République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : **EDP et Analyse numérique**

Par :

AYAD MARWA

Intitulé

Recherche des systèmes différentiels qui acceptent des cycles limites par la méthode de la moyenne

Dirigé par :
BOUATTIA YASSINE
Devant le jury

PRESIDENT	Dr.SELLAMI NABIL	MCB	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr.BOUATTIA YASSINE	MCB	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr.OUANAS NAWEL	MCB	Univ-Guelma

Session Juin 2018

Table des matières

Remerciement

Je tiens tout d'abord à remercier Allah de m'avoir donné la patience pour accomplir ce petit travail.

J'adresse mes remerciements les plus sincères à mon co-encadreur **Dr.BOUATTIA YASSINE** pour les conseils et le temsps précieux qu'il m'a consacré durant ce travail.

J'adresse mes sincéres remerciements à monsieur **Dr SELLEMI NABIL** qui m'a fait l'honneur d'accepter de présider ce jury.

Je remercie chaleureusement, **Mme OUANAS NAWEL** de m'avoir fait l'honneur d'accepter de faire partie de ce jury.

Merci à toutes les prsonnes qui sont venues assister à ma soutenance.

Dédicace

À mon papa et ma mère

À mes sœurs sara, amira et romayssa

À mes potites loulou et israa :)

Je dédie ce travail

Résumé

Dans le prèsent memoire, on a prèsenté dans le deuxième chapitre la méthode de la moyenne pour résuodre des systèmes différentiels en donnant plusieurs exemples.
Le dernier chapitre est conscré à l'étude inverse,qui consiste à détrminer le système connaissant les solutions sous forme des cycles limites.

0.1 Introduction

Nous allons étudier dans ces chapitres des équations différentielles du deuxième ordre.

$$y" = F(y', y) \text{ où } \; y = y(x) \text{ et } \; ' \equiv \frac{d}{dx} \tag{0.1}$$

Ces équations peuvent se transformer en un système de 2 équations différentielles du premier ordre. L'espace des phases est alors un plan. La forme générale d'un tel système est :

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \tag{0.2}$$

Le premier modèle physique publié dans la littérature qui, transformé en un système du type (**0.2**), admette un cycle limite est l'équation :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \varepsilon(\frac{1}{3}(\frac{dy}{dt})^3 - \frac{dy}{dt}) + y = 0 \tag{0.3}$$

établie par Rayleigh (1945) et qui modélise les oscillations d'une corde de violon.

• Dans les années vingt, Balthasar van der Pol, un ingénieur hollandais, étudiait les propriétés électriques des tubes à néon (van der Pol, 1922). A cette époque là, les oscilloscopes n'existant pas encore, il surveillait l'évolution de son circuit en écoutant les changements de tonalité dans un combiné téléphonique. Il modélisa les charges et décharges du tube par l'équation qui porte maintenant son nom :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + x = 0 \tag{0.4}$$

On voit que si on dérive l'équation (**0.3**) par rapport à t et que si l'on note $x = \frac{dy}{dt}$, on retrouve l'équation (**0.4**) Ces deux équations sont donc équivalentes.

• Liénard un ingénieur français, établit un théorème d'existence et d'unicité d'une solution périodique pour une classe générale d'équations dont fait partie l'équation (**0.4**) :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon f(x)\frac{dx}{dt} + x = 0 \tag{0.5}$$

• Levinson & Smith (1942) ont suggéré de généraliser l'équation (**0.5**) :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon f(x)\frac{dx}{dt} + G(x) = 0 \tag{0.6}$$

et qui est connu sous le nom d'équation de Liénard généralisé.

• Le problème fondamental lié à l'équation (**0.6**) est le nombre de solutions périodiques isolées (i.e. cycles limites) qui peuvent exister simultanément. Imaginons que l'équation (**0.6**) décrit le mouvement d'un oscillateur. Si cette équation a un cycle limite globalement attracteur alors l'oscillateur va évoluer, après un régime transitoire, selon un mouvement périodique. Le point important est que la période de ce mouvement sera la même quelle que soit la condition initiale !

On voit donc que la présence d'un cycle limite peut être une propriété importante d'une équation surtout si cette équation est une horloge !

Le premier chapitre est un rappel des notions générale .Nous commençons par définir les systèmes dynamiques, les points critiques .Ensuite nous introduisons la notion d'un cycle limite et l'amplitude d'un cycle limite d'un système planaire .puis nous introduisons la définition de la stabilité avec quelques exemples .Dans le chapitre deux nous introduisons la méthode de la moyenne pour l'étude des cycles limites d'un centre linéaire. Nous commençons par le théorème de cas général avec sa preuve et nous étudions des exemples par sa méthode.Dans le dernier chapitre nous étudions des systèmes différentiels qui acceptent des cycles limites comme solution

Chapitre 1

Notions préliminaires

Résumé

Dans ce chapitre, nous rappelons des notions générales. Nous commençons par définir les systèmes dynamiques, les points critiques et le système linéarisé d'un système non linéaire au voisinage d'un point d'équilibre. Ensuite nous introduisons la notion d'un cycle limite et l'amplitude d'un cycle limite d'un système planaire. Puis nous introduisons la stabilité d'une solution d'un système différentiel.

1.1 Systèmes dynamiques, points critiques :

1.1.1 Définition

Un système dynamique sur $\mathbb{R}^n$ est une application :

$$U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

définie sur tout $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, telle que :

•$U(.,x) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ est continue.

•$U(t,.) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est continue.

•$U(0,x) = x$

•$U(t+s,x) = U(t,U(s,x))$ pour $t,s \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Soit le système linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}^+, \ x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.1}$$

où A est une matrice constante. la solution de (1.1) est :

$$x(t) = e^{tA}x_0$$

le système (1.1) engendre un système dynamique, car l'application :

$$U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

qui à tout $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}^n$ associe :

$$U(t,x) = e^{tA}x \tag{1.2}$$

vérifie les quatre propriété précédentes

1.2 Portrait de phase et cycles limites

1.2.1 Définition

Soit le système planaire :

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y) \\ \dot{y} = Q(x,y) \end{cases} \tag{1.3}$$

où P, Q sont des polynômes en x et y. les solutions $(x(t), y(t))$ du système (1.3) représentent dans le plan (x, y) des courbes appelés orbites. Les points critiques de ce système sont des solutions constantes et la figure complète des orbites de ce système ainsi que ces points critiques représentés dans le plan (x, y) s'appelle portrait de phase, et le plan (x, y) est appelé plan de phase.

1.2.2 Définition :

Une solution périodique du système (1.3) est une solution telle que :

$$(x(t+T), y(t+T)) = (x(t), y(t)) \text{ pour } T > 0$$

A toute solution périodique correspond une orbite fermée dans l'espace des phases.

1.2.3 Définition

Un cycle limite du système (1.3) est une orbite fermée isolée, c'est à dire qu'on ne peut pas trouver une autre orbite fermée dans son voisinage.

1.2.4 Définition

L'amplitude d'un cycle limite est la valeur maximale de la variable x sur le cycle limite

1.3 Stabilité

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R} \tag{1.4}$$

1.3.1 Définition

Une solution $\Phi(t)$ du système (1.4) telle que $\Phi(t_0) = \Phi_0$ est dite stable au sens de Lyapunov si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, tel que toute solution $x(t)$ de (1.4) dont la valeur initiale $x(t_0)$ vérifie

$$\|x(t_0) - \Phi_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - \Phi(t)\| < \varepsilon, \ \forall t \geq t_0,$$

si en plus de cette définition on a

$$\lim_{t \to +\infty} \|x(t) - \Phi(t)\| = 0$$

alors la solution est dite asymptotiquement stable.

Quand $\Phi(t) = 0$ la définition devient :

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, tel que toute solution $x(t)$ de (1.4) dont la valeur initiale $x(t_0)$ vérifie

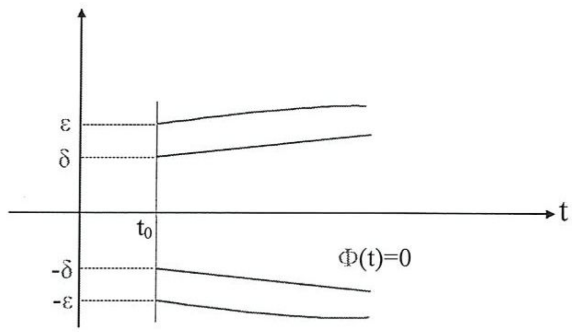
$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \ \forall t \geq t_0,$$

si en plus

$$\lim_{t \to +\infty} \|x(t)\| = 0,$$

alors $\Phi(t) = 0$ est asymptotiquement stable.

Pour $n = 1$ on a :



L'étude de la stabilité de la solution $\Phi(t)$ peut être ramenée à celle de la solution nulle $y = 0$ d'un système (Analogue) au système (1.4).

En effet : posons $y(t) = x(t) - \Phi(t)$ où $y(t)$ est la nouvelle fonction inconnue.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dy}{dt} + \frac{d\Phi(t)}{dt} = f(t, y + \Phi) \\ \frac{dy}{dt} &= f(t, y + \Phi) - f(t, \Phi) \\ &= g(t, y) \end{aligned}$$

On voit bien que $y \equiv 0$ est une solution de ce système.

Exemple 1 :$(n = 1)$

$$\frac{dx}{dt} = -x + 1; \; x(0) = 1.$$

La solution telle que $x(0) = x_0$ est :

$$x(t) = (x_0 - 1)e^{-t} + 1.$$

La solution $\Phi(t)$ telle que $\Phi(0) = 1$ est $\Phi(t) = 1$

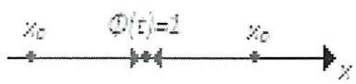
$$|x(t) - \Phi(t)| = \left|(x_0 - 1)e^{-t}\right| < |x_0 - 1|, \; \forall t > 0.$$

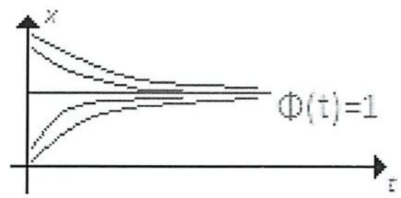
Il suffit de prendre $\delta \leq \varepsilon$; $\delta = \varepsilon \Rightarrow \Phi(t)$ est stable.

Stabilité asymptotique :

$$\lim_{t \to +\infty} \|x(t) - \Phi(t)\| = \lim_{t \to +\infty} \left|(x_0 - 1)e^{-t}\right| = 0,$$

d'où $\Phi(t)$ est asymptotiquement stable





Exemple 2 :$(n = 2)$.

Soit le système :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases} ; \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La esolution qui vérifie $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ est :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \cos t - y_0 \sin t \\ x_0 \sin t + y_0 \cos t \end{pmatrix} ; \ \Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0$ telle que :

$$\left\| \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\| < \delta \Rightarrow \left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right\| < \varepsilon \,; \forall t > 0,$$

$$\left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right\| = |x(t)| + |y(t)| = |x_0 \cos t - y_0 \sin t| + |x_0 \sin t + y_0 \cos t| < 2(|x_0| + |y_0|)$$

$$= 2 \left\| \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\| < 2\delta \text{ ; On prend } \delta \leq \frac{\varepsilon}{2};\ \delta = \frac{\varepsilon}{2}$$

d'où $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est stable au sens de Lyapunov.

$$\lim_{t\to+\infty} \left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 = \lim_{t\to+\infty} x^2(t) + y^2(t) = x_0^2 + y_0^2 = c > 0 \nrightarrow 0$$

donc la solution n'est pas asymptotiquement stable.

Remarque : Il est possible que la solution $\Phi(t)$ soit non bornée et stable et même asymptotiquement stable. De même il est possible que la solution soit bornée et non stable.

• Dans le premier cas, on a les deux exemples.

1) $\frac{dx}{dt} = 1$; $x(0) = 0$.

2) $\frac{dx}{dt} = -x + t + 1$; $x(0) = 0$.

• Dans le deuxième cas, on a l'exemple.

$\frac{dx}{dt} = \sin^2(x)$; $x(0) = 0$, $\Phi(t) \equiv 0$.

Exemples :

a) $\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$.

$$x = x_1 \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \end{cases}.$$

La solution $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ de ce système est asymptotiquement stable.

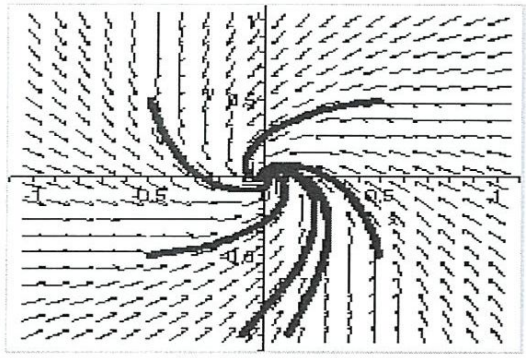


Fig. Foyer stable.

b) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}.$

$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est asymptotiquement stable.

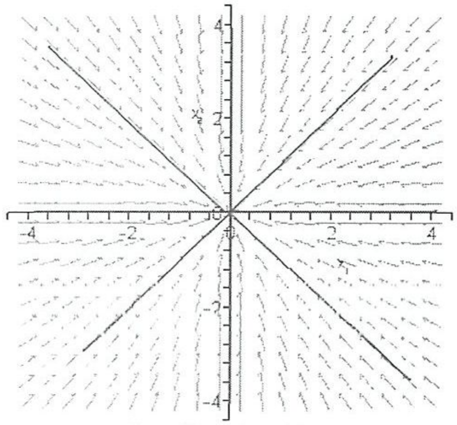


Fig. Noeud stable.

Chapitre 2

Méthode de la moyenne

Résumé

Dans ce chapitre, nous introduisons l'étude des cycles limites de quelques systèmes différentiels en utilisant la méthode de la moyenne

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \varepsilon P(x) \\ \dot{y} = -x + \varepsilon Q(x) \end{cases}, \qquad 0 <\mid \varepsilon \mid \ll 1$$

où P et Q sont des polynômes. Nous avons calculé l'amplitude des cycles limites de quelques classes d'équation différentielle.

2.1 Théorème

Considérons les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon F(t,x) + \varepsilon^2 G(t,x,\varepsilon) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} \dot{y} = \varepsilon f^0(y) \\ y(0) = x_0 \end{cases} \tag{2.2}$$

où $x, y, x_0 \in D$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $t \in [0, \infty)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, F et G sont périodiques de période T par rapport à la variable t ; et $f^0(y)$ est la fonction moyenne de $F(t,y)$ en ce qui concerne t c-à-d.

$$f^0(y) = \frac{1}{T}\int_0^T F(t,y)dt$$

on suppose :

(i) $F, \partial F/\partial x, \partial^2 F/\partial x^2, G, \partial G/\partial x$ sont définies, continues et bornées par une constante indépendante de ε dans $[0, \infty) \times D$ et $\varepsilon \in (0.\varepsilon_0]$.

(ii) T est une constante indépendante de ε.

(iii) $y(t)$ appartient à D sur le temps échelle $1/\varepsilon$.

alors les propriétés sont vérifiées.

(a) sur le temps échelle $1/\varepsilon$ on a $x(t) - y(t) = O(\varepsilon)$, quand $\varepsilon \to 0$.

(b) si p est un point d'équilibre du système moyenne (2.1), tel que

$$\left[\frac{\partial f^0}{\partial y}\right]_{y=p} \neq 0 \tag{2.3}$$

alors il existe une solution T périodique $\Psi(t, \varepsilon)$ de l'équation (2.1) proche de p tel que

$$\begin{aligned} \Psi(t,\varepsilon) &\to p. \\ \varepsilon &\to 0 \end{aligned}$$

(c) si (2.3) est négative, alors la solution périodique correspondante de $\Psi(t,\varepsilon)$ de l'équation (2.2) dans l'espace (t,x) est asymptotiquement stable pour ε suffisamment petit. Si (2.3) est positif, alors c'est instable.

Preuve :tout d'abord, nous allons imposer les conditions périodiques et nous pouvons le théorème de fonction implicite. Nous transformons $x \longrightarrow z$

$$x(t) = z(t) + \varepsilon u(t, z(t))$$

L'équation devient pour z

$$\dot{z} = \varepsilon f^0(z) + \varepsilon^2 R(t, z, \varepsilon) \tag{2.4}$$

En raison du choix de $u(t, z(t))$ une solution T-périodique de $z(t)$ produite a une solution T-périodique de $x(t)$ de $\mathbb{R}$, nous avons l'expression

$$R(t,z,\varepsilon) = \frac{\partial F}{\partial z}(t,z)u(t,z) - \frac{\partial u}{\partial z}u(t,z)f^0(z) + G(t,z,0) + 0(\varepsilon)$$

Cette expression et T-périodique en t et continue de la variable à l'égart de z l'équation (2.4) est équivalente à l'équation intégrale

$$z(t) = z(0) + \varepsilon \int_0^t f^0(z(s))ds + \varepsilon^2 \int_0^t R(s, z(s), \varepsilon)ds$$

La solution $z(t)$ est T-périodique si

$$z(t+T) = z(t), \forall t \geq 0$$

pour tout ce qui conduit à l'équation

$$h(z(0),\varepsilon) - \int_0^T f^0 z(0)ds + \varepsilon \int_0^T R(\varepsilon, z(\varepsilon), \varepsilon)d\varepsilon - 0 \tag{2.5}$$

Il est claire que $h(p,0)=0$ avec ε dans un voisinage de $\varepsilon=0$ l'équation (2.5) admise une solution unique $z(0)$ en raison de l'hypothèse sur le Jacobi déterminant de l'équation (2.4).

si $\varepsilon \to 0$ alors $z(0) \to p$.

2.2 Forme générale

Soit l'équation :

$$\ddot{x} + \varepsilon f(x)\dot{x} + x = 0 \tag{2.6}$$

qui équivalente à le système

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - \varepsilon f(x) y \end{cases} \tag{2.7}$$

qui équivalente aussi à le système

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon F(x) \\ \dot{y} = -x \end{cases} \tag{2.8}$$

où f et une fonction paire et

$$F(x) = \int_0^x f(s)ds$$

En posant $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \cos\theta\dot{x} + \sin\theta\dot{y} \\ &= \cos\theta r\sin\theta - \sin\theta(r\cos\theta + \varepsilon r\sin\theta f(r\cos\theta)) \\ &= -\varepsilon r\sin^2\theta f(r\cos\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\theta} &= \dot{\widehat{\arctan(\frac{y}{x})}} = \frac{1}{r}(\cos\theta\ \dot{y} - \sin\theta\ \dot{x}) \\
&= \frac{1}{r}(-\cos\theta(r\cos\theta + \varepsilon r\sin\theta\ f(r\cos\theta)) - \sin\theta(r\sin\theta)) \\
&= -1 - \varepsilon\cos\theta\sin\theta\ f(r\cos\theta)
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} &= \frac{dr}{d\theta} = \frac{\varepsilon r\sin^2\theta f(r\cos\theta)}{-1 - \varepsilon\cos\theta\sin\theta f(r\cos\theta)} \\
&= \varepsilon r\sin^2\theta f(r\cos\theta) + \varepsilon^2 G(\theta, r, \varepsilon)
\end{aligned}$$

Exemple 1 : Soit l'équation suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \varepsilon x(x^2+1) \\ \dot{y} = -x + \varepsilon y(-4x^2 - \frac{5}{4}) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= \cos\theta\dot{x} + \sin\theta\dot{y} \\
&= \cos\theta[r\sin\theta + \varepsilon r\cos\theta(r^2\cos^2\theta + 1)] + \sin\theta[-r\cos\theta + r\varepsilon\sin\theta(-4r^4\cos^4\theta - \frac{5}{4})] \\
&= \varepsilon r(-4r^4\cos^4\theta\sin^2\theta + r^2\cos^4\theta + \cos^2\theta - \frac{5}{4}\sin^2\theta)
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
\dot{\theta} &= \dot{\widehat{\arctan(\frac{y}{x})}} = \frac{1}{x}(\cos\theta\dot{y} - \sin\theta\dot{x}) \\
&= \frac{1}{r}\cos\theta[-r\cos\theta + \varepsilon r\sin\theta(-4r^2\cos^4\theta - \frac{5}{4})] \\
&= \frac{1}{r}\cos\theta[-r\cos\theta + \varepsilon r\sin\theta(-4r^2\cos^4\theta - \frac{5}{4})] - \frac{1}{r}\sin\theta[r\sin\theta + \varepsilon r\cos\theta(r^2\cos^2\theta + 1)] \\
&= -1 + \varepsilon\cos\theta\sin\theta(-4r^4\cos^4\theta - r^2\cos^2\theta - \frac{9}{4})
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\frac{\dot r}{\dot\theta} &= \frac{\varepsilon r(-4r^4\cos^4\theta\sin^2\theta + r^2\cos^4\theta+\cos^2\theta-\frac{5}{4}\sin^2\theta)}{-1+\varepsilon\cos\theta\sin\theta(-4r^4\cos^4\theta-r^2\cos^2\theta-\frac{9}{4})}\\
&= \underbrace{-\varepsilon r(-4r^4\cos^4\theta\sin^2\theta + r^2\cos^4\theta+\cos^2\theta-\frac{5}{4}\sin^2\theta)}_{=F(r,\theta)}+\varepsilon^2 G(r,\theta,\varepsilon)\\
&= \varepsilon r(4r^4\cos^4\theta\sin^2\theta - r^2\cos^4\theta-\cos^2\theta+\frac{5}{4}\sin^2\theta)
\end{aligned}$$

On a :

$$z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z+\frac{1}{z} = 2\cos\theta \\ z-\frac{1}{z} = 2i\sin\theta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}) \\ \sin\theta = \frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z}) \end{cases} \Longrightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{4}(z^2+\frac{1}{z^2}+2)$$

$$\frac{1}{z} = e^{-in\theta} = \cos n\theta - i\sin n\theta \Rightarrow \begin{cases} z^n+\frac{1}{z^n} = 2\cos n\theta \\ z^n-\frac{1}{z^n} = 2i\sin n\theta \end{cases}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

$$\begin{aligned}
cos^4\theta &= \frac{1}{16}(z+\frac{1}{z})^4 \Rightarrow \sum_{k=0}^{4} C_4^k a^{4-k}b^k = C_4^0 z^4 + C_4^1 z^3\frac{1}{z} + C_4^2 z^2\frac{1}{z^2} + C_4^3 z\frac{1}{z^3} C_4^4\frac{1}{z^4}\\
&= \frac{1}{16}(z^4+4z^2+6+4\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f^0(r) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta,r)d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}r\int_0^{2\pi} (4r^4\cos^4\theta\sin^2\theta - r^2\cos^4\theta - \cos^2\theta + \frac{5}{4}\sin^2\theta)d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}r\int_0^{2\pi} (4r^4\cos^4\theta - 4r^4\cos^6\theta - r^2\cos^4\theta - \cos^2\theta + \frac{5}{4} - \frac{5}{4}\cos^2\theta)d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}r\int_0^{2\pi} 4r^4\frac{3}{8} - 4r^4\frac{5}{16} - r^2\frac{3}{8} - \frac{1}{2} + \frac{5}{4} - \frac{5}{4}.\frac{1}{2})d\theta \\
&= \frac{1}{4}r(r^4 - \frac{3}{2}r^2 + \frac{1}{2}) \\
&= \frac{1}{4}r(r^2 - \frac{1}{2})(r^2 - 1)
\end{aligned}
$$

Alors :

$$f^0(0) = 0 \Rightarrow \frac{1}{4}r(r^2 - \frac{1}{2})(r^2 - 1) = 0 \Rightarrow r_1 = \frac{1}{\sqrt{2}};\ r_2 = 1$$

Donc il existe deux cycles limites d'amplitude $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et 1.

$$\left[\frac{\partial f}{\partial r}\right]_{r=\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{4}\left[5r^4 - \frac{9}{2}r^2 + \frac{1}{2}\right]_{r=\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\frac{1}{8}\ (< 0)$$

donc le cycle limite d'amplitude $\frac{1}{\sqrt{2}}$ est stable.

$$\left[\frac{\partial f}{\partial r}\right]_{r=1} = \frac{1}{4}\left[5r^4 - \frac{9}{2}r^2 + \frac{1}{2}\right]_{r=1} = \frac{1}{4}\ (> 0)$$

donc le cycle limite d'amplitude 1 est instable.

Exemple 2

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon x\left(x^4 - x^2 + 1\right) \\ \dot{y} = x + \varepsilon y\left(y^4 + \frac{43}{108}y^2 - \frac{139}{144}\right) \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
\dot{r} &= \cos\theta \dot{x} + \sin\theta \dot{y} \\
&= \cos\theta \left(-r\sin\theta + \varepsilon r\cos\theta \left(r^4\cos^4\theta - r^2\cos^2\theta + 1\right)\right) \\
&\quad + \sin\theta \left(r\cos\theta + \varepsilon r\sin\theta \left(r^4\sin^4\theta + \frac{43}{108}r^2\sin^2\theta - \frac{139}{144}\right)\right) \\
&= \varepsilon \left(r^5\left(\cos^6\theta + \sin^6\theta\right) + r^3\left(-\cos^4\theta + \frac{43}{108}\sin^4\theta\right) + r\left(\cos^2\theta - \frac{139}{144}\sin^2\theta\right)\right) \\
&= \varepsilon r \left(r^4\left(\cos^6\theta + \sin^6\theta\right) + r^2\left(-\cos^4\theta + \frac{43}{108}\sin^4\theta\right) + \left(\cos^2\theta - \frac{139}{144}\sin^2\theta\right)\right)
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\dot{\theta} &= \dot{\widehat{\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}} = \frac{1}{r}(\cos\theta\ \dot{y} - \sin\theta\ \dot{x}) \\
&= \frac{1}{r}\cos\theta \left[r\cos\theta + \varepsilon r\sin\theta \left(r^4\sin^4\theta + \frac{43}{108}r^2\sin^2\theta - \frac{139}{144}\right)\right] \\
&\quad - \frac{1}{r}\sin\theta \left[-r\sin\theta + \varepsilon r\cos\theta \left(r^4\cos^4\theta - r^2\cos^2\theta + 1\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\dot{\theta} = 1 + \varepsilon\cos\theta\sin\theta \left(r^4\sin^4\theta - r^4\cos^4\theta + \frac{43}{108}r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta - \frac{139}{144} - 1\right)
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
\frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} &= \frac{\varepsilon r\left(r^4(\cos^6\theta + \sin^6\theta + r^2\left(-\cos^4\theta + \frac{43}{108}\sin^4\theta\right) + \left(\cos^2\theta - \frac{139}{144}\sin^2\theta\right)\right)}{1 + \varepsilon\cos\theta\sin\theta\left(r^4\sin^4\theta - r^4\cos^4\theta + \frac{43}{108}r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta - \frac{139}{144} - 1\right)} \\
&= \underbrace{\varepsilon r\left(r^4(\cos^6\theta + \sin^6\theta + r^2\left(-\cos^4\theta + \frac{43}{108}\sin^4\theta\right) + \left(\cos^2\theta - \frac{139}{144}\sin^2\theta\right)\right)}_{=F(\theta,r)} + \varepsilon^2\mathcal{O}(\varepsilon,\theta,r)
\end{aligned}
$$

d'où

$$
\begin{aligned}
f^0(r) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} F(\theta, r)d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}r\int\limits_0^{2\pi}\left[r^4\left(\cos^6\theta + \sin^6\theta\right) + r^2\left(-\cos^4\theta + \frac{43}{108}\sin^4\theta\right)\right]d\theta \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}r\int\limits_0^{2\pi}(\cos^2\theta - \frac{139}{144}\sin^2\theta)d\theta \\
&= r\left(r^4 - \frac{13}{36}r^2 + \frac{1}{36}\right)
\end{aligned}
$$

Alors

$$f^0(r) = 0 \Rightarrow \frac{5}{8}r\left(r^4 - \frac{13}{36}r^2 + \frac{1}{36}\right) = 0 \Rightarrow r_1 = \frac{1}{2}; r_2 = \frac{1}{3}$$

Donc il existe deux cycles limites d'amplitudes $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$.

On a

$$\left[\frac{\partial f^0}{\partial r}\right]_{r=\frac{1}{2}} = \frac{5}{8}\left[5r^4 - \frac{13}{36}r^2 + \frac{1}{36}\right]_{r=\frac{1}{2}} = \frac{25}{576}, \qquad (> 0)$$

Donc le cycles limites d'amplitude $\frac{1}{2}$ est instable.

$$\left[\frac{\partial f^0}{\partial r}\right]_{r=\frac{1}{3}} = \frac{5}{8}\left[5r^4 - \frac{13}{36}r^2 + \frac{1}{36}\right]_{r=\frac{1}{3}} = -\frac{25}{1296} \qquad (< 0)$$

Donc le cycles limites d'amplitude $\frac{1}{3}$ est stable.

Chapitre 3

Système différentiels qui acceptent des cycles limites comme solution

3.1 Application du l'équation de Liénard

Soit l'équation de Liénard suivante :

$$\ddot{x} + \varepsilon f(x)\dot{x} + x = 0 \tag{3.1}$$

qui équivalente à le système

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon F(x) \\ \dot{y} = -x \end{cases} \tag{3.2}$$

qui équivalente aussi à le système

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - \varepsilon f(x)y \end{cases} \tag{3.3}$$

Exemple 1 :

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon F(x) \\ \dot{y} = -x \end{cases} \qquad (*)$$

F est impair

pour le système (*) admet deux cycles limites

$$F(x) = a_5 x^5 + a_3 x^3 + a_1 x$$

On a

$$\begin{cases} \dot{r} = \cos\theta \dot{x} + \sin\theta \dot{y} \\ \quad = \cos\theta(r\sin\theta - \varepsilon(a_5 r^5 \cos^5\theta + a_3 r^3 \cos^3\theta + a_1 r\cos\theta)) + \sin\theta(-r\cos\theta) \\ \quad = -\varepsilon(a_5 r^5 \cos^6\theta + a_3 r^3 \cos^4\theta + a_1 r\cos^2\theta) \end{cases}$$

$$\dot{\theta} = \frac{1}{r}(\cos\theta \dot{y} - \sin\theta \dot{x})$$

et

$$\begin{aligned} r\dot{\theta} &= \cos\theta(-r\cos\theta) - \sin\theta(r\sin\theta - \varepsilon(a_5 r^5 \cos^5\theta + a_3 r^3 \cos^3\theta + a_1 r\cos\theta)) \\ &= -r + \varepsilon(a_5 r^5 \cos^5\theta \sin\theta + a_3 r^3 \cos^3\theta \sin\theta + a_1 r\cos\theta\sin\theta) \end{aligned}$$

alors

$$\dot{\theta} = -1 + \varepsilon(a_5 r^4 \cos^5\theta \sin\theta + a_3 r^2 \cos^3\theta \sin\theta + a_1 r\cos\theta\sin\theta)$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \frac{\varepsilon r(a_5 r^4 \cos^6\theta + a_3 r^2 \cos^4\theta \sin\theta + a_1 \cos^2\theta)}{1 - \varepsilon(a_5 r^4 \cos^5\theta \sin\theta + a_3 r^2 \cos^3\theta \sin\theta + a_1 r\cos\theta\sin\theta)} \\ &= -r + \varepsilon(a_5 r^5 \cos^5\theta \sin\theta + a_3 r^3 \cos^3\theta \sin\theta + a_1 r\cos\theta\sin\theta) \end{aligned}$$

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F(r,\theta) + \varepsilon G(\theta, r, \varepsilon)$$

On obtient

$$f^0(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta, r)d\theta$$

$$\begin{aligned}
\frac{2\pi}{r} f^0(r) &= a_5 r^4 \int_0^{2\pi} \cos\theta^6 + a_3 r^2 \int_0^{2\pi} \cos^4\theta + a_1 \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \\
&= a_5 r^4 (\frac{5}{16}.2\pi) + a_3 r^2 (\frac{3}{8}.2\pi) + a_1(\frac{1}{2}.2\pi) \\
&= \frac{5}{8}\pi a_5 r^4 + \frac{3}{8}\pi a_3 r^2 + \pi a_1
\end{aligned}$$

$$f^0(r) = r(\frac{5}{16}a_5 r^4 + \frac{3}{8}a_3 r^2 + \frac{1}{2}a_1)$$

$$r_1 = 1, r_2 = 2$$

$$\begin{aligned}
f^0(r) &= r(r^2-1)(r^2-4) \\
&= r(r^4 - 5r^2 + 4)
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{cases} \frac{5}{16}a_5 = 1 \\ \frac{3}{8}a_3 = -5 \\ \frac{1}{2}a_1 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_5 = \frac{5}{16} \\ a_3 = \frac{-40}{3} \\ a_1 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon\left(\frac{5}{16}x^5 + \frac{-40}{3}x^3 + 8x\right) \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

on pose $8\varepsilon = \varepsilon'$ on obtient finalement

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon'\left(\frac{2}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + x\right) \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

Exemple 2 :

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - \varepsilon f(x) y \end{cases} \qquad (**)$$

où f est paire

Pour le système (**) admet trois cycles limites

$$f(x) = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + a_6 x^6$$

On a

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \cos\theta \dot{x} + \sin\theta \dot{y} \\ &= -\varepsilon r \sin^2\theta (a_0 + a_2 r^2 \cos^2\theta + a_4 r^4 \cos^4\theta + a_6 r^6 \cos^6\theta) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} r\dot{\theta} &= \cos\theta \dot{y} - \sin\theta \dot{x} \\ &= \cos\theta(-r\cos\theta - \varepsilon(a_0 + a_2 r^2 \cos^2\theta + a_4 r^4 \cos^4\theta + a_6 r^6 \cos^6\theta) r \sin\theta) - \sin\theta (r \sin\theta) \\ &= -r - \varepsilon r \cos\theta \sin\theta (a_0 + a_2 r^2 \cos^2\theta + a_4 r^4 \cos^4\theta + a_6 r^6 \cos^6\theta) \end{aligned}$$

alors

$$\dot{\theta} = -1 - \varepsilon r \cos\theta \sin\theta (a_0 + a_2 r \cos^2\theta + a_4 r^3 \cos^4\theta + a_6 r^5 \cos^6\theta)$$

donc

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon r \sin^2\theta (a_0 + a_2 r^2 \cos^2\theta + a_4 r^4 \cos^4\theta + a_6 r^6 \cos^6\theta) + \varepsilon G(\varepsilon, r, \theta)$$

on obtient

$$
\begin{aligned}
f^0(r) &= \frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2\theta(a_0 + a_2 r^2\cos^2\theta + a_4 r^4\cos^4\theta + a_6 r^6\cos^6\theta)d\theta \\
&= \frac{r}{2\pi}[a_0(\frac{1}{2}2\pi) + a_2 r^2(\frac{1}{8}2\pi) + a_4 r^4(\frac{1}{16}2\pi) + a_6 r^6(\frac{5}{16}2\pi) \\
&= r[a_0\frac{1}{2} + \frac{1}{8}a_2 r^2 + \frac{1}{16}a_4 r^4 + \frac{5}{16}a_6 r^6) \\
&= r(r^2-1)(r^2-4)(r^2-9) \\
&= (r^4 - 5r^2 + 4)(r^2-9) \\
&= r^6 - 14r^4 + 49r^2 - 36
\end{aligned}
$$

d'où

$$
\left\{
\begin{array}{c}
\frac{a_0}{2} = -36 \\
\frac{1}{8}a_2 = 49 \\
\frac{1}{16}a_4 = -14 \\
\frac{5}{16}a_6 = 1
\end{array}
\right.
\Rightarrow
\left\{
\begin{array}{c}
a_0 = -72 \\
a_2 = 392 \\
a_4 = -224 \\
a_6 = \frac{16}{5}
\end{array}
\right.
$$

où $\tilde{\varepsilon} = \frac{8}{5}\varepsilon$ on obtient finalement

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\dot{x} = y \\
\dot{y} = -x + \tilde{\varepsilon}(45 - 245x^2 + 140x^4 - 2x^6)y
\end{array}
\right.
$$

Exemple 3 :

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - \varepsilon f(x) \cdot y \end{cases} \qquad (***)$$

où f est paire

pour le système (***) admet deux cycles limites

$$f(x) = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4$$

On a

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \cos\theta \dot{x} + \sin\theta \dot{y} \\ &= \cos\theta(r \sin\theta) + \sin\theta - r\cos\theta - \varepsilon(a_0 + r^2 a_2 x^2 + r^4 a_4 x^4)) r \sin\theta \\ &= -\varepsilon r \sin^2\theta(a_0 + r^2 a_2 x^2 + r^4 a_4 x^4) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} r\dot{\theta} &= \cos\theta \dot{y} - \sin\theta \dot{x} \\ &= \cos\theta(-r\cos\theta - \varepsilon(a_0 + r^2 a_2 x^2 + r^4 a_4 x^4)) r \sin\theta - \sin\theta(r \sin\theta) \\ &= -r - \varepsilon r \cos\theta \sin\theta(a_0 + r^2 a_2 x^2 + r^4 a_4 x^4) \end{aligned}$$

alors

$$\dot{\theta} = -1 - \varepsilon \cos\theta \sin\theta(a_0 + r^2 a_2 x^2 + r^3 a_4 x^4)$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \frac{\varepsilon r \sin^2\theta(a_0 + r^2 a_2 x^2 + r^4 a_4 x^4)}{-1 - \varepsilon \cos\theta \sin\theta(a_0 + r^2 a_2 x^2 + r^3 a_4 x^4)} \\ &= \varepsilon r \sin^2\theta(a_0 + r^2 a_2 x^2 + r^4 a_4 x^4) + \varepsilon^2 G(\varepsilon, r, \theta) \end{aligned}$$

on obtient

$$f^0(r) = \frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2\theta(a_0 + r^2a_2x^2 + r^4a_4x^4)d\theta$$

ou

$$\begin{aligned} f^0(r) &= \frac{r}{2\pi}\left(a_0(\frac{1}{2}2\pi) + a_2r^2(\frac{1}{8}2\pi) + a_4r^4(\frac{1}{16}2\pi)\right) \\ &= r(a_0\frac{1}{2} + \frac{1}{8}a_2r^2 + \frac{1}{16}a_4r^4) \\ &= r(r^2-1)(r^2-4) \\ &= r(r^4 - 5r^2 + 4) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{cases} \frac{1}{16}a_4 = 1 \\ \frac{1}{8}a_2 = -5 \\ a_0\frac{1}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_4 = 16 \\ a_2 = -40 \\ a_0 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon(16x^4 - 40x^2 + 8) \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

on pose $8\varepsilon = \grave{\varepsilon}$ on obtient finalement

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \grave{\varepsilon}(2x^4 - 5x^2 + 1) \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

Bibliographie

[1] **BOUATTIA YASSINE.**Memoire de magister."Cycles limites de l'équation de Liénard dans les régimes fort et faible" Université de Annaba. (2006).

[2] **L PERKO.**"Differential equations and dynamical systems", Texts in Applied Mathematics, 7. Third edition. Springer-Verlag, New York, (2001).

[3] **SĔBASTIEN. NEUKIRCH.**Thèse de doctorat."Les attracteurs des systèmes dynamiques dissipatifs de Lorenz et de Liénard, nombre, forme et localisation" Université Paris 6

[4] **OUANAS NAWEL.**Thèse de doctorat."Cycles limites des systèmes différentiels de Liénard perturbés" Université de Annaba (2013)

[5] **SELLAMI NABIL** Memoire de magister."Cycles limites des systèmes proies prédateurs" Université de Annaba (2005).