b,a)\eta_2(d,c)}\int_a^{a+\eta_1(b,a)}\int_c^{c+\eta_2(d,c)} f(x,y)\,dxdy-A\right|\\
\leq\ &\frac{\eta_1(b,a)\eta_2(d,c)}{4}\times\left(\int_0^1\int_0^1|1-2t|\,|1-2\lambda|\,dtd\lambda\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\left|\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda\partial t}(b,d)\right|^q\right.\\
&\times\int_0^1\int_0^1|1-2t|\,|1-2\lambda|\,t^{\alpha_1}\lambda^{\alpha_2}dtd\lambda\\
&+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda\partial t}(a,c)\right|^q\int_0^1\int_0^1|1-2t|\,|1-2\lambda|\,(1-t)^{s_1}(1-\lambda)^{s_2}\,dtd\lambda\\
&+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda\partial t}(a,d))\right|^q\int_0^1\int_0^1|1-2t|\,|1-2\lambda|\,(1-t)^{s_1}\lambda^{\alpha_2}dtd\lambda\\
&\left.+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda\partial t}(b,c)\right|^q\int_0^1\int_0^1|1-2t|\,|1-2\lambda|\,t^{\alpha_1}(1-\lambda)^{s_2}\,dtd\lambda\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Substituons (3.5) et

$$\int_0^1\int_0^1|1-2t|\,|1-2\lambda|\,dtd\lambda=\frac{1}{4},$$

dans (3.8), nous aboutissons au résultat désiré. Ce qui achève la preuve. ■

Corollaire 3.1 *Sous les hypothèses du théorème précédent, si* $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda\partial t}\right|$ *est à coordonnées s-préinvexes au second sens sur* $K_1\times K_2$*, pour un certain nombre fixé* $s\in(0,1]$ *et*

$q \in [1, \infty)$, *alors l'inégalité suivante est satisfaite*

$$\left| \frac{1}{4} \left[f(a,c) + f(a, c+\eta_2(d,c)) + f(a+\eta_1(b,a), c) + f(a+\eta_1(b,a), c+\eta_2(d,c)) \right] \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\eta_1(b,a)\eta_2(d,c)} \int_a^{a+\eta_1(b,a)} \int_c^{c+\eta_2(d,c)} f(x,y)\,dxdy - A \right|$$

$$\leq \frac{\eta_1(b,a)\eta_2(d,c)}{4^{2-\frac{1}{q}}} \left(\left| \frac{\partial^2 f}{\partial\lambda\partial t}(a,c) \right|^q \left[\frac{1}{2} - \frac{s+\left(\frac{1}{2}\right)^s}{(s+1)(s+2)} \right]^2 \right.$$

$$+ \left[\left| \frac{\partial^2 f}{\partial\lambda\partial t}(a,d)) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial\lambda\partial t}(b,c) \right|^q \right] \left[\frac{s+\left(\frac{1}{2}\right)^s}{2(s+1)(s+2)} - \left[\frac{s+\left(\frac{1}{2}\right)^s}{(s+1)(s+2)} \right]^2 \right]$$

$$\left. + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial\lambda\partial t}(b,d) \right|^q \left[\frac{s+\left(\frac{1}{2}\right)^s}{(s+1)(s+2)} \right]^2 \right)^{\frac{1}{q}},$$

où A est donnée par le lemme 1.7.

3.1.3 Inégalités de type Hermite-Hadamard pour les fonctions dont les modules des dérivées secondes sont à coordonnées (s, r)-préinvexes au second sens

Dans cette sous section, nous allons commencer par introduire une deuxième nouvelle classe de non-convexité pour les fonctions à une variable ; ensuite, nous établirons de nouvelles inégalités de type Hermite-Hadamard pour cette nouvelle classe, généralisant ainsi quelques résultats de [54, 58, 59, 74, 68, 80].

Ces résultats ont fait l'objet de la publication suivante :

B. Meftah and K. Boukerrioua and T. Chiheb, On some new Hadamard type inequalities for (s, r)-preinvex functions in the second sense. Konuralp Journal of Mathematics. 5 (2017), no. 1, 24-42.

Nous présentons uniquement quelques résultats et pour plus de détails, le lecteur pourra consulter [49].

Définition 3.7 *Une fonction positive f sur l'ensemble invexe K, est dite fonction (s, r)-*

préinvexes au second sens, si

$$f(x+t\eta(y,x)) \leq \begin{cases} \left[(1-t)^s f^r x + t^s f^r(y)\right]^{\frac{1}{r}} & , \quad r \neq 0 \\ [f(x)]^{(1-t)^s} [f(y)]^{t^s}, & \quad r = 0 \end{cases}$$

est satisfaite pour tout $x, y \in K$, $s \in (0,1]$ *et* $t \in [0,1]$.

Théorème 3.4 *Soit* $f : K = [a, a+\eta(b,a)] \to \mathbb{R}^+$ *une fonction* (s,r)*-préinvexes au second sens par rapport à* η *sur* K° $(K^\circ$ *interieur de* $K)$, $a, b \in K^\circ$ *telle que* $a < a + \eta(b,a)$, *alors*

$$\frac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx \leq \left[\frac{1}{s+1}\left[f^r(a) + f^r(b)\right]\right]^{\frac{1}{r}} \tag{3.9}$$

est satisfaite pour tout $a, b \in K$, $s \in (0,1]$ *et* $r \geq 1$.

Preuve. Prenons $x = a + t\eta(b,a)$, nous aurons

$$\frac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx = \int_0^1 f(a+t\eta(b,a))dt. \tag{3.10}$$

Comme $r \geq 1$, par une simple application de l'inégalité de Jensen et la (s,r)-préinvexes au second sens de f , on obtient

$$\begin{aligned} \left[\int_0^1 f(a+t\eta(b,a))dt\right]^r &\leq \int_0^1 (f(a+t\eta(b,a)))^r dt \\ &= \int_0^1 \left[(1-t)^s f^r(a) + t^s f^r(b)\right] dt \\ &= f^r(a)\int_0^1 (1-t)^s dt + f^r(b)\int_0^1 t^s dt \\ &= \frac{1}{s+1}\left[f^r(a) + f^r(b)\right]. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Ainsi le résultat désiré découle de l'inégalité (3.11). ■

Théorème 3.5 *Soit* $f : K = [a, a+\eta(b,a)] \to \mathbb{R}^+$ *une fonction* $(s,0)$*-préinvexes au second sens par rapport à* η *sur* K° $(K^\circ$ *interieur de* $K)$ *où* $s \in (0,1]$ *un nombre fixé,* $a, b \in K^\circ$ *telle que* $a < a+\eta(b,a)$*, alors*

$$\frac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx \leq E(f(a), f(b), s) \times N(f(a), f(b), s), \tag{3.12}$$

où

$$E(f(a), f(b), s) = \begin{cases} 1 \; si \;\; f(b) = f(a) \\ \frac{(f(b))^s - (f(a))^s}{s(f(a))^s(\ln f(b) - \ln f(a))} \; si \;\; f(b) \neq f(a), \end{cases} \tag{3.13}$$

et

$$N(f(a), f(b), s) = \begin{cases} (f(a))^s & si \quad f(b) \neq f(a) \quad et \; f(b), f(a) \leq 1 \\ (f(a))^s & si \;\; f(b) = f(a) \quad et \; f(b), f(a) \leq 1 \\ f(a) & si \quad f(b) \leq 1 \leq f(a) \\ (f(a))^s (f(b))^{1-s} & si \;\; f(a) \leq 1 \leq f(b) \\ (f(a))^s (f(b))^{1-s} & si \;\; f(b) \neq f(a) \; et \; f(b), f(a) \geq 1 \\ (f(a))^s (f(b))^{1-s} & si \quad f(b) = f(a) \; et \; f(b), f(a) \geq 1. \end{cases} \tag{3.14}$$

Preuve. Puisque f et $(s,0)$-préinvexes au second sens, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx &= \int_0^1 f(a + t\eta(b,a))dt \\ &\leq \int_0^1 (f(a))^{(1-t)^s} (f(b))^{t^s} dt. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Faisons appel au lemme 1.4 (voir page 28), (3.15) donne

$$\int_0^1 (f(a))^{(1-t)^s} (f(b))^{t^s} dt$$
$$\leq \begin{cases} (f(a))^s \int_0^1 \left(\frac{f(b)}{f(a)}\right)^{st} dt & \text{si } f(b) \neq f(a) \text{ et } f(b), f(a) \leq 1 \\ (f(a))^s & \text{si } f(b) = f(a) \text{ et } f(b), f(a) \leq 1 \\ f(a) \int_0^1 \left(\frac{f(b)}{f(a)}\right)^{st} dt & \text{si } f(b) \leq 1 \leq f(a) \\ (f(a))^s (f(b))^{1-s} \int_0^1 \left(\frac{f(b)}{f(a)}\right)^{st} dt & \text{si } f(a) \leq 1 \leq f(b) \\ (f(a))^s (f(b))^{1-s} \int_0^1 \left(\frac{f(b)}{f(a)}\right)^{st} dt & \text{si } f(b) \neq f(a) \text{ et } f(b), f(a) \geq 1 \\ (f(a))^s (f(b))^{1-s} & \text{si } f(b) = f(a) \text{ et } f(b), f(a) \geq 1. \end{cases} \quad (3.16)$$

Par un simple calcul, on obtient

$$\int_0^1 \left(\frac{f(b)}{f(a)}\right)^{st} dt = \frac{(f(b))^s - (f(a))^s}{s (f(a))^s (\ln f(b) - \ln f(a))}. \quad (3.17)$$

Substituons (3.17) dans (3.16), utilisons (3.13) et (3.14), nous obtenons l'inégalité souhaitée. ■

Remarque 3.1 *pour $s = 1$, le résultat du théorème 3.5 se réduit au résultat du théorème 2.8 de* [58].

Théorème 3.6 *Soient $f, g : K = [a, a + \eta(b, a)] \to \mathbb{R}^+$ des fonctions (s_1, r_1) et (s_2, r_2)-préinvexes au second sens respectivement par rapport à η sur K° (K° intérieur de K), $a, b \in K^\circ$ tel que $a < a + \eta(b, a)$ et $(s_1, r_1), (s_2, r_2) \in (0, 1] \times (0, \infty)$ avec $f(b) \neq f(a)$ et*

$g(b) \neq g(a)$, alors, nous avons

$$\frac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)g(x)dx \leq \frac{r_1}{4+2r_1} \frac{([f^{r_1}(b)-f^{r_1}(a)]t+f^{r_1}(a))^{\frac{2+r_1}{r_1}}}{s_1[f^{r_1}(b)-f^{r_1}(a)]}$$

$$\frac{r_2}{4+2r_2} \frac{(s_2[g^{r_2}(b)-g^{r_2}(a)]t+g^{r_2}(a))^{\frac{2+r_2}{r_2}}}{s_2[g^{r_2}(b)-g^{r_2}(a)]}. \tag{3.18}$$

Preuve. Comme f et g sont des fonctions (s_1, r_1) et (s_2, r_2)-préinvexes au second sens respectivement, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)g(x)dx &= \int_0^1 f(a+t\eta(b,a))g(a+t\eta(b,a))dt \\ &\leq \int_0^1 \Big[[(1-t)^{s_1} f^{r_1}(a) + t^{s_1} f^{r_1}(b)]^{\frac{1}{r_1}} \\ &\quad \times [(1-t)^{s_2} g^{r_2}(a) + t^{s_2} g^{r_2}(b)]^{\frac{1}{r_2}} \Big] dt. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Faisons appel à l'inégalité de Cauchy, on trouve

$$\begin{aligned} &\int_0^1 [(1-t)^{s_1} f^{r_1}(a) + t^{s_1} f^{r_1}(b)]^{\frac{1}{r_1}} [(1-t)^{s_2} g^{r_2}(a) + t^{s_2} g^{r_2}(b)]^{\frac{1}{r_2}} dt \\ \leq\; & \frac{1}{2}\int_0^1 [(1-t)^{s_1} f^{r_1}(a) + t^{s_1} f^{r_1}(b)]^{\frac{2}{r_1}} dt + \frac{1}{2}\int_0^1 [(1-t)^{s_2} g^{r_2}(a) + t^{s_2} g^{r_2}(b)]^{\frac{2}{r_2}} dt. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Le lemme 1.4 permet d'écrire

$$(1-t)^{s_1} f^{r_1}(a) + t^{s_1} f^{r_1}(b) \leq\; s_1 [f^{r_1}(b) - f^{r_1}(a)] t + f^{r_1}(a). \tag{3.21}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left[(1-t)^{s_1} f^{r_1}(a) + t^{s_1} f^{r_1}(b)\right]^{\frac{2}{r_1}} dt = \int_0^1 [h(t)]^{\frac{2}{r_1}} dt \\
\leq\ & \int_0^1 \left[s_1 \left[f^{r_1}(b) - f^{r_1}(a)\right] t + f^{r_1}(a)\right]^{\frac{2}{r_1}} dt \\
=\ & \frac{r_1}{2+r_1} \frac{\left(\left[f^{r_1}(b) - f^{r_1}(a)\right] t + f^{r_1}(a)\right)^{\frac{2+r_1}{r_1}}}{s_1 \left[f^{r_1}(b) - f^{r_1}(a)\right]}. \qquad (3.22)
\end{aligned}$$

D'une manière analogue, on peut conclure que

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left[(1-t)^{s_2} g^{r_2}(a) + t^{s_2} g^{r_2}(b)\right]^{\frac{2}{r_2}} dt \\
\leq\ & \frac{r_2}{2+r_2} \frac{\left(s_2 \left[g^{r_2}(b) - g^{r_2}(a)\right] t + g^{r_2}(a)\right)^{\frac{2+r_2}{r_2}}}{s_2 \left[g^{r_2}(b) - g^{r_2}(a)\right]}. \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

Substituons (3.22) et (3.23) dans (3.20) nous aboutissons au résultat souhaité. ■

3.1.4 Inégalités de type Hermite-Hadamard pour les fonctions dont les modules des dérivées secondes sont à coordonnées (s, r)-préinvexes au premier sens

Dans cette sous section, nous allons commencer par introduire la troisième nouvelle classe de non- convexité pour les fonctions à une variable ensuite nous établirons de nouvelles inégalités de type Hermite-Hadamard pour cette nouvelle classe, généralisant ainsi les résultat de [54, 58, 59, 74, 68, 80].

Ces résultats ont fait l'objet de la publication suivante :

B. Meftah and K. Boukerrioua and T. Chiheb, Hadamard type inequalities for (s, r)-preinvex functions in the first sense. Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications Vol. 5 (2017) no. 2, pp. 170-190.

Nous présentons uniquement les nouvelles définitions ainsi que quelques théorèmes, pour plus de détails voir [48].

Définition 3.8 *Une fonction positive f sur l'ensemble invexe K, est dite fonction (s,r)-préinvexes au premier sens, si*

$$f\left(x+t\eta\left(y,x\right)\right)\leq\begin{cases}\left[\left(1-t^{s}\right)f^{r}\left(x\right)+t^{s}f^{r}(y)\right]^{\frac{1}{r}} \ , & r\neq 0\\ \left[f(x)\right]^{\left(1-t^{s}\right)}\left[f(y)\right]^{t^{s}}, & r=0\end{cases}$$

est satisfaite pour tout $x,y\in K$, $s\in(0,1]$ et $t\in[0,1]$.

Théorème 3.7 *Soit $f:K=[a,a+\eta(b,a)]\rightarrow\mathbb{R}^{+}$ une fonction (s,r)-préinvexes au premier sens par rapport à η sur K° $(K^{\circ}$ intérieur de $K)$, $a,b\in K^{\circ}$ tel que $a<a+\eta(b,a)$, alors*

$$\frac{1}{\eta\left(b,a\right)}\int\limits_{a}^{a+\eta(b,a)}f(x)dx\leq\left[\left(1-\frac{1}{s+1}\right)f^{r}\left(a\right)+\frac{1}{s+1}f^{r}\left(b\right)\right]^{\frac{1}{r}} \tag{3.24}$$

est satisfaite pour tout $a,b\in K$, $s\in(0,1]$ et $r\geq 1$.

Preuve. Prenons $x=a+t\eta\left(b,a\right)$, nous aurons

$$\frac{1}{\eta\left(b,a\right)}\int\limits_{a}^{a+\eta(b,a)}f(x)dx=\int\limits_{0}^{1}f(a+t\eta\left(b,a\right))dt. \tag{3.25}$$

Comme $r\geq 1$, par une simple application de l'inégalité de Jensen et la (s,r)-préinvexité au premier sens de f , on trouve

$$\begin{aligned}\left[\int\limits_{0}^{1}f(a+t\eta\left(b,a\right))dt\right]^{r} &\leq \int\limits_{0}^{1}\left(f(a+t\eta\left(b,a\right))\right)^{r}dt\\ &= \int\limits_{0}^{1}\left[\left(1-t^{s}\right)f^{r}\left(a\right)+t^{s}f^{r}(b)\right]dt\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= f^r(a)\int_0^1 (1-t^s)\,dt + f^r(b)\int_0^1 t^s dt \\
&= \left(1-\frac{1}{s+1}\right) f^r(a) + \frac{1}{s+1} f^r(b). \qquad (3.26)
\end{aligned}
$$

Ainsi l'inégalité (3.26) entraîne le résultat désiré. ■

Théorème 3.8 *Soient $f, g : K = [a, a+\eta(b,a)] \to \mathbb{R}^+$ des fonctions (s_1, r_1) et (s_2, r_2)-préinvexes au premier sens respectivement par rapport à η sur K° (K° intérieur de K), $a, b \in K^\circ$ tel que $a < a+\eta(b,a)$ et $(s_1, r_1), (s_2, r_2) \in (0,1] \times (0,2]$, alors l'inégalité suivante est satisfaite*

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)g(x)dx \\
\leq\ &\frac{1}{2}\left[\frac{f^{r_1}(a)}{s_1}\left(\beta\left(\frac{1}{s_1},\frac{2}{r_1}+1\right)\right)^{\frac{r_1}{2}} + \left(\frac{r_1}{2s_1+r_1}\right)^{\frac{r_1}{2}} f^{r_1}(b)\right]^{\frac{2}{r_1}} \\
&+\frac{1}{2}\left[\frac{g^{r_2}(a)}{s_2}\left(\beta\left(\frac{1}{s_2},\frac{2}{r_2}+1\right)\right)^{\frac{r2}{2}} + \left(\frac{r_2}{2s_2+r_2}\right)^{\frac{r_2}{2}} g^{r_2}(b)\right]^{\frac{2}{r_2}}. \qquad (3.27)
\end{aligned}
$$

Preuve. Puisque f et g sont des fonctions (s_1, r_1) et (s_2, r_2)-préinvexes au premier sens respectivement, on a

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)g(x)dx &= \int_0^1 f(a+t\eta(b,a))g(a+t\eta(b,a))dt \\
&\leq \int_0^1 \Big[\left[(1-t^{s_1}) f^{r_1}(a) + t^{s_1} f^{r_1}(b)\right]^{\frac{1}{r_1}} \\
&\quad \times \left[(1-t^{s_2}) g^{r_2}(a) + t^{s_2} g^{r_2}(b)\right]^{\frac{1}{r_2}}\Big]\, dt. \qquad (3.28)
\end{aligned}
$$

Appliquons l'inégalité de Cauchy au second membre de (3.28), on trouve

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left[(1-t^{s_1}) f^{r_1}(a) + t^{s_1} f^{r_1}(b)\right]^{\frac{1}{r_1}} \left[(1-t^{s_2}) g^{r_2}(a) + t^{s_2} g^{r_2}(b)\right]^{\frac{1}{r_2}} dt \\
\leq\ & \frac{1}{2}\int_0^1 \left[(1-t^{s_1}) f^{r_1}(a) + t^{s_1} f^{r_1}(b)\right]^{\frac{2}{r_1}} dt \\
&+\frac{1}{2}\int_0^1 \left[(1-t^{s_2}) g^{r_2}(a) + t^{s_2} g^{r_2}(b)\right]^{\frac{2}{r_1}} dt. \qquad (3.29)
\end{aligned}$$

D'autre part l'inégalité de Minkowski assure

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^1 \left[(1-t^{s_1}) f^{r_1}(a) + t^{s_1} f^{r_1}(b)\right]^{\frac{2}{r_1}} dt + \frac{1}{2}\int_0^1 \left[(1-t^{s_2}) g^{r_2}(a) + t^{s_2} g^{r_2}(b)\right]^{\frac{2}{r_2}} dt \\
\leq\ & \frac{1}{2}\left[\left(\int_0^1 (1-t^{s_1})^{\frac{2}{r_1}} f^2(a)\, dt\right)^{\frac{r_1}{2}} + \left(\int_0^1 t^{\frac{2s_1}{r_1}} f^2(b)\, dt\right)^{\frac{r_1}{2}}\right]^{\frac{2}{r_1}} \\
&+\frac{1}{2}\left[\left(\int_0^1 (1-t^{s_2})^{\frac{2}{r_2}} g^2(a)\, dt\right)^{\frac{r2}{2}} + \left(\int_0^1 t^{\frac{2s_2}{r_2}} g^2(b)\, dt\right)^{\frac{r_2}{2}}\right]^{\frac{2}{r_2}} \\
=\ & \frac{1}{2}\left[f^{r_1}(a)\left(\int_0^1 (1-t^{s_1})^{\frac{2}{r_1}}\, dt\right)^{\frac{r_1}{2}} + f^{r_1}(b)\left(\int_0^1 t^{\frac{2s_1}{r_1}}\, dt\right)^{\frac{r_1}{2}}\right]^{\frac{2}{r_1}} \\
&+\frac{1}{2}\left[g^{r_2}(a)\left(\int_0^1 (1-t^{s_2})^{\frac{2}{r_2}}\, dt\right)^{\frac{r2}{2}} + g^{r_2}(b)\left(\int_0^1 t^{\frac{2s_2}{r_2}}\, dt\right)^{\frac{r_2}{2}}\right]^{\frac{2}{r_2}} \\
=\ & \frac{1}{2}\left[\frac{f^{r_1}(a)}{s_1}\left(\int_0^1 (1-u)^{\frac{2}{r_1}} u^{\frac{1-s_1}{s_1}}\, dt\right)^{\frac{r_1}{2}} + f^{r_1}(b)\left(\int_0^1 t^{\frac{2s_1}{r_1}}\, dt\right)^{\frac{r_1}{2}}\right]^{\frac{2}{r_1}}
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{g^{r_2}(a)}{s_2}\left(\int_0^1 (1-u)^{\frac{2}{r_2}} u^{\frac{1-s_2}{s_2}} dt\right)^{\frac{r_2}{2}} + g^{r_2}(b)\left(\int_0^1 t^{\frac{2s_2}{r_2}} dt\right)^{\frac{r_2}{2}}\right]^{\frac{2}{r_2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{f^{r_1}(a)}{s_1}\left(\beta\left(\frac{1}{s_1}, \frac{2}{r_1}+1\right)\right)^{\frac{r_1}{2}} + \left(\frac{r_1}{2s_1+r_1}\right)^{\frac{r_1}{2}} f^{r_1}(b)\right]^{\frac{2}{r_1}}$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{g^{r_2}(a)}{s_2}\left(\beta\left(\frac{1}{s_2}, \frac{2}{r_2}+1\right)\right)^{\frac{r_2}{2}} + \left(\frac{r_2}{2s_2+r_2}\right)^{\frac{r_2}{2}} g^{r_2}(b)\right]^{\frac{2}{r_2}}. \tag{3.30}$$

Combinons (3.30) et (3.29), on trouve le résultat souhaité. ■

Théorème 3.9 *soient* $f, g : [a, a+\eta(b,a)] \to \mathbb{R}^+$ *des fonctions* (s_1, r_1)*-préinvexes au premier sens et* $(s_2, 0)$*-préinvexes respectivement par rapport à* η *sur* $[a, a+\eta(b,a)]$, $a, b \in [a, a+\eta(b,a)]$ *tel que* $a < a+\eta(b,a)$ *et* $(s_1, r_1) \in (0,1] \times [2, \infty)$, $s_2 \in (0,1]$ *satisfaisant* $\frac{g(b)}{g(a)} > 1$, *alors l'inégalité suivante est satisfaite pour tout* $K > 0$

$$\frac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)g(x)dx \leq \frac{[f(a)]^2}{2s_1}\beta(\frac{1}{s_1}, \frac{2}{r_1}+1) + \frac{r_1[f(b)]^2}{4s_1+2r_1}$$

$$+\frac{[g(a)]^2}{2}\left(\frac{g(b)}{g(a)}\right)^{2(1-s_2)K^{s_2}} \frac{\left(\frac{g(b)}{g(a)}\right)^{2s_2K^{s_2-1}} - 1}{\ln\left(\frac{g(b)}{g(a)}\right)^{2s_2K^{s_2-1}}}. \tag{3.31}$$

Preuve. Comme f est (s_1, r_1)-préinvexes au premier sens et g est $(s_2, 0)$-préinvexes, on peut écrire

$$\begin{aligned}\frac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)g(x)dx &= \int_0^1 f(a+t\eta(b,a))g(a+t\eta(b,a))dt \\ &\leq \int_0^1 \left[(1-t^{s_1}) f^{r_1}(a) + t^{s_1} f^{r_1}(b)\right]^{\frac{1}{r_1}} [g(a)]^{(1-t^{s_2})} [g(b)]^{t^{s_2}} dt,\end{aligned} \tag{3.32}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy, on obtient

$$\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)g(x)dx \leq \frac{1}{2}\int_0^1 \left[(1-t^{s_1}) f^{r_1}(a) + t^{s_1} f^{r_1}(b)\right]^{\frac{2}{r_1}} dt$$
$$+\frac{[g(a)]^2}{2}\int_0^1 \left[\left(\frac{g(b)}{g(a)}\right)^2\right]^{t^{s_2}} dt. \qquad (3.33)$$

Appliquons le lemme 1.2 (voir page 27) et le lemme 1.3 (voir page 27), (3.33) devient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^1 \left[(1-t^{s_1}) f^{r_1}(a) + t^{s_1} f^{r_1}(b)\right]^{\frac{2}{r_1}} dt + \frac{[g(a)]^2}{2}\int_0^1 \left[\left(\frac{g(b)}{g(a)}\right)^2\right]^{t^{s_2}} dt \\
\leq\ & \frac{[f(a)]^2}{2}\int_0^1 (1-t^{s_1})^{\frac{2}{r_1}} dt + \frac{[f(b)]^2}{2}\int_0^1 t^{\frac{2s_1}{r_1}} dt + \frac{[g(a)]^2}{2}\int_0^1 \left[\left(\frac{g(b)}{g(a)}\right)^2\right]^{t^{s_2}} dt \\
\leq\ & \frac{[f(a)]^2}{2s_1}\beta\left(\frac{1}{s_1}, \frac{2}{r_1}+1\right) + \frac{[f(b)]^2}{2}\frac{r_1}{2s_1+r_1} + \frac{[g(a)]^2}{2}\int_0^1 \left[\left(\frac{g(b)}{g(a)}\right)^2\right]^{s_2K^{s_2-1}t+(1-s_2)K^{s_2}} dt \\
\leq\ & \frac{[f(a)]^2}{2s_1}\beta\left(\frac{1}{s_1}, \frac{2}{r_1}+1\right) + \frac{[f(b)]^2}{2}\frac{r_1}{2s_1+r_1} \\
&+\frac{[g(a)]^2}{2}\left(\frac{g(b)}{g(a)}\right)^{2(1-s_2)K^{s_2}}\int_0^1 \left[\left(\frac{g(b)}{g(a)}\right)^{2s_2K^{s_2-1}}\right]^{t} dt \\
=\ & \frac{[f(a)]^2}{2s_1}\beta\left(\frac{1}{s_1}, \frac{2}{r_1}+1\right) + \frac{r_1[f(b)]^2}{4s_1+2r_1} \\
&+\frac{[g(a)]^2}{2}\left(\frac{g(b)}{g(a)}\right)^{2(1-s_2)K^{s_2}}\frac{\left(\frac{g(b)}{g(a)}\right)^{2s_2K^{s_2-1}}-1}{\ln\left(\frac{g(b)}{g(a)}\right)^{2s_2K^{s_2-1}}}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat désiré. ■

Remarque 3.2 *Si on prend $s_1 = s_2 = 1$ dans le Théorème 3.9, nous obtenons le Théorème 11 de* [73].

Chapitre 4

Sur quelques inégalités fractionnaires de type Hermite-Hadamard

4.1 Inégalités de type Hermite-Hadamard pour les fonctions dont les modules des dérivées secondes sont à coordonnées (s, r)-convexes aux second sens

Dans cette sous section, nous allons commencer par introduire une nouvelles classe de convexité dite la (s, r)-convexité au second sens ensuite nous établirons de nouvelles inégalités fractionnaires de type Hermite-Hadamard pour cette nouvelles classes, généralisant ainsi les résultats de [44, 75]. Ces résultats ont fait l'objet de la publication :

K. Boukerrioua, T. Chiheb and B. Meftah. Fractional Hermite-Hadamard type inequalities for functions whose second derivative are (s, r)-convex in the second sense. Kragujevac J. Math. 40 (2016), no. 2, 172–191.

Nous énoncerons uniquement la nouvelle définition de la convexité ainsi que deux résultats les plus importants, pour plus de détails voir [17].

Définition 4.1 *Une fonction positive* $f : I \subseteq [0,\infty) \to \mathbb{R}$,*est dite* (s,r)*-convexe au second sens, si*

$$f\left(tx+(1-t)y\right) \leq \begin{cases} \left[t^s f^r\left(x\right)+(1-t)^s f^r(y)\right]^{\frac{1}{r}} \ , & r \neq 0 \\ \left[f(x)\right]^{t^s}\left[f(y)\right]^{(1-t)^s}, & r=0 \end{cases}$$

est satisfaite pour un certain nombre fixé $s \in (0,1]$, $t \in [0,1]$ *et tout* $x,y \in I$.

Théorème 4.1 *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction deux fois différentiable telle que* $f'' \in L\left([a,b]\right)$, *vérifiant* $|f''(a)| \geq |f''(b)| > 1$. *Si* $|f''|$ *est* (s,r)*-convexe au second sens, alors pour* $\alpha > 0$, *on a*

$$\begin{aligned} &\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2}-\tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha}f(b)+J_{b^-}^{\alpha}f(a)\right]\right| \\ &\leq \begin{cases} \frac{c(r)(b-a)^2}{2(\alpha+1)}\left[\frac{r^2(\alpha+1)}{(s+r)(s+r(\alpha+2))}-\beta\left(\frac{s}{r}+1,\alpha+2\right)\right]\left[|f''(a)|+|f''(b)|\right] \quad si \;\; r>0, \\ \frac{(b-a)^2}{2(\alpha+1)}\left|f''(b)\right|^{2^{1-s}-1+s}\left|f''(a)\right|^{1-s}\left[\frac{1}{s|f''(b)|}\times\frac{|f''(a)|^s-|f''(b)|^s}{\ln|f''(a)|-\ln|f''(b)|}\right. \\ \left. -\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{\left(\ln\left|\frac{f''(a)}{f''(b)}\right|^s\right)^{i-1}}{(\alpha+2)_i}-\left|\frac{f''(a)}{f''(b)}\right|^s\sum\limits_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}\frac{\left(\ln\left|\frac{f''(a)}{f''(b)}\right|^s\right)^{i-1}}{(\alpha+2)_i}\right] \\ si\; r=0 \;\; et \;\; |f''(a)| \neq |f''(b)|, \\ \frac{\alpha(b-a)^2|f''(b)|^{2^{1-s}}}{2(\alpha+1)(\alpha+2)} \quad si \quad r=0 \;\; et \;\; |f''(a)|=|f''(b)| \end{cases} \end{aligned} \tag{4.1}$$

est satisfaite pour un certain nombre fixé $s \in (0,1]$ *et* $r \geq 0$, *où*

$$c(r)=\begin{cases} 1 & si \;\; r \geq 1 \\ 2^{\frac{1}{r}-1} & si \;\; 0<r\leq 1, \end{cases} \tag{4.2}$$

et $(\alpha+2)_i=\prod\limits_{j=1}^{i-1}(\alpha+2+j)$.

Preuve. En appliquant la valeur absolue à l'identité du Lemme 1.6 (voir page 28), nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2}-\tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^{+}}^{\alpha}f(b)+J_{b^{-}}^{\alpha}f(a)\right]\right| \\
\leq\ &\tfrac{(b-a)^{2}}{2(\alpha+1)}\int_{0}^{1}\left[1-(1-t)^{\alpha+1}-t^{\alpha+1}\right]\left|f''\left(ta+(1-t)b\right)\right|dt. \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

Supposons $r>0$. Comme $|f''|$ est (s,r)-convexe au second sens, on a

$$\left|f''\left(ta+(1-t)b\right)\right|\leq\left[t^{s}\left|f''(a)\right|^{r}+(1-t)^{s}\left|f''(b)\right|^{r}\right]^{\frac{1}{r}}. \qquad (4.4)$$

Utilisons le lemme 1.3 (voir page 28), (4.4) donne

$$\left|f''\left(ta+(1-t)b\right)\right|\leq c(r)\left[t^{\frac{s}{r}}\left|f''(a)\right|+(1-t)^{\frac{s}{r}}\left|f''(b)\right|\right], \qquad (4.5)$$

où $c(r)$ est définie par (4.2). Substituons (4.5) dans (4.3), on trouve

$$\begin{aligned}
&\tfrac{(b-a)^{2}}{2(\alpha+1)}\int_{0}^{1}\left[1-(1-t)^{\alpha+1}-t^{\alpha+1}\right]\left|f''\left(ta+(1-t)b\right)\right|dt \\
\leq\ &\tfrac{c(r)(b-a)^{2}}{2(\alpha+1)}\left|f''(a)\right|\int_{0}^{1}\left[\ t^{\frac{s}{r}}-\ t^{\frac{s}{r}}(1-t)^{\alpha+1}\ -t^{\frac{s}{r}+\alpha+1}\right]dt \\
&+\tfrac{c(r)(b-a)^{2}}{2(\alpha+1)}\left|f''(b)\right|\int_{0}^{1}\left[(1-t)^{\frac{s}{r}}-(1-t)^{\frac{s}{r}+\alpha+1}-t^{\alpha+1}\left(1-t\right)^{\frac{s}{r}}\right]\ dt \\
=\ &\tfrac{c(r)(b-a)^{2}}{2(\alpha+1)}\left|f''(a)\right|\left[\tfrac{r^{2}(\alpha+1)}{(s+r)(s+r(\alpha+2))}-\beta\left(\frac{s}{r}+1,\alpha+2\right)\right] \\
&+\tfrac{c(r)(b-a)^{2}}{2(\alpha+1)}\left|f''(b)\right|\left[\tfrac{r^{2}(\alpha+1)}{(s+r)(s+r(\alpha+2))}-\beta\left(\alpha+2,\frac{s}{r}+1\right)\right] \\
=\ &\tfrac{c(r)(b-a)^{2}}{2(\alpha+1)}\left[\tfrac{r^{2}(\alpha+1)}{(s+r)(s+r(\alpha+2))}-\beta\left(\frac{s}{r}+1,\alpha+2\right)\right]\left[\left|f''(a)\right|+\left|f''(b)\right|\right]. \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

Maintenant, nous allons traiter le cas où $r=0$. Puisque $|f''|$ est $(s,0)$-convexe, on a

$$\left|f''\left(ta+(1-t)b\right)\right|\leq\left|f''(a)\right|^{t^{s}}\left|f''(b)\right|^{(1-t)^{s}}, \qquad (4.7)$$

comme $|f''(b)| > 1$, d'après l'identité $(1-t)^n \leq 2^{1-n} - t^n$ pour $t, n \in [0,1]$, nous pouvons affirmé que

$$|f''(ta+(1-t)b)| \leq |f''(a)|^{t^s} |f''(b)|^{2^{1-s}-t^s} . \tag{4.8}$$

Si $|f''(a)| = |f''(b)|$, (4.8) devient

$$|f''(ta+(1-t)b)| \leq |f''(b)|^{2^{1-s}} . \tag{4.9}$$

Substituons (4.9) dans (4.3), on trouve

$$\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2} - \tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha}\left[J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)\right]\right| \leq \tfrac{\alpha(b-a)^2|f''(b)|^{2^{1-s}}}{2(\alpha+1)(\alpha+2)}. \tag{4.10}$$

Supposons maintenant que $|f''(a)| \neq |f''(b)|$, (4.8) peut s'écrire sous la forme

$$|f''(ta+(1-t)b)| \leq |f''(b)|^{2^{1-s}} \left|\tfrac{f''(a)}{f''(b)}\right|^{t^s} , \tag{4.11}$$

utilisons le fait que $|f''(a)| \geq |f''(b)|$ et faisons appel au lemme 1.4 (voir page28), (4.11) devient

$$\begin{aligned} |f''(ta+(1-t)b)| &\leq |f''(b)|^{2^{1-s}} \left|\frac{f''(a)}{f''(b)}\right|^{st+(1-s)} \\ &= |f''(b)|^{2^{1-s}-1+s} |f''(a)|^{1-s} \left|\left(\frac{f''(a)}{f''(b)}\right)^s\right|^t . \end{aligned} \tag{4.12}$$

Substituons (4.12) dans (4.3), on obtient

$$\begin{aligned} &\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2} - \tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha}\left[J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)\right]\right| \\ \leq\ & \tfrac{(b-a)^2}{2(\alpha+1)} |f''(b)|^{2^{1-s}-1+s} |f''(a)|^{1-s} \left[\int_0^1 \left|\left(\tfrac{f''(a)}{f''(b)}\right)^s\right|^t dt \right. \\ & \left. - \int_0^1 (1-t)^{\alpha+1} \left|\left(\tfrac{f''(a)}{f''(b)}\right)^s\right|^t dt - \int_0^1 t^{\alpha+1} \left|\left(\tfrac{f''(a)}{f''(b)}\right)^s\right|^t dt\right]. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Appliquons le Lemme 1.5 aux intégrales de l'inégalité (4.13), on aboutit à

$$\int_0^1 (1-t)^{\alpha+1} \left|\left(\frac{f''(a)}{f''(b)}\right)^s\right|^t dt = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\left(\ln\left|\left(\frac{f''(a)}{f''(b)}\right)^s\right|\right)^{i-1}}{(\alpha+2)_i}, \tag{4.14}$$

$$\int_0^1 t^{\alpha+1} \left|\left(\frac{f''(a)}{f''(b)}\right)^s\right|^t dt = \left|\frac{f''(a)}{f''(b)}\right|^s \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{\left(\ln\left|\frac{f''(a)}{f''(b)}\right|^s\right)^{i-1}}{(\alpha+2)_i} \tag{4.15}$$

et

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left|\left(\frac{f''(a)}{f''(b)}\right)^s\right|^t dt &= \frac{\left|\frac{f''(a)}{f''(b)}\right|^s - 1}{\ln\left|\frac{f''(a)}{f''(b)}\right|^s} \\ &= \frac{1}{s|f''(b)|} \times \frac{|f''(a)|^s - |f''(b)|^s}{\ln|f''(a)| - \ln|f''(b)|}.\end{aligned} \tag{4.16}$$

Par une simple combinaison de (4.14)- (4.16) et (4.13), on obtient

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha} f(b) + J_{b^-}^{\alpha} f(a)\right]\right| \\ \leq\ & \frac{(b-a)^2}{2(\alpha+1)} \left|f''(b)\right|^{2^{1-s}-1+s} \left|f''(a)\right|^{1-s} \left[\frac{1}{s|f''(b)|} \times \frac{|f''(a)|^s - |f''(b)|^s}{\ln|f''(a)| - \ln|f''(b)|}\right. \\ &\left. - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\left(\ln\left|\frac{f''(a)}{f''(b)}\right|^s\right)^{i-1}}{(\alpha+2)_i} - \left|\frac{f''(a)}{f''(b)}\right|^s \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{\left(\ln\left|\frac{f''(a)}{f''(b)}\right|^s\right)^{i-1}}{(\alpha+2)_i}\right].\end{aligned} \tag{4.17}$$

Le résultat désiré découle de (4.17), (4.10) et (4.6). ■

Théorème 4.2 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable telle que $f'' \in L([a,b])$, vérifiant $|f''(b)| > 1$. si $|f''|^q$ où $q > 1$ est (s,r)-convexe au second sens, alors* *pour $\alpha > 0$, on a*

$$
\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2} - \tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{a^+}f(b) + J^{\alpha}_{b^-}f(a)\right]\right| \\
\leq\ &\begin{cases}
[c(r)]^{\frac{1}{q}}\ \frac{(b-a)^2}{2(\alpha+1)}\left(\frac{\alpha}{\alpha+2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[|f''(a)|^q + |f''(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}} \\
\times\left[\frac{r^2(\alpha+1)}{(s+r)(s+r(\alpha+2))} - \beta\left(\frac{s}{r}+1, \alpha+2\right)\right]^{\frac{1}{q}} \quad pour \quad r > 0 \\
\frac{(b-a)^2}{2(\alpha+1)}\left(\frac{\alpha}{\alpha+2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(|f''(b)|\right)^{2^{1-s}-1}|f''(a)|^{(1-s)} \\
\times\left[\frac{|f''(a)|^{qs}-|f''(b)|^{qs}}{qs\ln|f''(a)|-qs\ln|f''(b)|} - |f''(b)|^{qs}\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{\left(\ln\left|\frac{f''(a)}{f''(b)}\right|^{qs}\right)^{i-1}}{(\alpha+2)_i}\right. \\
\left. - |f''(a)|^{qs}\sum\limits_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}\frac{\left(\ln\left|\frac{f''(a)}{f''(b)}\right|^{qs}\right)^{i-1}}{(\alpha+2)_i}\right]^{\frac{1}{q}} \quad si\ r = 0\ et\ |f''(a)| \neq |f''(b)| \\
\frac{\alpha(b-a)^2}{2(\alpha+1)(\alpha+2)}|f''(b)|^{2^{1-s}} \quad si\ r = 0\ et\ |f''(a)| = |f''(b)|
\end{cases}
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

est satisfaite pour un certain nombre fixé $s \in (0,1]$ et $r \geq 0$, $c(r)$ est donné par (4.2) et $(\alpha+2)_i = \prod\limits_{j=0}^{i-1}(\alpha+2+j)$.

Preuve. En appliquant la valeur absolue à l'identité du lemme 1.6, et l'inégalité de la moyenne, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2} - \tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{a^+}f(b) + J^{\alpha}_{b^-}f(a)\right]\right| \\
\leq\ & \frac{(b-a)^2}{2(\alpha+1)}\left[\int_0^1\left[1-(1-t)^{\alpha+1} - t^{\alpha+1}\right]dt\right]^{1-\frac{1}{q}} \\
& \times\left[\int_0^1\left[1-(1-t)^{\alpha+1} - t^{\alpha+1}\right]|f''(ta+(1-t)b)|^q\,dt\right]^{\frac{1}{q}} \\
=\ & \frac{(b-a)^2}{2(\alpha+1)}\left(\frac{\alpha}{\alpha+2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\int_0^1\left[1-(1-t)^{\alpha+1} - t^{\alpha+1}\right]|f''(ta+(1-t)b)|^q\,dt\right]^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

Supposons $r > 0$, en tenant compte du fait que $|f''|^q$ est (s,r)-convexe au second sens, on a

$$|f''(ta+(1-t)b)|^q \leq \left[t^s |f''(a)|^{qr} + (1-t)^s |f''(b)|^{qr}\right]^{\frac{1}{r}}, \tag{4.20}$$

Utilisons le lemme 1.3, (4.20) donne

$$|f''(ta+(1-t)b)|^q \leq c(r)\left[t^{\frac{s}{r}} |f''(a)|^q + (1-t)^{\frac{s}{r}} |f''(b)|^q\right], \tag{4.21}$$

où $c(r)$ est défini par (4.2). Remplaçons (4.21) dans (4.19), on trouve

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2} - \tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha}\left[J^\alpha_{a^+}f(b) + J^\alpha_{b^-}f(a)\right]\right| \\
\leq\ & [c(r)]^{\frac{1}{q}} \tfrac{(b-a)^2}{2(\alpha+1)} \left(\tfrac{\alpha}{\alpha+2}\right)^{1-\frac{1}{q}} \left[|f''(a)|^q \int_0^1 \left[t^{\frac{s}{r}} - t^{\frac{s}{r}}(1-t)^{\alpha+1} - t^{\frac{s}{r}+\alpha+1}\right] t^{\frac{s}{r}} dt\right. \\
&\left. + |f''(b)|^q \int_0^1 \left[(1-t)^{\frac{s}{r}} - (1-t)^{\frac{s}{r}+\alpha+1} - t^{\alpha+1}(1-t)^{\frac{s}{r}}\right] dt\right]^{\frac{1}{q}} \\
=\ & [c(r)]^{\frac{1}{q}} \tfrac{(b-a)^2}{2(\alpha+1)} \left(\tfrac{\alpha}{\alpha+2}\right)^{1-\frac{1}{q}} \left[|f''(a)|^q + |f''(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}} \\
&\times \left[\tfrac{r^2(\alpha+1)}{(s+r)(s+r(\alpha+2))} - \beta\left(\frac{s}{r}+1, \alpha+2\right)\right]^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Dans le cas où $r = 0$. Comme $|f''|^q$ et $(s,0)$-convexe, on a

$$|f''(ta+(1-t)b)|^q \leq \left(|f''(a)|^q\right)^{t^s} \left(|f''(b)|^q\right)^{(1-t)^s}. \tag{4.23}$$

D'une manière similaire que celle du théorème précédent, on obtient

$$|f''(ta+(1-t)b)|^q \leq |f''(b)|^{q2^{1-s}} \quad \text{si} \quad |f''(a)| = |f''(b)|. \tag{4.24}$$

Ainsi (4.19) donne

$$\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2} - \tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha}\left[J^\alpha_{a^+}f(b) + J^\alpha_{b^-}f(a)\right]\right| \leq \tfrac{(b-a)^2}{2(\alpha+1)} \left(\tfrac{\alpha}{\alpha+2}\right) |f''(b)|^{2^{1-s}}. \tag{4.25}$$

Dans le cas où $|f''(a)| \neq |f''(b)|$, (4.23) devient

$$\begin{aligned} \left|f''\left(ta+(1-t)b\right)\right|^q &\leq |f''(b)|^{q2^{1-s}} \left(\left|\frac{f''(a)}{f''(b)}\right|^q\right)^{t^s} \\ &\leq \left(|f''(b)|^q\right)^{2^{1-s}-1+s} \left|f''\left(a\right)\right|^{q(1-s)} \left(\left|\frac{f''(a)}{f''(b)}\right|^{qs}\right)^t . \end{aligned} \tag{4.26}$$

Substituons (4.26) dans (4.19) et appliquons le lemme 1.5 (voir page 28), on trouve

$$\begin{aligned} &\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha}\left[J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)\right]\right| \\ \leq\ & \frac{(b-a)^2}{2(\alpha+1)}\left(\frac{\alpha}{\alpha+2}\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(|f''(b)|\right)^{2^{1-s}-1+s} \left|f''\left(a\right)\right|^{(1-s)} \left[\int_0^1 \left(\left|\frac{f''(a)}{f''(b)}\right|^{qs}\right)^t dt \right. \\ & \left. - \int_0^1 (1-t)^{\alpha+1}\left(\left|\frac{f''(a)}{f''(b)}\right|^{qs}\right)^t dt - \int_0^1 t^{\alpha+1}\left(\left|\frac{f''(a)}{f''(b)}\right|^{qs}\right)^t dt\right]^{\frac{1}{q}} \\ =\ & \frac{(b-a)^2}{2(\alpha+1)}\left(\frac{\alpha}{\alpha+2}\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(|f''(b)|\right)^{2^{1-s}-1} \left|f''\left(a\right)\right|^{(1-s)} \left[\frac{|f''(a)|^{qs}-|f''(b)|^{qs}}{qs\ln|f''(a)|-qs\ln|f''(b)|}\right. \\ & \left. - |f''(b)|^{qs}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\left(\ln\left|\frac{f''(a)}{f''(b)}\right|^{qs}\right)^{i-1}}{(\alpha+2)_i} - |f''(a)|^{qs}\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}\,\frac{\left(\ln\left|\frac{f''(a)}{f''(b)}\right|^{qs}\right)^{i-1}}{(\alpha+2)_i}\right]^{\frac{1}{q}} . \end{aligned} \tag{4.27}$$

Des inégalités (4.27), (4.25) et (4.22), on obtient le résultat souhaité. ■

Théorème 4.3 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable telle que $f'' \in L\left([a,b]\right)$, vérifiant $\left|f''\left(b\right)\right| > 1$. Et soit $q \geq 1$ tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Si $|f''|^q$ est (s,r)-convexe* *au second sens, alors pour $\alpha > 0$, on a*

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha} f(b) + J_{b^-}^{\alpha} f(a)\right]\right|$$

$$\leq \begin{cases} \frac{(b-a)^2}{2(\alpha+1)}\left(\frac{p(\alpha+1)-1}{p(\alpha+1)+1}\right)^{\frac{1}{p}} [c(r)]^{\frac{1}{q}} \left(\frac{r}{s+r}\right)^{\frac{1}{q}} \left[|f''(a)|^q + |f''(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}} & si\ r > 0, \\ \frac{(b-a)^2}{2(\alpha+1)}\left(\frac{p(\alpha+1)-1}{p(\alpha+1)+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(|f''(b)|\right)^{2^{1-s}-1} |f''(a)|^{(1-s)} & \\ \times\left[\frac{|f''(a)|^{qs}-|f''(b)|^{qs}}{qs\ln|f''(a)|-qs\ln|f''(b)|}\right]^{\frac{1}{q}} & si\ \ r=0\ et\ |f''(a)| \neq |f''(b)|, \\ \frac{(b-a)^2}{2(\alpha+1)}\left(\frac{p(\alpha+1)-1}{p(\alpha+1)+1}\right)^{\frac{1}{p}} |f''(b)|^{2^{1-s}} & si\ \ r=0\ et\ |f''(a)| = |f''(b)| \end{cases} \tag{4.28}$$

est satisfaite pour un certain nombre fixé $s \in (0,1]$, $r \geq 0$, $c(r)$ est défini par (4.2).

Preuve. En appliquant la valeur absolue à l'identité du lemme 1.6, et l'inégalité de Hölder, nous obtenons

$$\begin{aligned} &\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha} f(b) + J_{b^-}^{\alpha} f(a)\right]\right| \\ \leq\ & \frac{(b-a)^2}{2(\alpha+1)}\left[\int_0^1 \left[1-(1-t)^{\alpha+1} - t^{\alpha+1}\right]^p dt\right]^{\frac{1}{p}} \\ & \times\left[\int_0^1 |f''(ta+(1-t)b)|^q dt\right]^{\frac{1}{q}} \\ \leq\ & \frac{(b-a)^2}{2(\alpha+1)}\left[\int_0^1 \left[1-(1-t)^{p(\alpha+1)} - t^{p(\alpha+1)}\right] dt\right]^{\frac{1}{p}} \\ & \times\left[\int_0^1 |f''(ta+(1-t)b)|^q dt\right]^{\frac{1}{q}} \\ =\ & \frac{(b-a)^2}{2(\alpha+1)}\left(\frac{p(\alpha+1)-1}{p(\alpha+1)+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\int_0^1 |f''(ta+(1-t)b)|^q dt\right]^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Utilisons l'inégalité $(b-a)^p \leq b^p - a^p$ pour tout $0 \leq a < b$ dans $\mathbb{R}$ et $p \geq 1$ fixé, on peut facilement obtenir

$$\begin{aligned}
\left[1-(1-t)^{\alpha+1}-t^{\alpha+1}\right]^p &= \left[\left(1-(1-t)^{\alpha+1}\right)-t^{\alpha+1}\right]^p \\
&\leq \left[1-(1-t)^{\alpha+1}\right]^p - t^{p(\alpha+1)} \\
&\leq 1-(1-t)^{p(\alpha+1)}-t^{p(\alpha+1)}.
\end{aligned}$$

Supposons $r>0$, en tenant compte du fait que $|f''|^q$ est (s,r)-convexe au second sens, on obtient

$$\left|f''\left(ta+(1-t)b\right)\right|^q \leq \left[t^s\left|f''(a)\right|^{qr}+(1-t)^s\left|f''(b)\right|^{qr}\right]^{\frac{1}{r}}, \tag{4.30}$$

Utilisons le lemme 1.3, (4.30) donne

$$\left|f''\left(ta+(1-t)b\right)\right|^q \leq c(r)\left[t^{\frac{s}{r}}\left|f''(a)\right|^q+(1-t)^{\frac{s}{r}}\left|f''(b)\right|^q\right], \tag{4.31}$$

où $c(r)$ est défini par (4.2). Substituons (4.31) dans (4.29), on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2}-\tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha}\left[J_{a^+}^\alpha f(b)+J_{b^-}^\alpha f(a)\right]\right| \leq \tfrac{(b-a)^2}{2(\alpha+1)}\left(\tfrac{p(\alpha+1)-1}{p(\alpha+1)+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[c(r)\right]^{\frac{1}{q}} \\
&\times\left[\int_0^1 t^{\frac{s}{r}}\left|f''(a)\right|^q dt+\int_0^1(1-t)^{\frac{s}{r}}\left|f''(b)\right|^q dt\right]^{\frac{1}{q}} \\
= \;& \tfrac{(b-a)^2}{2(\alpha+1)}\left(\tfrac{p(\alpha+1)-1}{p(\alpha+1)+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[c(r)\right]^{\frac{1}{q}}\left(\tfrac{r}{s+r}\right)^{\frac{1}{q}}\left[\left|f''(a)\right|^q+\left|f''(b)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Dans le cas où $r=0$, on a

$$\left|f''\left(ta+(1-t)b\right)\right|^q \leq \left|f''(b)\right|^{q2^{1-s}} \text{ si } \left|f''(a)\right|=\left|f''(b)\right|, \tag{4.33}$$

ou

$$\begin{aligned}
&\left|f''\left(ta+(1-t)b\right)\right|^q \\
\leq \;& \left(\left|f''(b)\right|^q\right)^{2^{1-s}-1+s}\left|f''(a)\right|^{q(1-s)}\left(\left|\tfrac{f''(a)}{f''(b)}\right|^{qs}\right)^t \text{ si } \left|f''(a)\right|\neq\left|f''(b)\right|.
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Substituons (4.33) dans (4.29), on trouve

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^{+}}^{\alpha}f(b)+J_{b^{-}}^{\alpha}f(a)\right]\right|\leq\frac{(b-a)^{2}}{2(\alpha+1)}\left(\frac{p(\alpha+1)-1}{p(\alpha+1)+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left|f''(b)\right|^{2^{1-s}}. \tag{4.35}$$

Remplaçons (4.34) dans (4.29), on obtient

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^{+}}^{\alpha}f(b)+J_{b^{-}}^{\alpha}f(a)\right]\right|\\ \leq\;&\frac{(b-a)^{2}}{2(\alpha+1)}\left(\frac{p(\alpha+1)-1}{p(\alpha+1)+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left|f''(b)\right|\right)^{2^{1-s}-1}\left|f''(a)\right|^{(1-s)}\left[\frac{|f''(a)|^{qs}-|f''(b)|^{qs}}{qs\ln|f''(a)|-qs\ln|f''(b)|}\right]^{\frac{1}{q}}.\end{aligned} \tag{4.36}$$

Le résultat souhaité découle des inégalités (4.36), (4.35) et (4.32). ■

Remarque 4.1 *Si en prend $s=1$ dans le théorème 4.3, on trouve le résultat du théorème 3.6 de* [75]*, ainsi que le résultat de la proposition 4.5 de* [44].

Théorème 4.4 *Sous les hypothèses du théorème 4.3, l'inégalité fractionnaire suivante est satisfaite*

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^{+}}^{\alpha}f(b)+J_{b^{-}}^{\alpha}f(a)\right]\right|\\ \leq&\begin{cases}\dfrac{[c(r)]^{\frac{1}{q}}(b-a)^{2}}{2(\alpha+1)}\left[|f''(a)|^{q}+|f''(b)|^{q}\right]^{\frac{1}{q}}\\ \quad\times\left[\dfrac{r^{2}q(\alpha+1)}{(s+r)(s+rq(\alpha+1)+r)}-\beta\left(q(\alpha+1)+1,\frac{s}{r}+1\right)\right]^{\frac{1}{q}}\quad si\ r>0\\ \dfrac{(b-a)^{2}}{2(\alpha+1)}\left(|f''(b)|\right)^{2^{1-s}-1}\left|f''(a)\right|^{(1-s)}\left[\dfrac{|f(a)|^{qs}-|f(b)|^{qs}}{qs\ln|f''(a)|-qs\ln|f''(b)|}\right.\\ \quad-|f''(b)|^{qs}\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\left(\ln\left|\frac{f''(a)}{f''(b)}\right|^{qs}\right)^{i-1}}{(q(\alpha+1)+1)_{i}}\\ \quad\left.-|f''(a)|^{qs}\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}\frac{\left(\ln\left|\frac{f''(a)}{f''(b)}\right|^{qs}\right)^{i-1}}{(q(\alpha+1)+1)_{i}}\right]^{\frac{1}{q}}\quad si\ \ r=0\ \ et\ \ |f''(a)|\neq|f''(b)|\\ \dfrac{(b-a)^{2}}{2(\alpha+1)}\left|f''(b)\right|^{2^{1-s}}\left[\dfrac{q(\alpha+1)-1}{q(\alpha+1)+1}\right]^{\frac{1}{q}}\quad si\ \ r=0\ \ et\ \ |f''(a)|=|f''(b)|.\end{cases}\end{aligned} \tag{4.37}$$

Preuve. En appliquant la valeur absolue à l'identité du Lemme 1.6, et l'inégalité de Hölder, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2}-\tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^{+}}^{\alpha}f(b)+J_{b^{-}}^{\alpha}f(a)\right]\right| \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)^{2}}{2(\alpha+1)}\left[\int_{0}^{1}dt\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_{0}^{1}\left[1-(1-t)^{\alpha+1}-t^{\alpha+1}\right]^{q}\left|f''\left(ta+(1-t)b\right)\right|^{q}dt\right]^{\frac{1}{q}} \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)^{2}}{2(\alpha+1)}\left[\int_{0}^{1}\left[1-(1-t)^{q(\alpha+1)}-t^{q(\alpha+1)}\right]\left|f''\left(ta+(1-t)b\right)\right|^{q}dt\right]^{\frac{1}{q}}. \qquad (4.38)
\end{aligned}$$

Supposons $r>0$, en tenant compte du fait que $|f''|^{q}$ est (s,r)-convexe au second sens, on a

$$\left|f''\left(ta+(1-t)b\right)\right|^{q}\leq\left[t^{s}\left|f''(a)\right|^{qr}+(1-t)^{s}\left|f''(b)\right|^{qr}\right]^{\frac{1}{r}}, \qquad (4.39)$$

Utilisons le lemme 1.3, (4.39) donne

$$\left|f''\left(ta+(1-t)b\right)\right|^{q}\leq c(r)\left[t^{\frac{s}{r}}\left|f''(a)\right|^{q}+(1-t)^{\frac{s}{r}}\left|f''(b)\right|^{q}\right], \qquad (4.40)$$

où $c(r)$ est définie par (4.2). Substituons (4.40) dans (4.38), on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2}-\tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^{+}}^{\alpha}f(b)+J_{b^{-}}^{\alpha}f(a)\right]\right| \\
\leq\ & \tfrac{[c(r)]^{\frac{1}{q}}(b-a)^{2}}{2(\alpha+1)}\Bigg[\left|f''(a)\right|^{q}\int_{0}^{1}\left[t^{\frac{s}{r}}-t^{\frac{s}{r}}(1-t)^{q(\alpha+1)}-t^{\frac{s}{r}+q(\alpha+1)}\right]dt \\
&+\left|f''(b)\right|^{q}\int_{0}^{1}\left[(1-t)^{\frac{s}{r}}-(1-t)^{\frac{s}{r}+q(\alpha+1)}-t^{q(\alpha+1)}(1-t)^{\frac{s}{r}}\right]dt\Bigg]^{\frac{1}{q}} \\
=\ & \tfrac{[c(r)]^{\frac{1}{q}}(b-a)^{2}}{2(\alpha+1)}\Bigg[\left|f''(a)\right|^{q}\left[\tfrac{r^{2}q(\alpha+1)}{(s+r)(s+rq(\alpha+1)+r)}-\beta\left(\frac{s}{r}+1,q(\alpha+1)+1\right)\right] \\
&+\left|f''(b)\right|^{q}\left[\tfrac{r^{2}q(\alpha+1)}{(s+r)(s+rq(\alpha+1)+r)}-\beta\left(q(\alpha+1)+1,\frac{s}{r}+1\right)\right]\Bigg]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{[c(r)]^{\frac{1}{q}}(b-a)^2}{2(\alpha+1)}\left[\frac{r^2 q(\alpha+1)}{(s+r)(s+rq(\alpha+1)+r)} - \beta\left(q(\alpha+1)+1, \frac{s}{r}+1\right)\right]^{\frac{1}{q}} \\
&\quad \times \left[|f''(a)|^q + |f''(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}. \qquad (4.41)
\end{aligned}
$$

Dans le cas où $r=0$, on a

$$
|f''(ta+(1-t)b)|^q \leq |f''(b)|^{q2^{1-s}} \quad \text{si } |f''(a)| = |f''(b)|, \qquad (4.42)
$$

ou

$$
|f''(ta+(1-t)b)|^q \leq \left(|f''(b)|^q\right)^{2^{1-s}-1+s} |f''(a)|^{q(1-s)} \left(\left|\frac{f''(a)}{f''(b)}\right|^{qs}\right)^t \text{ si } |f''(a)| \neq |f''(b)|. \qquad (4.43)
$$

Substituons (4.42) dans (4.38), on trouve

$$
\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha}\left[J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)\right]\right| \leq \frac{(b-a)^2}{2(\alpha+1)} |f''(b)|^{2^{1-s}} \left[\frac{q(\alpha+1)-1}{q(\alpha+1)+1}\right]^{\frac{1}{q}}. \qquad (4.44)
$$

Remplaçons (4.43) dans (4.38) et appliquons le lemme 1.5, on obtient

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha}\left[J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)\right]\right| \\
&\leq \frac{(b-a)^2}{2(\alpha+1)} \left(|f''(b)|\right)^{2^{1-s}-1} |f''(a)|^{(1-s)} \left[\frac{|f''(a)|^{qs} - |f''(b)|^{qs}}{qs\ln|f''(a)| - qs\ln|f''(b)|}\right. \\
&\left. - |f''(b)|^{qs} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\left(\ln\left|\frac{f''(a)}{f''(b)}\right|^{qs}\right)^{i-1}}{(q(\alpha+1)+1)_i} - |f''(a)|^{qs} \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{\left(\ln\left|\frac{f''(a)}{f''(b)}\right|^{qs}\right)^{i-1}}{(q(\alpha+1)+1)_i}\right]^{\frac{1}{q}}. \qquad (4.45)
\end{aligned}
$$

Le résultat souhaité découle des inégalités (4.45), (4.44) et (4.41). ■

Remarque 4.2 *Si en prend $s=1$ dans le théorème 4.4, on obtient le rsultat du théorème 4.2 de* [75].

Conclusion

Cette étude s'inscrit dans la démarche de l'application des outils d'analyse aux équations différentielles ainsi que d'autres branches, cette dernière comporte quatre parties :

La première partie nous a permis d'esquisser la théorie des échelles de temps, et des notions basique de l'intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville ainsi que quelques types de non- convexité et de convexité classique.

La deuxième partie était consacrée aux inégalités intégro-différentielles sur des échelles de temps plus précisément à celles de Pachpatte-Bihari en dimension deux, nous avons pu d'une part établir de nouvelles inégalités de ce type et d'autre part trouver une application pour ces résultats. Ces résultats ont fait l'objet d'une publication internationale.

La troisième partie, était dévouée aux inégalités analytiques, plus précisément celles de Hermite-Hadamard dont les résultats ont fait l'objet de quatre autres publications internationales.

Par contre la dernière partie est consacrée aux inégalités fractionnaires de type Hermite-Hadamard via l'opérateur fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et a fait l'objet d'une publication internationale.

Publications Internationales :

1-**K. Boukerrioua, D. Diabi and T. Chiheb**, Further nonlinear integral inequalities in two independent variables on time scales and their applications. Malaya J. Mat. 5 (2017), no. 1, 109–114.

2-**K. Boukerrioua, T. Chiheb and B. Meftah**, Fractional Hermite-Hadamard type inequalities for functions whose second derivative are (s, r)-convex in the second sense. Kragujevac J. Math. 40 (2016), no. 2, 172–191.

3-**K. Boukerrioua**, **B. Meftah and T. Chiheb**, Note on some Iyengar integral inequalities. Commun. Nonlinear Anal. 3 (2017), 87–90.

4-**B. Meftah, K. Boukerrioua and T. Chiheb**, New Hadamard's inequalities for (s_1, s_2)-preinvex functions on coordinates. Kragujevac Journal of Mathematics. 39 (2015), no. 2, 231–254.

5-**B. Meftah ; K. Boukerrioua and T. Chiheb**, Hadamard type inequalities for R (s, r)-preinvex functions in the first sense. Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications Vol. 5 (2017) no. 2, pp. 170-190.

6-**B. Meftah and K. Boukerrioua and T. Chiheb** , On some new Hadamard type inequalities for (s, r)-preinvex functions in the second sense. Konuralp Journal of Mathematics. 5 (2017), no. 1, 24-42.

Bibliographie

[1] C. D. Ahlbrandt and C. Morian, Partial differential equations on time scales. Dynamic equations on time scales. J. Comput. Appl. Math. 141 (2002), no. 1-2, 35–55.

[2] A.O. Akdemir, M. Tunc, On some integral inequalities for s-logarithmically convex functions and their applications, arXiv : 1212.1584v1[math.FA] 7 Dec 2012.

[3] M. Alomari and M. Darus, The Hadamard's inequality for s-convex function of 2-variables on the co-ordinates. Int. J. Math. Anal. (Ruse) 2 (2008), no. 13-16, 629–638.

[4] T. Antczak, r-preinvexity and r-invexity in mathematical programming. Comput. Math. Appl. 50 (2005), no. 3-4, 551–566.

[5] R. F. Bai, F. Qi, and B. Y. Xi, Hermite-Hadamard type inequalities for the m- and (α, m)-logarithmically convex functions. Filomat 27 (2013), no. 1, 1-7.

[6] D. Bainov, P. Simeonov, Integral inequalities and applications. Translated by R. A. M. Hoksbergen and V. Covachev. Mathematics and its Applications, 57. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1992.

[7] A. Barani, A. G. Ghazanfari and S. S. Dragomir, Hermite-Hadamard inequality for functions whose derivatives absolute values are preinvex, J. Inequal. Appl. 2012, 2012 :247, 9 pp.

[8] E. F. Beckenbach and R. Bellman, Inequalities. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, N. F., Bd. 30 Springer-Verlag, Berlin-Gottingen-Heidelberg 1961.

[9] P. R. Beesack, Gronwall inequalities. Carleton Mathematical Lecture Notes, No. 11. Carleton University, Ottawa, Ont., 1975.

[10] R. Bellman, The stability of solutions of linear differential equations. Duke Math. J. 10, (1943). 643–647.

[11] R. Bellman, Asymptotic series for the solutions of linear differential-difference equations. Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 7 1958 261–269.

[12] B. Ben Nasser, K. Boukerrioua, and M. A. Hammami, On the stability of perturbed time scale systems using integral inequalities. Appl. Sci. 16 (2014), 56–71.

[13] I. Bihari, A generalization of a lemma of Bellman and its application to uniqueness problems of differential equations. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 7 (1956), 81–94.

[14] M. Bohner, and A. C. Peterson, Dynamic equations on time scales. An introduction with applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2001.

[15] K. Boukerrioua and A. Guezane-Lakoud, Some nonlinear integral inequalities arising in differential equations. Electron. J. Differential Equations 2008, no. 80, 6 pp.

[16] **K. Boukerrioua, D. Diabi and T. Chiheb**, Further nonlinear integral inequalities in two independent variables on time scales and their applications. Malaya J. Mat. 5 (2017), no. 1, 109–114.

[17] **K. Boukerrioua, T. Chiheb and B. Meftah**, Fractional Hermite-Hadamard type inequalities for functions whose second derivative are (s, r)-convex in the second sense. Kragujevac J. Math. 40 (2016), no. 2, 172–191.

[18] **K. Boukerrioua**, **B. Meftah and T. Chiheb**, Note on some Iyengar integral inequalities. Commun. Nonlinear Anal. 3 (2017), 87–90.

[19] K. Boukerrioua, Note on some nonlinear integral inequalities and applications to differential equations. Int. J. Differ. Equ. 2011, Art. ID 456216, 15 pp.

[20] K. Boukerrioua, Note on some nonlinear integral inequalities on time scales and applications to dynamic equations. J. Adv. Res. Appl. Math. 5 (2013), no. 2, 1–12.

[21] W. W. Breckner, Stetigkeitsaussagen für eine Klasse verallgemeinerter konvexer Funktionen in topologischen linearen Räumen. (German) Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 23(37) (1978), 13–20.

[22] T.A. Burton, Volterra integral and differential equations. Mathematics in Science and Engineering, 167. Academic Press, Inc., Orlando, FL, 1983.

[23] C. Corduneanu, Principles of differential and integral equations. Second edition. Chelsea Publishing Co., Bronx, N. Y., 1977.

[24] C. Corduneanu, Integral equations and stability of feedback systems. Mathematics in Science and Engineering, Vol. 104. Academic Press, New York-London, 1973.

[25] C. Corduneanu,Integral equations and applications. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[26] S. S. Dragomir and R. P. Agarwal, Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula, Appl. Math. Lett. 11 (1998), no. 5, 91–95.

[27] S. S. Dragomir, On Hadamard's inequality for convex functions on the co-ordinates in a rectangle from the plane, Taiwanese Journal of Mathematics, 4 (2001), 775-788.

[28] S. S. Dragomir, Some Gronwall type inequalities and applications. Nova Science Publishers, Inc., Hauppauge, NY, 2003.

[29] R. A. Ferreira and D. F. Torres, Some linear and nonlinear integral inequalities on time scales in two independent variables. Nonlinear Dyn. Syst. Theory 9 (2009), no. 2, 161–169.

[30] A. N. Filatov and L. V. Sharova, Integral inequalities and the theory of nonlinear oscillations. "Nauka", Moscow, 1976.

[31] H. E. Gollwitzer, A note on a functional inequality. Proc. Amer. Math. Soc. 23 1969 642–647.

[32] G. Gripenberg, S. O. Londen and O. Staffans, Volterra integral and functional equations. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 34. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[33] T. H. Gronwall, Note on the derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations. Ann. of Math. (2) 20 (1919), no. 4, 292–296.

[34] I. Györi, A generalization of Bellman's inequality for Stieltjes integrals and a uniqueness theorem. Studia Sci. Math. Hungar. 6 (1971), 137–145.

[35] M. A. Hanson, On sufficiency of the Kuhn-Tucker conditions, J. Math. Anal. Appl. 80 (1981) 545-550.

[36] S. Hilger, Ein Ma β kettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten, PhD thesis, Universität. Würzburg (1988).

[37] S. Hilger, Analysis on measure chain–A unified approach to continuous and discrete calculus, Res. Math. 18 (1990) 18-56.

[38] F. Jiang and F. Meng, Explicit bounds on some new nonlinear integral inequalities with delay. Journal of Computational and Applied Mathematics, (2007) ;205(1), 479-486.

[39] AA. Kilbas, HM. Srivastava and JJ. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier B.V, Netherlands, 2006.

[40] U. S. Kirmaci, M. K. Bakula, M. E. Özdemir and J. E. Pečarić, Hadamard-type inequalities for s-convex functions, Appl. Math. Comput. 193 (2007), no. 1, 26–35.

[41] V. Lakshmikantham and S Leela, Differential and Integral Inequalities, Vol. I, New York, Academic Press, 1969.

[42] M. A. Latif and M. Alomari, Hadamard-type inequalities for product two convex functions on the co-ordinates, Int. Math. Forum, 4(47) (2009), 2327-2338.

[43] M. A. Latif and S. S. Dragomir, Some Hermite-Hadamard type inequalities for functions whose partial derivatives in absloute value are preinvex on the co-oordinates. Facta Universitatis (NIS) Ser. Math. Inform. 28(3) (2013), 257—270.

[44] Z. Lin, J. Wang and W. Wei, Fractional Hermite-Hadamard inequalities through r-convex functions via power means, Facta Univ. Ser. Math. Inform. 30 (2015), 129–145.

[45] M. Matloka, On some Hadamard-type inequalities for (h_1, h_2)-preinvex functions on the co-ordinates. J. Inequal. Appl. 2013, 2013 :227, 12 pp.

[46] **B. Meftah, K. Boukerrioua**, Explicit estimates on some nonlinear integral inequalities in two independent variables on time scales and applications. J. Dyn. Syst. Geom. Theor. 12 (2014), no. 2, 131–144.

[47] **B. Meftah, K. Boukerrioua and T. Chiheb**, New Hadamard's inequalities for (s_1, s_2)-preinvex functions on coordinates. Kragujevac Journal of Mathematics. 39 (2015), no. 2, 231–254.

[48] **B. Meftah and K. Boukerrioua and T. Chiheb**, Hadamard type inequalities for (s, r)-preinvex functions in the first sense. Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications Vol. 5 (2017) no. 2, pp. 170-190.

[49] **B. Meftah, K. Boukerrioua and T. Chiheb** , On some new Hadamard type inequalities for (s, r)-preinvex functions in the second sense. Konuralp Journal of Mathematics. 5 (2017), no. 1, 24-42.

[50] **B. Meftah,** Inégalités intégrales aux échelles de temps et inégalités intégrales fractionnaires et leurs applications. PhD thesis, Badji-Mokhtar University, 2016.

[51] D. S. Mitrinović, Analytic inequalities. In cooperation with P. M. Vasić. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 165 Springer-Verlag, New York-Berlin 1970.

[52] D. S. Mitrinović, J. E. Pecarić and A. M. Fink, Classical and new inequalities in analysis. Mathematics and its Applications, 61. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1993.

[53] D. S. Mitrinović, J. E. Pecarić and A. M. Fink, Inequalities for functions and their integrals and derivatives, Kluwer Academic, Dordrecht, 1994.

[54] N.P.G. Ngoc, N.V. Vinh, P.T.T. Hien, Integral inequalities of Hadamard type for r-convex functions, Int. Math. Forum, 4 (2009), 1723-1728.

[55] M. A. Noor, Variational-like inequalities, Optimization, 30 (1994), 323-330.

[56] M. A. Noor, Invex equilibrium problems, J. Math. Anal. Appl., 302 (2005), 463-475.

[57] M. A. Noor, K. I. Noor, M. U. Awan and J. Li, On Hermite-Hadamard inequalities for h-preinvex functions. Filomat 28 (2014), no. 7, 1463–1474.

[58] M. A. Noor, On Hadamard integral inequalities involving two log-preinvex functions. JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. 8 (2007), no. 3, Article 75, 6 pp.

[59] M. A. Noor, Hermite-Hadamard integral inequalities for log-preinvex functions. J. Math. Anal. Approx. Theory 2 (2007), no. 2, 126-131.

[60] J. Norbury and A. M. Stuart, Volterra integral equations and a new Gronwall inequality. I. The linear case. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 106 (1987), no. 3-4, 361–373.

[61] T. Nurimov, Investigation of the solution of a two-dimensional nonlinear Volterra integral equation. (Russian) Dokl. Akad. Nauk UzSSR 1971, no. 11, 6–8.

[62] M. E. Özdemir, A. O. Akdemir, On Hadamard-Type Inequalities for Co-ordinated r-Convex Functions. arXiv preprint (2010), arXiv :1009.4081.

[63] B. G. Pachpatte, Inequalities for differential and integral equations. Mathematics in Science and Engineering, 197. Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1998.

[64] B. G. Pachpatte, On some generalizations of Bellman's lemma. J. Math. Anal. Appl. 51 (1975), 141–150.

[65] B. G. Pachpatte, On some new inequalities related to a certain inequality arising in the theory of differential equations. J. Math. Anal. Appl. 251 (2000), no. 2, 736–751.

[66] B. G. Pachpatte, On generalizations of Bihari's inequality. Soochow J. Math. 31 (2005), no. 2, 261–271.

[67] D. B. Pachpatte, Estimates of certain integral inequalities on time scales. J. Math. 2013, Art. ID 902087, 5 pp.

[68] J. Park, On the Hermite-Hadamard-like type inequalities for co-ordinated (s, r)-convex mappings in the first sense, Inter. J. of Pure and Applied Math.(IJPAM), 74, No. 2 (2012), 251-263.

[69] C. E. M. Pearce and J. Pečarić, Inequalities for differentiable mappings with application to special means and quadrature formulæ, Appl. Math. Lett. 13 (2000), no. 2, 51–55.

[70] C. E. M. Pearce, J Pečarić, V. Šimić, Stolarsky means and Hadamard's inequality. J. Math. Anal. Appl. 220 (1998), no. 1, 99-109.

[71] J. E. Pečarić, F. Proschan and Y. L. Tong, Convex functions, partial orderings, and statistical applications. Mathematics in Science and Engineering, 187. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1992.

[72] R. Pini, Invexity and generalized Convexity, Optimization 22 (1991) 513-525.

[73] F. G .Tricomi, Integral equations. Pure and Applied Mathematics. Vol. V Interscience Publishers, Inc., New York; Interscience Publishers Ltd., London 1957.

[74] W. Ul-Haq and J. Iqbal, Hermite-Hadamard-type inequalities for r-preinvex functions. J. Appl. Math. 2013, Art. ID 126457, 5 pp.

[75] J. Wang, J. Deng and M. Fĕckan, Hermite-Hadamard type inequalities for r-convex functions via Riemann-Liouville fractional integrals. Ukrainian Math. J., 65(2013), 193-211.

[76] Y. Wang, S-H. Wang and F. Qi, Simpson type integral inequalities in which the power of the absolute value of the first derivative of the integrand is s-preinvex. Facta Univ. Ser. Math. Inform. 28 (2013), no. 2, 151–159.

[77] S. Wang and X. Liu, New Hermite-Hadamard type inequalities for n-times differentiable and s-logarithmically preinvex functions. Abstr. Appl. Anal. 2014, Art. ID 725987, 11 pp.

[78] T. Weir and B. Mond, Pre-invex functions in multiple objective optimization. J. Math. Anal. Appl. 136 (1988), no. 1, 29–38.

[79] X. -M. Yang and D. Li, On properties of preinvex functions, J. Math. Anal. Appl. 256 (2001), 229-241.

[80] G. Zabandan, A. Bodaghi and A. Kili cman, The Hermite-Hadamard inequality for r-convex functions. J. Inequal. Appl. 2012, 2012 :215, 8 pp.

[81] Y. Zhang and J. Wang, On some new Hermite-Hadamard inequalities involving Riemann-Liouville fractional integrals. J. Inequal. Appl. 2013, 220 (2013).