République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : EDP Et **Analyse numérique**

Par :Aouissi Nassima

Intitulé

Estimation d'erreur de la quadrature de Gauss-Jacobi par le biais des inégalités intégrales.

Dirigé par : Dr. Meftah Badreddine

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. Bahloul Tarek	MCA	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. Meftah Badreddine	MCA	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. Belaouer Djamel	MCA	Univ-Guelma

Session Juin 2018

Remerciements

« Louange à Allah, mon Dieu, le tout Miséricordieux. »

Je tenais ici à saluer et remercier les personnes qui, de prés ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce travail de mémoire de fin d'étude en nous prodiguant conseils, soutien, et bien plus encore.

A cette occasion je tenais à remercier vivement mon encadreur :

« Dr B.MEFTAH »

Qui a bien voulu me suivre et m'orienter au cours de ce travail ; Votre disponibilité constante et surtout votre sympathie font de vous un maître respecté et un exemple à suivre.

Je vous prie d'accepter l'expression de notre profond respect et gratitude.

Aux membres du jury

Mes remerciements les plus sincères pour l'honneur que vous faites en voulant bien mon travail. Vos compétences et vos modesties demeurent à mes yeux exemplaires.

DEDICACES

Je dédie ce travail à :

Ma très chère mère qui m'a toujours apporté son amour et son affection

Mon cher père, qui était toujours à mon cœur

Mes très chères sœurs HALLA, MANEL, SAFA, MARWA, AMIRA, AMINA

Mes très chers petits frères IYAD, ANAS

Ma nièce NOURCINE

Toute ma famille surtout

Grand-mère ZAKIA, oncles NOUREDDINE, HOCINE, MOUHAMED ELARBI, tantes MERYEM, MALIKA, GHANIA,

Mes beaux frères RAMZI, NOUREDDINE

Mes très chères amies FATIMA, NESRINE, SARA, RIMA, WAHIDA, ILHEM, KHOULOUD, BASMA,

Tous ce qui m'ont aidé à mon travail spécialement SAFA, SELMA.

Résumé

Le mémoire est destiné à l'étude de l'estimation de la quadrature de Gauss-Jacobi.
Dans le premier chapitre nous donnons quelques rappels concernant l'intégration approchée, quelques définitions de la convexité classique et la convexité généralisée, ainsi que quelques identités intégrales dont nous ferons appel au chapitre suivant.
Le second chapitre sera entièrement dévoué à l'estimation de la fameuse quadrature de Gauss-Jacobi nous exposerons certains résultats déjà connu dans la littérature.

Dans le troisième chapitre nous exposerons des nouvelles estimations de l'inégalité de Gauss-Jacobi ces derniers résultats ont fait l'objet de la publication internationale suivante:

- B. Meftah and N. Aouissi, New integral inequalities for r-convex functions.

Mots clé et phrases: Quadrature de Gauss-Jacobi, Inégalité de Hölder, fonctions convexe, fonctions préinvexe, fonctions r-convexe.

Abstract

The thesis is intended for the study of the estimate of Gauss-Jacobi quadrature.
In the first chapter we give some reminders about approximate integration, some definitions of classical convexity and generalized convexity, as well as some integral identities.
The second chapter will be entirely devoted to the estimation of the famous quadrature of Gauss-Jacobi we will expose certain results already known in the literature.
In the third chapter we will expose some new estimates of Gauss-Jacobi inequality. These last results have been the subject of the following international publication

- B. Meftah and N. Aouissi, New integral inequalities for r-convex functions.

Key words and phrases: Gauss-Jacobi quadrature, Hölder inequality, convex functions, preinvex functions, r-convex functions.

.

ملخص

تهدف هذه الرسالة إلى دراسة تقدير تربيع غاوس جاكوبي

في الفصل الأول ، نقدم بعض التذكيرات حول التكامل التقريبي ، وبعض تعريفات التحدب الكلاسيكي والتحدب المعمم ، بالإضافة إلى بعض الهويات المتكاملة التي سنطالب بها في الفصل التالي.

سيتم تخصيص الفصل الثاني بالكامل لتقدير التربيع الشهير لغاوس جاكوبي ، وسوف نكشف عن بعض النتائج المعروفة.

في الفصل الثالث ، سنقدم بعض النتائج الجديدة فيما يخص تقدير تربيع غاوس جاكوبي بفرض نوع معينة من التحدب على الدلة

كلمات مفتاحية

تربيع غاوس جاكوبي، متراجحات هولدر، الدوال محدبة، دوال ذات تحدب المعمم.

Table des matières

Introduction

La plus part des phénomènes naturelle posé par la physique la biologie et l'ingénierie ce modélise mathématiquement à partir des observations expérimentaux ou d'une collecte d'un nombre fini de grandeurs microscopique intervenant dans la modélisation ce qui nous ramène soit à une étude statistique dans le cas des tableaux ou a la résolutions des équations ou système dont la plus part du temps différentielle selon le modèle adapté pour d´ écrire le phénomène ainsi la résolution ou l'étude permet de donner des réponses quantitatives du phénomène qui permettent a leurs par de valider ou d'invalider le modèle, soit en comparant les prédictions avec l'expérience, soit en analysant la cohérence interne du modèle à travers ses prédictions.

Souvent la recherche d'un résultat numérique s'avers très difficile qui nous ramène a un calcul approché dont ce dernier nécessite au moins le calcul d'une intégrale simple ou bien a estimer l'intégral par de moyen d'autres outils telle les inégalités intégrales qui représente un outils très efficace et facile.

L'objectif de ce mémoire est d'estimer la quadrature de Gauss-Jacobi par le biais des inégalités intégrales

Ce mémoire est structuré comme suit :

Dans le premier chapitre nous rappelons quelques méthodes de calcul approché des intégrales, quelques types de convexité classique et de convexité généralisée, ainsi que quelques identités utiles pour notre étude.

Dans le second chapitre nous discuterons certains résultats liés à l'estimation de la quadrature de Gauss-Jacobi, nous exposerons certains résultats connus dans la littérature.

Dans le troisième chapitre nous donnerons des nouveaux résultats concernant l'estimation de la quadrature de Gauss-Jacobi ces résultats en fait l'objet de la publication internationale suivante :

B. Meftah and N. Aouissi, New integral inequalities for (s,m)- and (α,m)-preinvex functions.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce premier chapitre nous débuterons par quelque rappel d'analyse numérique portant sur l'intégration approchée pour plus de détails concernant cette première section nous renvoyons le lecteur à consulter [3, 25]. Ensuite nous rappellerons les définitions de quelques classe de fonctions jouissantes de certains type de convexité classique ainsi que de convexité générale. Par contre dans la dernière section de ce chapitre nous énoncerons sans démonstration quelques identités intégrales utiles pour notre travail ainsi qu'une inégalité algébrique largement connu dans la littérature.

1.1 L'intégration approchée

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $[a, b]$, on appel intégrale de f sur $[a, b]$ la quantité ci-dessous notée par I

$$I = \int_a^b f(t)dt. \tag{1.1}$$

L'intégration numérique consiste à remplacer l'intégrale (1.1) par une somme discrète sur un nombre fini de points.

$$I \approx I_N = (b-a)\sum_{i=0}^{N} w_i f(t_i), \tag{1.2}$$

où w_i, t_i sont des valeurs à déterminer qui dépondent de la méthode utiliser de plus chaque méthode doit satisfaire la condition

$$\lim_{N\to\infty} I_N = I. \tag{1.3}$$

Tout simplement l'intégrale numérique est calculée à partir de l'évaluation de la fonction f en un nombre de point N distincts.

Ces méthodes sont dites les formules de quadrature plusieurs type subsiste dans la littérature parmi ses méthodes

1.1.1 Formulation de quadrature de type interpolation simple

Ces formules sont dites aussi les méthodes de Cotes ou de Newton-Cotes.

Le principe général des méthodes de Newton-Cotes simples est d'approximer la fonction $f(t)$ à intégrer par un polynôme $P(t)$ de degré p qui coïncident avec $f(x)$ en $p+1$ points distincts et équidistant entre les bornes a et b.

Ces points sont donnés par la relation suivante

$$t_i = a + ih, i = 0, 1..., p \text{ où } h = \frac{b-a}{p}. \tag{1.4}$$

Ainsi nous aurons

$$P(t_i) = f_i = f(t_i), \forall i \in \{0, 1, ..., p\}. \tag{1.5}$$

Donc la formule est donnée par

$$\widetilde{I} = \int_a^b P(t)dt. \tag{1.6}$$

Remarque 1.1 *Des polynômes de degrés différents définissent des méthodes différentes.*

Parmi ces méthodes on a

Méthode du rectangle ($p = 0$)

Cette méthode utilise le polynôme constant, elle nécessite une unique évaluation de la fonction f au point $t_0 = a$, et on a

$$I \approx \widetilde{I} = (b - a)\, f_0, \tag{1.7}$$

où $I, \widetilde{I}$ et f_0 sont définis comme dans (1.1), (1.6) et (1.5) respectivement.

Le terme de l'erreur est donné par

$$|E_0| = \left| I - \widetilde{I} \right| \leq \tfrac{h^2}{2} \sup_{t \in [a,b]} |f'(t)| .$$

Méthode du point milieu ($p = 0$)

Comme la méthode précédente cette dernière utilise également le polynôme constant et nécessite une unique évaluation de la fonction f au point $t_0 = \frac{a+b}{2}$, qui est le point milieu de $[a, b]$ d'où sont appellation cette dernière exploite mieux les symétries du problème en choisissant ce point, et on a

$$I \approx \widetilde{I} = (b - a)\, f_0, \tag{1.8}$$

où $f_0 = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

Le terme de l'erreur est donné par

$$|E_0| = \left| I - \widetilde{I} \right| \leq \tfrac{h^3}{24} \sup_{t \in [a,b]} |f''(t)| .$$

Méthode de trapèze ($p = 1$)

Cette méthode utilise le polynôme d'ordre 1, c'est-à-dire la droite qui passe par les points $t_0 = a$ et $t_1 = b$, on prend donc

$$P(t) = \tfrac{f_0+f_1}{2} + \tfrac{f_1-f_0}{b-a}\left(t - \tfrac{a+b}{2}\right). \tag{1.9}$$

On a donc

$$I \approx \widetilde{I} = (b-a)\,\tfrac{f_0+f_1}{2}. \tag{1.10}$$

Le terme de l'erreur est donné par

$$|E_0| = \left|I - \widetilde{I}\right| \leq \tfrac{h^3}{12} \sup_{t\in[a,b]} \left|f''(t)\right|. \tag{1.11}$$

Remarque 1.2 *La quantité (1.10) représente l'aire du trapèze formé des points* $(a,0)$,$(b,0)$,$(a, f(a))$ *et* $(b, f(b))$.

Méthode de Simpson ($p = 2$)

Cette méthode utilise le polynôme de degré 2 qui passe par les trois points $f_0 = f(a)$, $f_1 = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ et $f_2 = f(b)$. Elle nécessite donc l'évaluation de la fonction f aux points $t_0 = a, t_1 = \frac{a+b}{2}$ et $t_2 = b$. Donc $P(t)$ vaudra

$$P(t) = 2\tfrac{f_2-2f_1+f_0}{b-a}\left(t - \tfrac{a+b}{2}\right)^2 + \tfrac{f_2-f_0}{b-a}\left(t - \tfrac{a+b}{2}\right) + f_1. \tag{1.12}$$

Et on a

$$I \approx \widetilde{I} = (b-a)\,\tfrac{f_0+4f_1+f_1}{6}. \tag{1.13}$$

Le terme de l'erreur est donné par

$$|E_0| = \left|I - \widetilde{I}\right| \leq \tfrac{h^5}{90} \sup_{t\in[a,b]} \left|f^{(4)}(t)\right|, \tag{1.14}$$

où $f^{(4)}$ désigne la dérivée d'ordre 4.

Méthodes d'ordres plus élevés

Concernant les Méthodes d'ordres plus élevés les polynômes d'approximation peuvent être construits par le biais des polynômes de Lagrange $L_i(t)$ avec $i \in \{0, 1, ..., p\}$, et on a

$$P(t) = \sum_{i=0}^{p} f_i L_i(t), \tag{1.15}$$

où

$$L_i(t) = \sum_{j=0, j\neq i}^{p} \frac{t - t_j}{t_i - t_j}.$$

Et on a

$$I \approx \widetilde{I} = (b-a) \sum_{i=0}^{p} w_i L_i(t), \tag{1.16}$$

avec

$$w_i = \tfrac{1}{b-a} \int_a^b L_i(t)\, dt.$$

Le terme de l'erreur est donné par

$$|E_0| = \left| I - \widetilde{I} \right| \leq \begin{cases} \frac{h^{p+2}}{c_p} \sup\limits_{t\in[a,b]} \left| f^{(p+1)}(t) \right| \text{ si } p \text{ est impair} \\ \frac{h^{p+3}}{c_p} \sup\limits_{t\in[a,b]} \left| f^{(p+2)}(t) \right| \text{ si } p \text{ est pair,} \end{cases} \tag{1.17}$$

où c_p est un coefficient qui dépend de l'ordre du polynôme.

Parmi ces méthodes on peut citer

- Méthode de Simpson 3/8 qui est degré 3.

- Méthode de Boole qui est degré 4.

1.1.2 Méthodes de Gauss

Les méthodes de Gauss consistent à établir des approximations de la forme

$$\int_a^b w(t) f(t) \approx \sum_{i=1}^{N} c_i f(t_i),$$

où $w(t)$ est la fonction de poids, et les t_i des points de $[a, b]$ non nécessairement équidistants.

Pour pouvoir estimé l'intégrale il faudra chercher les c_i ainsi que les t_i ce qui revient à résoudre $2N$ équations à $2N$ inconnues. La détermination de ces $2N$ paramètres, repose sur la construction de polynômes orthogonaux dont le principe remonte a Gauss et Jacobi et son développe est mis en évidence par Christoffel d'où l'appellation des c_i 'coefficient de Christoffel'et les t_i sont les des polynômes orthogonaux de degré N dont le type des polynômes est choisi dépond du choit de la fonction poids.

Parmi ces méthodes là en cite

Méthode Gauss-Legendre

La fonction de poids

$$w(t) = 1, \forall t \in [-1, 1], \tag{1.18}$$

et la relation de récurrence pour les polynômes de Legendre est

$$\begin{cases} P_0(t) = 1, P_1(t) = t \\ P_i(t) = \frac{(2i-1)tP_{i-1}(t)-(i-1)P_{i-2}(t)}{i} \text{ pour } i \geq 2. \end{cases} \tag{1.19}$$

Méthode Gauss-Hermite

La fonction de poids

$$w(t) = \exp\left(-t^2\right), \forall t \in \mathbb{R}, \tag{1.20}$$

et la relation de récurrence pour les polynômes de Hermite est

$$\begin{cases} H_0(t) = 1, H_1(t) = 2t \\ H_i(t) = 2tH_{i-1}(t) - 2(i-1)H_{i-2}(t) \text{ pour } i \geq 2. \end{cases} \tag{1.21}$$

Méthode Gauss-Laguerre

La fonction de poids

$$w(t) = t^{\alpha} \exp(-t), \forall t \in [0, +\infty), \tag{1.22}$$

et la relation de récurrence pour les polynômes de Laguerre est

$$\begin{cases} L_0^{\alpha}(t) = 1, L_1(t) = 1 - t \\ L_i^{\alpha}(t) = \frac{(-t+\alpha+2i-1)L_{i-1}^{\alpha}(t)-(i-1+\alpha)L_{i-2}^{\alpha}(t)}{i} \text{ pour } i \geq 2. \end{cases} \tag{1.23}$$

Méthode Gauss-Tchebytchev ou (Chebyshev)

La fonction de poids

$$w(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, \forall t \in [-1, 1], \tag{1.24}$$

et la relation de récurrence pour les polynômes de Tchebytchev est

$$\begin{cases} T_0(t) = 1, T_1(t) = t \\ T_i(t) = 2tT_{i-1}(t) - T_{i-2}(t) \text{ pour } i \geq 2 \text{ pour } i \geq 2. \end{cases} \tag{1.25}$$

Méthode Gauss-Jacobi

La fonction de poids

$$w(t) = (1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}, \forall t \in (-1, 1), \tag{1.26}$$

et la relation de récurrence pour les polynômes de Jacobi est

$$\begin{cases} L_0^{\alpha}(t) = 1, L_1(t) = 1 - t \\ P_i^{(\alpha,\beta)}(t) = \frac{(d_{i-1}+te_{i-1})P_{i-1}^{(\alpha,\beta)}(t)+u_{i-1}P_{i-2}^{(\alpha,\beta)}(t)}{c_{i-1}} \text{ pour } i \geq 2, \end{cases} \tag{1.27}$$

où

$$\begin{cases} d_{i-1} = (2i+\alpha+\beta-1)\left(\alpha^2-\beta^2\right) \\ e_{i-1} = (2i+\alpha+\beta-2)(2i+\alpha+\beta-1)(2i+\alpha+\beta) \\ u_{i-1} = 2(i+\alpha-1)(i+\beta-1)(2i+\alpha+\beta) \\ c_{i-1} = 2i(i+\alpha+\beta)(2i+\alpha+\beta-2). \end{cases} \tag{1.28}$$

1.2 Quelques types de convexité

Convexité classique

Définition 1.1 ([23]) *Un sous ensemble $I \subset \mathbb{R}$ est dit convexe si $\forall x, y \in I : tx + (1-t)y \in I$ pour tout $t \in [0,1]$.*

Dans tous ce suit on I désigne un ensemble convexe de $\mathbb{R}$.

Définition 1.2 ([23]) *Soit $f : I \to \mathbb{R}$, f est dite convexe, si l'inégalité*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et tout $t \in [0,1]$.

Définition 1.3 ([5]) *Soit $f : I \to \mathbb{R}$, f est dite quasi-convexe, si l'inégalité*

$$f(tx + (1-t)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et tout $t \in [0,1]$.

Définition 1.4 ([4]) *Soit la fonction non négative $f : I \to \mathbb{R}$, f est dite P-fonction, si l'inégalité*

$$f(tx + (1-t)y) \leq f(x) + f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et tout $t \in [0,1]$.

Définition 1.5 ([26]) *Soit $f : [0,b] \to \mathbb{R}$, $(b > 0)$, f est dite m-convexe, où $m \in (0,1]$, si l'inégalité*

$$f(tx + m(1-t)y) \leq tf(x) + m(1-t)\ f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in [0,b]$ et $t \in [0,1]$.

Définition 1.6 ([16]) *Soit $f : [0,b] \to \mathbb{R}$, $(b > 0)$, f est dite (α, m)-convexe, où $(\alpha, m) \in (0,1]^2$, si l'inégalité*

$$f(tx + m(1-t)y) \leq t^{\alpha} f(x) + m(1-t^{\alpha}) f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in [0,b]$ et $t \in [0,1]$.

Convexité générale (préinvexité)

Définition 1.7 ([28]) *L'ensemble K est dit invexe au point x par rapport à η, si*

$$x + t\eta(y,x) \in K$$

est valide pour tout $x, y \in K$ et $t \in [0,1]$.

Remarque 1.3 *K est dit ensemble invexe par rapport à η, si il l'est pour tout point x de K.*

Dans tous ce qui suit K désigne un ensemble préinvexe de $\mathbb{R}$.

Définition 1.8 ([28]) *Toute fonction f sur l'ensemble invexe K est dite préinvexe par rapport à η, si l'inégalité*

$$f\left(x+t\eta\left(y,x\right)\right)\leq\left(1-t\right)f\left(x\right)+tf(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in K$ et $t \in [0,1]$.

Définition 1.9 ([24]) *Soit $f : I \to \mathbb{R}$, f est dite préquasi-invexe, si l'inégalité*

$$f\left(x+t\eta\left(y,x\right)\right)\leq\max\left\{f\left(x\right),f(y)\right\}$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et tout $t \in [0,1]$.

Définition 1.10 ([19]) *Toute fonction non négative $f : K \to [0,\infty)$, est dite fonction P-préinvexe par rapport à η, si l'inégalité*

$$f\left(x+t\eta\left(y,x\right)\right)\leq f\left(x\right)+f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in K$ et $t \in [0,1]$.

Définition 1.11 ([27]) *Toute fonction non négative f sur l'ensemble invexe $K \subseteq [0,\infty)$ est dite s-préinvexe au second sens par rapport à η, certain nombre fixé $s \in (0,1]$, si l'inégalité*

$$f\left(x+t\eta\left(y,x\right)\right)\leq\left(1-t\right)^{s}f\left(x\right)+t^{s}f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in K$ et $t \in [0,1]$.

Définition 1.12 ([9]) *une fonction $f : K \to \mathbb{R}$ est dite (α,m)-préinvexe par rapport à η pour des certains nombres fixés $\alpha, m \in (0,1]$, si*

$$f\left(x+t\eta\left(y,x\right)\right)\ \leq\left(1-t^{\alpha}\right)f\left(x\right)+mt^{\alpha}f\left(\tfrac{y}{m}\right)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in K$ et $t \in [0,1]$.

Définition 1.13 ([12]) *une fonction* $f : K \subset [0, b^*] \rightarrow \mathbb{R}$ *est dite* (s, m)*-préinvexe par rapport à* η *pour des certains nombres fixés* $s, m \in (0, 1]$, *où* $b^* > \frac{b}{m} > 0$ *si*

$$f(x + t\eta(y, x)) \leq (1 - t)^s f(x) + mt^s f\left(\frac{y}{m}\right)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in K$ *et* $t \in [0, 1]$.

1.3 Quelques identités et inégalités intégrales

Lemme 1.1 ([22]) *Soit* $f : [a, b] \subset I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue et intégrable sur* $[a, b]$ *où* $a < b$. *Alors l'identité suivante*

$$\int_a^b (x - a)^p (b - x)^q f(x)\, dx = (b - a)^{p+q+1} \int_0^1 (1 - t)^p t^q f(ta + (1 - t) b)\, dt$$

est satisfaite pour des certaines valeurs fixé $p, q > 0$.

Lemme 1.2 ([1]) *Soit* $f : [a, a + \eta(b, a)] \subset K \rightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue et intégrable sur* $[a, a + \eta(b, a)]$ *où* $\eta(b, a) > 0$. *Alors l'identité suivante*

$$\begin{aligned} &\int_a^{a+\eta(b,a)} (x - a)^p (a + \eta(b, a) - x)^q f(x) dx \\ = &\ (\eta(b, a))^{p+q+1} \int_0^1 (1 - t)^q t^p f(a + t\eta(b, a)) dt. \end{aligned}$$

est satisfaite pour des certaines valeurs fixé $p, q > 0$.

Nous rappelons aussi cette inégalité algébrique citée ci-dessous dont on lui fera appel ultérieurement

Lemme 1.3 ([17]) *Soient* $a \geq 0$ *et* $b \geq 0$, *les inégalités suivantes sont satisfaites*

$$(a + b)^\lambda \leq \begin{cases} 2^{\lambda - 1} \left(a^\lambda + b^\lambda\right), & si\ \lambda \geq 1 \\ a^\lambda + b^\lambda, & si\ 0 \leq \lambda \leq 1 \end{cases}$$

Chapitre 2

Estimations de la quadrature de Gauss-Jacobi

La fameuse quadrature généralisée de Gauss-Jacobi est un puissant outil d'analyse numérique pour l'approximation des intégrales dont la forme est la suivante

$$\int_a^b (x-a)^p (b-x)^q f(x)\, dx = \sum_{k=0}^{m} B_{m,k} f(\gamma_k) + \Re_m [f], \tag{2.1}$$

où $B_{m,k}$ sont les coefficients de Christoffel, γ_k les racines du polynôme de Jacobi de degré m et $\Re_m [f]$ le terme du reste.

Özdemir et ces collaborateur [21], ont été les précurseur a avoir estimé le coté droit de l'identité (2.1). Dès lors l'identité (2.1) n'a cessée d'attirer l'attention des chercheurs la littérature dans ce contexte ne cesse de croître en peut citer citer parmi les travaux récents ceux de $[2, 6, 7, 8, 13, 18, 21, 22]$.

2.1 Estimations de la quadrature de Gauss-Jacobi pour les fonctions convexe

2.1.1 Inégalité de Gauss-Jacobi pour les fonctions (α, m)-convexe

Théorème 2.1 ([10]) *Soit $f : [a,b] \subset I \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $[a,b]$ tel que $0 \leq a < b < \infty$. Si f est (α, m)-convexe sur $[a,b]$ où $\alpha, m \in (0,1]$ sont des nombres fixés et $p, q > 0$, alors on a*

$$\int_a^b (x-a)^p (b-x)^q f(x)\, dx \leq (b-a)^{p+q+1}$$
$$\times \min \left\{ \beta(q+\alpha+1, p+1) f(a) + m[\beta(q+1,p+1) - \beta(q+\alpha+1,p+1)] f(\tfrac{b}{m}) , \right.$$
$$\left. \beta(q+1, p+\alpha+1) f(b) + m[\beta(p+1,q+1) - \beta(q+1,p+\alpha+1)] f(\tfrac{a}{m}) \right\} ,$$

où $\beta(x,y)$ est la fonction bêta d'Euler.

Preuve. Comme f est (α, m)-convexe sur $[a,b]$ donc pour tout $t \in [0,1]$, nous pourrons écrire

$$f(ta + (1-t)b) = f(ta + m(1-t)\tfrac{b}{m}) \leq t^\alpha f(a) + m(1-t^\alpha) f(\tfrac{b}{m}). \qquad (2.2)$$

Multiplions les deux membres de (2.2) par $(b-a)^{p+q+1}(1-t)^p t^q$, puis intégrons les deux membres de l'inégalité résultante par rapport à t sur $[0,1]$, nous obtenons

$$\begin{aligned} &\int_b^a (x-a)^p (b-x)^q f(x) dx \\ \leq\ & (b-a)^{p+q+1} \int_0^1 (1-t)^p t^q (t^\alpha f(a) + m(1-t^\alpha) f(\tfrac{b}{m})) dt \\ =\ & (b-a)^{p+q+1} \left[f(a) \int_0^1 (1-t)^p t^{q+\alpha} dt + m f(\tfrac{b}{m}) \int_0^1 (1-t)^p t^q (1-t^\alpha) dt \right]. \qquad (2.3) \end{aligned}$$

Il est claire que

$$\int_0^1 t^{q+\alpha} (1-t)^p dt = \beta(q+\alpha+1, p+1), \qquad (2.4)$$

et

$$\int_0^1 (1-t)^p t^q (1-t^\alpha)dt = \int_0^1 t^q(1-t)^p dt - \int_0^1 t^{q+\alpha}(1-t)^p dt$$
$$= \beta(q+1,p+1) - \beta(q+\alpha+1,p+1). \qquad (2.5)$$

Substituons (2.4) et (2.5) dans (2.3) nous trouvons

$$\int_b^a (x-a)^p(b-x)^q f(x)dx \leq (b-a)^{p+q+1} \qquad (2.6)$$
$$\times \left\{\beta(q+\alpha+1,p+1)f(a) + m[\beta(q+1,p+1) - \beta(q+\alpha+1,p+1)]f(\tfrac{b}{m})\right\} .$$

D'autre part nous pourrons aussi écrire

$$f(ta+(1-t)b) = f(tm\tfrac{a}{m} + (1-t)b) \leq mt^\alpha f(\tfrac{a}{m}) + (1-t^\alpha)f(b). \qquad (2.7)$$

D'une manière analogue nous obtenons

$$\int_b^a (x-a)^p(b-x)^q f(x)dx \leq (b-a)^{p+q+1} \qquad (2.8)$$
$$\times \left\{\beta(q+1,p+\alpha+1)f(b) + m[\beta(q+1,p+1) - \beta(q+1,p+\alpha+1)]f(\tfrac{a}{m})\right\}.$$

Ainsi le résultat souhaité découle des inégalités (2.6) et (2.8) ∎

Corollaire 2.1 ([10]) *Dans le Théorème 2.1, si en prend $p = q$, nous obtenons*

$$\int_b^a (x-a)^p(b-x)^q f(x)dx \leq (b-a)^{2p+1}$$
$$\times \min\left\{\beta(p+\alpha+1,p+1)f(a) + m[\beta(p+1,p+1) - \beta(p+\alpha+1,p+1)]f(\tfrac{b}{m}),\right.$$
$$\left.\beta(p+1,p+\alpha+1)f(b) + m[\beta(p+1,p+1) - \beta(p+1,p+\alpha+1)]f(\tfrac{a}{m})\right\}.$$

Theoreme 2.2 ([10]) *Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ telle que $f' \in L^1([a,b])$ avec $0 \leq a < b < \infty$. Si $|f|^{\frac{k}{k-1}}$ est (α,m)- convexe sur $[a,b]$ où $k > 1$,*

$(\alpha, m) \in (0,1]^2$ et $p, q > 0$, alors nous avons

$$\left|\int_b^a (x-a)^p(b-x)^q f(x)dx\right| \le \frac{(b-a)^{p+q+1}}{(\alpha+1)^{\frac{k-1}{k}}}[\beta(kp+1,kq+1)]^{\frac{1}{k}}$$
$$\times \min\left\{[|f(a)|^{\frac{k}{k-1}} + \alpha m \left|f(\tfrac{b}{m})\right|^{\frac{k}{k-1}}]^{\frac{k-1}{k}}, [|f(b)|^{\frac{k}{k-1}} + \alpha m \left|f(\tfrac{a}{m})\right|^{\frac{k}{k-1}}]^{\frac{k-1}{k}}\right\}, \quad (2.9)$$

où $\beta(x,y)$ est la fonction bêta d'Euler.

Preuve. Appliquons la valeur absolue aux deux membres de l'égalité du Lemme 1.1, ensuite faisons appel à l'inégalité de Hölder nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\left|\int_b^a (x-a)^p(b-x)^q f(x)dx\right| \\
\le\ & (b-a)^{p+q+1}\left[\int_0^1 (1-t)^{kp}t^{kq}dt\right]^{\frac{1}{k}}\left[\int_0^1 |f(ta+(1-t)b)|^{\frac{k}{k-1}}dt\right]^{\frac{k-1}{k}}. \quad (2.10)
\end{aligned}$$

Remplaçons dans (2.10) $|f(ta+(1-t)b)|$ par $\left|f(ta+m(1-t)\frac{b}{m})\right|$, et utilisons la (α, m)-convexité de $|f|^{\frac{k}{k-1}}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\left|\int_b^a (x-a)^p(b-x)^q f(x)dx\right| \\
\le\ & (b-a)^{p+q+1}[\beta(kp+1,kq+1)]^{\frac{1}{k}}\left[\int_0^1 \left|f(ta+m(1-t)\tfrac{b}{m})\right|^{\frac{k}{k-1}}dt\right]^{\frac{k-1}{k}} \\
\le\ & (b-a)^{p+q+1}[\beta(kp+1,kq+1)]^{\frac{1}{k}} \\
& \times\left[\int_0^1 t^\alpha |f(a)|^{\frac{k}{k-1}}dt + m\int_0^1 (1-t^\alpha)\left|f(\tfrac{b}{m})\right|^{\frac{k}{k-1}}dt\right]^{\frac{k-1}{k}} \\
=\ & (b-a)^{p+q+1}[\beta(kp+1,kq+1)]^{\frac{1}{k}}\left[\tfrac{1}{\alpha+1}|f(a)|^{\frac{k}{k-1}} + m\tfrac{\alpha}{\alpha+1}\left|f(\tfrac{b}{m})\right|^{\frac{k}{k-1}}\right]^{\frac{k-1}{k}}. (2.11)
\end{aligned}$$

D'une manière analogue si en remplace dans (2.10) $|f(ta+(1-t)b)|$ par $\left|f(mt\frac{a}{m}+(1-t)b)\right|$, et par le même procède nous aboutissons facilement à

$$\int_b^a (x-a)^p(b-x)^q f(x)dx \tag{2.12}$$
$$\leq \quad (b-a)^{p+q+1}\left[\beta(kp+1,kq+1)\right]^{\frac{1}{k}}\left[m\tfrac{\alpha}{\alpha+1}\left|f(\tfrac{a}{m})\right|^{\frac{k}{k-1}}+\tfrac{1}{\alpha+1}\left|f(b)\right|^{\frac{k}{k-1}}\right]^{\frac{k-1}{k}}.$$

Le résultat désiré découle des inégalités (2.11) et (2.12). ■

Corollaire 2.2 ([10]) *Dans le Théorème 2.2, si en prend $p=q$, nous obtenons*

$$\int_b^a (x-a)^p(b-x)^q f(x)dx \leq \tfrac{(b-a)^{2p+1}}{(\alpha+1)^{\frac{k-1}{k}}}\left[\beta(kp+1,kp+1)\right]^{\frac{1}{k}}$$
$$\times \min\left\{\left(\left|f(a)\right|^{\frac{k}{k-1}}+\alpha m\left|f(\tfrac{b}{m})\right|^{\frac{k}{k-1}}\right)^{\frac{k-1}{k}},\left(\left|f(b)\right|^{\frac{k}{k-1}}+\alpha m\left|f(\tfrac{a}{m})\right|^{\frac{k}{k-1}}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right\}.$$

Si de plus en prend $\alpha=1$, nous aurons

$$\int_b^a (x-a)^p(b-x)^q f(x)dx \leq \tfrac{(b-a)^{q+p+1}}{2^{\frac{k-1}{k}}}\left[\beta(kp+1,kq+1)\right]^{\frac{1}{k}}$$
$$\times \min\left\{\left[\left|f(a)\right|^{\frac{k}{k-1}}+m\left|f(\tfrac{b}{m})\right|^{\frac{k}{k-1}}\right]^{\frac{k-1}{k}},\left[\left|f(b)\right|^{\frac{k}{k-1}}+m\left|f(\tfrac{a}{m})\right|^{\frac{k}{k-1}}\right]^{\frac{k-1}{k}}\right\}.$$

Théorème 2.3 ([10]) *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ telle que $f\in L^1([a,b])$ avec $0\leq a<b<\infty$. Si $|f|^\ell$est (α,m)-convexe sur $[a,b]$ où $\ell>1$, $(\alpha,m)\in(0,1]^2$ et $p,q>0$ alors*

$$\int_b^a (x-a)^p(b-x)^q f(x)dx$$
$$\leq \quad (b-a)^{p+q+1}\left[\beta(p+1,q+1)\right]^{\frac{\ell-1}{\ell}}\min\left\{\left(\beta\left(q+\alpha+1,p+1\right)\left|f(a)\right|^\ell\right.\right.$$
$$\left.+\,m\left[\beta\left(q+1,p+1\right)-\beta\left(q+\alpha+1,p+1\right)\right]\left|f(\tfrac{b}{m})\right|^\ell\right)^{\frac{1}{\ell}},$$
$$\left.\left[\beta\left(q+1,p+\alpha+1\right)\left|f(b)\right|^\ell+m\left[\beta\left(q+1,p+1\right)-\beta\left(q+1,p+\alpha+1\right)\right]\left|f(\tfrac{a}{m})\right|^\ell\right]^{\frac{1}{\ell}}\right\},$$

où $\beta(x,y)$ est la fonction bêta d'Euler.

Preuve. Appliquons la valeur absolue aux deux membres de l'égalité du Lemme 1.1, ensuite faisons appel à l'inégalité de la moyenne nous obtenons

$$\begin{aligned} & \int_b^a (x-a)^p (b-x)^q f(x)dx \\ \leq \ & (b-a)^{p+q+1} \left[\int_0^1 (1-t)^p t^q dt\right]^{\frac{\ell-1}{\ell}} \left[\int_0^1 (1-t)^p t^q \left|f(ta+(1-t)b)\right|^\ell dt\right]^{\frac{1}{\ell}} . \end{aligned} \tag{2.13}$$

Remplaçons dans (2.13) $|f(ta+(1-t)b)|$ par $\left|f(ta+m(1-t)\frac{b}{m})\right|$, et utilisons la (α, m)-convexité de $|f|^\ell$, nous aurons

$$\begin{aligned} \int_b^a (x-a)^p (b-x)^q f(x)dx \leq (b-a)^{p+q+1} \left[\beta\left(q+1, p+1\right)\right]^{\frac{\ell-1}{\ell}} \qquad (2.14) \\ \times \left[\beta\left(q+\alpha+1, p+1\right) |f(a)|^\ell + m\left[\beta\left(q+1, p+1\right) - \beta\left(q+\alpha+1, p+1\right)\right] \left|f(\tfrac{b}{m})\right|^\ell\right]^{\frac{1}{\ell}} . \end{aligned}$$

Et dans le cas où en remplace dans (2.13) $|f(ta+(1-t)b)|$ par $\left|f(mt\frac{a}{m}+(1-t)b)\right|$, nous aurons

$$\begin{aligned} & \int_b^a (x-a)^p (b-x)^q f(x)dx \\ \leq \ & (b-a)^{p+q+1} \left[\beta\left(p+1, q+1\right)\right]^{\frac{\ell-1}{\ell}} \Big(\beta\left(q+1, p+\alpha+1\right) |f(b)|^\ell \\ & + m\left[\beta\left(q+1, p+1\right) - \beta\left(q+1, p+\alpha+1\right)\right] \left|f(\tfrac{a}{m})\right|^\ell\Big)^{\frac{1}{\ell}} . \end{aligned} \tag{2.15}$$

De (2.14) et (2.15), nous déduisons le résultat désiré. ■

Corollaire 2.3 ([10]) *Dans le Théorème 2.3, si en prend $p = q$, nous obtenons*

$$\begin{aligned} & \int_b^a (x-a)^p (b-x)^q f(x)dx \\ \leq \ & (b-a)^{2p+1} \left[\beta\left(p+1, p+1\right)\right]^{\frac{\ell-1}{\ell}} \min\Big\{\Big(\beta\left(p+\alpha+1, p+1\right) |f(a)|^\ell \\ & + m\left[\beta\left(p+1, p+1\right) - \beta\left(p+\alpha+1, p+1\right)\right] \left|f(\tfrac{b}{m})\right|^\ell\Big)^{\frac{1}{\ell}} , \\ & \left[\beta\left(p+1, p+\alpha+1\right) |f(b)|^\ell + m\left[\beta\left(p+1, p+1\right) - \beta\left(p+1, p+\alpha+1\right)\right] \left|f(\tfrac{a}{m})\right|^\ell\right]^{\frac{1}{\ell}} \Big\} . \end{aligned}$$

Si de plus en prend $\alpha = 1$, nous aurons

$$\begin{aligned}
&\int_b^a (x-a)^p (b-x)^q f(x)dx \\
\leq\;& (b-a)^{p+q+1} \left[\beta\left(p+1, q+1\right)\right]^{\frac{\ell-1}{\ell}} \\
&\times \min\left\{ \left[\beta\left(q+2, p+1\right)|f(a)|^{\ell} + m\beta\left(q+1, p+2\right)\left|f(\tfrac{b}{m})\right|^{\ell}\right]^{\frac{1}{\ell}}, \right. \\
&\left. \left[\beta\left(q+1, p+2\right)|f(b)|^{\ell} + m\beta\left(q+2, p+1\right)\left|f(\tfrac{a}{m})\right|^{\ell}\right]^{\frac{1}{\ell}} \right\}.
\end{aligned}$$

2.1.2 Inégalité de Gauss-Jacobi pour les fonctions quasi-convexe

Théorème 2.4 ([10]) *Soit $f : [a,b] \subset I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ telle que $f \in L^1([a,b])$ avec $0 \leq a < b < \infty$. Si $|f|^{\frac{k}{k-1}}$ est quasi-convexe sur $[a,b]$ où $k > 1$ et $p, q > 0$, alors*

$$\begin{aligned}
&\int_b^a (x-a)^p (b-x)^q f(x)dx \\
\leq\;& (b-a)^{p+q+1}[\beta(kp+1, kq+1)]^{\frac{1}{k}} \left(\max\left\{|f(a)|^{\frac{k}{k-1}}, |f(b)|^{\frac{k}{k-1}}\right\}\right)^{\frac{k}{k-1}},
\end{aligned}$$

où $\beta(x,y)$ est la fonction bêta d'Euler.

Preuve. Appliquons la valeur absolue aux deux membres de l'égalité du Lemme 1.1, ensuite faisons appel à l'inégalité de Hölder et la quasi-convexité de $|f|^{\frac{k}{k-1}}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\int_b^a (x-a)^p (b-x)^q f(x)dx \\
\leq\;& (b-a)^{p+q+1} \left[\int_0^1 (1-t)^{kp} t^{kq} dt\right]^{\frac{1}{k}} \left[\int_0^1 |f(ta+(1-t)b)|^{\frac{k}{k-1}} dt\right]^{\frac{k-1}{k}} \\
\leq\;& (b-a)^{p+q+1}[\beta(kq+1, kp+1)]^{\frac{1}{k}} \times \left[\int_0^1 \max\left\{|f(a)|^{\frac{k}{k-1}}, |f(b)|^{\frac{k}{k-1}}\right\} dt\right]^{\frac{k-1}{k}} \\
=\;& (b-a)^{p+q+1}[\beta(kq+1, kp+1)]^{\frac{1}{k}} \left[\max\left\{|f(a)|^{\frac{k}{k-1}}, |f(b)|^{\frac{k}{k-1}}\right\}\right]^{\frac{k-1}{k}}.
\end{aligned}$$

Ce qui complète la preuve. ■

Théorème 2.5 ([10]) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ telle que $f \in L^1([a,b])$ avec $0 \leq a < b < \infty$. Si $|f|^\ell$ est quasi-convexe sur $[a,b]$ où $\ell > 1$ et $p, q > 0$ alors*

$$\begin{aligned} &\int_b^a (x-a)^p (b-x)^q f(x)dx \\ \leq\ & (b-a)^{p+q+1} \beta(p+1, q+1) \left(\max\left\{ |f(a)|^\ell, |f(b)|^\ell \right\} \right)^{\frac{1}{\ell}}, \end{aligned}$$

où $\beta(x,y)$ est la fonction bêta d'Euler.

Preuve. Appliquons la valeur absolue aux deux membres de l'égalité du Lemme 1.1, ensuite faisons appel à à l'inégalité de la moyenne et à la quasi-convexité de $|f|^\ell$ nous obtenons

$$\begin{aligned} &\int_b^a (x-a)^p (b-x)^q f(x)dx \\ =\ & (b-a)^{p+q+1} \int_0^1 \left[(1-t)^p t^q\right]^{\frac{\ell-1}{\ell}} \left[(1-t)^p t^q\right]^{\frac{1}{\ell}} f(ta+(1-t)b)dt \\ \leq\ & (b-a)^{p+q+1} \left[\int_0^1 (1-t)^p t^q dt \right]^{\frac{\ell-1}{\ell}} \left[\int_0^1 (1-t)^p t^q \left|f(ta+(1-t)b)\right|^\ell dt \right]^{\frac{1}{\ell}} \\ \leq\ & (b-a)^{p+q+1} \left[\beta(p+1,q+1)\right]^{\frac{\ell-1}{\ell}} \left[\max\left\{ |f(a)|^\ell, |f(b)|^\ell \right\} \beta(q+1,p+1) \right]^{\frac{1}{\ell}} \\ =\ & (b-a)^{p+q+1} \beta(p+1,q+1) \left(\max\left\{ |f(a)|^\ell, |f(b)|^\ell \right\} \right)^{\frac{1}{\ell}}. \end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve. ■

2.1.3 Inégalité de Gauss-Jacobi pour les fonctions P-convexe

Théorème 2.6 ([11]) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ telle que $f \in L^1([a,b])$ avec $0 \leq a < b < \infty$. Si $|f|$ est P-convexe sur $[a,b]$ pour $p, q > 0$ alors*

$$\int_b^a (x-a)^p (b-x)^q f(x)dx \leq (b-a)^{p+q+1} \beta(p+1, q+1) \left(|f(a)| + |f(b)| \right),$$

où $\beta(x,y)$ est la fonction bêta d'Euler.

Preuve. En appliquant la valeur absolue aux deux membres de l'égalité du lemme 1 et en utilisant la P-convexité de f nous déduisons

$$
\begin{aligned}
& \int_b^a (x-a)^p (b-x)^q f(x)dx \\
\leq \; & (b-a)^{p+q+1} \int_0^1 (1-t)^p t^q \left| f(ta + (1-t)b) \right| dt \\
\leq \; & (b-a)^{p+q+1} \int_0^1 (1-t)^p t^q \left(|f(a)| + |f(b)| \right) dt \\
= \; & (b-a)^{p+q+1} \beta(p+1, q+1) \left(|f(a)| + |f(b)| \right).
\end{aligned}
$$

Ce qui complète la preuve. ■

Théorème 2.7 ([11]) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ telle que $f \in L^1([a,b])$ avec $0 \leq a < b < \infty$. Si $|f|^{\frac{k}{k-1}}$ est P-convexe sur $[a,b]$ où $k > 1$ et $p, q > 0$, alors nous avons*

$$
\begin{aligned}
& \int_b^a (x-a)^p (b-x)^q f(x)dx \\
\leq \; & (b-a)^{p+q+1} \left(\beta(kp+1, qk+1) \right)^{\frac{1}{k}} \left(|f(a)|^{\frac{k}{k-1}} + |f(b)|^{\frac{k}{k-1}} \right)^{\frac{k-1}{k}},
\end{aligned}
$$

où $\beta(x,y)$ est la fonction bêta d'Euler.

Preuve. En appliquant la valeur absolue aux deux membres de l'égalité du lemme 1, l'inégalité de Hölder et utilisons la P-convexité de $|f|^{\frac{k}{k-1}}$ nous déduisons

$$
\begin{aligned}
& \int_b^a (x-a)^p (b-x)^q f(x)dx \\
\leq \; & (b-a)^{p+q+1} \left[\int_0^1 (1-t)^{kp} t^{kq} dt \right]^{\frac{1}{k}} \left[\int_0^1 |f(ta + (1-t)b)|^{\frac{k}{k-1}} dt \right]^{\frac{k-1}{k}} \\
\leq \; & (b-a)^{p+q+1} \left[\beta(kp+1, qk+1) \right]^{\frac{1}{k}} \left[\int_0^1 \left(|f(a)|^{\frac{k}{k-1}} + |f(b)|^{\frac{k}{k-1}} \right) dt \right]^{\frac{k-1}{k}} \\
= \; & (b-a)^{p+q+1} \left(\beta(kp+1, qk+1) \right)^{\frac{1}{k}} \left(|f(a)|^{\frac{k}{k-1}} + |f(b)|^{\frac{k}{k-1}} \right)^{\frac{k-1}{k}},
\end{aligned}
$$

qui est le résultat souhaité. ■

Théorème 2.8 ([11]) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ telle que $f \in L^1([a,b])$ avec $0 \leq a < b < \infty$. Si $|f|^\ell$est P-convexe sur $[a,b]$ où $\ell > 1$ et $p, q > 0$, alors nous avons*

$$\begin{aligned} & \int_b^a (x-a)^p (b-x)^q f(x)dx \\ \leq \ & (b-a)^{p+q+1} \beta(p+1, q+1) \left(|f(a)|^\ell + |f(b)|^\ell\right)^{\frac{1}{\ell}} \ , \end{aligned}$$

où $\beta(x,y)$ est la fonction bêta d'Euler.

Preuve. Appliquons la valeur absolue aux deux membres de l'égalité du Lemme 1.1, ensuite faisons appel à l'inégalité de la moyenne et la P-convexité de $|f|^\ell$, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \int_b^a (x-a)^p (b-x)^q f(x)dx \\ = \ & (b-a)^{p+q+1} \int_0^1 [(1-t)^p t^q]^{\frac{\ell-1}{\ell}} \ [(1-t)^p t^q]^{\frac{1}{\ell}} f(ta + (1-t)b)dt \\ \leq \ & (b-a)^{p+q+1} \left[\int_0^1 (1-t)^p t^q dt\right]^{\frac{\ell-1}{\ell}} \left[\int_0^1 (1-t)^p t^q \left|f(ta+(1-t)b)\right|^\ell dt\right]^{\frac{1}{\ell}} \\ \leq \ & (b-a)^{p+q+1} \left[\beta(q+1, p+1)\right]^{\frac{\ell-1}{\ell}} \left[\left(|f(a)|^\ell + |f(b)|^\ell\right) \beta(q+1,p+1)\right]^{\frac{1}{\ell}} \\ = \ & (b-a)^{p+q+1} \beta(q+1, p+1) \left(|f(a)|^\ell + |f(b)|^\ell\right)^{\frac{1}{\ell}} . \end{aligned}$$

La preuve et ainsi achevée. ■

2.2 Estimations de la quadrature de Gauss-Jacobi pour les fonctions préinvexe

2.2.1 Inégalité de Gauss-Jacobi pour les fonctions P-préinvexe

Théorème 2.9 ([1]) *Soit $f : [a, a+\eta(b,a)] \subset K \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, a+\eta(b,a)]$ telle que $f \in L^1([a, a+\eta(b,a)])$ avec $\eta(b,a) > 0$. Si $|f|$ est P-préinvexe sur $[a, a+\eta(b,a)]$, alors nous avons*

$$\begin{aligned} &\int_a^{a+\eta(b,a)} (x-a)^p(a+\eta(b,a)-x)^q f(x)dx \\ \leq\ & \eta(b,a)^{p+q+1}\beta(p+1,q+1)\left(|f(a)|+|f(b)|\right), \end{aligned}$$

où $\beta(x,y)$ est la fonction bêta d'Euler.

Preuve. Comme $|f|$ est une fonction préinvexe sur $[a, a+\eta(b,a)]$, nous avons

$$|f(a+t\eta(b,a))| \leq |f(a)| + |f(b)|. \tag{2.16}$$

Multiplions les deux membres de (2.16) par $\eta(b,a)^{p+q+1}(1-t)^q t^p$, puis intégrons les deux membres de l'inégalité résultante par rapport à t sur $[0,1]$, nous obtenons

$$\begin{aligned} &\int_a^{a+\eta(b,a)} (x-a)^p(a+\eta(b,a)-x)^q f(x)dx \\ \leq\ & \eta(b,a)^{p+q+1}\int_0^1 (1-t)^q t^p \left|f(a+t\eta(b,a))\right| dt \\ \leq\ & \eta(b,a)^{p+q+1}\int_0^1 (1-t)^q t^p \left(|f(a)|+|f(b)|\right) dt \\ =\ & \eta(b,a)^{p+q+1}\beta(p+1,q+1)\left(|f(a)|+|f(b)|\right). \end{aligned}$$

La preuve est ainsi achevée. ■

Théorème 2.10 ([1]) *Soit $f : [a, a+\eta(b,a)] \subset K \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, a+\eta(b,a)]$ telle que $f \in L^1([a, a+\eta(b,a)])$ avec $\eta(b,a) > 0$. Si $|f|^{\frac{k}{k-1}}$ est P-préinvexe* *sur* $[a, a + \eta(b, a)]$ *où* $k > 1$ *et* $p, q > 0$, *alors nous avons*

$$\begin{aligned}
&\int_a^{a+\eta(b,a)} (x-a)^p(a+\eta(b,a)-x)^q f(x)dx \\
\leq\ & \eta(b,a)^{p+q+1}\left[\beta(kp+1,kq+1)\right]^{\frac{1}{k}}\left(|f(a)|^{\frac{k}{k-1}}+|f(b)|^{\frac{k}{k-1}}\right)^{\frac{k-1}{k}},
\end{aligned}$$

où $\beta(x, y)$ *est la fonction bêta d'Euler.*

Preuve. Utilisons le Lemme 1.2, la valeur absolue, l'inégalité de Hölder et la P-préinvexité de $|f|^{\frac{k}{k-1}}$ nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\int_a^{a+\eta(b,a)} (x-a)^p(a+\eta(b,a)-x)^q f(x)dx \\
\leq\ & \eta(b,a)^{p+q+1}\left[\int_0^1 (1-t)^{qk}t^{pk}dt\right]^{\frac{1}{k}}\left[\int_0^1 |f(a+t\eta(b,a))|^{\frac{k}{k-1}}dt\right]^{\frac{k-1}{k}} \\
=\ & \eta(b,a)^{p+q+1}\left[\beta(kp+1,kq+1)\right]^{\frac{1}{k}}\left[|f(a)|^{\frac{k}{k-1}}+|f(b)|^{\frac{k}{k-1}}\right]^{\frac{k-1}{k}}.
\end{aligned}$$

La preuve est ainsi achevée. ■

Théorème 2.11 ([1]) *Soit* $f : [a, a + \eta(b, a)] \subset K \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* $[a, a + \eta(b, a)]$ *telle que* $f \in L^1([a, a + \eta(b, a)])$ *avec* $\eta(b, a) > 0$. *Si* $|f|^\ell$ *est* P*-préinvexe sur* $[a, a + \eta(b, a)]$ *où* $\ell > 1$ *et* $p, q > 0$, *alors nous avons*

$$\begin{aligned}
&\int_a^{a+\eta(b,a)} (x-a)^p(a+\eta(b,a)-x)^q f(x)dx \\
\leq\ & \eta(b,a)^{p+q+1}\beta(p+1,q+1)\left(|f(a)|^\ell+|f(b)|^\ell\right),
\end{aligned}$$

où $\beta(x, y)$ *est la fonction bêta d'Euler.*

Preuve. Utilisons le Lemme 1.2, la valeur absolue, l'inégalité de la moyenne et la

P-préinvexité de $|f|^{\ell}$ nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\int_a^{a+\eta(b,a)} (x-a)^p(a+\eta(b,a)-x)^q f(x)dx \\
\leq\ & \eta(b,a)^{p+q+1}\int_0^1 (1-t)^q t^p \left|f(a+t\eta(b,a))\right| dt \\
\leq\ & \eta(b,a)^{p+q+1}\left[\int_0^1 (1-t)^q t^p dt\right]^{\frac{\ell-1}{\ell}}\left[\int_0^1 (1-t)^q t^p \left|f(a+t\eta(b,a))\right|^{\ell} dt\right]^{\frac{1}{\ell}} \\
=\ & \eta(b,a)^{p+q+1}\left[\beta(p+1,q+1)\right]^{\frac{\ell-1}{\ell}}\left[\left(|f(a)|^{\ell}+|f(b)|^{\ell}\right)\beta(p+1,q+1)\right]^{\frac{1}{\ell}} \\
=\ & \eta(b,a)^{p+q+1}\beta(p+1,q+1)\left(|f(a)|^{\ell}+|f(b)|^{\ell}\right)^{\frac{1}{\ell}}.
\end{aligned}$$

La preuve est ainsi achevée. ■

2.2.2 Inégalité de Gauss-Jacobi pour les fonctions préquasi-invexe

Théorème 2.12 ([1]) *Soit* $f : [a, a+\eta(b,a)] \subset K \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* $[a, a+\eta(b,a)]$ *telle que* $f \in L^1([a, a+\eta(b,a)])$ *avec* $\eta(b,a) > 0$. *Si* $|f|$ *est préquasi-invexe sur* $[a, a+\eta(b,a)]$, *alors nous avons*

$$\begin{aligned}
&\int_a^{a+\eta(b,a)} (x-a)^p(a+\eta(b,a)-x)^q f(x)dx \\
\leq\ & \eta(b,a)^{p+q+1}\beta(p+1,q+1)\max\left\{|f(a)|, |f(b)|\right\},
\end{aligned}$$

où $\beta(x,y)$ *est la fonction bêta d'Euler.*

Preuve. Utilisons le Lemme 1.2, la valeur absolue et la préquasi-invexité de $|f|$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\int_a^{a+\eta(b,a)} (x-a)^p(a+\eta(b,a)-x)^q f(x)dx \\
\leq\ & \eta(b,a)^{p+q+1} \int_0^1 (1-t)^q t^p \left| f(a+t\eta(b,a)) \right| dt \\
\leq\ & \eta(b,a)^{p+q+1} \max\left\{ |f(a)|, |f(b)| \right\} \int_0^1 (1-t)^q t^p dt \\
=\ & \eta(b,a)^{p+q+1} \beta(p+1,q+1) \max\left\{ |f(a)|, |f(b)| \right\},
\end{aligned}$$

qui est le résultat désiré. ■

Théorème 2.13 ([1]) *Soit $f : [a, a+\eta(b,a)] \subset K \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, a+\eta(b,a)]$ telle que $f \in L^1([a, a+\eta(b,a)])$ avec $\eta(b,a) > 0$. Si $|f|^{\frac{k}{k-1}}$ est préquasi-invexe sur $[a, a+\eta(b,a)]$ où $k > 1$ et $p, q > 0$, alors nous avons*

$$\begin{aligned}
&\int_a^{a+\eta(b,a)} (x-a)^p(a+\eta(b,a)-x)^q f(x)dx \\
\leq\ & \eta(b,a)^{p+q+1} \left[\beta(kp+1,kq+1)\right]^{\frac{1}{k}} \max\left\{ |f(a)|^{\frac{k}{k-1}}, |f(b)|^{\frac{k}{k-1}} \right\},
\end{aligned}$$

où $\beta(x,y)$ est la fonction bêta d'Euler.

Preuve. Utilisons le Lemme 1.2, la valeur absolue, l'inégalité de Hölder et la préquasi-invexité de $|f|^{\frac{k}{k-1}}$ nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\int_a^{a+\eta(b,a)} (x-a)^p(a+\eta(b,a)-x)^q f(x)dx \\
\leq\ & \eta(b,a)^{p+q+1} \left[\int_0^1 (1-t)^{qk} t^{pk} dt\right]^{\frac{1}{k}} \left[\int_0^1 \left| f(a+t\eta(b,a)) \right|^{\frac{k}{k-1}} dt\right]^{\frac{k-1}{k}} \\
=\ & \eta(b,a)^{p+q+1} \left[\beta(kp+1,kq+1)\right]^{\frac{1}{k}} \left[\max\left\{ |f(a)|^{\frac{k}{k-1}}, |f(b)|^{\frac{k}{k-1}} \right\}\right]^{\frac{k-1}{k}}.
\end{aligned}$$

La preuve est ainsi achevée. ■

Théorème 2.14 ([1]) *Soit $f : [a, a+\eta(b,a)] \subset K \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur*

$[a, a+\eta(b,a)]$ *telle que* $f \in L^1([a, a+\eta(b,a)])$ *avec* $\eta(b,a) > 0$. *Si* $|f|^\ell$ *est préquasi-invexe sur* $[a, a+\eta(b,a)]$ *où* $\ell > 1$ *et* $p, q > 0$, *alors nous avons*

$$\begin{aligned} & \int_a^{a+\eta(b,a)} (x-a)^p (a+\eta(b,a)-x)^q f(x)dx \\ \leq \; & \eta(b,a)^{p+q+1} \beta(p+1, q+1) \max\left\{|f(a)|^\ell, |f(b)|^\ell\right\}, \end{aligned}$$

où $\beta(x,y)$ *est la fonction bêta d'Euler.*

Preuve. Utilisons le Lemme 1.2, la valeur absolue, l'inégalité de la moyenne et la P préinvexité de $|f|^\ell$ nous obtenons

$$\begin{aligned} & \int_a^{a+\eta(b,a)} (x-a)^p (a+\eta(b,a)-x)^q f(x)dx \\ \leq \; & \eta(b,a)^{p+q+1} \int_0^1 (1-t)^q t^p \left|f(a+t\eta(b,a))\right| dt \\ \leq \; & \eta(b,a)^{p+q+1} \left[\int_0^1 (1-t)^q t^p dt\right]^{\frac{\ell-1}{\ell}} \left[\int_0^1 (1-t)^q t^p \left|f(a+t\eta(b,a))\right|^\ell dt\right]^{\frac{1}{\ell}} \\ = \; & \eta(b,a)^{p+q+1} \left[\beta(p+1,q+1)\right]^{\frac{\ell-1}{\ell}} \left[\beta(p+1,q+1) \max\left\{|f(a)|^\ell, |f(b)|^\ell\right\}\right]^{\frac{1}{\ell}} \\ = \; & \eta(b,a)^{p+q+1} \beta(p+1,q+1) \left(\max\left\{|f(a)|^\ell, |f(b)|^\ell\right\}\right)^{\frac{1}{\ell}}. \end{aligned}$$

La preuve est ainsi achevée. ■

2.2.3 Inégalité de Gauss-Jacobi pour les fonctions s-préinvexe

Théorème 2.15 ([14]) *Soit* $f : [a, a+\eta(b,a)] \subset [0,\infty) \to [0,\infty)$ *une fonction intégrable sur* $[a, a+\eta(b,a)]$ *avec* $\eta(b,a) > 0$ *si* f *est* s*-préinvexe au second sens pour un certain nombre fixé* $s \in (0,1]$ *et* $p, q > 0$, *alors*

$$\begin{aligned} & \int_a^{a+\eta(b,a)} (x-a)^p (a+\eta(b,a)-x)^q f(x)dx \\ \leq \; & (\eta(b,a))^{p+q+1} \left[f(a)\beta(p+1, q+s+1) + f(b)\beta(p+s+1, q+1)\right], \end{aligned}$$

où $\beta(x, y)$ est la fonction bêta d'Euler.

Preuve. Partons du lemme 1.2, utilisons la s-préinvexité de f, nous obtenons

$$\begin{aligned}
& \int_a^{a+\eta(b,a)} (x-a)^p (a+\eta(b,a)-x)^q f(x)dx \\
= & \ (\eta(b,a))^{p+q+1} \int_0^1 (1-t)^q t^p f(a+t\eta(b,a))dt \\
\leq & \ (\eta(b,a))^{p+q+1} \left(f(a) \int_0^1 (1-t)^{q+s} t^p dt + f(b) \int_0^1 (1-t)^q t^{p+s} dt \right) \\
= & \ (\eta(b,a))^{p+q+1} \left[f(a)\beta(p+1, q+s+1) + f(b)\beta(p+s+1, q+1) \right],
\end{aligned}$$

qui est les résultat souhaité. ■

Théorème 2.16 ([14]) *Soit $f : [a, a+\eta(b,a)] \subset [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ une fonction intégrable sur $[a, a+\eta(b,a)]$ avec $\eta(b,a) > 0$ et $\lambda > 0$. Si $|f|^\lambda$est s-préinvexe au second sens pour un certain nombre fixé $s \in (0,1]$ où $\lambda > 1$et $p, q > 0$, alors*

$$\begin{aligned}
& \int_a^{a+\eta(b,a)} (x-a)^p (a+\eta(b,a)-x)^q f(x)dx \\
\leq & \ (\eta(b,a))^{p+q+1} (\beta(p+1, q+1))^{1-\frac{1}{\lambda}} \\
& \times \left(|f(a)|^\lambda \beta(p+1, q+s+1) + |f(b)|^\lambda \beta(p+s+1, q+1) \right)^{\frac{1}{\lambda}},
\end{aligned}$$

où $\beta(x, y)$ est la fonction bêta d'Euler.

Preuve. Partons du Lemme 1.2, la valeur absolue, ensuite faisons à l'inégalité de

Hölder et la s-préinvexité de $|f|^{\lambda}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\int_a^{a+\eta(b,a)} (x-a)^p(a+\eta(b,a)-x)^q f(x)dx \\
\leq\; & \eta(b,a)^{p+q+1}\left(\int_0^1 (1-t)^q t^p dt\right)^{1-\frac{1}{\lambda}}\left(\int_0^1 (1-t)^q t^p \left|f(a+t\eta(b,a))\right|^{\lambda} dt\right)^{\frac{1}{\lambda}} \\
=\; & \eta(b,a)^{p+q+1}\left(\beta(p+1,q+1)\right)^{1-\frac{1}{\lambda}}\left(\int_0^1 (1-t)^q t^p \left|f(a+t\eta(b,a))\right|^{\lambda} dt\right)^{\frac{1}{\lambda}} \\
\leq\; & \eta(b,a)^{p+q+1}\left(\beta(p+1,q+1)\right)^{1-\frac{1}{\lambda}} \\
& \times\left(|f(a)|^{\lambda}\int_0^1 (1-t)^{q+s}t^p dt + |f(b)|^{\lambda}\int_0^1 (1-t)^q t^{p+s} dt\right)^{\frac{1}{\lambda}} \\
=\; & \eta(b,a)^{p+q+1}\left(\beta(p+1,q+1)\right)^{1-\frac{1}{\lambda}} \\
& \times\left(|f(a)|^{\lambda}\beta(p+1,q+s+1) + |f(b)|^{\lambda}\beta(p+s+1,q+1)\right)^{\frac{1}{\lambda}}.
\end{aligned}$$

La preuve est ainsi achevée. ■

Théorème 2.17 ([14]) *Soit $f : [a, a+\eta(b,a)] \subset [0,\infty) \to [0,\infty)$ une fonction intégrable sur $[a, a+\eta(b,a)]$ avec $\eta(b,a) > 0$ et $\lambda > 0$. Si $|f|^{\lambda}$est s-préinvexe au second sens pour un certain nombre fixé $s \in (0,1]$ où $\lambda > 1$ et $p, q > 0$, alors*

$$\begin{aligned}
&\int_a^{a+\eta(b,a)} (x-a)^p(a+\eta(b,a)-x)^q f(x)dx \\
\leq\; & \frac{(\eta(b,a))^{p+q+1}}{(s+1)^{\frac{1}{\lambda}}}\left(\beta\left(\tfrac{p\lambda}{\lambda-1}+1, \tfrac{q\lambda}{\lambda-1}+1\right)\right)^{1-\frac{1}{\lambda}}\left(|f(a)|^{\lambda}+|f(b)|^{\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}},
\end{aligned}$$

où $\beta(x,y)$ est la fonction bêta d'Euler.

Preuve. Partons du Lemme 1.2, la valeur absolue, ensuite faisons à l'inégalité de

Hölder et la s-préinvexité de $|f|^{\lambda}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\int_a^{a+\eta(b,a)} (x-a)^p(a+\eta(b,a)-x)^q f(x)dx \\
\leq\ & (\eta(b,a))^{p+q+1}\left(\int_0^1 (1-t)^{\frac{q\lambda}{\lambda-1}} t^{\frac{p\lambda}{\lambda-1}} dt\right)^{1-\frac{1}{\lambda}} \left(\int_0^1 |f(a+t\eta(b,a))|^{\lambda} dt\right)^{\frac{1}{\lambda}} \\
\leq\ & (\eta(b,a))^{p+q+1}\left(\beta(\tfrac{p\lambda}{\lambda-1}+1,\tfrac{q\lambda}{\lambda-1}+1)\right)^{1-\frac{1}{\lambda}} \\
& \times\left(\int_0^1 (1-t)^s |f(a)|^{\lambda} + |f(b)|^{\lambda} t^s dt\right)^{\frac{1}{\lambda}} \\
=\ & \tfrac{(\eta(b,a))^{p+q+1}}{(s+1)^{\frac{1}{\lambda}}}\left(\beta(\tfrac{p\lambda}{\lambda-1}+1,\tfrac{q\lambda}{\lambda-1}+1)\right)^{1-\frac{1}{\lambda}}\left(|f(a)|^{\lambda}+|f(b)|^{\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}.
\end{aligned}$$

La preuve est ainsi achevée. ■

Corollaire 2.4 ([14]) *Sous les hypothèses du Théorème 2.17, nous avons*

$$\begin{aligned}
&\int_a^{a+\eta(b,a)} (x-a)^p(a+\eta(b,a)-x)^q f(x)dx \\
\leq\ & \tfrac{(\eta(b,a))^{p+q+1}}{(s+1)^{\frac{1}{\lambda}}}\left(\beta(\tfrac{p\lambda}{\lambda-1}+1,\tfrac{q\lambda}{\lambda-1}+1)\right)^{1-\frac{1}{\lambda}}(|f(a)|+|f(b)|).
\end{aligned}$$

Preuve. D'après le Théorème 2.17, nous avons

$$\begin{aligned}
&\int_a^{a+\eta(b,a)} (x-a)^p(a+\eta(b,a)-x)^q f(x)dx \\
\leq\ & \tfrac{(\eta(b,a))^{p+q+1}}{(s+1)^{\frac{1}{\lambda}}}\left(\beta(\tfrac{p\lambda}{\lambda-1}+1,\tfrac{q\lambda}{\lambda-1}+1)\right)^{1-\frac{1}{\lambda}}\left(|f(a)|^{\lambda}+|f(b)|^{\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Faisons appel au Lemme 1.3, l'inégalité (2.17) donne

$$\begin{aligned}
&\int_a^{a+\eta(b,a)} (x-a)^p(a+\eta(b,a)-x)^q f(x)dx \\
\leq\ & \tfrac{(\eta(b,a))^{p+q+1}}{(s+1)^{\frac{1}{\lambda}}}\left(\beta(\tfrac{p\lambda}{\lambda-1}+1,\tfrac{q\lambda}{\lambda-1}+1)\right)^{1-\frac{1}{\lambda}}(|f(a)|+|f(b)|),
\end{aligned}$$

qui est le résultat désiré. ■

Chapitre 3

Nouveaux résultats

Dans ce chapitre nous allons voir des nouvelles estimations de l'inégalité de Gauss-Jacobi ces derniers résultats ont fait l'objet de la publication internationale suivante :

B. Meftah and N. Aouissi, New integral inequalities for (s, m)- and (α, m)-preinvex functions. Revista De Matemáticas De la Universidad del Atlántico Páginas.

3.1 Inégalité de Gauss-Jacobi pour les fonctions (s, m)-préinvexe

Théorème 3.1 *Soit $f : [a, a + \eta(b, a)] \subset [0, \infty) \to [0, \infty)$ une fonction intégrable sur $[a, a + \eta(b, a)]$ telle que $\eta(b, a) > 0$. Si f est (s, m)-préinvexe au second sens pour des certains nombres fixés $s, m \in (0, 1]$ et $p, q > 0$, alors*

$$\begin{aligned}
&\int_a^{a+\eta(b,a)} (x-a)^p (a+\eta(b,a)-x)^q f(x)\,dx \\
\leq\ & (\eta(b,a))^{p+q+1} \left(f(a)\beta(p+1, q+s+1) + \ mf\left(\tfrac{b}{m}\right)\beta(p+s+1, q+1) \right),
\end{aligned}$$

où $\beta(.,.)$ est la fonction bêta d'Euler.

Preuve. Du Lemme 1.2, et la (s,m)-preinvexité de f, nous avons

$$\begin{aligned}
&\int_a^{a+\eta(b,a)} (x-a)^p (a+\eta(b,a)-x)^q f(x)\,dx \\
&= (\eta(b,a))^{p+q+1} \int_0^1 (1-t)^q t^p f(a+t\eta(b,a))\,dt \\
&\leq (\eta(b,a))^{p+q+1} \left(f(a) \int_0^1 t^p (1-t)^{q+s}\,dt + m f\left(\tfrac{b}{m}\right) \int_0^1 t^{p+s} (1-t)^q\,dt \right) \\
&= (\eta(b,a))^{p+q+1} \left(f(a)\beta(p+1,q+s+1) + \ m f\left(\tfrac{b}{m}\right) \beta(p+s+1,q+1) \right),
\end{aligned}$$

qui est les résultat souhaité. ■

Remarque 3.1 *Le Théorème 3.1 sera réduit au Théorème 2.2 de [14], si nous prenons* $m=1$.

Théorème 3.2 *Soit* $f : [a, a+\eta(b,a)] \subset [0,\infty) \to [0,\infty)$ *une fonction intégrable sur* $[a, a+\eta(b,a)]$ *où* $\eta(b,a) > 0$ *et soit* $\lambda > 1$. *Si* $|f|^\lambda$*est* (s,m)*-préinvexe au second sens pour des certains nombres fixés* $s, m \in (0,1]$ *et* $p, q > 0$, *alors*

$$\begin{aligned}
&\int_a^{a+\eta(b,a)} (x-a)^p (a+\eta(b,a)-x)^q f(x)\,dx \\
&\leq (\eta(b,a))^{p+q+1} (\beta(p+1,q+1))^{1-\frac{1}{\lambda}} \\
&\quad \times \left(\beta(p+1,q+s+1) |f(a)|^\lambda + m\beta(p+s+1,q+1) \left|f\left(\tfrac{b}{m}\right)\right|^\lambda \right)^{\frac{1}{\lambda}},
\end{aligned}$$

où $\beta(.,.)$ *est la fonction bêta d'Euler.*

Preuve. D'aprés le Lemme 1.2, les propriétés du module, l'inégalité de la moyenne, et la (s,m)-préinvexité de $|f|^{\lambda}$, on a

$$\begin{aligned}
&\int_{a}^{a+\eta(b,a)} (x-a)^{p}(a+\eta(b,a)-x)^{q} f(x)\,dx \\
\leq\ & (\eta(b,a))^{p+q+1}\left(\int_{0}^{1}(1-t)^{q}t^{p}dt\right)^{1-\frac{1}{\lambda}}\left(\int_{0}^{1}(1-t)^{q}t^{p}\left|f(a+t\eta(b,a))\right|^{\lambda}dt\right)^{\frac{1}{\lambda}} \\
\leq\ & (\eta(b,a))^{p+q+1}\left(\beta(p+1,q+1)\right)^{1-\frac{1}{\lambda}}. \\
& \times\left(\int_{0}^{1}(1-t)^{q}t^{p}\left((1-t)^{s}|f(a)|^{\lambda}+mt^{s}\left|f\left(\tfrac{b}{m}\right)\right|^{\lambda}\right)dt\right)^{\frac{1}{\lambda}} \\
=\ & (\eta(b,a))^{p+q+1}\left(\beta(p+1,q+1)\right)^{1-\frac{1}{\lambda}} \\
& \times\left(|f(a)|^{\lambda}\int_{0}^{1}t^{p}(1-t)^{q+s}dt+m\left|f\left(\tfrac{b}{m}\right)\right|^{\lambda}\int_{0}^{1}(1-t)^{q}t^{p+s}dt\right)^{\frac{1}{\lambda}} \\
=\ & (\eta(b,a))^{p+q+1}\left(\beta(p+1,q+1)\right)^{1-\frac{1}{\lambda}} \\
& \times\left(\beta(p+1,q+s+1)|f(a)|^{\lambda}+m\beta(p+s+1,q+1)\left|f\left(\tfrac{b}{m}\right)\right|^{\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}},
\end{aligned}$$

qui est les résultat souhaité. ■

Remarque 3.2 *Le Théorème 3.2 sera réduit au Théorème 2.3 de [14], si nous prenons* $m=1$.

Théorème 3.3 *Supposons que toutes les hypothèses du Théorème 3.2 sont satisfaites, alors nous avons*

$$\begin{aligned}
&\int_{a}^{a+\eta(b,a)} (x-a)^{p}(a+\eta(b,a)-x)^{q} f(x)\,dx \\
\leq\ & (\eta(b,a))^{p+q+1}\left(\beta\left(\tfrac{p\lambda}{\lambda-1}+1,\tfrac{q\lambda}{\lambda-1}+1\right)\right)^{1-\frac{1}{\lambda}}\left(\frac{|f(a)|^{\lambda}+m\left|f\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{\lambda}}{s+1}\right)^{\frac{1}{\lambda}},
\end{aligned}$$

où $\beta(.,.)$ est la fonction bêta d'Euler.

Preuve. D'après le Lemme 1.2, les propriétés du module, l'inégalité de Hölder et la (s,m)-preinvexité de $|f|^{\lambda}$, alors

$$\begin{aligned}
&\int_a^{a+\eta(b,a)} (x-a)^p (a+\eta(b,a)-x)^q f(x)\,dx \\
\leq\; & (\eta(b,a))^{p+q+1} \left(\int_0^1 (1-t)^{\frac{q\lambda}{\lambda-1}} t^{\frac{p\lambda}{\lambda-1}} dt \right)^{1-\frac{1}{\lambda}} \left(\int_0^1 |f(a+t\eta(b,a))|^{\lambda} dt \right)^{\frac{1}{\lambda}} \\
\leq\; & (\eta(b,a))^{p+q+1} \left(\beta\left(\tfrac{p\lambda}{\lambda-1}+1, \tfrac{q\lambda}{\lambda-1}+1\right)\right)^{1-\frac{1}{\lambda}} \\
& \times \left(\int_0^1 (1-t)^s |f(a)|^{\lambda} + mt^s \left|f\left(\tfrac{b}{m}\right)\right|^{\lambda} dt \right)^{\frac{1}{\lambda}} \\
=\; & (\eta(b,a))^{p+q+1} \left(\beta\left(\tfrac{p\lambda}{\lambda-1}+1, \tfrac{q\lambda}{\lambda-1}+1\right)\right)^{1-\frac{1}{\lambda}} \left(\frac{|f(a)|^{\lambda}+m\left|f\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{\lambda}}{s+1} \right)^{\frac{1}{\lambda}},
\end{aligned}$$

qui est les résultat souhaité. ■

Remarque 3.3 *Le Théorème 3.3 sera réduit au Théorème 2.4 de* [14], *si nous prenons* $m=1$.

3.2 Inégalité de Gauss-Jacobi pour les fonctions (α,m)-préinvexe

Théorème 3.4 *Soit* $f : [a, a+\eta(b,a)] \subset [0,\infty) \to [0,\infty)$ *une fonction intégrable sur*$[a, a+\eta(b,a)]$ *avec* $\eta(b,a) > 0$. *Si* f *est* (α,m)*-préinvexe au premier sens pour des certains nombres fixés* $\alpha, m \in (0,1]$ *et* $p,q>0$, *alors*

$$\begin{aligned}
&\int_a^{a+\eta(b,a)} (x-a)^p (a+\eta(b,a)-x)^q f(x)\,dx \leq (\eta(b,a))^{p+q+1} \\
&\times \left(\beta(p+1,q+1) - \beta(p+\alpha+1,q+1) f(a) + \; mf\left(\tfrac{b}{m}\right) \beta(p+\alpha+1,q+1)\right),
\end{aligned}$$

où $\beta(.,.)$ est la fonction bêta d'Euler.

Preuve. D'après le Lemme 1.2, et la (α, m)-preinvexité de f, alors on a

$$\begin{aligned}
&\int_a^{a+\eta(b,a)} (x-a)^p (a+\eta(b,a)-x)^q f(x)\,dx \\
= &\ (\eta(b,a))^{p+q+1} \int_0^1 (1-t)^q t^p f(a+t\eta(b,a))\,dt \\
\leq &\ (\eta(b,a))^{p+q+1} \\
&\times \left(f(a) \left(\int_0^1 t^p (1-t)^q\,dt - \int_0^1 t^{p+\alpha} (1-t)^q\,dt \right) + mf\left(\tfrac{b}{m}\right) \int_0^1 (1-t)^q t^{p+\alpha} dt \right) \\
= &\ (\eta(b,a))^{p+q+1} \\
&\times \left(\beta(p+1,q+1) - \beta(p+\alpha+1,q+1) f(a) + \ mf\left(\tfrac{b}{m}\right) \beta(p+\alpha+1,q+1)\right) \\
= &\ (\eta(b,a))^{p+q+1} \\
&\times \left(\beta(p+1,q+1) - \beta(p+\alpha+1,q+1) f(a) + \ mf\left(\tfrac{b}{m}\right) \beta(p+\alpha+1,q+1)\right),
\end{aligned}$$

qui est les résultat souhaité. ■

Théorème 3.5 *Soit $f : [a, a+\eta(b,a)] \subset [0,\infty) \to [0,\infty)$une fonction intégrable sur $[a, a+\eta(b,a)]$ avec $\eta(b,a) > 0$ et soit $\lambda > 1$. Si $|f|^\lambda$ est préinvexe au premier sens pour des certains nombres fixés $\alpha, m \in (0,1]$ et $p, q > 0$, alors*

$$\begin{aligned}
&\int_a^{a+\eta(b,a)} (x-a)^p (a+\eta(b,a)-x)^q f(x)\,dx \leq (\eta(b,a))^{p+q+1} (\beta(q+1,p+1))^{1-\frac{1}{\lambda}} \\
&\times \left((\beta(p+1,q+1) - \beta(p+\alpha+1,q+1)) |f(a)|^\lambda + m\beta(p+\alpha+1,q+1) \left|f\left(\tfrac{b}{m}\right)\right|^\lambda \right)^{\frac{1}{\lambda}},
\end{aligned}$$

où $\beta(.,.)$ est la fonction bêta d'Euler.

Preuve. Du Lemme 1.2, des propriétés du module, l'inégalité de la moyenne, et la

(α, m)-preinvexité de $|f|^{\lambda}$, on a

$$\begin{aligned}
&\int_{a}^{a+\eta(b,a)} (x-a)^{p}(a+\eta(b,a)-x)^{q} f(x)\,dx \\
\leq\ & (\eta(b,a))^{p+q+1}\left(\int_{0}^{1}(1-t)^{q}t^{p}dt\right)^{1-\frac{1}{\lambda}}\left(\int_{0}^{1}(1-t)^{q}t^{p}\left|f(a+t\eta(b,a))\right|^{\lambda}dt\right)^{\frac{1}{\lambda}} \\
\leq\ & (\eta(b,a))^{p+q+1}(\beta(p+1,q+1))^{1-\frac{1}{\lambda}} \\
&\times\left(\left(\int_{0}^{1}(1-t)^{q}t^{p}dt-\int_{0}^{1}(1-t)^{q}t^{p+\alpha}dt\right)|f(a)|^{\lambda}+m\left|f\left(\tfrac{b}{m}\right)\right|^{\lambda}\int_{0}^{1}(1-t)^{q}t^{p+\alpha}dt\right)^{\frac{1}{\lambda}} \\
=\ & (\eta(b,a))^{p+q+1}(\beta(q+1,p+1))^{1-\frac{1}{\lambda}} \\
&\times\left((\beta(p+1,q+1)-\beta(p+\alpha+1,q+1))|f(a)|^{\lambda}+m\beta(p+\alpha+1,q+1)\left|f\left(\tfrac{b}{m}\right)\right|^{\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}
\end{aligned}$$

qui est les résultat souhaité. ∎

Théorème 3.6 *Supposons que toutes les hypothèses du Théorème 3.5 sont satisfaites, alors nous avons*

$$\begin{aligned}
&\int_{a}^{a+\eta(b,a)} (x-a)^{p}(a+\eta(b,a)-x)^{q} f(x)\,dx \\
\leq\ & (\eta(b,a))^{p+q+1}\left(\beta\left(\tfrac{p\lambda}{\lambda-1}+1,\tfrac{q\lambda}{\lambda-1}+1\right)\right)^{1-\frac{1}{\lambda}} \\
&\times\left(\tfrac{\alpha}{\alpha+1}|f(a)|^{\lambda}+m\tfrac{1}{\alpha+1}\left|f\left(\tfrac{a}{m}\right)\right|^{\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}},
\end{aligned}$$

où $\beta(.,.)$ est la fonction bêta d'Euler.

Preuve. Du Lemme 1.2, des propriétés du module, l'inégalité de Hölder, et la (α, m)-

preinvexité de $|f|^{\lambda}$, on a

$$\begin{aligned}
&\int_{a}^{a+\eta(b,a)} (x-a)^{p} (a+\eta(b;a)-x)^{q} f(x)\,dx \\
\leq\ & (\eta(b,a))^{p+q+1} \left(\int_{0}^{1} (1-t)^{\frac{q\lambda}{\lambda-1}} t^{\frac{p\lambda}{\lambda-1}} dt \right)^{1-\frac{1}{\lambda}} \left(\int_{0}^{1} |f(a+t\eta(b,a))|^{\lambda} dt \right)^{\frac{1}{\lambda}} \\
\leq\ & (\eta(b,a))^{p+q+1} \left(\beta\left(\tfrac{p\lambda}{\lambda-1}+1, \tfrac{q\lambda}{\lambda-1}+1 \right) \right)^{1-\frac{1}{\lambda}} \\
& \times \left(\int_{0}^{1} (1-t^{\alpha}) |f(a)|^{\lambda} + m t^{\alpha} \left| f\left(\tfrac{a}{m}\right) \right|^{\lambda} dt \right)^{\frac{1}{\lambda}} \\
=\ & (\eta(b,a))^{p+q+1} \left(\beta\left(\tfrac{p\lambda}{\lambda-1}+1, \tfrac{q\lambda}{\lambda-1}+1 \right) \right)^{1-\frac{1}{\lambda}} \\
& \times \left(\tfrac{\alpha}{\alpha+1} |f(a)|^{\lambda} + m\tfrac{1}{\alpha+1} \left| f\left(\tfrac{a}{m}\right) \right|^{\lambda} \right)^{\frac{1}{\lambda}},
\end{aligned}$$

qui est les résultat souhaité. ■

Bibliographie

[1] I. Ahmad, Integral inequalities under beta function and preinvex type functions, SpringerPlus 5 (2016) 1–6.

[2] J. Chen and X. Huang, Some integral inequalities via $(h-(\alpha,m))$-logarithmically convexity. J. Comput. Anal. Appl. 20 (2016), no. 2, 374–380.

[3] P. J. Davis and P. Rabinowitz, Methods of numerical integration. Computer Science and Applied Mathematics. Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers]\ New York-London, 1975.

[4] S. S. Dragomir, J. E. Pečarić and L. E. Persson, Some inequalities of Hadamard type. Soochow J. Math. 21 (1995), no. 3, 335–341.

[5] D. A. Ion, Some estimates on the Hermite-Hadamard inequality through quasi-convex functions. An. Univ. Craiova Ser. Mat. Inform. 34 (2007), 83–88.

[6] İ. İşcan, M. Aydin and S. Dikmenoglu, New integral inequalities via harmonically convex functions. Mathematics and Statistics 3(2015), no. 5, 134-140.

[7] A. Kashuri and R. Liko, Hermite-Hadamard type fractional integral inequalities for generalized (r,s,m,φ)-preinvex functions. European Journal of Pure and Applied Mathematics. 10 (2017), no. 3, 495-505.

[8] A. Kashuri and R. Liko, Generalizations of Hermite-Hadamard and Ostrowski type inequalities for MT_m-preinvex functions. Proyecciones 36 (2017), no. 1, 45–80.

[9] M. A. Latif and M. Shoaib, Hermite-Hadamard type integral inequalities for differentiable m-preinvex and (α, m)-preinvex functions. J. Egyptian Math. Soc. 23 (2015), no. 2, 236–241.

[10] W. Liu, New integral inequalities via (α, m)-convexity and quasi-convexity. Hacet. J. Math. Stat. 42 (2013), no. 3, 289–297.

[11] W. Liu, New integral inequalities involving beta function via P-convexity, Miskolc Math. Notes 15 (2014), no. 2, 585–591.

[12] B. Meftah, Hermite-Hadamard's inequalities for functions whose first derivatives are (s, m)-preinvex in the second sense, JNT, 10 (2016), 54–65.

[13] B. Meftah, New integral inequalities via strongly convexity. Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications. 5(2017), no. 2, 266-270.

[14] B. Meftah, New integral inequalities for s-preinvex functions. Int. J. Nonlinear Anal. Appl, 8 (2017), no. 1, 331-336.

[15] B. Meftah and **N.Aouissi**, New integral inequalities for (s, m)- and (α, m)-preinvex functions. Revista De Matemáticas De la Universidad del Atlántico Páginas. (Accepté).

[16] V. G. Mihesan, A generalization of the convexity, Seminar on Functional Equations, Approx. Convex, Cluj-Napoca, 1993. (Romania).

[17] D. S. Mitrinović, J. E. Pecarić and A. M. Fink, Classical and new inequalities in analysis. Mathematics and its Applications, 61. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1993.

[18] M. Muddassar and A. Ali, New integral inequalities through generalized convex functions. Punjab Univ. J. Math. (Lahore) 46 (2014), no. 2, 47–51.

[19] M. A. Noor, K. I. Noor, M. U. Awan and J. Li, On Hermite-Hadamard inequalities for h-preinvex functions. Filomat 28 (2014), no. 7, 1463–1474.

[20] M. A. Noor, K. I. Noor, S. Iftikhar and M. U. Awan, Strongly generalized harmonic convex functions and integral inequalities. Journal of Mathematical Analysis. 7 (2016), no. 3, 66–77.

[21] M. A. Noor, K. I. Noor and S. Iftikhar. Harmonic Beta-Preinvex Functions and Inequalities. International Journal of Analysis and Applications, 13(2017), no. 2, 144-160.

[22] M. E. Özdemir, E. Set and M. Alomari, Integral inequalities via several kinds of convexity. Creat. Math. Inform. 20 (2011), no. 1, 62–73.

[23] J. E. Pečarić, F. Proschan and Y. L. Tong, Convex functions, partial orderings, and statistical applications. Mathematics in Science and Engineering, 187. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1992.

[24] R. Pini, Invexity and generalized convexity. Optimization 22 (1991), no. 4, 513–525.

[25] M. Saad, Analyse numérique. Ecole Centrale de Nantes, Dépt. Info/Math. Année universitaire 2011-2012. 135p.

[26] G. Toader, Some generalizations of the convexity. Proceedings of the colloquium on approximation and optimization (Cluj-Napoca, 1985), 329–338, Univ. Cluj-Napoca, Cluj-Napoca, 1985.

[27] Y. Wang, S-H. Wang and F. Qi, Simpson type integral inequalities in which the power of the absolute value of the first derivative of the integrand is s-preinvex.Facta Univ. Ser. Math. Inform. 28 (2013), no. 2, 151–159.

[28] T. Weir and B. Mond, Pre-invex functions in multiple objective optimization. J. Math. Anal. Appl. 136 (1988), no. 1, 29–38.