

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche  
Scientifique  
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
et des Sciences de la Matière  
Département de Mathématiques



17/10.259

### Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de  
Master en Mathématiques  
Option : Analyse mathématique appliquée



Par :

NAIDJA HEDDA

### Intitulé

Résolution d'une équation intégral-différentielles avec  
la méthode de noyau reproduisant

Dirigé par :

BENDJAZIA NASSIMA

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. Mehri Allaoua	MCB	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. Bendjazia Nassima	MCB	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. Belhiche Hanene	MCB	Univ-Guelma

Session Juin 2018

# Table des matières

0.1	Introduction . . . . .	5
<b>1</b>	<b>Rappels et notions fondamentales</b>	<b>8</b>
1.1	Espaces de Hilbert . . . . .	9
1.2	La fonction de Dirac . . . . .	11
1.3	Méthode à noyau reproduisant . . . . .	12
1.3.1	L'espace à noyau reproduisant $W_2^m[a, b]$ . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Solution analytique et approchée</b>	<b>19</b>
2.1	Introduction . . . . .	20
2.2	Position du problème . . . . .	21
2.3	Espaces de Hilbert à noyau reproduisant . . . . .	22
2.4	La solution exacte et approchée . . . . .	28
2.4.1	Méthode itérative . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Solution numérique</b>	<b>36</b>

## **Remerciements**

*Avant toute considération, je remercie le GRAND DIEU le tout puissant qui, m'a aidé pour achever ce travail.*

*Je remercie premièrement mon directrice de mémoire, Madame **Bendjazia Nassima**, pour son soutien scientifique, ainsi que pour sa compétence et les bonnes orientations, ses précieux conseils mais aussi ses encouragements. Je lui exprime toute ma gratitude.*

*Je remercie messieurs les membres de jury : qui ont accepté de participer au jury de soutenance.*

*Je souhaite présenter mes remerciements à mes enseignants **M. Ghat Morad** et **M. Ouanes Nawel** pour leurs aides.*

*Enfin, je remercie toute personne ayant participé à réaliser ce travail.*

## *Dédicaces*

*Merci Allah (mon dieu) de m'avoir donné la capacité d'écrire et de réfléchir, la force d'y croire, la patience d'aller jusqu'au bout du rêve et le bonheur de lever mes mains vers le ciel et de dire*

*"Al hamdo li ALLAH"*

*Je dédie ce modeste travail à celle qui m'a donné la vie, le symbole de tendresse, qui s'est sacrifiée pour mon bonheur et ma réussite, à ma mère et mon père.*

*À mes adorable sours*

*À mon frère*

*À toute la grande familles Naidja*

*À mes amies*

*À tous ceux qui me sont chère*

*À tous ceux qui m'aiment*

*À tous ceux que j'aime*

*je dédie ce travail.*

## Résumé

Le but de ce memoire est l'étude d'un problème non local pour une équation intégrodifférentielle du type Volterra avec une condition intégrale. Par la méthode de noyau reproduisant dans l'espace de Hilbert, on a construit la solution approchée, par une méthode itérative, et la solution analytique est représentée sous forme de séries de Fourier. Ainsi, les solutions numériques qui sont obtenues à partir de cette méthode sont comparées aux solutions exactes. Finalement, les résultats des exemples numériques montrent que cette méthode est efficace pour ce type de problème. Tous les calculs ont été effectués en utilisant Mathematica 9.0.

**Mots clés :** Problèmes non locaux, Conditions intégrales, Méthode de Noyau reproduisant, Equation intégrodifférentielle.

## 0.1 Introduction

La modélisation mathématique de différents phénomènes conduit à des problèmes aux limites avec des conditions non locaux ou des conditions intégrales. De telles conditions se produisent lorsque les valeurs de la fonction sur la frontière sont reliées à ses valeurs à l'intérieur du domaine. Dans [11] A.A. Dezin a montré pour la première fois que pour certaines équations aux dérivées partielles dans certains domaines, le problème aux limites n'est correctement posé que seulement si les conditions utilisées sont non locales.

L'objectif de ce travail est déterminer la solution numérique d'un problème aux limites avec une condition intégrale. Plus précisément, à l'aide de la méthode de noyau reproduisant dans l'espace de Hilbert, on a trouvé la solution approchée pour un problème aux limites du second ordre d'une équation intégral-différentielle. On mentionne que l'existence et l'unicité de la solution de notre problème ont été traitées par la méthode de Rothe [2].

En outre, la méthode de noyau reproduisant dans l'espace de Hilbert est utilisée pour résoudre des équations intégral-différentielles. Dans [13] les auteurs ont développé la méthode de (RKHS) pour résoudre l'équation intégrale de Fredholm-Volterra non linéaire :

$$u'(x) + f(x)N(x, u(x)) + \int_a^b k_1(x, t)G_1(u)dt + \int_a^x k_2(x, t)G_2(u)dt = g(x), a \leq x, t \leq b,$$

avec la condition initiale

$$u(a) = \alpha,$$

où  $a, b, \alpha$  sont des constantes,  $u \in W_2^2[a, b]$  est une fonction inconnue,  $f, g \in W_2^1[a, b]$ ,  $k_1(x, t), k_2(x, t)$  sont des fonctions continues sur  $[a, b] \times [a, b]$ ,  $G_1(u), G_2(u)$  et  $N(x, u(x))$  sont des termes continus, dans  $W_2^1[a, b]$

Dans [14] la méthode de (RKHS) est appliquée pour trouver la solution numérique

de l' équation intégral-différentielle suivante :

$$u^{(4)}(x) = f(x) + \gamma u(x) + \int_a^x h(x, t) G(u(t)) dt, \quad x, t \in [a, b],$$

avec les conditions initiales

$$u(a) = \alpha_0, u'(a) = \alpha_1, u(b) = \beta_0, u'(b) = \beta_1,$$

où  $a, b, \gamma$  et  $\alpha_i, \beta_i, i = 0, 1$  sont des constantes,  $u \in W_2^5[a, b]$  est une fonction inconnue,  $f \in W_2^1[a, b]$ ,  $h(x, t)$  est une fonction continue sur  $[a, b] \times [a, b]$ ,  $G(u(t))$  est continue en terme de  $W_2^1[a, b]$ .

On mentionne aussi que cette méthode numérique est appliquée dans plusieurs travaux, dont l'objectif est de résoudre les problèmes aux limites avec des conditions intégrales tel que H. Yao [15] qui a utilisé la méthode de (RKHS) pour résoudre l'équation suivante :

$$\tau \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, t, u(x, t)),$$

avec

$$u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = 0, u(0, t) = 0,$$

$$\int_0^1 u(x, t) dx = E(t),$$

Ce memoire se compose de trois chapitres :

Dans le premier chapitre on introduit quelques notions de la théorie des espaces fonctionnels et de la théorie des opérateurs.

Dans le deuxième, on développe la méthode de noyau reproduisant dans l'espace de Hilbert pour fournir une solution approchée pour l'équation intégral-différentielle du type

Volterra suivante :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = f(x, t) + \int_0^t a(t-s) K(s, U(x, s)) ds, \quad (1)$$

pour tout  $(x, t) \in Q = (0, 1) \times (0, 1)$ , à laquelle sont jointes les conditions initiales

$$U(x, 0) = \varphi_1(x), U_t(x, 0) = \varphi_2(x), \quad (2)$$

$$U_x(0, t) = \psi(t), \quad (3)$$

et la condition intégrale

$$\int_0^1 U(x, t) dx = 0. \quad (4)$$

Où  $f, K, a, \varphi_1, \varphi_2$  et  $\psi(t)$  sont des fonctions données.

Dans le dernier chapitre, pour démontrer l'efficacité de la méthode proposée on a traité deux exemples, les résultats numériques sont représentés par des tableaux et des graphes.

# Chapitre 1

## Rappels et notions fondamentales

### Résumé

Les outils d'analyse fonctionnelle sont essentiels à l'étude des équations aux dérivées partielles, Dans ce chapitre, on rappelle les résultats fondamentaux, les définitions et les notions élémentaires qui seront utilisées dans l'étude de problème posé dans ce memoire.

## 1.1 Espaces de Hilbert

**Définition 1.1** *Un espace de Hilbert réel est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ , muni d'un produit scalaire, noté  $\langle x, y \rangle$ , qui est complet pour la norme associée  $\|x\|$ , tel que  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ .*

**Théorème 1.1** *(Théorème de représentation de Riesz). Soit  $H$  un espace de Hilbert sur le corps  $K$  et  $l$  dans  $H'$ , alors il existe un et un seul élément  $x$  dans  $H$ , tel que*

$$l(y) = \langle x, y \rangle, \forall x, y \in H \quad (1.1)$$

de plus

$$\|l\|_{H'} = \|x\|_H \quad (1.2)$$

**Théorème 1.2** *(Projection sur un convexe) Soit  $V$  un espace de Hilbert. Soit  $K \subset V$  un convexe fermé non vide. Pour tout  $x \in V$ , il existe un unique  $x_K \in K$  tel que*

$$\|x - x_K\| = \min_{y \in K} \|x - y\|$$

De façon équivalente,  $x_K$  est caractérisé par la propriété

$$x_K \in K, \langle x_K - x, x_K - y \rangle \leq 0 \quad \forall y \in K$$

$x_K$  s'appelle la projection orthogonale de  $x$  sur  $K$ .

**Définition 1.2** *Une partie  $G$  de  $H$  est dite dense dans  $H$  si*

$$\forall h \in H, \forall \epsilon > 0, \exists g \in G; \|g - h\| < \epsilon$$

ou de manière équivalente si tout  $h$  de  $H$  est limite d'une suite d'éléments  $g_n$  de  $G$  :  
 $\|g_n - h\| \rightarrow 0$ .

**Définition 1.3** Une partie  $F$  de  $H$  est dite totale si l'ensemble des combinaisons linéaires finies des éléments de  $F$  est dense dans  $H$ .

**Définition 1.4** Une famille  $\{e_i, i \in I\}$  d'éléments de  $H$  est dite orthonormée si

$$\forall i \in I, \forall j \in I, (e_i, e_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

**Définition 1.5** Un système orthonormé dénombrable  $(e_i)_{i \in I}$  est dit complet s'il vérifie l'une des deux conditions équivalentes suivantes :

$$1) \overline{\text{Vect}(e_i)_{i \in I}} = H$$

$$2) \forall x \in H, \forall i \in I, (e_i, x) = 0 \implies x = 0$$

## Base Hilbertienne

**Définition 1.6** Une base hilbertienne de  $H$  ou base orthonormée est une famille orthonormée totale dans  $H$ .

**Proposition 1.1** Soit  $H$  un espace de Hilbert pour le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Soit  $\{e_n\}_{n \geq 1}$  une base hilbertienne de  $H$ . Pour tout élément  $x$  de  $H$ , il existe une unique suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  de réels telle que la somme partielle  $\sum_{n=1}^{n=p} x_n e_n$  converge vers  $x$  quand  $p$  tend vers l'infini, et cette suite est définie par  $x_n = \langle x, e_n \rangle$ . De plus on a

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \sum_{n \geq 1} |\langle x, e_n \rangle|^2$$

on écrit alors

$$x = \sum_{n \geq 1} \langle x, e_n \rangle e_n.$$

L'existence d'une base hilbertienne dénombrable n'est pas garantie pour tous les espaces de Hilbert. La proposition suivante donne une condition nécessaire et suffisante de l'existence d'une base hilbertienne dénombrable.

**Proposition 1.2** *Soit  $H$  un espace de Hilbert séparable ( i.e il existe une famille dénombrable dense dans  $H$  ), alors il existe une base hilbertienne dénombrable de  $H$ .*

**Définition 1.7** (*Espaces dual*). *Si  $X$  est un espace linéaire normé, alors son espace dual est l'ensemble des formes linéaires continues dans  $X$ . L'espace dual est généralement noté par  $X'$ . En d'autres termes,*

$$X' = \{T : X \rightarrow \mathbb{R}, T \text{ est continue et linéaire}\}.$$

## 1.2 La fonction de Dirac

La fonction de Dirac ou "fonction delta" joue un rôle pratique très important aussi bien en électronique et informatique qu'en physique quantique ondulatoire et physique quantique des champs. Pour l'introduire simplement, considérons la fonction définie par :

$$\begin{aligned} f(x) &= 1/\alpha \quad \text{si } -\alpha/2 < x < \alpha/2 \\ f(x) &= 0 \quad \text{si } |x| \geq \alpha/2 \end{aligned}$$

La représentation de  $y = f(x)$  est un rectangle de largeur  $\alpha$ , de hauteur  $1/\alpha$  et de surface unité. La fonction de Dirac peut être considérée comme la limite, lorsque  $\alpha \rightarrow 0$  de la fonction  $f(x)$ . On a donc

$$\begin{aligned} \delta(x) &= 0, \text{ si } x \neq 0 \\ \delta(x) &= \infty, \text{ si } x = 0 \end{aligned}$$

avec

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(x) dx = 1$$

Par extension nous avons :

$$\begin{aligned} \delta(x - x_0) &= 1 \text{ si } x = x_0 \\ &= 0 \text{ si } x \neq x_0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \delta(x - x_0) dx &= 1 \text{ si } x_0 \in [x_1, x_2] \\ &= 0 \text{ si } x_0 \notin [x_1, x_2] \end{aligned}$$

Pour une fonction  $g(x)$  continue en  $x = x_0$  on a :

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \delta(x - x_0) g(x) dx &= g(x_0) \text{ si } x_0 \in [x_1, x_2] \\ &= 0 \text{ si } x \neq x_0 \end{aligned}$$

### 1.3 Méthode à noyau reproduisant

En analyse fonctionnelle, un espace de Hilbert à noyau reproduisant (RKHS) est un espace de Hilbert spécial associé à un noyau tel qu'il reproduit (via un produit scalaire) chaque fonction dans l'espace. Le sujet a été originellement et simultanément développé par Nachman Aronszajn en 1950, qui affirme dans son théorème de Moore-Aronszajn que tout noyau symétrique défini positif définit un unique espace de Hilbert à noyau reproduisant. Le théorème apparaît pour la première fois dans l'article Theory of Reproducing Kernels Aronszajn [1].

**Définition 1.8** Une fonction symétrique  $K(.,.) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  est dite semi-définie positive si

$$\forall l \in \mathbb{N}^*, \forall x_1, \dots, x_l \in X, \forall \lambda_1, \dots, \lambda_l \in \mathbb{R}, \sum_{i,j=1}^l \lambda_i \lambda_j K(x_i, x_j) \geq 0$$

**Définition 1.9** Un RKHS est un espace de Hilbert  $H$  de fonctions définies sur  $X$  à valeurs réelles, tel que

$$\forall x \in X, \exists M_x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M_x \|f\|_H$$

En d'autres termes, la fonction d'évaluation  $L_x : H \rightarrow \mathbb{R}$ , définie par  $L_x(f) = f(x)$  est une forme linéaire continue. D'après le théorème de Riesz, il existe donc un unique élément  $K_x$  de  $H$  vérifiant

$$L_x f = \langle f(.), K_x(.) \rangle_H = f(x)$$

**Définition 1.10** La fonction  $K(.,.)$  définie par  $K(x, x') = K_x(x')$  s'appelle noyau reproduisant de l'espace hilbertien  $H$ .

**Proposition 1.3** Soit  $K(x, x')$  un noyau reproduisant d'un espace hilbertien  $H$  de fonctions définies sur  $X$  à valeurs réelles, alors  $K(x, x') = K(x', x)$ ,  $\forall x, x' \in X$  (symétrie),  $K(.,.)$  est semi-définie positive,  $\langle K(x, .), K(x', .) \rangle_H = \langle K_x, K_{x'} \rangle_H = K(x, x')$  (propriété de reproduction), Si le noyau reproduisant existe, il est unique.

**Théorème 1.3** (de Moore-Aronszajn) À tout RKHS correspond un unique noyau reproduisant. Inversement, si  $K(.,.)$  est une fonction semi-définie positive et symétrique sur  $X \times X$ , on peut construire un unique RKHS de fonctions à valeurs réelles, pour lequel  $K(.,.)$  est un noyau reproduisant.

### 1.3.1 L'espace à noyau reproduisant $W_2^m[a, b]$

En 1986, Cui [9] a montré que  $W_2^1[a, b]$  est un espace de Hilbert à noyau reproduisant (RKHS), au cours des dernières années, plusieurs recherches ont montré que certains

problèmes pourraient être résolus dans l'espace à noyau reproduisant  $W_2^1[a, b]$ .

Basé sur l'espace à noyau reproduisant établi par Cui Minggen et en redéfinissant le produit scalaire, le noyau reproduisant de  $W_2^m[a, b]$  peut être considérablement simplifié et exprimé par des polynômes.

On définit l'espace de fonction  $W_2^m[a, b]$  par :

$$W_2^m[a, b] = \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f, f', \dots, f^{(m-1)} \text{ sont absolument continues, } f^{(m)} \in L^2[a, b] \right\}.$$

Le produit scalaire et la norme dans  $W_2^m[a, b]$  sont définies respectivement par

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(a)g^{(i)}(a) + \int_a^b f^{(m)}(x)g^{(m)}(x) dx, \\ \|f\| &= \sqrt{\langle f(x), f(x) \rangle}, f(x), g(x) \in W_2^m[a, b]. \end{aligned} \quad (1.3)$$

**Théorème 1.4**  $W_2^m[a, b]$  est un espace à noyau reproduisant si et seulement si pour tout  $x \in [a, b]$ ,  $I : f \rightarrow f(x)$  est une fonctionnelle bornée dans  $W_2^m[a, b]$ .

**Théorème 1.5** l'espace de fonction  $W_2^m[a, b]$  est un espace de Hilbert.

**Preuve.** En supposant que  $\{f_n\}_{n \geq 1}$  est une suite de Cauchy dans  $W_2^m[a, b]$ , ie, si  $n \rightarrow \infty$ , alors

$$\begin{aligned} \|f_{n+p} - f_n\|^2 &= \sum_{i=0}^{m-1} \left[ f_{n+p}^{(i)}(a) - f_n^{(i)}(a) \right]^2 \\ &\quad + \int_a^b \left[ f_{n+p}^{(m)}(x) - f_n^{(m)}(x) \right]^2 dx \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$f_{n+p}^{(i)}(a) - f_n^{(i)}(a) \rightarrow 0, i = 0, 1, \dots, m-1$$

et

$$\int_a^b [f_{n+p}^{(m)}(x) - f_n^{(m)}(x)]^2 dx \rightarrow 0$$

ce qui indique que pour chaque  $i$  ( $0 \leq i \leq m-1$ ), la suite  $\{f_n^{(i)}(a)\}_{n \geq 1}$  est une suite de Cauchy et  $\{f_n^{(i)}\}_{n \geq 1}$  est une suite de Cauchy dans  $L^2[a, b]$ . Donc, il existe unique nombre réel  $\lambda_i$  ( $0 \leq i \leq m-1$ ), et une fonction unique  $h \in L^2[a, b]$  tel que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{(i)}(a) = \lambda_i \quad (0 \leq i \leq m-1)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [f_n^{(m)}(x) - h(x)]^2 dx = 0$$

En supposant que

$$g(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\lambda_k}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \int_a^x \dots \int_a^x h(x) (dx)^m,$$

puisque  $h \in L^2[a, b]$  donc  $g^{(m-1)}(x) = \lambda_{m-1} + \int_a^x h(x) dx$  est absolument continue dans  $[a, b]$  et  $g^{(m)}(x) = h(x)$  est vrai presque partout dans  $[a, b]$ .

D'où  $g \in W_2^m[a, b]$  et  $g^{(i)}(a) = \lambda_i$  ( $0 \leq i \leq m-1$ ). De plus, on a

$$\begin{aligned} \|f_n - g\|^2 &= \sum_{i=0}^{m-1} [f_n^{(i)}(a) - g^{(i)}(a)]^2 \\ &\quad + \int_a^b [f_n^{(m)}(x) - g^{(m)}(x)]^2 dx \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} [f_n^{(i)}(a) - \lambda_i]^2 + \\ &\quad \int_a^b [f_n^{(m)}(x) - h(x)]^2 dx \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, l'espace de fonction  $W_2^m[a, b]$  est un espace de Hilbert. ■

**Théorème 1.6** *L'espace de fonction  $W_2^m[a, b]$  est un espace à noyau reproduisant.*

**Preuve.** En fait, pour  $x \in [a, b]$  et  $f \in W_2^m[a, b]$ , on a

$$f^{(m-1)}(x) = f^{(m-1)}(a) + \int_a^x f^{(m)}(x) dx,$$

d'où

$$\begin{aligned} |f^{(m-1)}(x)| &\leq |f^{(m-1)}(a)| + \int_a^x |f^{(m)}(x)| dx \\ &\leq |f^{(m-1)}(a)| + \int_a^b |f^{(m)}(x)| dx, \end{aligned}$$

et comme

$$\begin{aligned} \int_a^b |f^{(m)}(x)| dx &\leq \sqrt{(b-a) \int_a^b |f^{(m)}(x)|^2 dx} \\ &= \mathring{M}_1 \sqrt{\int_a^b |f^{(m)}(x)|^2 dx} \\ &\leq \mathring{M}_1 \sqrt{\sum_{i=0}^{m-1} [f^{(i)}(a)]^2 + \int_a^b |f^{(m)}(x)|^2 dx} \\ &= \mathring{M}_1 \|f\|_{W_2^m[a,b]} \end{aligned}$$

On note que pour tout  $i(0 \leq i \leq m-1)$ , on a

$$\begin{aligned} |f^{(i-1)}(a)| &= \sqrt{|f^{(i-1)}(a)|^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=0}^{m-1} [f^{(i)}(a)]^2 + \int_a^b |f^{(m)}(x)|^2 dx} = \|f\|_{W_2^m[a,b]}, \end{aligned} \tag{1.4}$$

par conséquent

$$|f^{(m-1)}(x)| \leq M_1 \|f\|_{W_2^m[a,b]}. \tag{1.5}$$

On note que

$$\begin{aligned} |f^{(m-2)}(x)| &\leq |f^{(m-2)}(a)| + \int_a^x |f^{(m-1)}(x)|^2 dx \\ &\leq |f^{(m-2)}(a)| + \int_a^b |f^{(m-1)}(x)|^2 dx \end{aligned}$$

à partir de (1.10) et (1.11), on a

$$\begin{aligned} |f^{(m-2)}(x)| &\leq \|f\|_{W_2^m[a,b]} + M_1 (b-a) \|f\|_{W_2^m[a,b]} \\ &= M_2 \|f\|_{W_2^m[a,b]}. \end{aligned}$$

De même, on a

$$|I(f)| = |f(x)| \leq M_n \|f\|_{W_2^m[a,b]}.$$

Alors  $I$  est une fonctionnelle bornée dans  $W_2^m[a, b]$  et  $W_2^m[a, b]$  est un espace à noyau reproduisant. ■

**Proposition 1.4** On note par  $R_m(x, y)$ , un noyau reproduisant de  $W_2^m[a, b]$ . Alors

$$R_m(x, y) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{2m} a_i(y) x^{i-1}, & x < y, \\ \sum_{i=1}^{2m} b_i(y) x^{i-1}, & x \geq y. \end{cases}$$

### Exemple de RKHS

**Exemple 1.1** On considère l'espace de Hilbert  $H$

$$H = \left\{ f(\cdot) \mid f(\cdot) \text{ est absolument continu dans } [0, 1], f'(\cdot) \in L^2[0, 1], f(0) = 0 \right\}$$

muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_H = \int_0^1 f'(x)g'(x) dx,$$

$H$  est un RKHS et son noyau  $K$  est défini par

$$K(s,t) = \min(s,t)$$

en effet, on a, pour tout  $x \in [0, 1]$  et  $f \in H$

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x) - 0| = |f(x) - f(0)| \\ \left| \int_0^x f'(t) dt \right| &\leq \sqrt{x} \|f\|_H \end{aligned}$$

Et on a par définition, pour tout  $x \in [0, 1]$   $K(., x) = \min(., x) \in H$ . De plus

$$\begin{aligned} \langle f, K_x \rangle_H &= \int_0^1 f'(t) K'_x(t) dt \\ &= \int_0^x f'(t) dt = f(x) \end{aligned}$$

qui montre que  $K$  est le noyau associé à  $H$ .

# Chapitre 2

## Solution analytique et approchée

### Résumé

Dans ce chapitre, on applique la méthode de noyau reproduisant dans l'espace de Hilbert pour résoudre une équation hyperbolique intégro-différentielle du second ordre avec une condition intégrale. La solution analytique est représentée sous forme de séries de Fourier, et la solution approchée est obtenue par une méthode itérative.

## 2.1 Introduction

La recherche des solutions analytiques et numériques de différents types d'équations aux dérivées partielles (EDP) est un sujet très important et intéressant dans l'étude de nombreux problèmes physiques. L'une des plus importantes équations est l'équation intégro-différentielle.

En général, il est difficile de résoudre les équations intégro-différentielles analytiquement. Dans de tels cas, le rapprochement des méthodes d'analyse numérique donne d'autres possibilités afin de trouver des solutions approchées.

La méthode de noyau reproduisant est un outil pratique pour construire une solution approchée des équations aux dérivées partielles sans discrétisation, en outre la solution numérique obtenue par cette procédure converge rapidement vers la solution exacte avec une petite erreur et une bonne précision après seulement deux itérations.

La théorie à noyau reproduisant a des applications importantes en analyse numérique, équations différentielles, probabilités et statistiques, etc. [3; 4;10]. Ces dernières années, un intérêt croissant a été dévoué à la résolution des équations engendrées par des opérateurs en utilisant le noyau reproduisant. Dans [6], Cai Minggen a résolu des équations engendrées par des opérateurs linéaires. Dans [5;6], les auteurs ont résolu une classe d'équations engendrés par des opérateurs non-linéaires. Dans [7-8], les auteurs ont donné une méthode de mise en œuvre pour résoudre l'équation de Burgers [7] et l'équation intégrale [8]. Yang Lihong a proposé la même méthode [12] pour résoudre une classe d'équations intégro-différentielles.

## 2.2 Position du problème

Le but de ce chapitre est de développer la méthode à noyau reproduisant dans l'espace de Hilbert pour fournir une solution approchée pour le problème aux limites du second ordre de l'équation intégrale-différentielle du type Volterra. On ramène les conditions initiales non homogènes à des conditions homogènes en introduisant une nouvelle fonction.

Plus précisément, on considère l'équation intégrale-différentielle suivante :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = f(x, t) + \int_0^t a(t-s) K(s, U(x, s)) ds, \quad (2.1)$$

pour tout  $(x, t) \in Q = (0, 1) \times (0, 1)$ ,

à laquelle sont jointes les conditions initiales

$$U(x, 0) = \varphi_1(x), U_t(x, 0) = \varphi_2(x), \quad (2.2)$$

$$U_x(0, t) = \psi(t), \quad (2.3)$$

et la condition intégrale

$$\int_0^1 U(x, t) dx = 0, \quad (2.4)$$

où  $f, K, a, \varphi_1, \varphi_2$  et  $\psi(t)$  sont des fonctions données telles que

$$\varphi_1'(0) = \varphi_2'(0) = 0, \psi(0) = \psi'(0) = 0.$$

L'opérateur  $K(t, u(x, t))$  est linéaire par rapport à  $u$  et continu par rapport aux variables  $t$  et  $u$ . La fonction  $a$  est continue, et on note  $l = \max_{0 \leq t \leq 1} |a(t)|$ .

Afin de mettre les conditions initiales, la condition intégrale d'équation (2.1) dans l'espace à noyau reproduisant  $H_{(3,3)}$  qui sera construit dans les sections suivantes, on doit homogénéiser ces conditions. Soit  $u(x, t) = U(x, t) - \varphi_1(x) - t\varphi_2(x) - (x - 1/2)\psi(t)$ ,

alors le problème devient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) + \int_0^t a(t-s)K(s, u(x, s))ds, \quad (2.5)$$

avec

$$u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0, u_x(0, t) = 0,$$

$$\int_0^1 u(x, t)dx = 0.$$

## 2.3 Espaces de Hilbert à noyau reproduisant

Pour l'étude de ce problème, on introduit quelques espaces de Hilbert à noyau reproduisant.

Soit

$$H_3[0, 1] = \left\{ u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, u, u', u'' \text{ sont des fonctions absolument continues,} \right. \\ \left. u^{(3)} \in L^2[0, 1], u'(0) = \int_0^1 u(x) dx = 0 \right\}.$$

On note respectivement le produit scalaire et la norme correspondante de l'espace  $H_3[0, 1]$ , par

$$\langle u, v \rangle_{H_3} = \sum_{i=0}^2 u^{(i)}(0)v^{(i)}(0) + \int_0^1 u^{(3)}(x)v^{(3)}(x) dx, \quad (2.6) \\ \|u\|_{H_3} = \sqrt{\langle u(x), u(x) \rangle_{H_3}}, u(x), v(x) \in H_3[0, 1].$$

On donne le résultat suivant :

**Théorème 2.1**  $H_3 [0, 1]$  est un espace de Hilbert à noyau reproduisant, autrement dit, pour chaque  $x \in [0, 1]$ , il existe  $\hat{G}_x \in H_3[0, 1]$ , telle que  $\langle u, \hat{G}_x \rangle_{H_3} = u(x)$  pour tout

$u \in H_3[0, 1]$ . Le noyau reproduisant  $\hat{G}_x(y)$  est donné par

$$\hat{G}_x(y) = \begin{cases} \sum_{i=1}^6 a_i(x) y^{i-1} - \frac{C(x) y^6}{720}, & y \leq x, \\ \sum_{i=1}^6 b_i(x) y^{i-1} - \frac{C(x) y^6}{720}, & x < y. \end{cases} \quad (2.7)$$

où

$$a_1(x) = 2/65 - 21/260x^2 - 7/260x^3 + 21/1040x^4 + x^5/3900 + 7/5200x^6$$

$$a_2(x) = -x^4/24,$$

$$a_3(x) = -21/260 + 253/1040x^2 + 253/3120x^3 + 7/4160x^4 - 7/10400x^5 + 7/62400x^6,$$

$$a_4(x) = 7(-720/187200 - 60/187200x^2 - 20/187200x^3 + 15/187200x^4 - 6/187200x^5 + x^6/187200),$$

$$a_5(x) = -7(-720/249600 - 60/249600x^2 - 20/249600x^3 + 15/249600x^4 - 6/249600x^5 + x^6/249600),$$

$$a_6(x) = 7(-720/624000 - 60/624000x^2 - 20/624000x^3 + 15/624000x^4 - 6/624000x^5 + x^6/624000),$$

$$b_1(x) = 1 + 7(-720/5200 - 60/5200x^2 - 20/5200x^3 + 15/5200x^4 - 6/5200x^5 + x^6/5200), b_2(x) = 0,$$

$$\begin{aligned}
b_3(x) &= -21/260 + 253/1040x^2 - 7/3120x^3 + 7/4160x^4 \\
&\quad -7/10400x^5 + 7/62400x^6, \\
b_4(x) &= -7/260 + 253/3120x^2 - 7/9360x^3 + 7/12480x^4 \\
&\quad -7/31200x^5 + 7/187200x^6, \\
b_5(x) &= -x/24 - 7(-720/249600 - 60/249600x^2 - 20/249600x^3 \\
&\quad + 15/249600x^4 - 6/249600x^5 + x^6/249600), \\
b_6(x) &= 1/120 + 7(-720/624000 - 60/624000x^2 - 20/624000x^3 \\
&\quad + 15/624000x^4 - 6/624000x^5 + x^6/624000), \\
C(x) &= 7(-720/5200 - 60/5200x^2 - 20/5200x^3 + 15/5200x^4 \\
&\quad - 6/5200x^5 + x^6/5200).
\end{aligned}$$

**Preuve.** On a

$$\left\langle u, \hat{G}_x \right\rangle_{H_3} = \sum_{i=0}^2 u^{(i)}(0) \hat{G}_x^{(i)}(0) + \int_0^1 u^{(3)}(y) \hat{G}_x^{(3)}(y) dy, \quad (2.8)$$

Intégrons par parties plusieurs fois le second membre de l'équation (2.8), on obtient

$$\begin{aligned}
\left\langle u(y), \hat{G}_x(y) \right\rangle_{H_3} &= \sum_{i=0}^2 u^{(i)}(0) \left[ \hat{G}_x^{(i)}(0) - (-1)^{2-i} \hat{G}_x^{(5-i)}(0) \right] \\
&\quad + \sum_{i=0}^2 (-1)^{2-i} u^{(i)}(1) \hat{G}_x^{(5-i)}(1) \\
&\quad - \int_0^1 u(y) \hat{G}_x^{(6)}(y) dy.
\end{aligned}$$

Comme  $u(x) \in H_3[0, 1]$ , alors on a

$$u'(0) = \int_0^1 u(x) dx = 0,$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}
\left\langle u(y), \hat{G}_x(y) \right\rangle_{H_3} &= u(0) \left[ \hat{G}_x(0) - \hat{G}_x^{(5)}(0) \right] + \\
&u^{(2)}(0) \left[ \hat{G}_x^{(2)}(0) - \hat{G}_x^{(3)}(0) \right] + \\
&\sum_{i=0}^2 (-1)^{2-i} u^{(i)}(1) \hat{G}_x^{(5-i)}(1) - \\
&\int_0^1 u(y) \hat{G}_x^{(6)}(y) dy - C(x) \int_0^1 u(y) dy.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

En vertu de  $\left\langle u, \hat{G}_x \right\rangle_{H_3} = u(x)$  et (2.9) il résulte que  $\hat{G}_x(y)$  est la solution de l'équation différentielle suivante :

$$\hat{G}_x^{(6)}(y) + C(x) = -\delta(y-x), \tag{2.10}$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{aligned}
\hat{G}_x(0) - \hat{G}_x^{(5)}(0) &= 0, \\
\hat{G}_x^{(2)}(0) - \hat{G}_x^{(3)}(0) &= 0, \\
\hat{G}_x^{(5-i)}(1) &= 0, \quad i = 0, 1, 2.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Comme  $x \neq y$ , alors la forme générale de la solution de l'équation  $\hat{G}_x^{(6)}(y) + C(x) = -\delta(y-x)$ , est

$$\hat{G}_x(y) = \begin{cases} \sum_{i=1}^6 a_i(x) y^{i-1} - \frac{C(x) y^6}{720}, & y \leq x, \\ \sum_{i=1}^6 b_i(x) y^{i-1} - \frac{C(x) y^6}{720}, & x < y. \end{cases}$$

Comme  $\hat{G}_x^{(6)}(y) + C(x) = -\delta(y-x)$ , alors on a

$$\hat{G}_x^{(i)}(x+0) = \hat{G}_x^{(i)}(x-0), \quad i = 0, 1, 2, 3, 4. \tag{2.12}$$

$$\hat{G}_x^{(5)}(x-0) - \hat{G}_x^{(5)}(x+0) = 1. \tag{2.13}$$

De plus, compte tenu de  $\hat{G}_x(y) \in H_3[0, 1]$ , on a

$$\hat{G}'_x(0) = 0, \quad \int_0^1 \hat{G}_x(y) dy = 0. \quad (2.14)$$

À l'aide des égalités (2.11)-(2.14), on peut trouver les coefficients inconnus de (2.7).

■

**Définition 2.1** *On définit l'espace*

$$H'_3[0, 1] = \left\{ \begin{array}{l} u(t) | u, u', u'' \text{ sont des fonctions absolument continues} \\ \text{sur } [0, 1], u^{(3)} \in L^2[0, 1], u'(0) = u(0) = 0. \end{array} \right\}$$

Le produit scalaire et la norme dans  $H'_3[0, 1]$  sont définis respectivement par

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle_{H'_3} &= \sum_{i=0}^2 u^{(i)}(0)v^{(i)}(0) + \int_0^1 u^{(3)}(t)v^{(3)}(t) dt, \\ \|u\|_{H'_3} &= \sqrt{\langle u, u \rangle_{H'_3}}, u, v \in H'_3[0, 1]. \end{aligned}$$

$H'_3[0, 1]$  est un espace à noyau reproduisant et son noyau est dénoté par

$$\check{G}_s(t) = \begin{cases} \frac{1}{120}s^5 - \frac{1}{24}s^4t + \frac{1}{4}s^2t^2 + \frac{1}{12}s^3t^2, & s \leq t, \\ -\frac{1}{24}s^4t + \frac{1}{120}t^5 + \frac{1}{12}s^3t^2(3+l), & l < s. \end{cases} \quad (2.15)$$

**Définition 2.2** *On définit l'espace*

$$H_{(3,3)}(Q) = \left\{ \begin{array}{l} u(x, t) | \frac{\partial^4 u}{\partial^2 x \partial^2 t} \text{ est une fonction absolument continue sur } Q, \\ \frac{\partial^6 u}{\partial^3 x \partial^3 t} \in L^2(Q), u(x, 0) = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \int_0^1 u(x, t) dx = 0. \end{array} \right\}$$

dont le produit scalaire et la norme qui sont notés respectivement par

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle_{H_{(3,3)}} &= \sum_{i=0}^2 \int_0^1 \left[ \frac{\partial^3}{\partial t^3} \frac{\partial^i}{\partial t^i} u(0, t) \frac{\partial^3}{\partial t^3} \frac{\partial^i}{\partial t^i} v(0, t) \right] dt + \\ &\quad \sum_{j=0}^2 \left\langle \frac{\partial^j}{\partial t^j} u(x, 0), \frac{\partial^j}{\partial t^j} v(x, 0) \right\rangle_{H_3} + \\ &\quad \int_0^1 \int_0^1 \left[ \frac{\partial^3}{\partial x^3} \frac{\partial^3}{\partial t^3} u(x, t) \frac{\partial^3}{\partial x^3} \frac{\partial^3}{\partial t^3} v(x, t) \right] dt dx, \end{aligned}$$

$$\|u\|_{H_{(3,3)}} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{H_{(3,3)}}}, u \in H_{(3,3)}(Q)$$

**Définition 2.3**  $H_{(3,3)}(Q)$  est un espace à noyau reproduisant dont le noyau  $G_{(y,s)}(x, t)$  est donné par

$$G_{(y,s)}(x, t) = \hat{G}_y(x) \check{G}_s(t)$$

pour tout  $(x, t) \in Q$  et on a

$$u(x, t) = \langle u(y, s), G_{(x,t)}(y, s) \rangle_{H_{(3,3)}}$$

et

$$G_{(x,t)}(y, s) = G_{(y,s)}(x, t)$$

On définit l'espace de Hilbert à noyau reproduisant  $H_1[0, 1]$  par

$$H_1[0, 1] = \{u(\cdot) | u(\cdot) \text{ est absolument continue sur } [0, 1], u'(\cdot) \in L^2[0, 1]\}$$

dont le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H_1} = u(0)v(0) + \int_0^1 u'(x)v'(x) dx,$$

et la norme

$$\|u\|_{H_1} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{H_1}}, u, v \in H_1[0, 1],$$

**Définition 2.4** On définit l'espace

$$\hat{H}_{(1,1)}(Q) = \left\{ u \mid u \text{ est absolument continue sur } Q, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \in L^2(Q) \right\}$$

Le produit scalaire et la norme dans  $\hat{H}_{(1,1)}(Q)$  sont définis respectivement par

$$\begin{aligned} \langle u(x, t), v(x, t) \rangle_{\hat{H}_{(1,1)}} &= \int_0^1 \left[ \frac{\partial}{\partial t} u(0, t) \frac{\partial}{\partial t} v(0, t) \right] dt \\ &\quad + \langle u(x, 0), v(x, 0) \rangle_{H_1} + \\ &\quad \int_0^1 \int_0^1 \left[ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} v(x, t) \right] dt dx, \end{aligned}$$

$$\|u\|_{\hat{H}_{(1,1)}} = \sqrt{\langle u(x, t), u(x, t) \rangle_{\hat{H}_{(1,1)}}}, u \in \hat{H}_{(1,1)}(Q).$$

$\hat{H}_{(1,1)}(Q)$  est un espace à noyau reproduisant, ainsi, son noyau reproduisant est

$$R_{(y,s)}(x, t) = \acute{R}_y(x) \acute{R}_s(t).$$

où

$$\acute{R}_y(x) = \begin{cases} 1 + y, & y \leq x, \\ 1 + x, & x < y. \end{cases}$$

## 2.4 La solution exacte et approchée

On définit l'opérateur différentiel  $L : H_{(3,3)}(Q) \rightarrow \hat{H}_{(1,1)}(Q)$  par

$$Lu(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (2.16)$$

Par conséquent, l'équation (2.5) devient

$$Lu(x, t) = \hat{F}(x, t, u(x, t)) \quad (2.17)$$

où

$$\hat{F}(x, t, u(x, t)) = f(x, t) + \int_0^t a(t-s) K(s, u(x, s)) ds, \quad (2.18)$$

telle que  $u(x, t) \in H_{(3,3)}(Q)$ ,  $\hat{F}(x, t, u(x, t)) \in \hat{H}_{(1,1)}(Q)$  et pour  $u \in H_{(3,3)}(Q)$  on a

$$\|K(t, u)\|_{\hat{H}_{(1,1)}} \leq C \|u\|_{H_{(3,3)}}.$$

Il est facile de montrer que  $L$  est un opérateur linéaire borné de  $H_{(3,3)}(Q)$  vers  $\hat{H}_{(1,1)}(Q)$ .

En effet

$$\begin{aligned} \|Lu\|_{\hat{H}_{(1,1)}}^2 &= \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\|_{\hat{H}_{(1,1)}}^2 \\ &\leq \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\|_{\hat{H}_{(1,1)}}^2 + \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\|_{\hat{H}_{(1,1)}}^2, \end{aligned}$$

d'une autre part, on a

$$u(x, t) = \left\langle u(y, s), \hat{G}_x(y) \check{G}_t(s) \right\rangle_{H_{(3,3)}},$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= \left\langle u(y, s), \hat{G}_x(y) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \check{G}_t(s) \right\rangle_{H_{(3,3)}}, \\ u_{xx}(x, t) &= \left\langle u(y, s), \check{G}_t(s) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \hat{G}_x(y) \right\rangle_{H_{(3,3)}}, \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} |u_{tt}(x, t)|^2 &\leq \|u\|_{H(3,3)} \left\| \frac{\partial^2 \check{G}_t(s)}{\partial t^2} \right\|_{H_1} \left\| \hat{G}_x(y) \right\|_{H_3} \\ |u_{xx}(x, t)|^2 &\leq \|u\|_{H(3,3)} \left\| \frac{\partial^2 \hat{G}_x(y)}{\partial x^2} \right\|_{H_1} \left\| \check{G}_3(s, t) \right\|_{H'_3}, \end{aligned}$$

d'après la continuité de  $\hat{G}_x(y)$ ,  $\check{G}_t(s)$ ,  $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \check{G}_t(s)$  et  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \hat{G}_x(y)$ , il résulte que

$$\begin{aligned} \left\| \hat{G}_3(y, x) \right\|_{H_3} &\leq M_1, \left\| \check{G}_3(s, t) \right\|_{H'_3} \leq M_2 \\ \left\| \frac{\partial^2}{\partial x^2} \hat{G}_3(y, x) \right\|_{H_1} &\leq M_3, \left\| \frac{\partial^2}{\partial t^2} \check{G}_3(s, t) \right\|_{H_1} \leq M_4. \end{aligned}$$

Ces dernières estimations impliquent

$$\|Lu\|_{\dot{H}(1,1)(Q)}^2 \leq M \|u\|_{H(3,3)},$$

où  $M = M_1^2 M_4^2 + M_2^2 M_3^2$

Soit  $S = \{(x_1, t_1), (x_2, t_2), \dots\}$  un s.ensemble dénombrable dans  $Q$ , donc on définit

$$\varphi_i(x, t) = R_{(x_i, t_i)}(x, t), \quad (2.19)$$

$$\omega_i(x, t) = L^* \varphi_i(x, t) \quad (2.20)$$

$$= L_{(y,s)} G_{(y,s)}(x, t) /_{(y,s)=(x_i, t_i)}. \quad (2.21)$$

**Lemme 2.1** *Si  $S$  est dense dans  $Q$ , alors,  $\{\omega_i(x, t)\}_{i=1}^\infty$  est un système complet dans  $H_{(3,3)}(Q)$ .*

**Preuve.** Pour tout  $i$ , si on a  $\langle u(x, t), \omega_i(x, t) \rangle_{H(3,3)} = 0$ ,

alors

$$\begin{aligned}
& \langle u(x, t), \omega_i(x, t) \rangle_{H(3,3)} \\
&= \langle u(x, t), L^* \varphi_i(x, t) \rangle_{H(3,3)} \\
&= \langle Lu(x, t), \varphi_i(x, t) \rangle_{H(1,1)} \\
&= \langle Lu(x, t), R_{(x_i, t_i)}(x, t) \rangle_{H(1,1)} \\
&= Lu(x_i, t_i) = 0,
\end{aligned}$$

ce qui implique  $Lu(x, t) = 0$  (d'après la densité de  $S$ ).

D'après l'existence de  $L^{-1}$ , il s'ensuit que  $u(x, t) = 0$ .

Ce qui achève la démonstration. ■

En appliquant le procédé de Gram-Schmidt, on obtient une base orthonormée  $\{\varpi_i(x, t)\}_{i=1}^{\infty}$  de  $H_{(3,3)}(Q)$ , telle que

$$\varpi_i(x, t) = \sum_{j=1}^i \beta_{ij} \omega_j(x, t) \quad (2.22)$$

où  $\beta_{ij}$  sont les coefficients d'orthogonalité définis comme suit

$$\beta_{11} = 1/\|\omega_1\|, \beta_{ii} = 1/d_i,$$

où  $d_i = \sqrt{\|\omega_i\|^2 - \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij}^2}$ , et pour  $k < i$ , on a

$$\beta_{ik} = -(1/d_i) \sum_{j=k}^{i-1} c_{ij} \beta_{jk},$$

où  $c_{ij} = \langle \omega_i, \varpi_j \rangle_{H(3,3)}$ .

**Lemme 2.2** *Si  $S$  est dense dans  $Q$ , alors, la solution exacte de l'équation (2.16) est*

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^i \beta_{ij} F(x_j, t_j, u(x_j, t_j)) \varpi_i(x, t). \quad (2.23)$$

Alors

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \varpi_i(x, t),$$

on définit la fonction initiale  $u_0(x, t) = 0$ , et l'approximation de  $u(x, t)$  à l'itération  $n$  par

$$u_n(x, t) = \sum_{i=1}^n \tilde{A}_i \varpi_i(x, t), \quad (2.25)$$

où les coefficients  $\tilde{A}_i$  sont les approximations de  $A_i$  donnés par

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1 &= \beta_{11} \overset{\wedge}{F}(x_1, t_1, u_0(x_1, t_1)), \\ \tilde{A}_2 &= \sum_{j=1}^2 \beta_{2j} \overset{\wedge}{F}(x_j, t_j, u_{j-1}(x_j, t_j)), \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \tilde{A}_n &= \sum_{j=1}^n \beta_{nj} \overset{\wedge}{F}(x_j, t_j, u_{j-1}(x_j, t_j)). \end{aligned} \quad (2.26)$$

**Théorème 2.2** *Si  $S$  est dense dans  $Q$ , alors*

$$(Lu_n)(x, t) = \overset{\wedge}{F}(x, t, u_{n-1}(x, t))$$

où  $u_n(x, t)$  est donné par (2.22)

**Remarque 2.1** *Dans la pratique, la solution approchée  $u_n^m(x, t)$  peut être obtenue en prenant un nombre fini de termes dans la représentation de série de  $u_n(x, t)$ , ainsi*

$$u_n^m(x, t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^i \beta_{ij} \overset{\wedge}{F}(x_j, t_j, u_{n-1}(x_j, t_j)) \varpi_i(x, t). \quad (2.27)$$

**Théorème 2.3** Si  $\left\| \int_0^t K(s, u(s)) ds \right\|_{\hat{H}(1,1)} \leq C \|u\|_{H(3,3)}$  et  $0 < C l \|L^{-1}\| \leq 1$ , alors

$$u_n(x, t) \xrightarrow{\|\cdot\|_{H(3,3)}} u(x, t) \text{ quand } (n \rightarrow \infty).$$

**Preuve.** D'après le théorème 2.2, on a

$$(Lu_n)(x, t) = \overset{\wedge}{F}(x, t, u_{n-1}(x, t)),$$

d'autre part, on a

$$(Lu)(x, t) = \overset{\wedge}{F}(x, t, u(x, t)),$$

donc

$$\begin{aligned} & \|u_n(x, t) - u(x, t)\|_{H(3,3)} \\ &= \left\| L^{-1} \left( \overset{\wedge}{F}(x, t, u_{n-1}(x, t)) - \overset{\wedge}{F}(x, t, u(x, t)) \right) \right\|_{H(3,3)} \\ &\leq \|L^{-1}\| \left\| \left( \overset{\wedge}{F}(x, t, u_{n-1}(x, t)) - \overset{\wedge}{F}(x, t, u(x, t)) \right) \right\|_{\hat{H}(1,1)(Q)} \\ &\leq \|L^{-1}\| \left\| \left( \int_0^t a(t-s) K(s, u_{n-1}(x, s) - u(x, s)) ds \right) \right\|_{\hat{H}(1,1)(Q)} \\ &\leq C \max_{0 \leq t \leq 1} |a(t)| \|L^{-1}\| \|u_{n-1}(x, t) - u(x, t)\|_{H(3,3)} \end{aligned} \quad (2.28)$$

En vertu de  $C l \|L^{-1}\| \leq 1$  et (2.27), on aboutit à

$$u_n(x, t) \xrightarrow{\|\cdot\|_{H(3,3)}} u(x, t) \text{ quand } (n \rightarrow \infty)$$

■

**Proposition 2.1** On suppose que  $u_n(x, t) \xrightarrow{\|\cdot\|_{H(3,3)}} u(x, t)$  quand  $(n \rightarrow \infty)$ , alors

$$\left| \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial t^j} u(x, t) - \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial t^j} u_n(x, t) \right| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, i, j = 0, 1, 2,$$

**Preuve.** Pour chaque  $(x, t) \in (Q)$ , on a

$$\begin{aligned}
|u(x, t) - u_n(x, t)| &= \langle u(y, s) - u_n(y, s), G_{(y,s)}(x, t) \rangle_{H_{(3,3)}} \\
&\leq \|u(y, s) - u_n(y, s)\|_{H_{(3,3)}} \|G_{(y,s)}(x, t)\|_{H_{(3,3)}} \\
&\leq C_1 \|u(y, s) - u_n(y, s)\|_{H_{(3,3)}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
|u_x(x, t) - (u_n)_x(x, t)| &= \left\langle u(y, s) - (u_n)(y, s), \frac{\partial}{\partial x} \hat{G}_y(x) \check{G}_s(t) \right\rangle_{H_{(3,3)}} \\
&\leq \|u(y, s) - u_n(y, s)\|_{H_{(3,3)}} \left\| \frac{\partial}{\partial x} \hat{G}_y(x) \right\|_{H_1} \left\| \check{G}_s(t) \right\|_{H'_3} \\
&\leq C_2 \|u(y, s) - u_n(y, s)\|_{H_{(3,3)}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

de la même manière, on trouve

$$\begin{aligned}
|u_t(x, t) - (u_n)_t(x, t)| &\leq C_3 \|u(y, s) - u_n(y, s)\|_{H_{(3,3)}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \\
|u_{xt}(x, t) - (u_n)_{xt}(x, t)| &\leq C_4 \|u(y, s) - u_n(y, s)\|_{H_{(3,3)}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \\
|u_{xx}(x, t) - (u_n)_{xx}(x, t)| &\leq C_5 \|u(y, s) - u_n(y, s)\|_{H_{(3,3)}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \\
|u_{tt}(x, t) - (u_n)_{tt}(x, t)| &\leq C_6 \|u(y, s) - u_n(y, s)\|_{H_{(3,3)}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,
\end{aligned}$$

où  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$  et  $C_6$  sont des constantes positives. ■

# Chapitre 3

## Solution numérique

Pour montrer l'efficacité de la méthode proposée, on traite deux exemples, les solutions numériques obtenues à partir de cette méthode sont comparées aux solutions exactes.

Afin de calculer la solution approchée  $u_n^m(x, t)$  donnée par (2.24), on prend

$$\begin{aligned}(x_j, t_j) &= (i/N, k/M), i = 0, 1, \dots, N, k = 0, 1, \dots, M, j = 0, 1, \dots, m = N \times M, \\ e_n^m(x, t) &= |u(x, t) - u_n^m(x, t)|, (e_n^m)_{xx}(x, t) = |u_{xx}(x, t) - (u_n^m)_{xx}(x, t)|, \\ (e_n^m)_t(x, t) &= |u_t(x, t) - (u_n^m)_t(x, t)|, (e_n^m)_{xt} = |u_{xt}(x, t) - (u_n^m)_{xt}(x, t)|, \\ (e_n^m)_{tt}(x, t) &= |u_{tt}(x, t) - (u_n^m)_{tt}(x, t)|, (e_n^m)_x(x, t) = |u_x(x, t) - (u_n^m)_x(x, t)|\end{aligned}$$

**Exemple 3.1** *Considérons l'équation hyperbolique intégro-différentielle suivante :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) + \int_0^t u(x, s)(t-s)^2 ds,$$

pour tout  $(x, t) \in Q = [0, 1] \times [0, 1]$ , avec les conditions initiales

$$u(x, 0) = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = -1/3t^2,$$

et la condition intégrale

$$\int_0^1 u(x, t) dx = 0,$$

où

$$f(x, t) = -t^2 + (t^5 x)/90 - (t^5 x^2)/60 + 2(-(x/3) + x^2/2).$$

La solution exacte est donnée par

$$u(x, t) = (x^2/2 - x/3)t^2.$$

Pour homogénéiser la condition initiale on pose  $v(x, t) = u(x, t) + 1/3(x - 1/2)t^2$ , alors le problème devient

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = F(x, t) + \int_0^t u(x, s)(t - s)^2 ds, \\ v(x, 0) = \frac{\partial v(x, 0)}{\partial t} = 0, \frac{\partial v(0, t)}{\partial x} = 0, \\ \int_0^1 v(x, t) dx = 0, \end{cases}$$

où

$$F(x, t) = -t^2 + t^5/180 - (t^5 x^2)/60 + 2(-(1/6) + x^2/2).$$

La solution approchée  $u_n^m(x, t)$  est calculé par (2.26), les résultats numériques aux noeuds sélectionnés pour  $n = 2$  et  $m = 9, 25, 36$ , sont donnés par le tableau 1 ; Fig. 1, Fig. 2. On mentionne, qu'ont peut calculer la solution approchée aux quelques points dans le domaine d'intégration, en outre, les résultats numériques des solutions approximatives des dérivées partielles de  $u(x, t)$  d'ordre inférieur ou égal à deux aux noeuds sélectionnés dans  $Q$  sont présentés dans les : tableau 2, tableau 3, tableau 4 et fig. 4, figure. 5, fig. 6, fig. 7.

Tableau 1 : comparaison des résultats de l'exemple 3.1 ( $n=2, m=9$ ), ( $n=2, m=25$ ), ( $n=2,$

36)

$(x_i, t_i)$	$u(x_i, t_i)$	$u_2^9(x_i, t_i)$	$e_2^9(x_i, t_i)$	$u_2^{25}(x_i, t_i)$	$e_2^{25}(x_i, t_i)$	$u_2^{36}(x_i, t_i)$	$e_2^{36}(x_i, t_i)$
(0.00, 0.01)	-0.0000166667	-0.0000166778	$1.11208 \times 10^{-8}$	-0.0000166716	$4.91396 \times 10^{-9}$	-0.0000166669	$2.38327 \times 10^{-9}$
(0.10, 0.05)	-0.000404167	-0.000405767	$1.60037 \times 10^{-6}$	-0.000404769	$6.02607 \times 10^{-7}$	-0.000404477	$3.10829 \times 10^{-7}$
(0.15, 0.10)	-0.00155417	-0.00156553	0.0000113597	-0.00155794	$3.77362 \times 10^{-6}$	-0.00155618	$2.01319 \times 10^{-6}$
(0.35, 0.20)	-0.00421667	-0.00426852	0.0000518486	-0.00422809	0.0000114209	-0.00422364	$6.97576 \times 10^{-6}$
(0.49, 0.31)	-0.00447986	-0.00452686	0.0000469975	-0.00448892	$9.0549 \times 10^{-6}$	-0.00448525	$5.38878 \times 10^{-6}$
(0.57, 0.45)	-0.000853875	-0.000797115	0.0000567602	-0.000841921	0.0000119539	-0.000843941	$9.93407 \times 10^{-6}$
(0.69, 0.52)	0.0193021	0.019722	0.000419921	0.0193944	0.000092309	0.0193651	0.0000630357
(0.73, 0.71)	0.0503008	0.051337	0.00103622	0.0505752	0.000274416	0.0504998	0.000199064
(0.81, 0.73)	0.0860012	0.0875237	0.00152253	0.0864201	0.000418901	0.0862948	0.000293589
(0.99, 0.99)	0.316948	0.321906	0.00495752	0.318391	0.0014427	0.317979	0.00103091

Tableau 2

$(x_i, t_i)$	$u_x(x_i, t_i)$	$(u_2^{36})_x(x_i, t_i)$	$(e_2^{36})_x(x_i, t_i)$	$u_t(x_i, t_i)$	$(u_2^{36})_t(x_i, t_i)$	$(e_2^{36})_t(x_i, t_i)$
(0.00, 0.01)	0	0	0	-0.00333333	-0.00333405	$7.13641 \times 10^{-7}$
(0.10, 0.05)	0.00025	0.000250251	$2.51435 \times 10^{-7}$	-0.0161667	-0.0161843	0.0000176095
(0.15, 0.10)	0.0015	0.00150485	$4.84998 \times 10^{-6}$	-0.0310833	-0.0311394	0.0000561166
(0.35, 0.20)	0.014	0.0140271	0.0000271309	-0.0421667	-0.0422407	0.000074026
(0.49, 0.31)	0.047089	0.0471834	0.0000944407	-0.0289023	-0.0289344	0.0000321025
(0.57, 0.45)	0.115425	0.115671	0.000245572	-0.003795	-0.00370955	0.0000854539
(0.69, 0.52)	0.186576	0.186966	0.000390195	0.0742387	0.0746015	0.000362857
(0.73, 0.71)	0.367993	0.36889	0.000896873	0.141692	0.142524	0.000831219
(0.81, 0.73)	0.431649	0.432628	0.000978623	0.23562	0.236766	0.00114628
(0.99, 0.99)	0.970299	0.971634	0.00133455	0.640299	0.643342	0.00304273

Tableau 3

$(x_i, t_i)$	$u_{xx}(x_i, t_i)$	$(u_2^{36})_{xx}(x_i, t_i)$	$(e_2^{36})_{xx}(x_i, t_i)$	$u_{tt}(x_i, t_i)$	$(u_2^{36})_{tt}(x_i, t_i)$	$(e_2^{36})_{tt}(x_i, t_i)$
(0.00, 0.01)	0.0001	0.0000987579	$1.24214 \times 10^{-6}$	-0.333333	-0.333476	0.000142168
(0.10, 0.05)	0.0025	0.00251529	0.0000152936	-0.323333	-0.323982	0.000648639
(0.15, 0.10)	0.01	0.0100352	0.0000351715	-0.310833	-0.311781	0.000947982
(0.35, 0.20)	0.04	0.0400798	0.0000798286	-0.210833	-0.210834	$7.5059 \times 10^{-7}$
(0.49, 0.31)	0.0961	0.0961258	0.0000257529	-0.0932333	-0.0933337	0.000100397
(0.57, 0.45)	0.2025	0.202738	0.000237996	-0.00843333	-0.00795028	0.000483057
(0.69, 0.52)	0.2704	0.270343	0.0000565495	0.142767	0.144576	0.00180951
(0.73, 0.71)	0.5041	0.503912	0.000188399	0.199567	0.201834	0.00226726
(0.81, 0.73)	0.5329	0.533143	0.000242932	0.322767	0.325617	0.00284984
(0.99, 0.99)	0.9801	0.974642	0.00545754	0.646767	0.657132	0.0103654

Tableau 4

$(x_i, t_i)$	$u_{xt}(x_i, t_i)$	$(u_2^{\hat{3}6})_{xt}(x_i, t_i)$	$(e_2^{\hat{3}6})_{xt}(x_i, t_i)$
(0.00, 0.01)	0	0	0
(0.10, 0.05)	0.01	0.0100156	0.0000156324
(0.15, 0.10)	0.03	0.0301219	0.000121915
(0.35, 0.20)	0.14	0.140316	0.000315841
(0.49, 0.31)	0.3038	0.304566	0.000765789
(0.57, 0.45)	0.513	0.514339	0.0013393
(0.69, 0.52)	0.7176	0.719583	0.00198293
(0.73, 0.71)	1.0366	1.03993	0.00333317
(0.81, 0.73)	1.1826	1.18586	0.00326277
(0.99, 0.99)	1.9602	1.96366	0.00346393

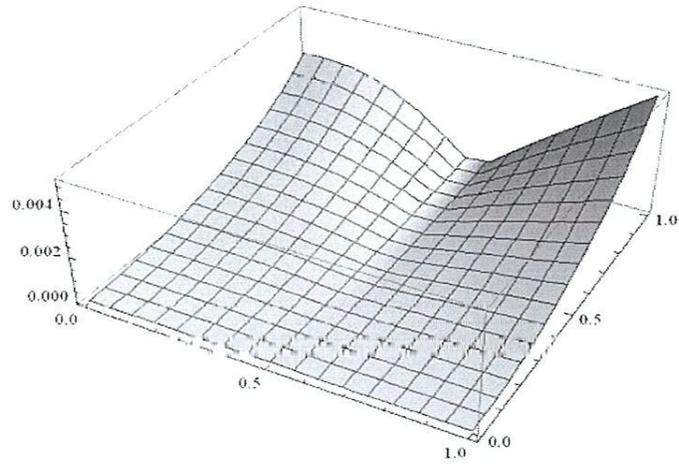


Fig.1.  $e_2^9(x, t) = |u(x, t) - u_2^9(x, t)|$

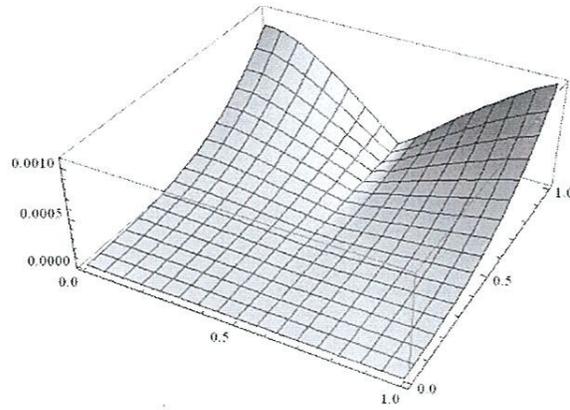


Fig.2.  $e_2^{36}(x, t) = |u(x, t) - u_2^{36}(x, t)|$

À partir des figures 1-2, on remarque que l'erreur absolue est monotone décroissante si  $m$  est croissante.

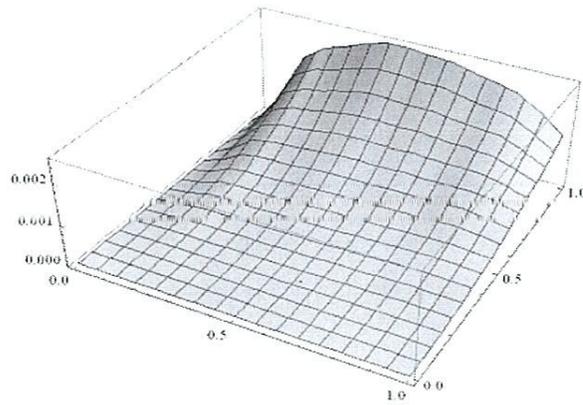


Fig.3.  $(e_2^{36})_x(x, t) = |u_x(x, t) - (u_2^{36})_x(x, t)|$

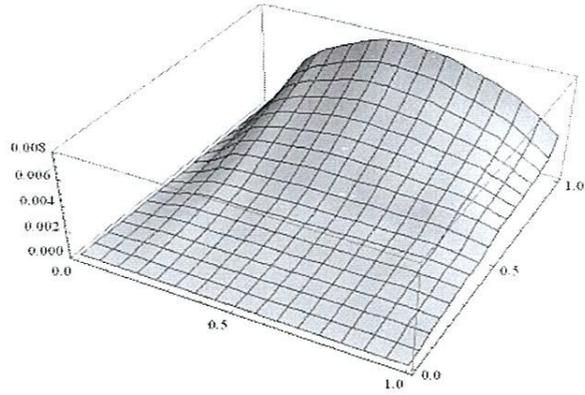


Fig.4.  $(e_2^{36})_{xt}(x, t) = |u_{xt}(x, t) - (u_2^{36})_{xt}(x, t)|$

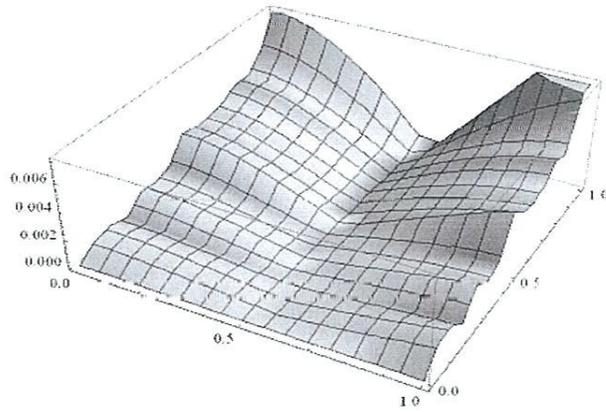


Fig.5.  $(e_2^{25})_{tt}(x, t) = |u_{tt}(x, t) - (u_2^{25})_{tt}(x, t)|$

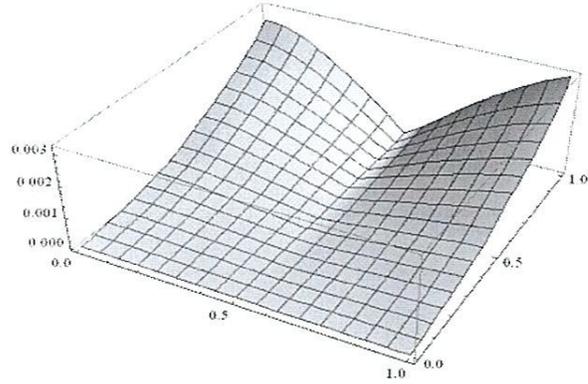


Fig.6.  $(e_2^{36})_t(x, t) = |u_t(x, t) - (u_2^{36})_t(x, t)|$

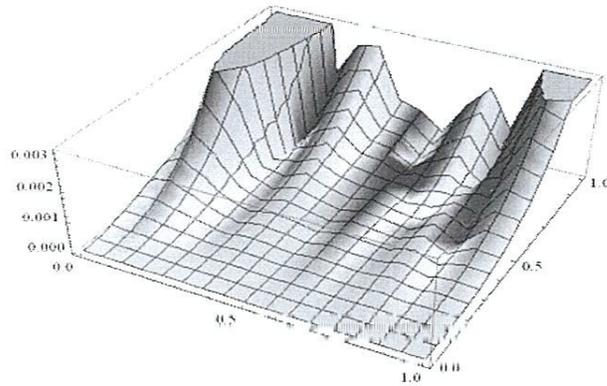


Fig.7.  $(e_2^{36})_{xx}(x, t) = |u_{xx}(x, t) - (u_2^{36})_{xx}(x, t)|$

**Exemple 3.2** *Considérons l'équation intégral-différentielle suivante :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) + \int_0^t \exp(t-s) \left( \int_0^x u(r, s) dr \right) ds,$$

avec les conditions initiales homogènes

$$u(x, 0) = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = -1/4t^3,$$

et la condition intégrale

$$\int_0^1 u(x, t) dx = 0,$$

où

$$f(x, t) = -3t^3x - 1/8(-6 + 6 \exp t - t(6 + t(3 + t)))x^2(-1 + x^2) + 6t(-x/4 + x^3/2).$$

La solution exacte est donnée par

$$u(x, t) = (x^3/2 - x/4)t^3.$$

Pour homogénéiser la condition initiale on pose  $v(x, t) = u(x, t) + 1/4(x - 1/2)t^3$ , alors le problème devient

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = F(x, t) + \int_0^t \exp(t-s) (\int_0^x v(r, s) dr) ds, \\ v(x, 0) = \frac{\partial v(x, 0)}{\partial t} = 0, \frac{\partial v(0, t)}{\partial x} = 0, \\ \int_0^1 v(x, t) dx = 0, \end{array} \right.$$

où

$$F(x, t) = -3t^3x + 6t(-1/8 + x^3/2) - 1/8(-6 + 6 \exp t - t(6 + t(3 + t)))x(-1 + x^3).$$

Les résultats numériques sont présentés dans : Tableau 5, Tableau 6, Tableau 7, Tableau 8, Fig. 8, Fig. 9, Fig. 10, Fig. 11, Fig. 12, Fig. 13, Fig. 14, Fig. 15.

Tableau 5

$(x_i, t_i)$	$u(x_i, t_i)$	$(u_2^0)(x_i, t_i)$	$(e_2^0)(x_i, t_i)$	$(u_2^{25})(x_i, t_i)$	$(e_2^{25})(x_i, t_i)$	$(u_2^{36})(x_i, t_i)$	$(e_2^{36})(x_i, t_i)$
(0.30, 0.28)	-0.00244765	-0.00112259	0.00132506	-0.00178031	0.000667342	-0.00192337	0.000524278
(0.39, 0.36)	-0.00444821	-0.00280969	0.00163852	-0.00372377	0.000724436	-0.00381837	0.000629838
(0.40, 0.35)	-0.00398737	-0.00245891	0.00152847	-0.00332637	0.000661003	-0.00341583	0.00057154
(0.53, 0.49)	-0.00594851	-0.00427161	0.0016769	-0.00545591	0.000492602	-0.00569093	0.000257575
(0.65, 0.53)	0.00183305	0.00290337	0.00107032	0.00140105	0.000432002	0.00137281	0.00046024
(0.70, 0.66)	0.0133686	0.0156877	0.00231913	0.0125115	0.000857098	0.0124948	0.000873746
(0.80, 0.72)	0.0488955	0.0493387	0.00044321	0.0469464	0.00194912	0.0469407	0.0019548
(0.85, 0.80)	0.093216	0.0933302	0.000114202	0.0915202	0.00169579	0.0914674	0.00174864
(0.90, 0.81)	0.12728	0.123396	0.00388447	0.124356	0.00292362	0.124812	0.0024684
(0.99, 0.99)	0.349453	0.332598	0.0168542	0.347782	0.00167057	0.349213	0.000239825

Tableau 6

$(x_i, t_i)$	$u_x(x_i, t_i)$	$(u_2^{25})_x(x_i, t_i)$	$(e_2^{25})_x(x_i, t_i)$	$u_t(x_i, t_i)$	$(u_2^{25})_t(x_i, t_i)$	$(e_2^{25})_t(x_i, t_i)$
(0.30, 0.28)	0.00296352	0.00145401	0.00150951	-0.0262248	-0.0228039	0.00342086
(0.39, 0.36)	0.0106446	0.00746814	0.00317643	-0.0370684	-0.0337182	0.00335023
(0.40, 0.35)	0.01029	0.00717276	0.00311724	-0.0341775	-0.0311328	0.00304474
(0.53, 0.49)	0.0495714	0.0433775	0.00619394	-0.0364194	-0.0338704	0.00254905
(0.65, 0.53)	0.0943508	0.0833717	0.0109791	0.0103757	0.0105503	0.000174527
(0.70, 0.66)	0.21131	0.195493	0.0158165	0.0607662	0.0660309	0.00526466
(0.80, 0.72)	0.358318	0.342021	0.0162975	0.203731	0.215298	0.0115672
(0.85, 0.80)	0.55488	0.531702	0.0231782	0.34956	0.369152	0.0195918
(0.90, 0.81)	0.645701	0.611614	0.0340873	0.471408	0.491529	0.020121
(0.99, 0.99)	1.42649	1.35617	0.0703112	1.05895	1.09074	0.0317951

Tableau 7

$(x_i, t_i)$	$u_{xx}(x_i, t_i)$	$(u_2^{25})_{xx}(x_i, t_i)$	$(e_2^{25})_{xx}(x_i, t_i)$	$u_{tt}(x_i, t_i)$	$(u_2^{25})_{tt}(x_i, t_i)$	$(e_2^{25})_{tt}(x_i, t_i)$
(0.30, 0.28)	0.0197568	0.0103106	0.00944622	-0.18732	-0.18743	0.000110382
(0.39, 0.36)	0.0545875	0.0462883	0.00829917	-0.205935	-0.187809	0.018126
(0.40, 0.35)	0.05145	0.0445228	0.00692719	-0.1953	-0.179407	0.015893
(0.53, 0.49)	0.187062	0.176862	0.0102	-0.148651	-0.143963	0.00468775
(0.65, 0.53)	0.29031	0.246423	0.0438872	0.0391538	0.0625089	0.0233551
(0.70, 0.66)	0.603742	0.566541	0.0372006	0.18414	0.258125	0.0739855
(0.80, 0.72)	0.895795	0.814104	0.0816911	0.56592	0.661643	0.0957233
(0.85, 0.80)	1.3056	1.10434	0.201263	0.8739	1.03352	0.159622
(0.90, 0.81)	1.43489	1.22266	0.212233	1.16397	1.35027	0.186295
(0.99, 0.99)	2.88179	2.66719	0.2146	2.13929	1.99638	0.142905

Tableau 8

$(x_i, t_i)$	$u_{xt}(x_i, t_i)$	$(u_2^{25})_{xt}(x_i, t_i)$	$(e_2^{25})_{xt}(x_i, t_i)$
(0.30, 0.28)	0.031752	0.0245887	0.00716327
(0.39, 0.36)	0.0887047	0.0750938	0.0136109
(0.40, 0.35)	0.0882	0.0747726	0.0134274
(0.53, 0.49)	0.303498	0.283315	0.020183
(0.65, 0.53)	0.534061	0.503078	0.0309836
(0.70, 0.66)	0.960498	0.959023	0.00147524
(0.80, 0.72)	1.49299	1.50484	0.0118512
(0.85, 0.80)	2.0808	2.07541	0.00539478
(0.90, 0.81)	2.39148	2.34776	0.043728
(0.99, 0.99)	4.32268	4.1344	0.188285

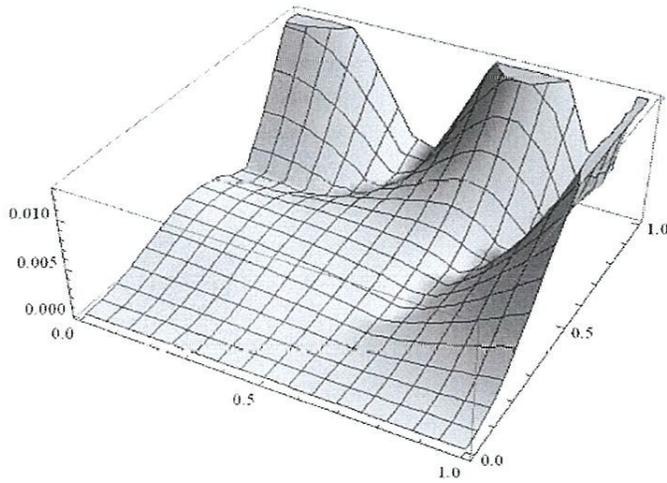


Fig.8.  $e_2^9(x, t) = |u(x, t) - u_2^9(x, t)|$

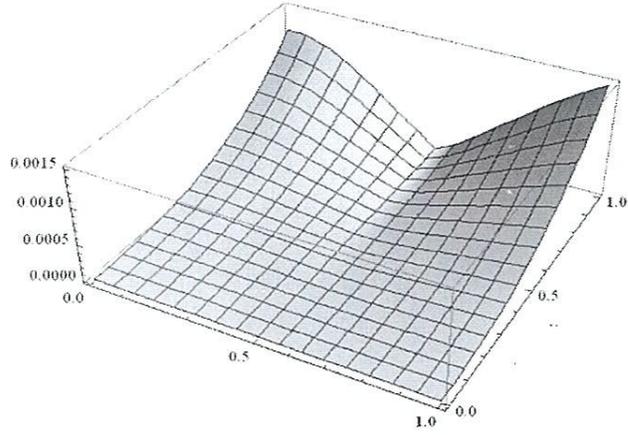


Fig.9.  $e_2^{25}(x, t) = |u(x, t) - u_2^{25}(x, t)|$ .

Maintenant, on fixe  $t = 0.5$ , et on calcule les erreurs absolues .

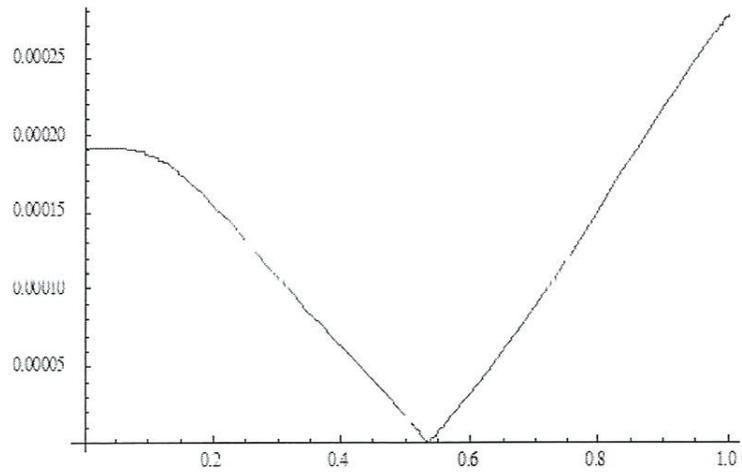


Fig.10.  $e_2^{25}(x, 0.5) = |u(x, 0.5) - u_2^{25}(x, 0.5)|$

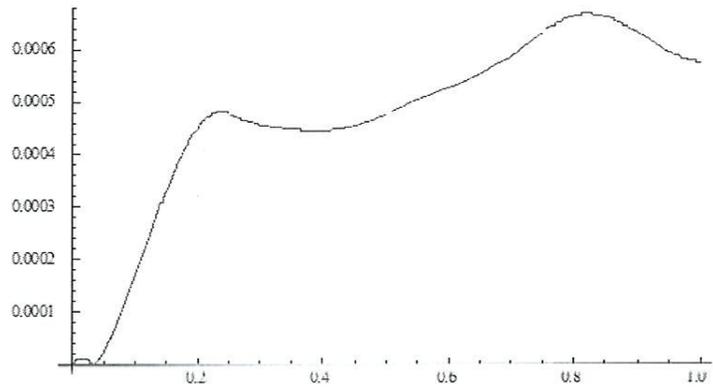


Fig.11.  $(e_2^{25})_x(x, 0.5) = |(u)_x(x, 0.5) - (u_2^{25})_x(x, 0.5)|$

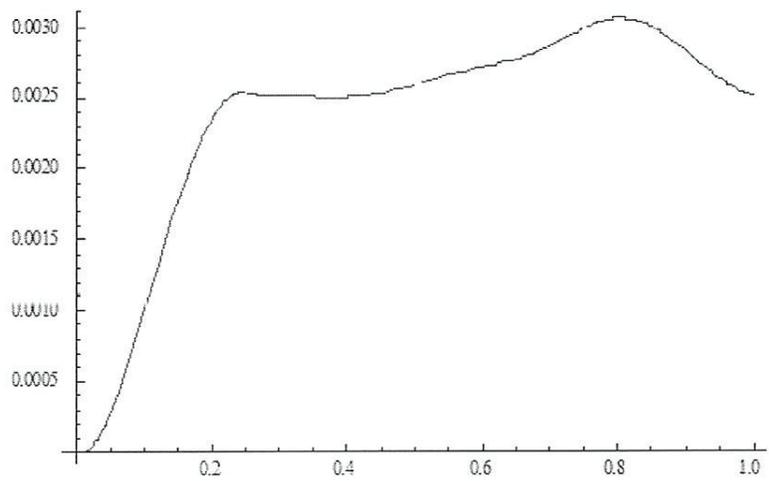


Fig.12.  $(e_2^{25})_{xt}(x, 0.5) = |(u)_{xt}(x, 0.5) - (u_2^{25})_{xt}(x, 0.5)|$

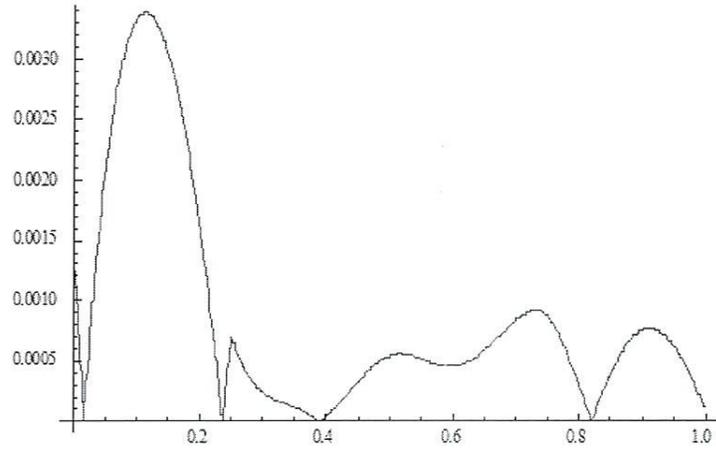


Fig.13.  $(e_2^{25})_{xx}(x, 0.5) = |(u)_{xx}(x, 0.5) - (u_2^{25})_{xx}(x, 0.5)|$

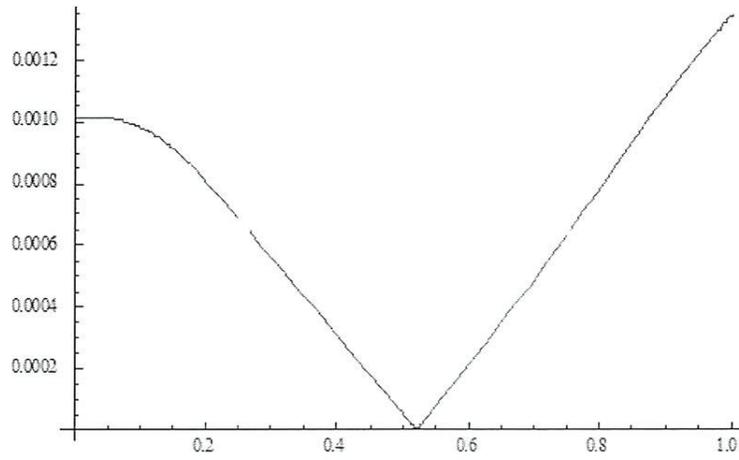


Fig.14.  $(e_2^{25})_t(x, 0.5) = |(u)_t(x, 0.5) - (u_2^{25})_t(x, 0.5)|$

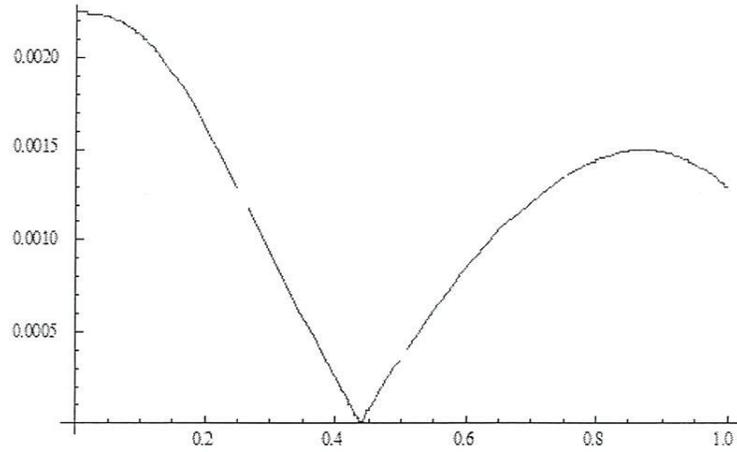


Fig.15.  $(e_2^{25})_{tt}(x, 0.5) = |(u)_{tt}(x, 0.5) - (u_2^{25})_{tt}(x, 0.5)|$

**Conclusion** Dans ce memoire, on a appliqué RKHSM pour résoudre une équation intégro-différentielle hyperbolique avec une condition intégrale. Les résultats numériques ont montré que seul un petit nombre d'itérations peut être utilisé pour obtenir des résultats numériques avec une bonne précision. On constate que les erreurs absolues sont décroissante de façon monotone si  $m$  augmente. Les exemples montrent que la solution approchée et ses dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à deux convergent vers la solution exacte et ses dérivées partielles, respectivement. Par conséquent, on confirme que cette méthode est efficace pour ce type de problème. Tous les calculs sont effectués en utilisant Mathematica 9.0.

# Bibliographie

- [1] N.Aronszajn.Theory of reproducing kernels. Trans. Amer. Math. soc., 68, 1950 :337-404.
- [2] Shakeri F, Dehghan M. The method of lines for solution of the one-dimensional wave equation subject to an integral conservation condition. Computers and Mathematics with Applications 2008 ; 56 :2175–2188
- [3] A. Berlinet and C. Thomas-Agnan, Reproducing Kernel Hilbert Space in Probability and Statistics, Kluwer Academic Publishers, 2004.
- [4] M. Cui and Y. Lin, Nonlinear Numerical Analysis in the Reproducing Kernel Space, Nova Science Publisher, New York, 2008.
- [5] Cui, M., Chen, Z. : How to solve nonlinear operator equation  $A(v^2) + C(v) = f$ . Applied Mathematics and Computation, 2004, 153(2) :403–416.
- [6] Cui Minggen, Du Hong. Representation of exact solution for the nonlinear Volterra-Fredholm integral equations[J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 182(2) :1795–1802.
- [7] Cui Minggen, Geng Fazhan. A computational method for solving one-dimensional variable variablecoefficient Burgers equation[J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 190(2) :1309–1401.
- [8] Cui. M, Du. Hong, Approximate solution of the Fredholm integral equation of the first kind in a reproducing kernel Hilbert space[J]. Applied Mathematics Letters (in press), doi :10.1016/j.aml.2007.07.014.

- [9] Cui. M, Zhongxing Deng, The optimal approximation operator in space  $W_2^1[a, b]$ , Journal of Computational Mathematics, 8 :2(1986)209-216 (in Chinese).
- [10] A. Daniel, Reproducing Kernel Spaces and Applications, Springer, 2003.A.
- [11] A.A. Dezin, General questions in theory of boundary value problems, Moscow. Nauka, English trans, Springer Verlag, (1980).
- [12] Yang Lihong, Cui Minggen. New algorithm for a class of nonlinear integro-differential equations in the reproducing kernel space[J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 174(2) :942–960.
- [13] S. Momani, O. Arqub, M. Al-Smadi, Application of Reproducing Kernel Method for Solving Nonlinear Fredholm-Volterra Integrodifferential Equations, Hindawi Publishing Corporation, Volume 2012, Article ID 839836, 16 pages.
- [14] N. Shawagfeh, M. Al-Smadi, O. Arqub, Approximate Solution of BVPs for 4th-Order IDEs by Using RKHS Method, Applied Mathematical Sciences, Vol. 6, 2012, no. 50, 2453 - 2464.
- [15] H. Yao, Reproducing Kernel Method for the Solution of Nonlinear Hyperbolic Telegraph Equation with an Integral Condition, Numerical Methods for Partial Differential Equations, Volume 27, Issue 4, pages 867–886, July 2011.