

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques



21/05/2018

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : EDP Et Analyse numérique

Par : MEKHALFA Nour Elhouda

Intitulé

**Résolution d'un problème non-linéaire
par la méthode VIM**

Dirigé par : Dr. Berhail Amel

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. BOUAFIA Mousaab	MCB	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. BERHAIL Amel	MCB	Univ-Guelma
EXAMINATRICE	Dr. MELLAL Remaissa	MCB	Univ-Guelma

Session Juin 2018

Table des matières

Introduction	6
1 Rappel et notions de base	8
1.1 Optimisation avec contrainte	8
1.1.1 Problème général d'optimisation	9
1.1.2 Solution optimale	9
1.1.3 Condition de qualification (CQ1)	10
1.1.4 Condition de qualification (CQ2)	11
1.1.5 Résultats d'existence et d'unicité	11
1.2 Conditions d'optimalité	13
1.2.1 Conditions d'optimalité du premier ordre	13
1.2.2 Contraintes en égalité	14
1.2.3 Condition nécessaires de Lagrange	14
1.2.4 Contraintes en égalité et inégalité	14
2 Présentation de la Méthode des Itérées Variationnelle (VIM)	16
2.1 Concepts de base de la méthode d'itération variationnelle	16
2.1.1 Multiplicateur général de Lagrange	16
2.1.2 Conditions stationnaires	18
2.1.3 Variation restreinte	19
2.2 Méthode d'itération variationnelle	22
2.2.1 Présentation de la méthode VIM	22
2.3 Approche alternative de la méthode VIM	30
2.3.1 Choix de l'approximation initiale	31
2.3.2 Convergence de la méthode des itérations variationnelles	32

3	Résolution du problème de Stefan par la méthode VIM	34
3.1	Formulation du problème	34
3.2	Existence et unicité	36
3.3	Solution du problème	36
3.4	Théorème de convergence	39
	Conclusion	41
	Bibliographie	42

Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier très sincèrement mon encadreur Mme. Berhail Amel, pour la qualité du projet qu'elle m'a proposé. Ses précieux conseils, commentaires concis et pertinents ont grandement amélioré ces mémoire.

J'adresse mes sincères remerciements à tous les professeurs, intervenants et toutes les personnes qui par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques ont guidé mes réflexions et ont accepté à me rencontrer et répondre à mes questions durant mes recherches

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à deux personnes qui sont les plus chères au monde et qui m'ont comblés de leur amour et leur affection.

A ma mère qui m'a toujours soutenu depuis mon premier pas jusqu'à ce jour et qui a toujours su trouver les mots qu'ils fallaitent pour m'encourager.

A mon père qui a tout fait pour que nous ne manquions de rien.

A tous mes enseignants qui ont contribué à ma formation.

A toute la famille mekhalfa.

A tous mes collègues et amies,

A toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à réaliser ce travail.

Notations

\mathbb{R}^n	L'espace vectoriel de dimension n sur le corps \mathbb{R} ,
C	L'ensemble des fonctions continues
C^1	L'ensemble des fonctions continûment différentiables
L^2	L'espace des fonctions carré sommable
$W^{1,2}$	L'espace de Sobolov où la fonction et sa dérivée dans L^2
H	Espace de Hilbert
Ω	Sous-ensemble de \mathbb{R}^n
Γ	La frontière du domaine D
$\xi(t)$	La frontière libre de D
λ	Le multiplicateur général de Lagrange
δJ	La variation d'une fonctionnelle J
L	Opérateur linéaire
N	Opérateur non linéaire

Introduction

La modélisation des phénomènes physiques, biologiques, économiques et industriels se fait par des équations différentielles ordinaires, des équations différentielles à retard, des équations intégrales, des équations intégro-différentielles et par des équations aux dérivées partielles. Ces équations sont généralement fortement nonlinéaires et leurs solutions analytiques est difficile voir impossible à déterminer par des moyens analytiques. Pour obtenir la solution de ces équations, on fait appel aux méthodes numériques d'approximation classiques, entre autre les méthodes des éléments finis, les méthodes des différences finies, les méthodes des volumes finis, les méthodes spectrales. Ces méthodes utilisent la technique de discrétisation du domaine de définition du problème étudié pour construire un maillage, et la solution est donnée sur les points noeuds de discrétisation.

Dans les trente dernières années, des mathématiciens ont développé des méthodes semi analytiques pour la résolution de ce type de problèmes, telles que la méthode des itérations variationnelles. Cette méthodes permettent d'obtenir une solution exacte ou une solution approchée avec une grande précision, même aux équations qui sont fortement nonlinéaires, en utilisant un schéma itératif. La Méthode des Itérations Variationnelles (en anglais Variational Iteration Method (VIM)) a été établie par le mathématicien Chinois Ji-Huan He [5] en 1997. Elle a été utilisée pour la première fois pour la résolution des équations aux dérivées partielles et pour la résolution des équations différentielles à retard pour obtenir une solution analytique approchée. Depuis, cette méthode est très utilisée par des mathématiciens et des chercheurs pour manipuler une grande variété d'applications scientifiques et d'ingénierie : linéaires, nonlinéaires. La méthode des itérations variationnelles est très efficace et fiable pour la résolution analytique ou numérique pour la résolution des équations différentielles. La méthode donne des approximations de la solution qui converge rapidement vers la solution exacte du problème si elle existe, sinon la solution du problème est approchée par une série tronquée formée par les "n" premiers termes.

La méthode d'itération variationnelle [7] a été longuement étudiée depuis par des nombreuses

chercheurs, notamment, Soliman [11], Odibat et Momani [9]. Récemment, des vertus plutôt extraordinaires de la méthode ont été exploitées, et de nombreuses applications ont été trouvées dans divers domaines [12].

L'objectif de ce travail est la résolution du problème de Stefan [3] (qui est un problème de frontière libre) par la méthode VIM. Depuis le travail précurseur de Stefan en 1891 sur l'épaisseur de la calotte polaire, les problèmes de transfert thermique avec changement d'état solide-liquide portent le nom de ce physicien). Ces problèmes ont une importance considérable dans de nombreuses applications techniques et processus naturels : on peut citer l'évolution des banquises, la congélation des aliments, la biocryogénie, le moulage, la coulée continue, la croissance cristalline, la sécurité des réacteurs nucléaires, le contrôle thermique des engins spatiaux, le stockage thermique, etc. Rappelons aussi que les premiers métallurgistes du Moyen-Orient moulaient en terre, puis qu'ils ont remplacé les argiles par des sables de granulométrie précise et des moules métalliques pour augmenter la précision du moulage. La coulée en cire perdue, qui permet de faire des pièces avec une grande finesse des détails, était déjà connue des Egyptiens du moyen-empire. Cette grande variété de champs d'application explique l'élan des recherches poursuivies dans ce domaine depuis de nombreuses années pour mieux connaître la dynamique de ces processus.

Ce mémoire se compose d'une introduction et trois chapitres : Le premier chapitre est consacré aux quelques définitions et notions générales dont on a besoin dans la suite de ce mémoire, nous présentons la méthode d'optimisation avec contraintes et la caractérisation d'optimum. De façon générale, les techniques d'optimisations jouent un rôle de plus en plus important pour la conception des systèmes et des équipements de toute nature, et toutes les décisions technique ou économiques. Puisque les gens en général recherchent ce qu'il ya de meilleur et lorsque plusieurs possibilités se présentent, leur choix se porte tout naturellement vers la variante « optimal »..

Dans le deuxième chapitre nous présentons brièvement la méthode d'itération variationnelle (VIM), puis nous étudions la convergence de cette méthode pour les équations différentielles aux dérivées partielles nonlinéaires. Le troisième chapitre est consacré à l'application de cette méthode (VIM) pour résoudre l'un des problèmes aux dérivées partielles nonlinéaires c'est le problème de Stefan. Ici, on va étudier l'existence et l'unicité du problème de Stefan, sa résolution par la méthode VIM et on va terminer par l'étude de la convergence.

Chapitre 1

Rappel et notions de base

Dans ce chapitre, nous allons présenter un rappel sur l'optimisation avec contraintes et on va considérer quelques concepts qu'ils sont nécessaire de connaître pour aborder la suite de ce mémoire.

1.1 Optimisation avec contrainte

L'optimisation est une branche des mathématiques cherchant à modéliser, à analyser et à résoudre analytiquement ou numériquement les problèmes qui consistent à minimiser ou maximiser une fonction sur un ensemble. Tout d'abord, nous donnons la formulation générale d'un problème d'optimisation.

On a besoin de :

- Une fonction **objective** ou fonction de **coût** ou **critère** à minimiser, noté f de plusieurs variables ($x = x_1, x_2, \dots, x_n$).
- Un ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$ où l'on cherche la solution, on dit que S est l'ensemble des éléments admissibles du problème ou l'ensemble des contraintes.

On cherche à minimiser f sur S c'est à dire on cherche un point $\hat{x} \in S$ tel que :

$$f(\hat{x}) = \min_{x \in S} f(x) \iff f(\hat{x}) \leq f(x), \forall x \in S.$$

Remarque 1.1 : Lorsque on utilise la notation \inf pour un problème d'optimisation c-à-d " $\inf_{x \in S} f(x)$ " cela dit que l'on ne sait pas, si la valeur du minimum est atteinte. On utilise de préférence la notation " $\min_{x \in S} f(x)$ " mais il ne s'agit pas d'une convention universelle. Pour les problèmes de maximisation, les notation " \sup et \max " remplace " \inf et \min " respectivement.

On a deux types d'optimisation : sans et avec contraintes. Dans les deux cas, le but est de trouver les valeurs qui minimisent (resp.maximisent) une fonction objective.

1.1.1 Problème général d'optimisation

Dans un problème d'optimisation avec contraintes on effectue la minimisation de la fonction $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ sur S . Nous considérons le problème formulé de la façon suivante :

$$(P) \{ \min f(x); x \in S \}. \quad (1.1)$$

qui peut s'écrire sous la forme :

$$\{ \text{trouver } \hat{x} \in S \text{ tel que } f(\hat{x}) \leq f(x); \quad \forall x \in S \},$$

$$S = \{ x \in \mathbb{R}^n, g_i(x) = 0, i \in E = \{1, \dots, p\}, h_j(x) \leq 0, j \in I = \{1, \dots, q\} \}.$$

où $p, q \in \mathbb{N}^*$

- La fonction $g(x) = (g_1(x), \dots, g_p(x))$ est une fonction de plusieurs variables $x \in S$ à valeurs dans \mathbb{R} , représente les contraintes en égalité.

- La fonction $h(x) = (h_1(x), \dots, h_q(x))$ est une fonction de plusieurs variables $x \in S$ à valeurs dans \mathbb{R} , représente les contraintes en inégalité. Nous noterons ces types de problèmes ainsi :

- (PCE) Problème avec contraintes d'égalité.

(PCI) Problème avec contraintes d'inégalité.

Remarque 1.2 : Dans le cas où $S = \mathbb{R}^n$, on dit qu'on a un problème d'optimisation sans contraintes.

1.1.2 Solution optimale

Soit une fonction $f : S \rightarrow \mathbb{R}$. Les minima locaux et globaux de f sur $S \subset \mathbb{R}^n$ sont définis de la manière suivante :

Définition 1.1 1- On dit que la fonction f de problème (P) possède un **minimum globale** en $\hat{x} \in S$ ssi :

$$\forall x \in S, f(\hat{x}) \leq f(x).$$

2- On dit que le point $\hat{x} \in S$ est un **minimum locale** du (P) ssi il existe un voisinage $V \subset S$ de \hat{x} tel que :

$$\forall x \in V(\hat{x}), f(x) \geq f(\hat{x}).$$

3- On dit que $\hat{x} \in S$ est un **minimum local strict** de (P) ssi :

$$\exists V(\hat{x}) \in S \text{ tel que : } \forall x \in V(\hat{x}), f(x) > f(\hat{x}).$$

4-On dit que $\hat{x} \in S$ est un **minimum local strict isolée** de (P) ssi :

$$\exists V(\hat{x}) \text{ tel que : } \hat{x} \text{ est la seule solution optimal de } (P)$$

Remarque 1.3 :

- Un minimum global est clairement un minimum local.
- Si on dit simplement minimum on comprend minimum global.
- Pour la maximisation, faire la minimisation de la fonction $(-f)$

$$\max f(x) = - \min f(-x).$$

On ne peut évidemment résoudre le problème d'optimisation avec contraintes, sans quelques hypothèses sur la fonction objective f qui permettent au moins d'assurer l'existence de la solution.

1.1.3 Condition de qualification (CQ1)

Soit (P) le problème d'optimisation des contraintes d'égalité et d'inégalité suivant $\{\min f(x); x \in S\}$ où $S = \{x \in \mathbb{R}^n, g(x) = (g_i(x))_{i=1}^p = 0, h(x) = (h_j(x))_{j=1}^q \leq 0\}$.

Définition 1.2 Point régulier

On dit qu'un élément $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ est régulier pour les contraintes h et g si :

- 1) il est réalisable c-à-d : $h(\hat{x}) \leq 0, g(\hat{x}) = 0$
- 2) les vecteurs $(\nabla g_i)(\hat{x}), i \in \{1, \dots, p\}$ sont libre.
- 3) On peut trouver un vecteur $d \neq 0$ de \mathbb{R}^n tq :

$$(\nabla g_i(\hat{x}), d) = 0, \forall i = \{1, \dots, p\} \text{ et } (\nabla h_j(\hat{x}), d) < 0, \forall j \in I(\hat{x}).$$

où $I(\hat{x})$ est l'ensemble des indices j correspondant aux contraintes active.

On dit aussi que \hat{x} vérifie la contrainte de qualification de mangasarian – Frowniowitz que nous noterons (MFCQ) ou (CQ1).

Une autre condition de qualification plus forte de (CQ1) est donné par la définition suivante.

1.1.4 Condition de qualification (CQ2)

Définition 1.3 On dit qu'un élément $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ vérifie la condition de qualification 2 (CQ2) pour les contraintes h et g si :

- 1) il est réalisable c-à-d $h(\hat{x}) \leq 0$ et $g(\hat{x}) = 0$.
- 2) les vecteurs $(\nabla g_i(\hat{x}))$, $1 \leq i \leq p$, et $(\nabla h_j(\hat{x}))$, $j \in I(\hat{x})$ sont indépendants.

Définition 1.4 Directions admissibles

Soit un point admissible de S une direction $d \in \mathbb{R}^n$ est dite admissible en \hat{x} si :

- 1) pour tout $i \in \{1 \dots p\}$, $(\nabla g_i(\hat{x}), d) = 0$,
- 2) pour tout $j \in \{1 \dots q\}$ tq : $(\nabla h_j(\hat{x}), d) \leq 0$.

1.1.5 Résultats d'existence et d'unicité

Avant d'étudier les propriétés de la solution (ou des solutions) de (P) il faut s'assurer de leur existence. Nous donnerons ensuite des résultats d'unicité. Pour cela nous avons besoin de quelques définitions :

Définition 1.5 Soit $f : S \rightarrow \mathbb{R}$

1- On dit que f est une fonction **coersive** ou **infni à l'infni** sur S si on a :

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = \infty. \quad (1.2)$$

ou

$$\exists c > 0, f(x) \geq c \|x\|.$$

où $\|\cdot\|$ désigne une norme quelconque de l'espace \mathbb{R}^n car les normes sont toutes équivalentes dans cet espace. On notera $\|\cdot\|_p$ où $p \in \mathbb{N}$ la norme de \mathbb{R}^n tel que : $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$.

2- On dit que f est de classe C^1 ou continument différentiable ssi toutes ses dérivées partielle d'ordre un $(\frac{\partial f}{\partial x})$ existent et continues.

3- On dit que f est de classe C^2 sur S si toutes les dérivées partielle d'ordre 2 de f existent et sont continues sur S .

4- f est une fonction α – elliptique si elle est de classe C^1 et si $\exists \alpha > 0$, telle que :

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \alpha \|x - y\|^2 \quad \forall x, y \in S. \quad (1.3)$$

5- On dit que f est **convexe** sur S lorsque S est convexe et

$$\forall x, y \in S, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+ \text{ tq } \alpha + \beta = 1, f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y). \quad (1.4)$$

ou

$$\forall x, y \in S, \forall \lambda \in (0, 1), f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y). \quad (1.5)$$

6-On dit que f est **strictement convexe** sur S lorsque S est convexe et

$$\forall x, y \in S, x \neq y, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+ \text{ tq } \alpha + \beta = 1, f(\alpha x + \beta y) < \alpha f(x) + \beta f(y). \quad (1.6)$$

ou

$$\forall x, y \in S, x \neq y, \forall \lambda \in (0, 1), f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y). \quad (1.7)$$

Intéressons nous maintenant à la question de l'existence de minima pour des problèmes d'optimisation avec contraintes.

Théorème 1.1 (Existence et Unicité)

Le problème $(P) \{ \min f(x), x \in S \}$ admet une solution si :

(i) f est continue.

(ii) S est compact.

La solution est unique si de plus la fonction f est strictement convexe avec S est convexe.

Preuve. :

1) Existence :

Soit (x_n) une suite minimisante de S c-à-d :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \inf f(x). \quad (1.8)$$

L'ensemble S est borné, donc on peut extraire une sous-suite notée (x_n) qui converge vers \hat{x} et comme S est fermé alors $x_n \rightarrow \hat{x} \in S$, et comme la fonction f est continue, on obtient que

$$f(x_n) \rightarrow f(\hat{x}),$$

de plus, on a

$$f(x_n) \rightarrow \inf_{x \in S} f(x),$$

on voit que la suite si elle existe elle est unique, donc

$$f(\hat{x}) = \inf_{x \in S} f(x),$$

donc \hat{x} est la solution du (P) .

2) Unicité :

Soient \hat{x} et \bar{x} de S deux solution du problème (P) avec $x \neq \bar{x}$, donc

$$f(\hat{x}) = f(\bar{x}) = \min_{x \in S} f(x),$$

On a S est convexe, donc pour \hat{x} et $\bar{x} \in S, \forall \lambda \in (0,1); z = \lambda \hat{x} + (1 - \lambda) \bar{x} \in S$, et comme f est strictement convexe, alors

$$f(z) = f(\lambda \hat{x} + (1 - \lambda) \bar{x}) < \lambda f(\hat{x}) + (1 - \lambda) f(\bar{x}) = \lambda f(\hat{x}) + (1 - \lambda) f(\hat{x}) = f(\hat{x})$$

d'où $f(z) < f(\hat{x})$, contradiction donc : $\hat{x} = \bar{x}$. ■

On a d'autre théorème qui assure l'existence et l'unicité de l'optimum :

Théorème 1.2 *Le problème (P) $\{\min f(x), x \in S\}$ admet une solution unique si :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i) } f \text{ est continue, coercive et strictement convexe} \\ \text{(ii) } S \text{ est convexe et fermé.} \end{array} \right. \quad (1.9)$$

Preuve. Soit (x_n) une suite minimisante de S , la fonction f est coercive, donc on peut extraire une sous-suite notée (x_n) qui converge vers \hat{x} et comme S est fermé c-à-d $x_n \rightarrow \hat{x} \in S$. et comme la fonction f est continue, on obtient que

$$\begin{aligned} f(x_n) &\rightarrow \inf_{x \in S} f(x), \\ f(x_n) &\rightarrow f(\hat{x}), \end{aligned}$$

donc

$$f(\hat{x}) = \inf f(x)$$

d'où \hat{x} est la solution du problème (P) c-à-d : $f(\hat{x}) = f(x)$. ■

Dans le cas particulier où f est α -elliptique ; nous pouvons énoncer une troisième résultat d'existence et d'unicité.

Théorème 1.3 *Soit une fonction f de classe C^1 , on suppose qu'il existe $\alpha > 0$ (appelée la constante d'ellipticité), tel que :*

$$\forall (x, y) \in S \times S, (\nabla f(x) - \nabla f(y), x - y) \geq \alpha \|x - y\|^2 \text{ (}\alpha\text{-élliptique)}.$$

alors f est strictement convexe et coercive.

1.2 Conditions d'optimalité

Nous présentons dans cette section les conditions d'optimalité du premier et de second ordre.

1.2.1 Conditions d'optimalité du premier ordre

Pour introduire les principes de base de l'optimisation avec contrainte, nous allons procéder deux étapes. Tout d'abord nous allons avoir le cas des contraintes d'égalité.

1.2.2 Contraintes en égalité

Dans cette section, on va considérer le cas où l'ensemble S est décrit par un nombre fini d'équation : $S = \{x \in \mathbb{R}^n, g(x) = 0\}$ où $g(x) = (g_1(x), \dots, g_p(x)) \in \mathbb{R}^p$ est une fonction C^1 de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p .

1.2.3 Condition nécessaires de Lagrange

Théorème 1.4 ([13]) On considère le problème d'optimisation suivant

$$(P) : \{ \min f(x), x \in S \} \text{ avec } S = \{x \in \mathbb{R}^n, g(x) = 0\}.$$

On suppose que :

- 1) f et g sont de classe C^1 .
- 2) Le problème (P) a une solution locale (\hat{x}) .
- 3) La famille $(\nabla g_i(\hat{x}))$, $i = \overline{1:p}$ est libre dans \mathbb{R}^p .

Alors

$$\exists (\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_p) \in \mathbb{R}^p \text{ tq : } \nabla L(\hat{x}) = \nabla f(\hat{x}) + \sum_{i=1}^p \hat{\lambda}_i \nabla g_i(\hat{x}) = 0. \quad (1.10)$$

Remarque 1.4 :

- 1- Les variables $(\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_p)$ sont les multiplicateurs de Lagrange et $L(\hat{x})$ est la fonction de Lagrange.
- 2- La condition de Lagrange est suffisante si de plus la fonction f convexe et la contrainte g est linéaire.

1.2.4 Contraintes en égalité et inégalité

On considère le problème d'optimisation suivant : $(P) \{ \min f(x), x \in S \}$ où $S = \{x \in \mathbb{R}^n, g(x) = 0 \text{ et } h(x) \leq 0\}$ avec

$$g(x) = (g_1(x), \dots, g_p(x)) \in \mathbb{R}^p, h(x) = (h_1(x), \dots, h_q(x)) \in \mathbb{R}^q.$$

Théorème 1.5 Soient les fonctions f , g et h de classe C^1 , et \hat{x} une solution du (P) , on suppose que \hat{x} un point régulier pour les contraintes g et h . Alors il existe

$$\hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_p) \in \mathbb{R}^p, \hat{\mu} = (\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_q) \in \mathbb{R}^q \text{ tq :}$$

1)

$$\forall j \in \{1, \dots, q\}, \hat{\mu}_j \geq 0, \quad (1.11)$$

2)

$$g(\hat{x}) = 0, h(\hat{x}) \leq 0, \quad (1.12)$$

3)

$$\forall j \in \{1, \dots, q\}; \hat{\mu}_j h_j(\hat{x}) = 0, \quad (1.13)$$

4)

$$\nabla f(\hat{x}) + \sum_{i=1}^p \hat{\lambda}_i \nabla g(\hat{x}) + \sum_{j=1}^q \hat{\mu}_j \nabla h(\hat{x}) = 0. \quad (1.14)$$

Ces équations sont appelées : condition de KKT.

Chapitre 2

Présentation de la Méthode des Itérées Variationnelle (VIM)

La méthode Itérative Variationnelle (VIM) a été introduit par Ji-Huan He. Cette méthode a été appliquée par beaucoup de chercheurs dans une variété de champs scientifiques et peut résoudre des problèmes non linéaires. Elle a été proposée la première fois pour résoudre des problèmes en mécanique quantique. La méthode est basée sur la détermination de multiplicateur de Lagrange de façon optimale par l'intermédiaire de la théorie variationnelle.

2.1 Concepts de base de la méthode d'itération variationnelle

Au cours du développement de la méthode d'itération variationnelle, nous avons présenté quelques notions essentielles telles que la variation restreinte, la fonctionnelle de correction et le multiplicateur général de Lagrange.

2.1.1 Multiplicateur général de Lagrange

Dans le chapitre 1, nous avons parlé du multiplicateur de Lagrange dans l'optimisation et le calcul des variations. Dans cette section, on va présenter une méthode de multiplicateur de Lagrange générale suggéré par Inokuti et al. [8]. Nous considérons l'équation algébrique suivant

$$F(w) = 0, w \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Si (x_n) est une racine approximative de l'équation ci dessus, alors :

$$F(x_n) \neq 0. \quad (2.2)$$

Pour améliorer sa précision, nous écrivons l'équation de correction suivante :

$$x_{n+1} = x_n + \lambda F(x_n), \quad (2.3)$$

où λ est un multiplicateur de Lagrange général, qui peut être identifié de manière optimale par

$$\frac{dx_{n+1}}{dx_n} = 0, \quad (2.4)$$

ce qui conduit à la formule d'itération de Newton suivante :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}. \quad (2.5)$$

Il existe des approches alternatives à la construction de l'équation de correction. Nous donnons une autre correction pour x_n comme suit :

$$x_{n+1} = x_n + \lambda g(x_n) F(x_n), \quad (2.6)$$

où $g(x)$ est une fonction auxiliaire. Après l'identification du multiplicateur, nous avons la formulation d'itération générale suivant :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n) F(x_n)}{g'(x_n) F(x_n) + g(x_n) F'(x_n)}. \quad (2.7)$$

La valeur de la fonction auxiliaire ne doit pas être nulle ou de petite valeur pendant toutes les étapes d'itération, $|g(x_n)| > 1$.

Si nous choisissons $g(x_n) = e^{-\alpha x_n}$ avec $\alpha > 0$, la formule (2.7), réduit à :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n) - \alpha F(x_n)}. \quad (2.8)$$

Cette formule d'itération est très efficace quand $F'(x_n)$ est petite. Comme exemple, nous considérons l'équation

$$\sin(x) - 0. \quad (2.9)$$

Si nous commençons avec $x_0 = 1.6$, l'itération de Newton n'est pas valide pour $\cos 1.6$.

Le tableau 1 montre la procédure d'itération, la solution la plus proche $x_0 = 1.6$ est $x = \pi$.

Itération	$x(\alpha = 1)$	$x(\alpha = 2)$	$x(\alpha = 0.97)$
0	1.6	1.6	1.6
1	2.57	2.09	2.60
2	2.96	2.48	2.98
3	3.12	2.78	3.12
4	3.14	2.99	3.14

Tableau 1

Utilisant la formulation de Taylor on obtient des formules d'itération par multiplicateur général de Lagrange [5].

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} - \frac{F''(x_n) F^2(x_n)}{2F'^3(x_n)}, \quad (2.10)$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} - \frac{F''(x_n) F^2(x_n)}{2F'^3(x_n)} + \frac{[F'''(x_n) F'^3(x_n) - 3F''^2(x_n) F'^2(x_n)] F^3(x_n)}{2F'^7(x_n)}. \quad (2.11)$$

2.1.2 Conditions stationnaires

Le problème de l'optimisation est basé sur le calcul de variation [4] où on va déterminer une fonction $y = F(x)$, $x \in [x_1, x_2]$ qui est le maximum ou le minimum d'une fonctionnelle "J" donnée comme suit :

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(y, y'; x) dx + g_1(x) y |_{x=x_1} - g_2(x) y |_{x=x_2}, \quad (2.12)$$

où g_1, g_2 sont des fonctions données. La condition d'optimalité (où la condition stationnaire) de la fonctionnelle (2.12) exige que la variation de J soit nulle c-à-d ($\delta J = 0$), on a

$$\begin{aligned} \delta J(y) &= \delta \int_{x_1}^{x_2} F(y, y'; x) dx + g_1(x) \delta y |_{x=x_1} - g_2(x) \delta y |_{x=x_2} \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \delta F(y, y'; x) dx + g_1(x) \delta y |_{x=x_1} - g_2(x) \delta y |_{x=x_2} \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{dF}{dy} \delta y + \frac{dF}{dy'} \delta y' \right\} dx + g_1 \delta y |_{x=x_1} - g_2 \delta y |_{x=x_2} \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{dF}{dy} \delta y + \frac{dF}{dy'} \frac{d}{dx} \delta y \right\} dx + g_1 \delta y |_{x=x_1} - g_2 \delta y |_{x=x_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \left[\frac{dF}{dy} - \frac{d}{dx} \left(\frac{dF}{dy'} \right) \right] \delta y + \frac{d}{dx} \left(\frac{dF}{dy'} \delta y \right) \right\} dx + g_1 \delta y |_{x=x_1} - g_2 \delta y |_{x=x_2} \\
 &= \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \left[\frac{dF}{dy} - \frac{d}{dx} \left(\frac{dF}{dy'} \right) \right] \delta y \right\} dx + \left[\frac{dF}{dy'} \delta y \right]_{x_1}^{x_2} + g_1 \delta y |_{x=x_1} - g_2 \delta y |_{x=x_2} = 0.
 \end{aligned}$$

Pour (δy) quelconque, la relation ci-dessus, s'écrit

$$\frac{dF}{dy} - \frac{d}{dx} \left(\frac{dF}{dy'} \right) = 0, \tag{2.13}$$

avec les conditions aux limites :

$$\frac{dF}{dy'}(x_1) - g_1(x_1) = 0 \text{ et } \frac{dF}{dy'}(x_2) - g_2(x_2) = 0. \tag{2.14}$$

Remarque 2.1 :

- 1- L'équation différentielle (2.13) s'appelle " Euler-Lagrange" ou tout simplement " équation d'Euler".
- 2- L'équation (2.14) est connu comme les conditions aux limites.

2.1.3 Variation restreinte

Pour illustrer comment la variation restreinte fonctionne dans la méthode d'itération variationnelle, nous considérons une équation algébrique simple

$$x^2 - 3x + 2 = 0. \tag{2.15}$$

Nous réécrivons l'équation (2.15) comme suit :

$$\tilde{x}.x - 3x + 2 = 0, \tag{2.16}$$

où \tilde{x} est appelée variable restreinte, la valeur de \tilde{x} est supposée être connu (estimation initiale). Résoudre x à partir de (2.16) conduit au résultat suivant :

$$x = \frac{2}{3 - \tilde{x}}, \tag{2.17}$$

on va réécrire l'équation (2.17) sous la forme

$$x_{n+1} = \frac{2}{3 - x_n}. \tag{2.18}$$

Cette méthode est souvent très efficace pour une bonne précision, voir le tableau 2 (où on va comparer entre le résultat obtenu par l'équation (2.18) et la méthode de Newton, en choisissant $x_0 = 0.5$).

Itération	equ.(2.18)	itérat. de Newton
0	0.5	0.5
1	0.8	0.875
2	0.909	0.987
3	0.956	0.999
4	0.978	1.000
5	0.989	1.000
6	0.994	1.000
7	0.997	1.000
8	0.998	1.000
9	0.999	1.000

Tableau 2

Dans la méthode d'itération variationnelle, l'estimation initiale est toujours choisie avec un paramètre inconnu possible, une itération conduit à des solutions très précises. Nous illustrons l'efficacité du paramètre libre dans l'exemple ci-dessus. Introduire un paramètre libre dans l'itérée initiale :

$$x_0 = 0.5 + b, \quad (2.19)$$

où b est un petit paramètre à déterminer. Substituons (2.19) dans (2.18), nous aurons

$$x_1 = \frac{2}{3 - 0.5 - b} = \frac{2}{2.5 \left(1 - \frac{1}{2.5}b\right)} = 0.8 \left(1 + \frac{1}{2.5}b\right) + o(b^2),$$

donc

$$x_1 = 0.8 + 0.32b + o(b^2). \quad (2.20)$$

Pour identifier la valeur de b nous définissons

$$x_0 = x_1, \quad (2.21)$$

où

$$0.8 + 0.32b = 0.5 + b. \quad (2.22)$$

De la relation ci-dessus, nous pouvons identifier immédiatement

$$b = 0.4412. \quad (2.23)$$

Donc, la racine approximative est $x_1 = 0.9412$.

Exemple :

Nous considérons maintenant la variation restreinte d'une fonction variationnelle. Considérer la distribution de la température dans les ailettes droites convectives avec une conductivité thermique dépendant de la température, l'équation est [7]

$$\frac{d}{dx} \left[(1 + \beta\sigma) \frac{d\sigma}{dx} \right] - \Psi^2 \sigma = 0, \quad \sigma'(0) = 0, \quad \sigma(1) = 1, \quad (2.24)$$

où σ est la température, β et Ψ sont des constantes.

Utiliser le concept de variation restreinte, une fonction variationnelle approximative peut être établie :

$$J(\sigma) = \int_0^1 \left\{ (1 + \beta\tilde{\sigma}) \left(\frac{d\sigma}{dx} \right)^2 + \Psi^2 \sigma^2 \right\} dx, \quad (2.25)$$

où $\tilde{\sigma}$ est une variation restreinte.

Nous écrivons (2.25) dans une forme d'itération

$$J(\sigma_{n+1}) = \int_0^1 \left\{ (1 + \beta\sigma_n) \left(\frac{d\sigma_{n+1}}{dx} \right)^2 + \Psi^2 \sigma_{n+1}^2 \right\} dx. \quad (2.26)$$

Nous commençons par une estimation initiale satisfaisant la condition aux limites $\sigma'_0(0) = 0$ et $\sigma_0(1) = 1$:

$$\sigma_0 = 1 - a + ax^2, \quad (2.27)$$

où a est un paramètre libre. Nous appliquons la méthode de Ritz à la résolution σ_1 , la fonction d'essai pour σ_1 est supposé avoir la forme

$$\sigma_1 = 1 - b + bx^2, \quad (2.28)$$

où le paramètre inconnu b doit être déterminé plus avant. Substitution (2.27) en (2.25)

$$J = \int_0^1 \left\{ 4(1 + \beta(1 - a + ax^2)) b^2 x^2 + \Psi^2 (1 - b + bx^2)^2 \right\} dx$$

donc

$$J = \frac{4}{3}(1 + \beta(1 - a))b^2 + \frac{4}{5}ab^2 + \Psi^2(1 - b)^2 + \frac{2}{3}b(1 - b)\Psi^2 + \frac{1}{5}b^2\Psi^2. \quad (2.29)$$

Minimiser la fonction (2.25), en ce qui concerne σ est approximativement équivalent à la minimisation de la fonction ci-dessus, Eq. (2.28), en ce qui concerne b :

$$\frac{dJ}{db} = \frac{8}{3}(1 + \beta(1 - a))b + \frac{8}{5}ab - 2\Psi^2(1 - b) + \frac{2}{3}(1 - 2b)\Psi^2 + \frac{2}{5}b\Psi^2 = 0. \quad (2.30)$$

Nous fixons $\sigma_0 = \sigma_1$ alors on peut identifier

$$a = \frac{-(20 + 20\beta + 8\Psi^2) + \sqrt{(20 + 20\beta + 8\Psi^2)^2 + 40\Psi^2(12 - 20\beta)}}{24 - 40\beta}. \quad (2.31)$$

2.2 Méthode d'itération variationnelle

La méthode d'itération variationnelle [1, 11] permet de résoudre efficacement, facilement et avec précision une grande classe de problèmes non linéaires avec des approximations converge rapidement vers des solutions précises.

2.2.1 Présentation de la méthode VIM

Pour utiliser son idée de base, nous considérons le système non linéaire suivant :

$$L[u(t)] + N[u(t)] = g(t), \quad (2.32)$$

où L est un opérateur linéaire, N est un opérateur non linéaire, et g est une fonction analytique continue donnée, qui représente le terme de la non homogénéité.

L'objectif de la méthode VIM est de construire une fonction de correction pour le système (2.32) :

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda (L[u_n(s)] + N[\tilde{u}_n(s)] - g(s)) ds, \quad s \in [0, t] \quad (2.33)$$

où λ est un multiplicateur général de Lagrange[8], (u_n) est la nième solution approximative et \tilde{u}_n est considérée comme la variation restreinte.

L'étape principale de la méthode des itérations variationnelles est d'abord la détermination du multiplicateur de Lagrange λ de façon optimale.

Cas 1 : si $L = \frac{d}{dt}(\cdot)$

En mettant la fonctionnelle de correction stationnaire par rapport à u_n et posant $\delta\tilde{u}_n = 0$, on aura

$$\begin{aligned} \delta u_{n+1}(t) &= \delta u_n(t) + \delta \int_0^t \lambda \{u'_n(s) + N(\tilde{u}_n(s)) - g(s)\} ds, \\ &= \delta u_n(t) + \lambda(t) \delta u_n(t) - \int_0^t \frac{\partial \lambda}{\partial s} \delta u_n(s) ds = 0. \end{aligned}$$

Alors, de la relation ci-dessus, on obtient les conditions stationnaire

$$\begin{cases} \lambda'(s) = 0, \forall \delta u_n(s), \\ 1 + \lambda(t) = 0, \forall \delta u_n(t), \end{cases}$$

ce qui donne

$$\lambda = -1.$$

Remarque :

Pour les problèmes linéaires la solution exacte peut être obtenue par une seule étape d'itération car le multiplicateur de Lagrange peut être identifié avec une précision exacte.

Exemple 1 :

Soit l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$u' + a(t)u = b(t), \quad u(0) = c. \quad (2.34)$$

où $a(t), b(t)$ sont deux fonctions continues données et $c \in \mathbb{R}$. Sa fonctionnelle de correction peut

s'écrire sous la forme suivante :

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda \left(\frac{du_n}{ds} + a(s)u_n(s) - b(s) \right) ds. \quad (2.35)$$

Posant $\delta u_n(0) = 0$, on aura

$$\begin{aligned} \delta u_{n+1}(t) &= \delta u_n(t) + \delta \int_0^t \lambda \left(\frac{du_n}{ds} + a(s)u_n(s) - b(s) \right) ds \\ &= \delta u_n(t) + \int_0^t \lambda \delta \left(\frac{du_n}{ds} + a(s)u_n(s) - b(s) \right) ds \\ &= \delta u_n(t) + \lambda \delta u_n(s) \Big|_{s=t} + \int_0^t \left(-\frac{\partial \lambda}{\partial s} + a(s)\lambda \right) \delta u_n(s) ds \\ &= (1 + \lambda \Big|_{s=t}) \delta u_n + \int_0^t \left(-\frac{\partial \lambda}{\partial s} + a(s)\lambda \right) \delta u_n(s) ds = 0. \end{aligned}$$

nous obtenons l'équation d'Euler-Lagrange suivant

$$-\frac{\partial \lambda}{\partial s} + a(s)\lambda(t, s) = 0, \quad (2.37)$$

et la condition aux limites :

$$1 + \lambda(t, s) \Big|_{s=t} = 0. \quad (2.38)$$

Nous identifions donc le multiplicateur de Lagrange sous la forme

$$\lambda(t, s) = -\exp \left\{ \int_0^s a(\zeta) d\zeta - \int_0^t a(\zeta) d\zeta \right\}. \quad (2.39)$$

en remplaçant le multiplicateur de lagrange (2.39) dans (2.35) on obtient la formule

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) - \int_0^t \exp \left\{ \int_0^s a(\zeta) d\zeta - \int_0^t a(\zeta) d\zeta \right\} \left(\frac{du_n}{ds} + a(s) u_n(s) - b(s) \right) ds. \quad (2.40)$$

Si nous commençons par $u_0 = c \exp \left\{ -\int_0^t a(\zeta) d\zeta \right\}$, la solution de l'équation homogène $u' + a(t)u = 0$, avec la condition initiale $u(0) = c$, on obtient

$$\begin{aligned} u_1(t) &= c \exp \left\{ -\int_0^t a(\zeta) d\zeta \right\} - \int_0^t b(s) \exp \left\{ \int_0^s a(\zeta) d\zeta - \int_0^t a(\zeta) d\zeta \right\} ds, \\ &= c \exp \left\{ -\int_0^t a(\zeta) d\zeta \right\} + \exp \left\{ \int_0^t a(s) ds \right\} \int_0^t b(s) \exp \left\{ \int_0^s a(\zeta) d\zeta \right\} ds, \end{aligned} \quad (2.41)$$

est la solution explicite exacte. De cette solution, toutes les propriétés peuvent être déduites rapidement.

Cas 2 : si $L = \frac{d^2}{dt^2}(\cdot)$

Dans ce cas, on aura :

$$\begin{aligned} \delta u_{n+1}(t) &= \delta u_n(t) + \delta \int_0^t \lambda(s) \left\{ u_n''(s) \right\} ds \\ &= \delta u_n(t) + \lambda(t) \delta u_n'(t) - \lambda'(t) \delta u_n(t) + \int_0^t \lambda''(s) \delta u_n(s) ds = 0, \end{aligned}$$

et les conditions stationnaires sont données par :

$$\begin{cases} \lambda''(s) = 0, \forall \delta u_n(s) \\ 1 - \lambda'(t) = 0, \forall \delta u_n(t) \\ \lambda(t) = 0, \forall \delta u_n'(t) \end{cases}$$

ce qui donne

$$\lambda(s, t) = s - t.$$

Exemple 2 :

Considérons maintenant le problème suivant :

$$u''(t) + \omega^2 u(t) = f(u, u', u''), \quad u(0) = c_1, u'(0) = c_2. \quad (2.42)$$

Sa fonctionnelle de correction écrit sous la forme suivant :

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda \left\{ u_n''(s) + \omega^2 u_n(s) - \tilde{f}(u_n, u_n', u_n'') \right\} ds. \quad (2.43)$$

Calculer la variation par rapport à u_n , en remarquant que $\delta u_n(0) = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} \delta u_{n+1}(t) &= \delta u_n(t) + \delta \int_0^t \lambda \left\{ u_n''(s) + \omega^2 u_n(s) - f(s) \right\} ds \\ \delta u_{n+1}(t) &= \delta u_n(t) + \lambda(s) \delta u_n'(s) \Big|_{s=t} - \frac{\partial \lambda}{\partial s} \delta u_n(s) \Big|_{s=t} + \int_0^t \left\{ \frac{\partial^2 \lambda}{\partial s^2} + \omega^2 \lambda(s) \right\} \delta u_n(s) ds \\ \delta u_{n+1}(t) &= \left(1 - \frac{\partial \lambda}{\partial s} \right) \delta u_n(s) \Big|_{s=t} + \lambda(s) \delta u_n'(s) \Big|_{s=t} + \\ &\quad \int_0^t \left\{ \frac{\partial^2 \lambda}{\partial s^2} + \omega^2 \lambda(s) \right\} \delta u_n(s) ds = 0. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Nous avons donc les conditions stationnaires suivantes :

$$\frac{\partial^2 \lambda(t, s)}{\partial s^2} \Big|_{s=t} + \omega^2 \lambda(t, s) = 0, \quad (2.45)$$

$$1 - \frac{\partial \lambda(t, s)}{\partial s} \Big|_{t=s} = 0, \quad (2.46)$$

$$\lambda(t, s) \Big|_{t=s} = 0. \quad (2.47)$$

Donc, le multiplicateur de Lagrange est

$$\lambda = \frac{1}{\omega} \sin \omega(s - t). \quad (2.48)$$

Par conséquent, nous obtenons la formule d'itération suivante :

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \frac{1}{\omega} \int_0^t \sin \omega(s - t) \left\{ u_n''(s) + \omega^2 u_n(s) - f(u_n, u_n', u_n'') \right\} ds. \quad (2.49)$$

Si nous utilisons sa solution initiale $u_0(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$ avec des constantes appropriées c_1 et c_2 comme une approximation initiale, nous avons

$$u_1(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t - \frac{1}{\omega} \int_0^t f(s) \sin \omega(s-t) ds, \quad (2.50)$$

qui est la solution générale de l'équation (2.42)

Exemple 3 :

Nous considérons l'équation linéaire suivante :

$$u''(t) + \omega^2 u(t) = 0. \quad (2.51)$$

Nous écrivons la fonctionnelle de correction comme suit :

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda \{u_n''(s) + \omega^2 \tilde{u}_n(s)\} ds. \quad (2.52)$$

Ici $\tilde{u}_n(t)$ est considéré comme une variation restreinte. Les conditions stationnaires de la fonction de correction dans l'équation (2.52) ci-dessus peuvent être exprimées comme suit

$$\frac{\partial^2 \lambda(t, s)}{\partial s^2} = 0, \quad (2.53)$$

$$1 - \frac{\partial \lambda(t, s)}{\partial s} \Big|_{t=s} = 0, \quad (2.54)$$

$$\lambda(t, s) \Big|_{t=s} = 0. \quad (2.55)$$

Donc, le multiplicateur de Lagrange peut être facilement identifié

$$\lambda = s - t, \quad (2.56)$$

conduisant à la formule d'itération suivante :

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t (s-t) \{u_n''(s) + \omega^2 u_n(s)\} ds. \quad (2.57)$$

Si, par exemple, les conditions initiales sont $u(0) = 1$ et $u'(0) = 0$, nous commençons avec $u_0(0) = u(0) = 1$, par la formule d'itération (2.57) nous avons les solutions approximatives suivantes :

$$u_1(t) = 1 - \frac{1}{2!}\omega^2 t^2, \quad (2.58)$$

$$u_2(t) = 1 - \frac{1}{2!}\omega^2 t^2 + \frac{1}{4!}\omega^4 t^4, \quad (2.59)$$

⋮

$$u_n(t) = 1 - \frac{1}{2!}\omega^2 t^2 + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}\omega^{2n} t^{2n}. \quad (2.60)$$

De la procédure de solution ci-dessus, nous pouvons voir clairement que les solutions approximatives convergent vers sa solution exacte $\cos(\omega t)$. Il convient de souligner spécialement que plus l'identification du multiplicateur est précise, plus les approximations convergent vers sa solution exacte.

Problème nonlinéaire

Pour l'équation nonlinéaire, le multiplicateur de Lagrange est difficile à identifier. Pour faciliter la difficulté, nous appliquons des variations restreintes aux termes non linéaires.

Cas 1 : pour $L = \frac{d}{dt}(\cdot)$

Considérons maintenant l'équation non linéaire suivante :

$$u' + a(t)u = b(t) + N(u), \quad u(0) = c. \quad (2.61)$$

avec N est une fonction nonlinéaire de u . Suite à la notation ci-dessus, nous pouvons définir

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda \left\{ \frac{du_n}{ds} + a(s)u_n(s) - b(s) - N(\tilde{u}_n) \right\} ds, \quad (2.62)$$

où \tilde{u}_n est une variation restreinte.

D'après l'exemple 1, on obtient la formulation d'itération suivante :

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) - \int_0^t \exp \left\{ \int_0^s a(\xi) d\xi - \int_0^t a(\xi) d\xi \right\} \left\{ \frac{du_n}{ds} + a(s)u_n(s) - b(s) - N(u_n) \right\} ds. \quad (2.63)$$

Cas 2 : pour $L = \frac{d^2}{dt^2}(\cdot)$

Considérons l'équation non linéaire du second ordre suivante

$$u'' + a(t)u' + b(t)u + N(u) = 0; \quad u(0) = c_1, \quad u'(0) = c_2. \quad (2.64)$$

Sa fonctionnelle de correction peut être écrite sous la forme

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda \{u_n''(s) + a(s)u_n'(s) + b(s)u_n(s) + N(\tilde{u}_n(s))\} ds. \quad (2.65)$$

utilisant la condition stationnaire par rapport à u_n , remarquant que $\delta u_n(0) = 0$,

$$\begin{aligned} \delta u_{n+1}(t) &= \delta u_n(t) + \delta \int_0^t \lambda \{u_n''(s) + au_n'(s) + bu_n(s) + N(\tilde{u}_n(s))\} ds \\ &= \delta u_n(t) + \lambda \delta u_n'(s) \Big|_{s=t} - \frac{\partial \lambda}{\partial s} \delta u_n(s) \Big|_{s=t} + a\lambda(s) \delta u_n(s) \Big|_{s=t} + \\ &\quad \int_0^t \left\{ \frac{\partial^2 \lambda}{\partial s^2} - \frac{\partial}{\partial s} (a\lambda) + b(s)\lambda(s) \right\} \delta u_n(s) ds = 0, \end{aligned} \quad (2.66)$$

nous avons les conditions stationnaires suivantes :

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial s^2} - \frac{\partial}{\partial s} (a\lambda) + b(s)\lambda(t, s) = 0, \quad (2.67)$$

$$1 - \frac{\partial \lambda}{\partial s}(t, t) + a(t)\lambda(t, t) = 0, \quad (2.68)$$

$$\lambda(t, t) = 0. \quad (2.69)$$

nous pouvons identifier le multiplicateur de Lagrange comme suit :

$$\lambda = \exp \left\{ \int_0^s a(\xi) d\xi \right\} [u_1(s)u_2(t) - u_2(s)u_1(t)]. \quad (2.70)$$

Si w_1 et w_2 sont choisis de l'ensemble de solutions spécifiées par les conditions initiales

$$w_1(0) = 1, \quad w_1'(0) = 0,$$

$$w_2(0) = 0, \quad w_2'(0) = 1. \quad (2.71)$$

En première approximation, nous avons

$$u_1(t) = c_1 w_1 + c_2 w_2 + \int_0^t N(u_0(s)) \lambda(t, s) ds. \quad (2.72)$$

Exemple 4 :

Considérons l'équation non homogène suivante :

$$u'' + a(t)u' + b(t)u = f(u) \quad t \in [0, 1], \quad (2.73)$$

$$u(0) = c_1, \quad u(1) = c_2. \quad (2.74)$$

Soient $u_{(1)}$ et $u_{(2)}$ deux solutions du problème avec

$$u_{(1)}(0) = 1, \quad u'_{(1)}(0) = 0, \quad (2.75)$$

$$u_{(2)}(0) = 0, \quad u'_{(2)}(0) = 1, \quad (2.76)$$

on écrit

$$u = c_1 u_{(1)} + c_2 u_{(2)}. \quad (2.77)$$

Sa fonction de correction peut s'écrire sous la forme

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda \left\{ u_n''(s) + a u_n'(s) + b u_n(s) - \tilde{f}_n \right\} ds. \quad (2.78)$$

Utilisant la condition d'optimalité et le fait que $\delta u_n(0) = 0$, on obtient

$$\delta u_{n+1}(t) = \delta u_n(t) + \delta \int_0^t \lambda \left\{ u_n''(s) + a u_n'(s) + b u_n(s) - \tilde{f}_n \right\} ds$$

$$\begin{aligned} \delta u_{n+1}(t) &= \delta u_n(t) + \lambda(s) \delta u_n'(s) \Big|_{s=t} - \lambda'(s) \delta u_n(s) \Big|_{s=t} + a \lambda(s) \delta u_n(s) \Big|_{s=t} \\ &+ \int_0^t \left\{ \frac{\partial^2 \lambda}{\partial s^2} - \frac{d}{ds} (a \lambda) + b(s) \lambda(s) \right\} \delta u_n(s) ds = 0, \end{aligned}$$

Nous obtenons donc la formulation d'itération suivante :

$$\begin{cases} \forall \delta u_n(s) : \frac{\partial^2 \lambda}{\partial s^2} - \frac{d}{ds} (a \lambda) + b(s) \lambda(t, s) = 0, \\ \forall \delta u_n(t) : 1 - \frac{d \lambda}{ds} + a(s) \lambda(s, s) = 0, \\ \forall \delta u_n'(t) : \lambda(s, s) = 0. \end{cases} \quad (2.79)$$

Le multiplicateur de Lagrange est donné sous la forme

$$\lambda = -\exp \left\{ \int_0^s a(\xi) d\xi \right\} [u_{(1)}(s) u_{(2)}(t) - u_{(2)}(s) u_{(1)}(t)]. \quad (2.80)$$

Nous obtenons donc la formulation d'itération suivante :

$$u_{n+1} = u_n(t) - \int_0^t \exp \left\{ \int_0^s a(\xi) d\xi \right\} [u_{(1)}(s) u_{(2)}(t) - u_{(2)}(s) u_{(1)}(t)] \{u_n''(s) + au_n'(s) + bu_n(s) - f_n\} ds. \quad (2.81)$$

Cas 3 : De manière générale, si $L = \frac{d^m}{dt^m}(\cdot)$

Dans ce cas, on obtient :

$$\lambda(s, t) = \frac{(-1)^m}{(m-1)!} (s-t)^{m-1}, \quad m \geq 1.$$

Une fois le multiplicateur de Lagrange λ est identifié, alors en choisissant une approximation initiale $u_0(t)$ de la solution du problème(2.32), les autres approximations successives $u_i(t)$, $i \geq 0$ sont aisément obtenues en utilisant la fonctionnelle de correction. Par conséquent, la solution exacte est donnée par :

$$u(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t).$$

2.3 Approche alternative de la méthode VIM

En 2010, Odibat [10] a proposé une autre variante pour la méthode VIM, qui peut être facile pour la résolution des équations différentielles non linéaires. Dans ce qui suit, on présente les étapes principales de cette approche.

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$Lu(t) + Nu(t) = g(t), \quad t > 0, \quad (2.82)$$

où $L = \frac{d^m}{dt^m}$, $m \in \mathbb{N}$, N est un opérateur non linéaire et $g(t)$ est une fonction analytique connue. Les conditions initiales sont données par :

$$u^{(k)}(0) = c_k, \quad k = \overline{0 : m-1}, \quad (2.83)$$

avec c_k sont des nombres réels connus.

Selon la méthode des itérations variationnelles, la fonctionnelle de correction de l'équation (2.82) peut s'écrire comme suit :

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t [\lambda \{L(u_n(s)) + N(u_n(s)) - g(s)\}] ds. \quad (2.84)$$

avec $\lambda = \frac{(-1)^m}{(m-1)!} (s-t)^{m-1}$.

En remplaçant le multiplicateur de lagrange dans la fonctionnelle de correction (2.84), on obtient la formule itérative suivante :

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \left[\frac{(-1)^m}{(m-1)!} (s-t)^{m-1} \{L(u_n(s)) + N(u_n(s)) - g(s)\} \right] ds. \quad (2.85)$$

Soit A un opérateur défini par :

$$A(u_n) = \int_0^t \left[\frac{(-1)^m}{(m-1)!} (s-t)^{m-1} \{L(u_n(s)) + N(u_n(s)) - g(s)\} \right] ds, \quad (2.86)$$

et définissons les composantes $v_k, k = 0, 1, 2, \dots$ comme suit :

$$v_0(t) = u_0(t),$$

$$v_1(t) = A[v_0(t)],$$

$$v_2(t) = A[v_0(t) + v_1(t)],$$

$$v_{k+1}(t) = A[v_0(t) + v_1(t) + \dots + v_k(t)]. \quad (2.87)$$

par conséquent, on aura

$$u(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t). \quad (2.88)$$

d'où la solution du problème (2.82) est donnée sous la forme d'une série

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t). \quad (2.89)$$

2.3.1 Choix de l'approximation initiale

L'approximation initiale est donnée par $v_0(t)$ et est choisie en tenant compte des conditions initiales et les conditions aux limites du problème.

Pour les problèmes de cauchy, c'est-à-dire les problèmes à valeurs initiales, l'approximation initiale est donnée par :

$$v_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k!} t^k. \quad (2.90)$$

2.3.2 Convergence de la méthode des itérations variationnelles

Le concept de la convergence de la méthode des itération variationnelles a été étudié et démontré par plusieurs auteurs. Des importants théorèmes ont été donnés impliquant les conditions nécessaires et suffisantes de convergence.

La série de la fonction $\sum_{k=0}^{\infty} v_k(t)$ définie par(2.89), avec la condition initiale :

$$v_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k!} t^k.$$

Converge vers la solution exacte du problème(2.82) – (2.83). Ce résultat est justifié par le théorème suivant.

Théorème 2.1 [10]

Soit A l'opérateur défini par (2.86) d'un espace de Hilbert H dans H .

La solution $u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t)$, définie en (2.89) Converge si $\exists \gamma \in]0, 1[$ tel que :

$$\| A[v_0 + v_1 + \dots + v_{k+1}] \| \leq \gamma \| A[v_0 + v_1 + \dots + v_k] \|$$

C'est-à-dire

$$\| v_{k+1} \| \leq \gamma \| v_k \|, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Remarque 2.2 : Ce théorème est un cas particulier du théorème du point fixe de Banach.

Preuve. Soit la suite $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ définie comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} s_0 = v_0, \\ s_1 = v_0 + v_1, \\ s_2 = v_0 + v_1 + v_2, \\ \vdots \\ s_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n \end{array} \right. \quad (2.91)$$

Montrons que $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Hilbert H . Pour cela, on considère

$$\|s_{n+1} - s_n\| = \|v_{n+1}\| \leq \gamma \|v_n\| \leq \gamma^2 \|v_{n-1}\| \leq \dots \leq \gamma^{n+1} \|v_0\|.$$

Pour tout $n, j \in \mathbb{N}, n \geq j$, on a :

$$\begin{aligned} \|s_n - s_j\| &= \|(s_n - s_{n-1}) + (s_{n-1} - s_{n-2}) + \dots + (s_{j+1} - s_j)\| \\ &\leq \|s_n - s_{n-1}\| + \|s_{n-1} - s_{n-2}\| + \dots + \|s_{j+1} - s_j\| \\ &\leq \gamma^n \|v_0\| + \gamma^{n-1} \|v_0\| + \dots + \gamma^{j+1} \|v_0\| \\ &= \frac{1 - \gamma^{n-j}}{1 - \gamma} \gamma^{j+1} \|v_0\|. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Et puisque $0 < \gamma < 1$, on aura

$$\lim_{n, j \rightarrow \infty} \|s_n - s_j\| = 0. \quad (2.93)$$

Donc, $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ est une suite de Cauchy, dans l'espace de Hilbert H , ce qui implique que la série $u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t)$ définie en (2.89) converge. ■

Chapitre 3

Résolution du problème de Stefan par la méthode VIM

L'écoulement du fluide et les effets thermiques associés au cours du changement de phase, sont d'un grand intérêt dans les applications d'ingénierie telles que le stockages d'énergie, la croissance cristalline,... Dans ces problèmes, une frontière déformable sépare généralement les deux phases solide et liquide.

Le modèle le plus simple des phénomènes de changement de phase est le problème de Stefan [3] ou problème à frontière libre qui décrit l'évolution d'un système impliquant un changement de phase solide-liquide. Il apparaît dans des modèles de diffusion dans des milieux poreux saturés, et on en rencontre aussi une classe importante dans de nombreux procédés industriels thermiques : la coulée continue, le soudage, la purification des métaux ou l'usinage par faisceaux laser. Ces phénomènes sont fondés principalement sur la fusion et la solidification. Ici on va résoudre ce problème en utilisant la méthode VIM.

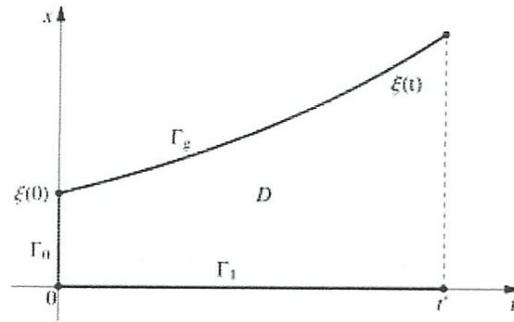
3.1 Formulation du problème

Soit $D = \{(x, t); x \in [0, \xi(t)] \ t \in [0, t^*], t^* > 0\}$ un domaine non vide de \mathbb{R}^2 de frontière $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_g$ tel que :

$$\Gamma_0 = \{(x, 0); x \in [0, s], s = \xi(0)\}, \quad (3.1)$$

$$\Gamma_1 = \{(0, t); t \in [0, t^*]\}, \quad (3.2)$$

$$\Gamma_g = \{(x, t); t \in [0, t^*], x = \xi(t)\}, \quad (3.3)$$


 FIGURE 3.1 – Le domaine D

Dans le domaine D , on considère les équations de Stefan suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \quad \text{dans } D, \quad (3.4)$$

avec la condition initiale sur la frontière Γ_0 :

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad \text{et} \quad \xi(0) = s, \quad (3.5)$$

La condition aux limites sur la frontière Γ_1 :

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \vartheta(t), \quad (3.6)$$

La condition de continuité de température est la condition de Stefan sur l'interface de déplacement définie sur Γ_g :

$$u(\xi(t), t) = u^*, \quad (3.7)$$

$$\eta \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=\xi(t)} = k \frac{d\xi(t)}{dt}, \quad (3.8)$$

où $s > 0$, η est la conductivité thermique, α est la diffusivité thermique, k est la chaleur latente de fusion par unité de volume, u^* est la température de changement de phase, est la fonction décrivant la position de l'interface de déplacement et u est la température, t, x se réfèrent à le temps et l'emplacement spatial, respectivement, $\varphi(x)$ et $\vartheta(t)$ sont des fonctions données.

Le problème de Stefan consiste à trouver la distribution de température $u(x, t)$ dans le domaine D et la fonction $\xi(t)$ décrivant la position de l'interface de déplacement ce qui satisfera les Eqs. (3.4) - (3.8).

3.2 Existence et unicité

Il est essentiel de montrer que notre problème est bien posé. Un problème d'une équation différentielle partielle est bien posé si la solution au problème existe, unique et dépend continuellement des données.

Pour résoudre une équation différentielle partielle, nous exigeons l'existence d'une solution unique. Il est importante dans les problèmes d'applications physiques, car il est préférable que notre solution ne change pas beaucoup lorsque les conditions initiales sont perturbées. Nous avons donc besoin de donner un théorème d'existence et d'unicité du problème de Stefan (3.4) – (3.8).

Hypothèse

Soit D un ouvert borné de frontière Γ régulière dans \mathbb{R}^N ($N \geq 2$) et t un réel positif. Il existe un ensemble convexe compact de l'espace de Banach $C([0, t^*])$ des éléments $\sigma : [0, t] \rightarrow \text{Diff.}(\bar{D})$ tel que $\sigma(0) = s$ et $\Gamma(t') = \sigma(t')(\Gamma(0))$ pour tout t' de $[0, t]$, où $\Gamma(0)$ est l'espace des C^1 -difféomorphismes de $\bar{\Omega}$ sur lui-même muni de la topologie usuelle.

Théorème 3.1 ([4]).

Sous l'hypothèse précédente, avec φ dans $C([0, s])$ et ϑ dans $C([0, t^*])$ le problème $P(\varphi, \vartheta, u^*)$ admet une solution $\xi \in C^1([0, t^*]) \cap C([0, *])$ et $u \in C(D) \cap C^{2,1}(D)$.

Théorème 3.2 ([4] théorème 2, page 217).

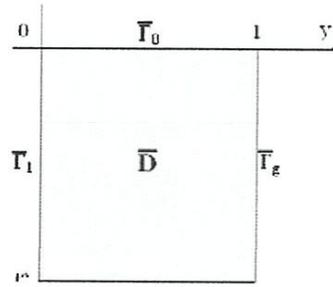
Soit $(u, \xi(t))$ une solution du problème de stefan (3.4) – (3.8) pour tout $0 < \sigma < t$ alors $x = \xi(t)$ est une fonction monotone non-décroissante.

3.3 Solution du problème

Dans la première étape : le problème considéré, formulé pour le domaine curvilinéaire D , est transformé pour le domaine de la géométrie rectangulaire. Nous faisons cela en utilisant la substitution suivante :

$$\begin{cases} y = \frac{x}{\xi(t)}, \\ \tau = t. \end{cases} \quad (3.9)$$

La substitution ci-dessus transforme le domaine D vers le domaine \bar{D} , et les frontières Γ_i , vers les frontières $\bar{\Gamma}_i \forall i \in \{0, 1, g\}$ par $\bar{D} = \{(y, \tau) : \tau \in [0, t^*], y \in [0, 1]\}$


 FIGURE 3.2 – Le Domaine \bar{D}

où

$$\bar{\Gamma}_0 = \{(y, 0) : y \in [0, 1]\}, \quad (3.10)$$

$$\bar{\Gamma}_1 = \{(0, \tau) : \tau \in [0, t^*]\}, \quad (3.11)$$

$$\bar{\Gamma}_g = \{(1, \tau) : \tau \in [0, t^*]\}. \quad (3.12)$$

La substitution des variables fait que le système d'équations considéré prend la forme :

$$\frac{\partial u(y, \tau)}{\partial \tau} = \frac{y}{\xi(\tau)} \frac{\partial \xi(\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial u(y, \tau)}{\partial y} + \frac{\alpha}{(\xi(\tau))^2} \frac{\partial^2 u(y, \tau)}{\partial y^2}, \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial \xi(\tau)}{\partial \tau} = \frac{\eta}{k\xi(\tau)} \frac{\partial u(y, \tau)}{\partial y}, \quad (3.14)$$

avec les conditions

$$\xi(0) = s, \quad (3.15)$$

$$u(y, 0) = \varphi(s, y), \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial u(0, \tau)}{\partial y} = \vartheta(\tau) \xi(\tau), \quad (3.17)$$

$$u(1, \tau) = u^*. \quad (3.18)$$

Dans la deuxième étape : au système d'équations ci-dessus, nous appliquons la méthode VIM.

Les fonctions de correction pour les équations (3.13) – (3.14) sont de la forme

$$u_{n+1}(y, \tau) = u_n(y, \tau) + \int_0^\tau \lambda_1(s) \left(\frac{\partial u_n(y, s)}{\partial s} - N_1(\tilde{u}_n, \tilde{\xi}_n; y, s) \right) ds, \quad (3.19)$$

$$\xi_{n+1}(\tau) = \xi_n(\tau) + \int_0^\tau \lambda_2(s) \left(\frac{\partial \xi_n(s)}{\partial s} - N_2(\tilde{u}_n, \tilde{\xi}_n; s) \right) ds, \quad (3.20)$$

avec

$$N_1(u, \xi; y, \tau) = \frac{y}{\xi(\tau)} \frac{\partial \xi(\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial u(y, \tau)}{\partial y} + \frac{a}{(\xi(\tau))^2} \frac{\partial^2 u(y, \tau)}{\partial y^2}, \quad (3.21)$$

$$N_2(u, \xi; \tau) = \frac{\eta}{k\xi(\tau)} \frac{\partial u(y, \tau)}{\partial y}. \quad (3.22)$$

Pour déterminer les fonctions de correction stationnaires, nous déterminons les multiplicateurs généraux de Lagrange comme suit :

$$\lambda_1(s) = -1, \quad \lambda_2(s) = -1. \quad (3.23)$$

De cette façon, nous recevons les formules d'itération suivantes pour les fonctions $u(y, \tau)$ et $\xi(\tau)$ respectivement :

$$u_{n+1}(y, \tau) = u_n(y, \tau) - \int_0^\tau \left(\frac{\partial u_n(y, s)}{\partial s} - N_1(u_n, \xi_n; y, s) \right) ds, \quad (3.24)$$

$$\xi_{n+1}(\tau) = \xi_n(\tau) - \int_0^\tau \left(\frac{\partial \xi_n(s)}{\partial s} - N_2(u_n, \xi_n; s) \right) ds. \quad (3.25)$$

Dans la troisième étape de notre procédure : nous devons dériver les approximations initiales des fonctions recherchées. Pour utiliser la condition limite (3.17) du second type, on dispose, on intègre l'équation (3.13) pour réduire la deuxième dérivée de la fonction recherchée $u(y, \tau)$. Nous obtenons l'équation :

$$\begin{aligned} \int_0^y \frac{\partial u(y, \tau)}{\partial \tau} dy &= \frac{1}{\xi(\tau)} \frac{\partial \xi(\tau)}{\partial \tau} \left(yu(y, \tau) - \int_0^y u(y, \tau) dy \right) + \\ &+ \frac{a}{(\xi(\tau))^2} \frac{\partial u(y, \tau)}{\partial y} - \frac{a}{\xi(\tau)} \vartheta(\tau). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Supposons, que l'approximation initiale est $\xi_0(\tau)$, nous prenons la fonction décrivant la condition initiale

$$\xi_0(\tau) = \vartheta, \quad (3.27)$$

tandis que l'approximation initiale $u_0(y, \tau)$ nous introduisons dans la formule :

$$u_0(y, \tau) = \bar{a}y + \bar{b}\tau + \bar{c}y\tau + \bar{d}, \quad (3.28)$$

où les coefficients \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} et la fonction \bar{d} sera déterminé à partir de l'équation (3.26). Les fonctions (3.27) et (3.28) devraient satisfaire à l'équation (3.26), donc remplaçons ces deux fonctions dans l'équation (3.26) :

$$\int_0^y \frac{\partial u_0(y, \tau)}{\partial \tau} dy = \frac{1}{\xi_0(\tau)} \frac{\partial \xi_0(\tau)}{\partial \tau} \left(y u_0(y, \tau) - \int_0^y u_0(y, \tau) dy \right) + \frac{a}{(\xi_0(\tau))^2} \frac{\partial u_0(y, \tau)}{\partial y} - \frac{a}{\xi_0(\tau)} \vartheta(\tau). \quad (3.29)$$

Après quelques calculs de base, nous obtenons la relation :

$$-\frac{a}{s^2} \bar{a} + \bar{b} y + \left(\frac{1}{2} y^2 - \frac{a}{s^2} \tau \right) \bar{c} + \frac{a}{s} \vartheta(\tau) = 0. \quad (3.30)$$

En supposant la précision exacte de l'approximation reçue aux points particuliers, tels que : $(y, \tau) = (0, 0)$, $(y, \tau) = (1, 0)$, $(y, \tau) = (0, t^*)$, et en incluant la condition initiale (3.16), on obtient la forme suivante de l'approximation initiale :

$$\xi_0(\tau) = s, \quad (3.31)$$

$$u_0(y, \tau) = s \frac{\vartheta(t^*) - \vartheta(0)}{t^*} \tau \left(y - \frac{1}{2} \right) + \varphi(s, y), \quad (3.32)$$

étant la base pour calculer les approximations successives $\xi_n(\tau)$ et $u_n(y, \tau)$ des fonctions $\xi(\tau)$ et $u(y, \tau)$. Ces approximations sont déterminées pour le domaine \bar{D} mais en appliquant la relation réciproque à (3.8), nous désignons la solution approchée recherchée du problème (3.4) - (3.8).

3.4 Théorème de convergence

Théorème 3.3 Soient $\Omega = D \times [0, t]$, et $(\xi(0), u(0)) \in C^2(D)$ la position initiale et la condition initiale du problème de Stefan. S'il existe un constant $c > 0$ tel que

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u_n - u) \right| \leq c |u_n - u|,$$

pour $n = 0, 1, 2, \dots$, alors (u_n) converge vers u .

Preuve. Utilisant l'équation (3.4), on a :

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, 0) - \int_0^t \left(\frac{\partial^2 u_n(s, t)}{\partial s^2} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \tilde{u}_n(s, t)}{\partial t} \right) ds \quad (3.33)$$

A partir de cette équation, nous avons

$$u_{n+1}(x, 0) = u_n(x, 0).$$

Par conséquent, $u_j(x, 0) = u(x, 0)$,

et pour $j = 0$, l'équation de la chaleur peut s'écrire :

$$u(x, t) = u(x, 0) - \int_0^t \left(\frac{\partial^2 u(s, t)}{\partial s^2} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \tilde{u}(s, t)}{\partial t} \right) ds \quad (3.34)$$

Posons

$$e_{n+1}(x, t) = u_{n+1}(x, t) - u(x, t) \quad (3.35)$$

D'après (3.33) et (3.34) :

$$\begin{aligned} e_{n+1}(x, t) &= - \int_0^t \left(\frac{\partial^2 u_n(s, t)}{\partial s^2} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \tilde{u}_n(s, t)}{\partial t} \right) ds + \int_0^t \left(\frac{\partial^2 u(s, t)}{\partial s^2} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \tilde{u}(s, t)}{\partial t} \right) ds \\ &= - \int_0^t \left[\frac{\partial^2 u_n(s, t)}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 u(s, t)}{\partial s^2} - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial \tilde{u}_n(s, t)}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{u}(s, t)}{\partial t} \right) \right] ds \\ &= - \int_0^t \left[\frac{\partial^2}{\partial s^2} (u_n(s, t) - u(s, t)) - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\tilde{u}_n(s, t) - \tilde{u}(s, t)) \right) \right] ds \\ &= - \int_0^t \left[\frac{\partial^2}{\partial s^2} e_n(s, t) - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial t} \tilde{e}_n(s, t) \right) \right] ds \end{aligned}$$

$$|e_{n+1}(x, t)| \leq \int_0^t \left| \frac{\partial^2}{\partial s^2} e_n(s, t) \right| ds \leq \int_0^t c |e_n(s, t)| ds = c \int_0^t |e_n(s, t)| ds$$

Pour $M = \max_{(s,t) \in D} |e_0(s, t)|$ on obtient :

$$\begin{aligned} |e_1| &\leq c \int_0^t |e_0| ds \leq cMt, \\ |e_2| &\leq M \frac{(ct)^2}{2!}, \\ &\vdots \\ |e_n| &\leq M \frac{(ct)^n}{n!}, \end{aligned}$$

ce qui implique que la solution u_n du problème de stefan converge. ■

Conclusion

Dans ce travail, la méthode d'itération variationnelle (VIM) a été appliquée pour trouver une solution approchée du problème de Stefan en une phase.

Premièrement, on a présenté la méthode VIM avec ses trois notions essentiels : la variation restreinte, la fonctionnelle de correction et le multiplicateur général de Lagrange.

Puis, nous avons appliquée cette méthode pour résoudre le problème non linéaire de Stefan. Ce problème consiste à trouver la distribution de la température dans le domaine et la position d'une interface mobile.

Le problème considéré est d'abord approché avec un système d'équations différentielles dans le domaine avec une frontière connue, et, ensuite, le système construit de cette manière est résolu par la méthode d'itération variationnelle.

Bibliographie

- [1] M.A. Abdou, A.A. Soliman, **Variational iteration method for solving Burger's and coupled Burger's equations** J. Comput. Appl. Math, 181 (2) (2005), pp. 245-251.
- [2] M. Bastani, **Convergence of the variational iteration methode for the cubic nonlinear Schrodinger equation**, MSC (2010).
- [3] A. Damlamian et N. Kenmochi, **le problème de stefan avec conditions latérales variables**, HIROSHIMA MATH. J. 10(1980), pp.271-293.
- [4] J.H. He, **Generalized Variational Principles in Fluids**, Science & Culture Publishing House of China, (2003).
- [5] J.H. He, **Non-perturbative methods for strongly nonlinear problems**, dissertation de-Verlag im Internet GmbH, Berlin (2006).
- [6] J.H.He, V.H.Wu, **Variational iteration method — some recent results and new interpretations**, J. Comput. Appl. Math., in press(doi :10.1016/j.cam.2006.07.009).
- [7] J.H. He, X.H. Wu, **Construction of solitary solution and compacton-like solution by variational iteration method**, Chaos Solitons Fractals, 29 (1) (2006), pp. 108-113.
- [8] M. Inokuti, H. Sekine, T. Mura, **General use of the Lagrange multiplier in nonlinear mathematical physics**, S. Nemat-Nasser (Ed.), Variational Method in the Mechanics of solids, Pergamon Press, New York (1978), pp. 156-162.
- [9] Z.M. Odibat, S. Momani, **Application of variational iteration method to nonlinear differential equations of fractional order**, Internat. J. Nonlinear Sci. Numer. Simulation, 7 (1) (2006), pp. 27-34.
- [10] Z.M. Odibat, **A study on the convergence of variational iteration method**, Mathematical and Computer Modelling, (2010),pp. 51 :1181-1192.

- [11] A.A. Soliman, **Numerical simulation of the generalized regularized long wave equation by He's variational iteration method**, Math. Comput. Simulation, 70 (2) (2005), pp. 119-124.
- [12] M. Tatari, M. Dehghan, **He's variational iteration method for computing a control parameter in a semi-linear inverse parabolic equation**, Chaos Solitons Fractals, in press, (2006).
- [13] G.R.Walsh, **Methods of optimization**, A wiley- Interscience Publication, (1975).