République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : **EDP et Analyse numérique**

Par

Bouadila Amina

Intitulé

Etude de solution positive pour équations différentielles d'ordre fractionnaire

Dirigé par : Mme. TABOUCHE NORA

Devant le jury

PRESIDENT	Dr:	R. DEBBAR	MCA	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr:	N. TABOUCHE	MCA	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr:	N. AZZOUZA	MCB	Univ-Guelma

Session Juin 2018

Dédicace

Je dédie ce mémoire à mes chers parents à qui je dois

compter tout ce travail qui est le fruit de leur

amour, leurs encouragements et sacrifices.

A ma chère mère.

A mon cher père.

A ma chère sœur Karima.

A mes chers frères Khier Eddine, Necr Eddine,

Abd Elouhab, Djalal Eddine et Amine.

A la mémoire de mon frère Zouhir.

A les femmes de mes frères et mari de ma sœur et fils

de mes frères et ma sœur.

A mes amis *Hasna, Faten, Imen, Ahlem, Emna, Zineb, Wafa,*

Salwa, Loubna, Bouthaina et Roumaissa.

A toutes mes amies et toutes les personnes qui ont contribué à la réalisation de ce travail.

Remerciements

J'aimerais en premier lieu remercier mon dieu Allah qui m'a donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.

Je tiens à remercier tout d'abord mon encadreur Mme Tabouche Nora pour m'avoir proposé le thème de ce mémoire et m'avoir dirigée tout le long de mon travail, ses conseils précieux, sa grande disponibilité, sa patience, son appui constant sa passion, ses qualités scientifiques et humaines m'ont mis sur une voie de recherche pleine d'espoir et d'optimisme. Qu'elle soit assurée de ma plus profonde et sincère reconnaissance, je vous remercie du fond du cœur.

Je remercie également Mme Tabouche Nora et Mr Azzouza N.Edine membres de jury pour l'honneur qu'ils m'ont accordé en acceptant de juger mon travail.

Je remercie également Mr Dbbear Rebah de l'honneur qu'il me fait en présidant ce jury.

Et enfin mes sincères remerciements à mes parents, mes frères, ma sœur, mes amies et à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

Résumé

Le principe du point fixe a beaucoup d'applications. Il intervient dans la résolution de plusieurs équations différentielles non linéaires en particulier, dans l'étude de l'existence et de l'unicité.

Dans notre travail, en premier lieu nous avons mené une synthèse d'un problème fractionnaire non linéaire Où la positivité de la solution a été traitée par la méthode de la solution sup et inf.

Dans le deuxième problème, nous établissons l'existence et l'unicité de la solution positive d'un problème fractionnaire non étudié au paravant, en appliquant le principe de contraction de Banach et l'alternative non linéaire de Shauder

Table des matières

Introduction

La dérivation fractionnaire est un concept de généralisation de la dérivation (classique) à un ordre non entier. Elle fournit plusieurs outils potentiellement utiles pour la résolution des équations intégrales. Elle s'introduit aussi naturellement dans la modélisation mécanique des matériaux qui conservent la mémoire des transformations passées voir [5]. D'où l'intérêt particulier porté sur le calcul et l'analyse fractionnaire pendant ces dernières décennies.

Bien que le calcul différentiel classique fournit des outils puissants pour la modélisation d'un bon nombre de phénomènes étudiés par les sciences appliquées, ces outils ne permettent pas de tenir compte de la dynamique anormale que présentent certains systèmes complexes rencontrés dans la nature ou dans les interactions de la société. Les opérateurs de dérivations et d'intégrations fractionnaires présentent des similitudes avec certaines de ces caractéristiques, ce qui en fait un outil plus adapté pour la modélisation de ces phénomènes.

L'histoire de la dérivée d'ordre non entier s'étale de la fin du 17 ème siècle jusqu'à nos jours. les spécialistes s'accordent pour faire remonter son début à la fin de l'année 1695 quand L'Hospital a soulevé une question à Leibniz en s'interrogeant sur la signification de $\frac{d^n y}{dx^n}$ lorsque $n = \frac{1}{2}$.

Leibniz, dans sa réponse, voulut engager une réflexion sur une possible théorie de la dérivation non entière, et à écrit à L'Hospital : "... cela conduirait à un paradoxe à partir duquel, un jour, on aura tirer des conséquences utiles". Il a fallu attendre les années 1990 pour voir apparaître les premières "conséquences utiles". La première tentative sérieuse de donner une définition logique pour la dérivée fractionnaire est dû à Liouville qui a publié neuf documents dans ce sujet entre 1832 et 1837. Indépendamment, Riemann a proposé une approche qui s'est avérée essentiellement celle de Liouville, et c'est depuis qu'elle porte le non "Approche de Riemann-Liouville". Plus tard, d'autres théories on fait leurs apparitions comme celle de Grunwald-Leitnikov, de Weyl et de Caputo voir [5,10]. A cette époque il n'y avait presque pas d'applications pratiques de cette théorie, et c'est pour cette raison qu'elle a été considéré comme une abstraite ne contenant que des manipulations mathématiques peu utiles. Le passage des formulations mathématiques pures à des applications, a commencé à voir le jour depuis les années 1990, où les équations différentielles fractionnaires sont apparues dans plusieurs domaines tels que la physique, l'ingénierie, la biologie, la mécanique....

Actuellement dans la littérature mathématique, les études sur l'existence, l'unicité, la multipliceté des solutions et l'existence des solutions positives des problèmes fractionnaires non linéaire utilisent des techniques d'analyse non linéaire comme les théorèmes de point fixe.

Récemment, Zhang [12] étudie l'existence et l'unicité de la solution positive du problème fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} D^{\alpha}x(t) = f(t, x(t)), \quad 0 < t \leq 1, \\ x(0) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

où $0 < \alpha < 1$ et ${}^{c}D^{\alpha}$ l'opérateur de dérivation fractionnaire de Riemann Liouville et $f : [0, 1] \times [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ fonction continue.
En utilisant le méthode de la solution sup et inf et le théorème du point fixe dans un cône.

Bai, Z., Lü, H.[1] Traite l'éqution différentielle fractionnaire

$$\begin{cases} D^{\alpha}x(t) = f(t, x(t)), \quad 0 < t < 1 \\ x(0) = x(1) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

où $1 < \alpha \leq 2$ et ${}^cD^{\alpha}$ l'opérateur de dérivation fractionnaire de Riemann Liouville et $f : [0,1] \times [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ fonction continue.

L'existence et l'unicité de la solution positive d'un problème fractionnaire est établie par application des théorèmes du point fixe sur un cône.

Motivée par ces travaux dans notre travail on propose d'étudier l'existence et l'unicité de la solution positive de quelques problèmes fractionnaires.

Ce mémoire est organisé comme suit :

1. Premier chapitre : est introcutif dans lequel on présente des définitions et quelques résultats qui seront utiles dans la suite du travail.

2. Deuxième chapitre : est consacré à l'étude de l'existence et l'unicité de la solution positive d'un problème fractionnaire traité par M.Matar, en faisant une synthèse bien détaillée du problème. Finallement, on présente quelques exemples pour illustrer les résultats obtenus.

3. Troisième chapitre : on a établit l'existence et l'unicité de la solution positive du problème fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} {}^cD^{\alpha}x(t) = f(t, x(t), x'(t)), & 0 \leq t \leq 1 \\ x(0) = x''(0) = 0, \quad x'(\eta) = \beta x''(1), \end{cases} \tag{3}$$

où $2 < \alpha < 3$, $0 < \eta < 1$ et ${}^cD^{\alpha}$ l'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Caputo, $f : [0,1] \times [0, +\infty[\times [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ est une fonction continue.
Inspiré d'un problème traité dans [2], en utilisant le théorème du point fixe de Shauder. Enfin, nous illustrons nos résultats par un exemple.

Chapitre 1

PRÉLIMINAIRES

Ce chapitre constitue une partie préliminaire dans laquelle on rappelle des notions et des résultats fondamentaux de la théorie de calcul fractionnaire et de l'analyse fonctionnelle qui représentent des outils indispensables dans notre travail.

1.1 Espaces des fonctions continues

Définition 1.1.1 *voir [5]*
Soit $J = [a, b]$, $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ *et* $n \in \mathbb{N}$.
On désigne par $C^n(J)$ *l'espace des fonctions* f *qui ont leurs dérivées d'ordre inférieur ou égale à* n*, continues sur* J.
En particulier si $n = 0$, $C^0(J) = C(J)$ *l'espace des fonctions* f *continues sur* J.

1.2 Définitions de base

Dans cette section, nous présentons les fonctions Gamma et bêta et Mittag-Leffler, qui seront utilisées par la suite. Ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire.

1.2.1 La fonction Gamma

La fonction Gamma est en mathématiques, une fonction complexe, Elle prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexes.

Définition 1.2.1 *voir [5]*
Pour tout nombre complexe z tel que $\mathrm{Re}(z) > 0$, *on définit la fonction Gamma par l'intégrale*

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} \exp(-t) dt.$$

1.2.2 Quelques propriétés de la fonction Gamma

- *Une propriété importante de la fonction Gamma est la relation de récurrence suivante*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

- *La fonction Gamma d'Euler généralise le factoriel*

$$\Gamma(n+1) = n!, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Preuve *voir [5].*

1.2.3 La fonction Bêta

Définition 1.2.2 *voir [5]*
La fontion Bêta est une fonction définie par l'intégrale

$$\beta(z, w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1} dt, \quad \mathrm{Re}(z) > 0, \quad \mathrm{Re}(w) > 0.$$

1.2.4 Liens entre la fonction Gamma et la fonction Bêta

$$\beta(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}, \quad \mathrm{Re}(z) > 0, \quad \mathrm{Re}(w) > 0.$$

Preuve *voir [5].*

1.2.5 La fonction Mittag-Leffler

Définition 1.2.3 *voir [5]*
La généralisation de la fonction exponentielle à un seul paramètre est désignée par la fonction suivante

$$\mathrm{E}_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n\alpha + 1)}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \alpha > 0.$$

La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres joue également un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire. Elle est définie par le développement en série suivant

$$\mathrm{E}_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n\alpha + \beta)}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0.$$

1.3 Calcul fractionnaire

1.3.1 Intégrale fractionnaire

Soit f une fonction continue et $a, x, t \in \mathbb{R}$, $x > a$, et $x > t$, l'intégrale fractionnaire est définie par

$$I^n f(x) = \int_a^x dx_1 \int_a^{x_2} dx_2 ... \int_a^{x_{n-1}} f(x_n) dx_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

1.3.2 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.3.1 *voir [5, 8]*
L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville de f d'ordre $\alpha > 0$, $a, x, t \in \mathbb{R}$, $x > a$, $x > t$, et $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, et on le note I^α, est définie par

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt.$$

1.3.3 La dérivée fractionnaire

Il existe plusieurs définitions de dérivées fractionnaires, malheureusement elles ne sont pas toutes équivalentes. Nous présentons dans cette partie les définitions de Riemann-Liouville et Caputo qui sont les plus utilisées.

1.3.4 La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.3.2 *voir [5, 8]*
Pour $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n-1 < \alpha < n$, $a, x, t \in \mathbb{R}$, $x > a$, et $x > t$. La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ d'une fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ est définie par

$$D^{\alpha} f(x) = D^n I^{n-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt,$$

où $D^n = \frac{d^n}{dx^n}$.

1.3.5 La dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Définition 1.3.3 *voir [5, 8]*
Pour $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n-1 < \alpha < n$, $a, x, t \in \mathbb{R}$, $x > a$, et $x > t$. La dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $\alpha > 0$ d'une fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ est définie par

$${}^cD^{\alpha} f(x) = I^{n-\alpha} f^{(n)}(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt.$$

1.3.6 Propriétés générales des dérivées fractionnaires

La linéairité

La dérivation fractionnaire est une opération linéaire

$$D^{\alpha}(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D^{\alpha} f(t) + \mu D^{\alpha} g(t).$$

La règle de Leibniz

Pour un entier n on a

$$\frac{d^n}{dt^n}(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(t) g^{(n-k)}(t).$$

La généralisation de cette formule nous donne

$$D^p(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} f^{(k)}(t) D^{p-k} g(t) + R_n^p(t),$$

où $n \geq p+1$ et

$$R_n^p(t) = \frac{1}{n!\Gamma(-p)} \int_a^t (t-\tau)^{-p-1} g(\tau) d\tau \int_a^t f^{n+1}(\xi) d\xi,$$

avec $\lim\limits_{n\to\infty} R_n^p(t) = 0$.

Si f et g sont continues dans [a,t] ainsi que toutes leurs dérivées, la formule devient :

$$D^p(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} f^{(k)}(t) D^{p-k} g(t).$$

D^α est la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

1.4 Notions et définitions

On considère dans tous ce paragraphe E et F des espaces de Banach munis des normes $\|.\|_E$ et $\|.\|_F$ respectivement, $\mathcal{C}(E,F)$ l'espace des fonctions continues de E dans F.

Définition 1.4.1 *voir [1]*
Soit M un sous ensemble de $\mathcal{C}(E,F)$.
On dit que M est uniformément borné, s'il existe une constante $C > 0$ tel que

$$\|f\|_\infty \leq C, \quad \forall f \in M.$$

Définition 1.4.2 *voir [1]*
Soit M un sous ensemble de $\mathcal{C}(E,F)$, tel que $E = [a,b]$ et $F = \mathbb{R}$ muni de la norme usuelle, une partie $M \in \mathcal{C}(E,F)$ est dite équicontinue si
$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0,\ \forall f \in M,\ \forall\, x_1, x_2 \in [a,b]$:

$$|x_1 - x_2| < \delta \longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Définition 1.4.3 *voir [1]*
Soit $A : E \to F$ un opérateur.
On dit que A est compact s'il est continu et l'image de tout borné de E est relativement compact dans F.

Définition 1.4.4 *soit $A : E \to E$, On dit que A est un opérateur contractant s'il existe $0 < k < 1$ tel que :*

$$\forall x, y \in E : \quad \|A(x) - A(y)\|_E \leq K\|x - y\|_E$$

Théorème 1.4.1 *(Banach [11])*
soit C un convexe fermé non vide de l'espace de Banach E et $A : C \to C$ un opérateur contractant. Alors il existe un unique $x \in C$ avec $Ax = x$.

Théorème 1.4.2 *(Schauder [11])*
soit C un convexe fermé non vide de l'espace de Banach E et $A : C \to C$ un opérateur compact. Alors A a un point fixe dans C.

1.5 Théorème d'Arzela-Ascoli

Théorème 1.5.1 *voir[6]*
Soient E un espace de Banach compact et F un espace de Banach quelconque. Une partie M de $\mathcal{C}(E, F)$ est relativement compact si et seulement si :

1. *M est équicontinue.*
2. *Pour tout $x \in E$, l'espace $M(x)$ défini par*

$$M(x) = f(x), f \in M$$

est relativement compact dans F.

Théorème 1.5.2 *voir[6]*
Soit M une partie de $\mathcal{C}([a, b])$ muni de la norme uniforme. M est relativement compact dans $\mathcal{C}([a, b])$ si et seulement si M est équicontinue et uniformément borné.

Chapitre 2

SOLUTION POSITIVE D'UN PREMIER PROBLÈME FRACTIONNAIRE NON LINÉAIRE

2.1 Position du problème

Dans ce chapitre on étudie le problème différentiel fractionnaire non-linéaire suivant

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha x(t) = f(t, x(t)), & 0 \leq t \leq 1, \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = \theta > 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $1 < \alpha \leq 2$ et ${}^cD^\alpha$ l'opérateur de dérivation fractionnaire de Caputo et $f : J \times X \to X$ fonction continue tel que $J = [0, 1]$ et $X = C(J)$

2.2 Quelques lemmes et définitions

On va présenter quelques lemmes et définitions qui seront utiles dans la suite.

Définition 2.2.1 *le fonction de contrôle superieure est définie par :*
Soit $a, b \in \mathbb{R}^+$ tel que $b > a$, $x \in [a, b]$

$$U(t, x) = sup\{f(t, \lambda) : \quad a < \lambda \leq x\},$$

la fonction de contrôle inferieure est définie par :
Soit $a, b \in \mathbb{R}^+$ tel que $b > a$, $x \in [a, b]$

$$L(t, x) = inf\{f(t, \lambda) : \quad x \leq \lambda \leq b\},$$

où

$$L(t, x) \leq f(t, x) \leq U(t, x).$$

Lemme 2.2.1 *voir [5, 8]*
Soit $\alpha > 0$. Supposons que $x \in \mathcal{C}^{n-1}[0, +\infty)$ et $x^{(n)}$ existe sur tout intervalle borné :

$$I^\alpha({}^cD^\alpha x)(t) = x(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k(0)}{k!} t^k, \tag{2.2}$$

cas particulier, si $1 < \alpha \leq 2$ implique

$$I^\alpha({}^cD^\alpha x)(t) = x(t) - x(0) - x'(0)t. \tag{2.3}$$

Lemme 2.2.2 *Soit $x \in \mathcal{C}(J)$, x est solution du problème (2.1) telle que*

$$x(t) = \theta t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha - 1} f(s, x(s)) ds, \quad s \leq t, \quad t \in J. \tag{2.4}$$

Preuve
Soit x une solution du problème (2.1). Appliquons I^α à (2.1) on obtient

$$I^\alpha({}^cD^\alpha x)(t) = I^\alpha\left(f(t, x(t))\right),$$

le lemme (2.2.1) implique

$$\begin{aligned} x(t) - x(0) - x'(0)t &= I^\alpha(f(t, x(t)) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s))ds, \end{aligned}$$

d'où

$$x(t) = \theta t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s))ds, \quad s \leq t, \quad t \in J.$$

Ce qui complète la preuve.

2.3 Existence de la solution positive

Dans cette section on démontre l'existence et la solution positive dans l'espace de Banach $X = \mathcal{C}(J)$ défini sur $J = [0, 1]$, muni de la norme

$$\|x\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|.$$

Et on note A l'ensemble définit par

$$A = \{x \in X : x(t) \geq 0, \quad t \in J\},$$

tout le long de cette section, on supposera que $f : J \times X \to X$ et on définit l'opérateur $\Phi : A \to A$ par

$$(\Phi x)(t) = \theta t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s))ds, \quad s \leq t, \quad t \in J. \tag{2.5}$$

Les hypothèses suivantes sont nécessaires

H1) Soit $x_*(t),\ x^*(t) \in A$, tel que $a \leq x_*(t) \leq x^*(t) \leq b$ et

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha x^*(t) \geq U(t, x^*(t)), \\ {}^cD^\alpha x_*(t) \leq L(t, x_*(t)), \end{cases} \tag{2.6}$$

pour tout $t \in J$.

H2) Pour $t \in J$ et $x, y \in X$, il existe un nombre réel positive $\beta < 1$ tel que

$$\mid f(t,y) - f(t,x) \mid \leq \beta \parallel y - x \parallel, \tag{2.7}$$

Les fonctions $x^*(t)$ *et* $x_*(t)$ sont respectivement appelées sup et inf de la solution pour le problème (2.1).

Théorème 2.3.1 *Supposons que l'hypothèse (H1) est verifieé le problème (2.1) a au moins une solution $x \in X$ verifiant :*

$$x_*(t) \leq x(t) \leq x^*(t), \qquad t \in J.$$

Démonstration 2.3.1 *Pour l'existence de la solution on va transformer le problème fractionnaire à un problème de point fixe. Le problème fractionnaire (2.1) possède une solution si seulement si l'opérateur Φ admet un point fixe dans X.*
Soit $C = \{x \in A : x_*(t) \leq x(t) \leq x^*(t), t \in J\}$, $\|x\| \leq b$, C fermé convexe de X, de plus la continuité de f implique la continuité de l'opérateur Φ dans C.

Proposition 2.3.1 *l'operteur $\Phi(C)$ est uiformement borné.*

Preuve
soit $x \in C$, $\exists\, c \geq 0$ tel que $max\{f(t, x(t)) : t \in J,\ x(t) \leq b\} < c$.
Alors

$$\begin{aligned}
|(\Phi x)(t)| &= \left|\theta t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,x(s))ds\right| \\
&\leq |\theta t| + \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,x(s))ds\right| \\
&\leq \theta t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s,x(s))|ds \\
&\leq \theta t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} max|f(s,x(s))|ds \\
&\leq \theta t + \frac{c}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds,
\end{aligned}$$

avec

$$\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds = \frac{-1}{\alpha}\int_0^t [(t-s)^\alpha]'ds = \frac{-1}{\alpha}\left[(t-s)^\alpha\right]_0^t = \frac{t^\alpha}{\alpha},$$

donc

$$|(\Phi x)(t)| \leq \theta t + \frac{ct^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)},$$

pour $t \in [0,1]$ *implique*

$$\|(\Phi x)(t)\| = max|(\Phi x)(t)| \leq \theta + \frac{c}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Donc $\Phi(C)$ *est uiformement borné.*

Proposition 2.3.2 *l'operteur* $\Phi(C)$ *est équicontinu.*

Preuve

Soit $x \in C$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, *et* $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$ *tq* $|t_2 - t_1| < \delta$ *si*

$$\delta = min\left\{1, \frac{\varepsilon\Gamma(\alpha+1)}{(\theta\Gamma(\alpha+1)+2c)}\right\},$$

alors

$$\begin{aligned}
|(\Phi x)(t_1) - (\Phi x)(t_2)| &= \left|\theta t_1 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))ds - \theta t_2\right. \\
&- \left.\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))ds\right| \\
&\leq \theta(t_2-t_1) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))ds\right. \\
&- \left.\int_0^{t_1}(t_2-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))ds - \int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))ds\right| \\
&\leq \theta(t_2-t_1) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_0^{t_1}[(t_1-s)^{\alpha-1} - (t_2-s)^{\alpha-1}]f(s,x(s))ds\right. \\
&- \left.\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))ds\right| \\
&\leq \theta(t_2-t_1) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\left|\int_0^{t_1}[(t_1-s)^{\alpha-1} - (t_2-s)^{\alpha-1}]f(s,x(s))ds\right|\right. \\
&+ \left.\left|\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))ds\right|\right),
\end{aligned}$$

Donc l'opérateur $\Phi(C)$ est equicontinu. D'après le proposition (2.3.1) et proposition (2.3.2) et en appliquant le théorème d'Arzel-Ascoli alors $\Phi(C)$ est relativement compact. $\Phi(C)$ continu et relativement compact alors $\Phi(C) : A \to A$ est compact continu.

Reste à montrer que $\Phi(x) \in C$

soit $x \in C$, nous avons

$$\begin{aligned}(\Phi x)(t) &= \theta t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds \\ &\leq \theta t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} U(s, x^*(s)) ds \\ &\leq x^*(t), \end{aligned} \tag{2.10}$$

et

$$\begin{aligned}(\Phi x)(t) &= \theta t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds \\ &\geq \theta t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} L(t, x_*(t)) ds \\ &\geq x_*(t), \end{aligned} \tag{2.11}$$

les relations (2.10) et (2.11) impliquent

$$x_*(t) \leq (\Phi x)(t) \leq x^*(t).$$

Par conséquent $x_*(t) \leq (\Phi x)(t) \leq x^*(t)$, $t \in J$, c-a-d $\Phi(C) \subseteq C$.

D'après le théorème du point fixe de Schauder, l'opérateur Φ a au moins un point fixe $x \in C$, il s'ensuit que le problème (2.1) a au moins une solution positive $x \in X$ et $x_*(t) \leq x(t) \leq x^*(t)$, $t \in J$.

2.4 Unicité de la solution positive

l'unicité de la solution positive du problème (2.1) est basée sur théorèmes des points fixes dans les espaces de Banach.

Théorème 2.4.1 *supposons que (H_1) et (H_2) sont satiafaites, le problème (2.1) a une solution positive unique $x \in X$.*

Démonstration 2.4.1 *D'apès le théorème (2.2.1) le problème (2.1) a au moins un solution dans C.*

Proposition 2.4.1 *l'opérateur Φ est un opérateur contraction.*

Preuve

nous avons

$$\begin{aligned}|(\Phi x)(t) - (\Phi y)(t)| &= \Big|\theta t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s))ds - \theta t \\ &- \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s))ds\Big| \\ &< \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|f(s, x(s)) - f(s, y(s))|ds,\end{aligned}$$

l'hypothèse (2.7) implique

$$\begin{aligned}|(\Phi x)(t) - (\Phi y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\beta\|x-y\|ds \\ &\leq \frac{B\|x-y\|t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.\end{aligned}$$

Si $1 < \alpha \leq 2$, $\beta < 1$ et $1 < \Gamma(\alpha+1) \leq 2$ on a : $\frac{\beta t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} < 1$, d'où

$$|(\Phi x)(t) - (\Phi y)(t)| \leq k\|x-y\|,$$

tel que $k = \frac{\beta t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$ un nombre réel positive est $k < 1$, donc l'operateur Φ est une contraction.

Par conséquent en applique le Théorème (1.4.1) implique le problème (2.1) a un solution positive unique $x \in X$.

Corollaire 2.4.1 *supposons qu'il existe des fonction continues $k_1(t)$ et $k_2(t)$ tel que*

$$0 < k_1(t) \leq f(t, x(t)) \leq k_2(t) < \infty, \quad (t, x(t)) \in J \times [0, \infty),$$

le probléme (2.1) a au moins une solution $x \in X$ verifiant :

$$\theta t + I^\alpha k_1(t) \leq x(t) \leq \theta t + I^\alpha k_2(t). \tag{2.12}$$

Démonstration 2.4.2 *D'après la définition de la fonction de contrôle, nous avons*

$$k_1(t) \leq L(t, x(t)) \leq U(t, x(t)) \leq k_2(t), \quad (t, x(t)) \in J \times [0, \infty),$$

maintenant, nous considérons les équations :

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = k_1(t), \\ D^\alpha x(t) = k_2(t), \\ x(0) = 0, x'(0) = \theta > 0, \end{cases} \tag{2.13}$$

par application du lemme(2.2.2) les équations sont équivalentes à

$$x(t) = \theta t + I^\alpha k_1(t) \tag{2.14}$$

$$x(t) = \theta t + I^\alpha k_2(t) \tag{2.15}$$

Par conséquent, l'équation(2.14) implique

$$x(t) - \theta t = I^\alpha k_1(t) \leq I^\alpha U(t, x(t)),$$

et l'équation(2.15) implique

$$x(t) - \theta t = I^\alpha k_2(t) \geq I^\alpha L(t, x(t)).$$

Donc

$$I^\alpha L(t, x(t)) \leq x(t) - \theta t \leq I^\alpha U(t, x(t)),$$
$$\theta t + I^\alpha k_1(t) \leq x(t) \leq \theta t + I^\alpha k_2(t),$$

et en appliquant le théorème(2.3.1), le problème(2.1) a au moins une solution $x \in X$.

2.5 Exemples

2.5.1 Exemple 1

On considère le problème fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} D^{\frac{5}{4}}x(t) = \frac{1}{1+t}\left(1+\frac{tx(t)}{2+x(t)}\right), & 0 \leq t \leq 1, \\ x(0)=0, \quad x'(0)=\theta>0, \end{cases} \tag{2.16}$$

le problème (2.16) a une solution positive unique.

Vérifions les conditions (H1) et (H2).

(H1) : $f(t,x) = \frac{1}{1+t}\left(1+\frac{tx}{2+x}\right)$ pour $(t,x) \in [0,1] \times [0,+\infty[$,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+t}(1+\frac{tx}{2+x}) = 1,$$

et

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}(1+\frac{tx}{2+x}) \leq f(t,x) \leq (1+\frac{tx}{2+x}) \leq 1+t \leq 2,$$

donc

$$\frac{1}{2} \leq f(t,x) \leq 2.$$

Alors d'apres le Corollaire (2.4.1) la conditions (H1) est vérifiée, le problème (2.16) a au moins une solution positive $x \in X$.

(H2) : $f(t,x) = \frac{1}{1+t}(1+\frac{tx}{2+x})$ pour $(t,x) \in [0,1] \times [0,+\infty[$,

$$\begin{aligned} |f(t,x)-f(t,y)| &= \left|\frac{1}{1+t}(1+\frac{tx}{2+x}) - \frac{1}{1+t}(1+\frac{ty}{2+y})\right| \\ &\leq \frac{1}{2}\left|\frac{x}{2+x} - \frac{y}{2+y}\right| \\ &\leq \frac{1}{2}|x-y|, \end{aligned}$$

donc

$$|f(t,x)-f(t,y)| \leq \frac{1}{2}|x-y|.$$

Alors la conditions $(H2)$ est vérifiée avec $k = \frac{1}{2}$.

Donc d'après le Théorème(2.4.1) le problème (2.16) a une solution positive unique.

2.5.2 Exemple 2

On considère le problème fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} D^{\frac{3}{2}}x(t) = \frac{2x+4}{3x+7+2t}, & 0 \leq t \leq 1, \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = \theta > 0 \end{cases} \tag{2.17}$$

le problème (2.17) a une solution positive unique.

Vérifions les conditions (H1) et (H2).

(H1) : $f(t,x) = \frac{2x+4}{3x+7+2t}$ pour $(t,x) \in [0,1] \times [0,+\infty[$,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+4}{3x+7+2t} = \frac{2}{3},$$

et

$$0 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2x+4}{3x+7+2t}\right) \leq f(t,x) \leq \frac{2x+4}{3x+7} \leq \frac{2}{3} \leq 2,$$

donc

$$0 \leq f(t,x) \leq 2.$$

Alors d'après le Corollaire (2.4.1) la conditions (H1) est vérifiée, le problème (2.17) au moins une solution positive $x \in X$.

(H2) : $f(t,x) = \frac{2x+4}{3x+7+2t}$ pour $(t,x) \in [0,1] \times [0,+\infty[$,

$$|f(t,x) - f(t,y)| = \left|\frac{2x+4}{3x+7+2t} - \frac{2y+4}{3y+7+2t}\right|,$$

$$\leq \frac{2}{3}\|x-y\|,$$

alors la conditions $(H2)$ est vérifiée avec $k = \frac{2}{3}$.

Donc d'après le Théorème(2.4.1) le problème (2.17) a une solution positive unique.

2.5.3 Exemple 3

On considère le problème fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} D^{\frac{3}{2}}x(t) = 1 + \frac{t\exp(-tx(t))}{1+\cos(t)}, & 0 \leq t \leq 1, \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = \theta > 0, \end{cases} \tag{2.18}$$

(H1) : $f(t,x) = 1 + \frac{t\exp(-tx)}{1+\cos(t)}$ pour $(t,x) \in [0,1] \times [0,+\infty[$,
$\lim_{x\to\infty}(1 + \frac{t\exp(-tx)}{1+\cos(t)}) = 1$, car $(\lim_{x\to\infty}(\exp(-tx)) = 0$.

$$f(t,x) \leq 1 + t\exp(-tx) \leq 1 + t \leq 2,$$

$$f(t,x) \geq 1 + \frac{1}{2}t\exp(-tx) \geq 1,$$

donc

$$1 \leq f(t,x) \leq 2.$$

Alors d'apres le Corollaire (2.4.1) la conditions (H1) est vérifiée, le problème (2.18) a au moins une solution positive $x \in X$.
(H2) : $f(t,x) = 1 + \frac{t\exp(-tx)}{1+\cos(t)}$ pour $(t,x) \in [0,1] \times [0,+\infty[$,

$$\begin{aligned} |f(t,x) - f(t,y)| &= \left|1 + \frac{t\exp(-tx)}{1+\cos(t)} - 1 - \frac{t\exp(-ty)}{1+\cos(t)}\right| \\ &\leq \left|\frac{1}{2}t\exp(-tx) - \frac{1}{2}t\exp(-ty)\right| \\ &\leq \frac{1}{2}\left|\exp(-x) - \exp(-y)\right|, \end{aligned}$$

l'unicité de la solution positive n'est pas existe car l'hypothèse (H2) (principe de contraction) ne peut être vérifiée.
Donc le problème (2.18) admet au moins une solution positive $x \in X$.

Chapitre 3

SOLUTION POSITIVE D'UN DEUXIÈME PROBLÈME FRACTIONNAIRE NON LINÉAIRE

3.1 Position du problème

On considère le problème différentiel fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha x(t) = f(t, x(t), x'(t)), & 0 \leq t \leq 1, \\ x(0) = x''(0) = 0 \quad x'(\eta) = \beta x''(1). \end{cases} \tag{3.1}$$

Où $2 < \alpha < 3$, $0 < \eta < 1$ et ${}^cD^\alpha$ l'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Caputo. $f : [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Lemme 3.1.1 *voir [2]*
Pour $\alpha > 0$ et $g(t) \in \mathcal{C}[0,1]$, l'equation fractionnaire homogène

$$^{c}D^{\alpha}g(t) = 0, \tag{3.2}$$

possède une solution

$$g(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + ... + c_n t^{n-1}, \tag{3.3}$$

où $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 0...n$, et $n = [\alpha] + 1$, ($[\alpha]$ est la partie entière de α).

Commençons d'abord par la résolution du problème auxiliaire

Lemme 3.1.2 *soient $2 < \alpha < 3$, $0 < \eta < 1$, et $y \in \mathcal{C}[0,1]$, la solution unique du problème fractionnaire suivant*

$$\begin{cases} ^{c}D^{\alpha}x(t) = y(t), & 0 \leq t \leq 1, \\ x(0) = x''(0) = 0, & x'(\eta) = \beta x''(1), \end{cases} \tag{3.4}$$

est donnée par

$$x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-2)}\left[\int_0^1 G(t,s)y(s)ds - \frac{t}{\alpha-2}\int_0^{\eta}(\eta-s)^{\alpha-2}y(s)ds\right], \tag{3.5}$$

où

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{(\alpha-2)(\alpha-1)} + \frac{t\beta}{(1-s)^{3-\alpha}}, & \text{si } s \leq t, \\ \frac{t\beta}{(1-s)^{3-\alpha}}, & \text{si } s > t, \end{cases} \tag{3.6}$$

Preuve
Applique le lemme (3.1.1), on trouve

$$x(t) = I^{\alpha}y(t) + c_1 + c_2 t + c_3 t^2, \tag{3.7}$$

par une dérivation des deux membres de (3.7), on trouve

$$\begin{cases} x'(t) = I^{\alpha-1}y(t) + c_2 + c_3' t, & c_3' = 2c_3, \\ x''(t) = I^{\alpha-2}y(t) + c_3'. \end{cases} \tag{3.8}$$

Or, la première condition dans (3.4) implique que $c_1 = c_3' = c_3 = 0$, tandis que la seconde ramène à

$$c_2 = \beta I^{\alpha-2}y(1) - I^{\alpha-1}y(\eta),$$

substituons c_1, c_2, c_3 dans (3.7), on obtient

$$x(t) = I^{\alpha}y(t) + t(\beta I^{\alpha-2}y(1) - I^{\alpha-1}y(\eta)), \tag{3.9}$$

donc

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}y(s)ds + t\left(\frac{\beta}{\Gamma(\alpha-2)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-3}y(s)\,ds \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^{\eta}(\eta-s)^{\alpha-2}y(s)ds\right), \end{aligned} \tag{3.10}$$

d'où

$$x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-2)}\left[\int_0^1 G(t,s)y(s)ds - \frac{t}{\alpha-2}\int_0^{\eta}(\eta-s)^{\alpha-2}y(s)ds\right]. \tag{3.11}$$

Où G est définie par (3.6).

3.2 Résultat d'existence et d'unicité

Dans cette section on démontre l'existence et l'unicité de la solution dans l'espace de Banach E, muni de la norme

$$\|x\| = \max_{0\le t\le 1}|x(t)| + \max_{0\le t\le 1}|x'(t)|.$$

On a $x'(t) \in \mathcal{C}[0,1]$, et on note A l'ensemble défini par

$$A = \{x \in E, \quad x(t) \ge 0, \quad t \in [0,1]\}.$$

Tout le long de cette section, on supposera que $f \in \mathcal{C}([0,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ et on définit l'opérateur intégral $T : E \to E$ par

$$Tx(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-2)}\left[\int_0^1 G(t,s)f(s,x(s),x'(s))ds - \frac{t}{\alpha-2}\int_0^{\eta}(\eta-s)^{\alpha-2}f(s,x(s),x'(s))ds\right]. \tag{3.12}$$

Théorème 3.2.1 *Supposons qu'il existe des fonctions non négatives* $h, g \in L^1([0,1], \mathbb{R}_+)$ *telles que pour tout* $x, y \in \mathbb{R}$ *et* $t \in [0,1]$, *on a*

$$\begin{cases} |f(t,x,\bar{x}) - f(t,y,\bar{y})| \leq g(t)|x-y| + h(t)|\bar{x}-\bar{y}|, \\ C_g + C_h < \frac{1}{2} \quad et \quad A_g + A_h < \frac{1}{2}, \end{cases} \tag{3.13}$$

où

$$\begin{cases} C_g = \|I^{\alpha-1}g\|_{L^1} + |\beta| I^{\alpha-2}g(1) + I^{\alpha-1}g(\eta), \\ C_h = \|I^{\alpha-1}h\|_{L^1} + |\beta| I^{\alpha-2}h(1) + I^{\alpha-1}h(\eta), \end{cases} \tag{3.14}$$

et

$$\begin{cases} A_g = I^{(\alpha-1)}(g(1) + g(\eta)) + |\beta| I^{\alpha-2}g(1), \\ A_h = I^{(\alpha-1)}(h(1) + h(\eta)) + |\beta| I^{\alpha-2}h(1), \end{cases} \tag{3.15}$$

alors, le problème fractionnaire (3.1) *admet une solution unique* $x \in E$.
Pour la preuve du théorème (3.2.1), *on va utiliser la propriété de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville*

Lemme 3.2.1 *voir [2]*
Soit $\alpha > 0$, $f \in L^1([a,b], \mathbb{R}^+)$. *Alors, pour tout* $t \in [a,b]$, *on a*

$$I^{\alpha+1}f(t) \leq \|I^{\alpha}f\|_{L^1}. \tag{3.16}$$

On va prouver maintenant le théorème (3.2.1).

Démonstration 3.2.1 *On va transformer le problème fractionnaire à un problème de point fixe. Le problème fractionnaire* (3.1) *admet une solution unique si seulement si l'opérateur* T *est une contraction.*
Commençons à prouver que T *est une contraction. Pour cela, soit* $x, y \in E$.

Alors

$$\begin{aligned}
Tx(t)-Ty(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-2)}\left[\int_0^1 G(t,s)f(s,x(s),x'(s))ds\right.\\
&- \left.\frac{t}{\alpha-2}\int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha-2}f(s,x(s),x'(s))ds\right]\\
&- \frac{1}{\Gamma(\alpha-2)}\left[\int_0^1 G(t,s)f(s,y(s),y'(s))ds\right.\\
&- \left.\frac{t}{\alpha-2}\int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha-2}f(s,y(s),y'(s))ds\right],\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha-2)}\left[\int_0^1 G(t,s)(f(s,x(s),x'(s))-f(s,y(s),y'(s)))ds\right.\\
&- \left.\frac{t}{\alpha-2}\int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha-2}(f(s,x(s),x'(s))-f(s,y(s),y'(s)))ds\right],\\
&= I^\alpha(f(t,x(t),x'(t))-f(t,y(t),y'(t)))\\
&+ t\beta I^{\alpha-2}(f(1,x(1),x'(1))-f(1,y(1),y'(1)))\\
&- tI^{\alpha-1}(f(\eta,x(\eta),x'(\eta))-f(\eta,y(\eta),y'(\eta))).
\end{aligned} \tag{3.17}$$

A l'aide du (3.13), *on peut avoir*

$$\begin{aligned}
|Tx(t)-Ty(t)| &\le \max_{0\le t\le 1}|x(t)-y(t)|[I^\alpha g(t)+|\beta|I^{\alpha-2}g(1)+I^{\alpha-1}g(\eta)]\\
&+ \max_{0\le t\le 1}|x'(t)-y'(t)|[I^\alpha h(t)+|\beta|I^{\alpha-2}h(1)+I^{\alpha-1}h(\eta)].
\end{aligned} \tag{3.18}$$

De plus, lemme (3.2.1) *permet d'obtenir*

$$\begin{aligned}
|Tx(t)-Ty(t)| &\le \|x-y\|[\|I^{\alpha-1}g\|_{L^1}+|\beta|I^{\alpha-2}g(1)+I^{\alpha-1}g(\eta)+\|I^{\alpha-1}h\|_{L^1}\\
&+ |\beta|I^{\alpha-2}h(1)+I^{\alpha-1}h(\eta)],
\end{aligned} \tag{3.19}$$

utilisant (3.13) *et* (3.14) *on arrive à écrire*

$$|Tx(t)-Ty(t)| \le \|x-y\|(C_g+C_h).$$

Donc

$$|Tx(t) - Tx(t)| \leq \frac{1}{2}\|x - y\|, \tag{3.20}$$

d'autre part, on a

$$(Tx(t))' - (Ty(t))' = T'x(t) - T'y(t),$$

où

$$T'x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-2)}\left[\int_0^1 G_1(t,s)f(s,x(s),x'(s))ds - \frac{t}{\alpha-2}\int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha-2}f(s,x(s),x'(s))ds\right], \tag{3.21}$$

et

$$G_1(t,s) = \frac{\partial G(t,s)}{\partial t} = \begin{cases} \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{(\alpha-2)} + \frac{\beta}{(1-s)^{3-\alpha}}, & si\ s \leq t, \\ \frac{\beta}{(1-s)^{3-\alpha}}, & si\ s > t, \end{cases}$$

de plus

$$\begin{aligned} T'x(t) - T'y(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-2)}\left[\int_0^1 G_1(t,s)f(s,x(s),x'(s))ds\right. \\ &- \left.\frac{t}{\alpha-2}\int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha-2}f(s,x(s),x'(s))ds\right] \\ &- \frac{1}{\Gamma(\alpha-2)}\left[\int_0^1 G_1(t,s)f(s,y(s),y'(s))ds\right. \\ &- \left.\frac{t}{\alpha-2}\int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha-2}f(s,y(s),y'(s))ds\right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-2)}\left[\int_0^1 G_1(t,s)(f(s,x(s),x'(s)) - f(s,y(s),y'(s)))ds\right. \\ &- \left.\frac{t}{\alpha-2}\int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha-2}(f(s,x(s),x'(s)) - f(s,y(s),y'(s)))ds\right], \end{aligned} \tag{3.22}$$

tenons compte de (3.13)

$$\begin{aligned} T'x(t) - T'y(t) &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha-2)}\max_{0\leq t\leq 1}|x(t) - y(t)|\left[\int_0^1 G_1(t,s)g(s)ds - \frac{t}{\alpha-2}\int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha-2}g(s)ds\right] \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha-2)}\max_{0\leq t\leq 1}|x'(t) - y'(t)|\left[\int_0^1 G_1(t,s)h(s)ds - \frac{t}{\alpha-2}\int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha-2}h(s)ds\right]. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Estimons le treme

$$\left(\int_0^1 G_1(t,s)g(s)ds - \frac{t}{\alpha-2}\int_0^{\eta}(\eta-s)^{\alpha-2}g(s)ds\right), \tag{3.24}$$

on a

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 G_1(t,s)g(s)ds - \frac{t}{\alpha-2}\int_0^{\eta}(\eta-s)^{\alpha-2}g(s)ds\right| &= |\Gamma(\alpha-2)[I^{\alpha-2}g(t)+\beta I^{\alpha-2}g(1)-I^{\alpha-1}g(\eta)]| \\ &\leq \Gamma(\alpha-2)[I^{\alpha-1}g(t)+\beta I^{\alpha-2}g(1)+I^{\alpha-1}g(\eta)] \\ &\leq \Gamma(\alpha-2)A_g.\end{aligned} \tag{3.25}$$

Par conséquent (3.23) *devient*

$$|T'x(t)-T'y(t)| \leq \|x-y\|(A_g+A_h),$$

et en vertu de (3.13), *il s'ensuit que*

$$|T'x(t)-T'y(t)| \leq \frac{1}{2}\|x-y\|, \tag{3.26}$$

en se basant sur (3.20) *et* (3.26), *on conclut que*

$$\|Tx-Ty\| \leq \|x-y\|. \tag{3.27}$$

Finalement et grâce au principe de la contraction, l'unicité de la solution du problème fractionnaire (3.1) *est assurée.*

Donnons maintenant le résultat d'existence pour le problème fractionnaire(3.1).

Théorème 3.2.2 *Supposons que $f(t,0,0)\neq 0$ et qu'il existe trois fonctions non-négatives $k,\ h,\ g\in L^1([0,1],\mathbb{R}_+)$, $\Phi,\ \Psi\in C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+^*)$ croissantes sur $\mathbb{R}_+$ et $r>0$ tels que*

$$|f(t,x,\bar{x})| \leq k(t)\Psi(|x|) + h(t)\Phi(|\bar{x}|)+g(t), \qquad (t,x)\in([0,1]\times\mathbb{R}) \tag{3.28}$$

$$(\Psi(s) + \Phi(s) + 1)(C_1 + C_2) < r. \tag{3.29}$$

Où

$$C_1 = \max_{0 \le t \le 1}(C_k, C_h, C_g) \quad et \quad C_2 = \max_{0 \le t \le 1}(A_k, A_h, A_g), \tag{3.30}$$

Les constants C_h, C_g, A_h, A_g sont définis dans le théorème (3.1) et

$$\begin{cases} A_k = I^{\alpha-1}(k(1) + k(\eta)) + |\beta| I^{\alpha-2}k(1), \\ C_k = \|I^{\alpha-1}k\|_{L^1} + |\beta| I^{\alpha-2}k(1) + I^{\alpha-1}k(\eta) \end{cases}. \tag{3.31}$$

Alors, le problème fractionnaire (3.1) admet a au moins une solution.

Pour la démonstration, on va appliquer théorème(1.4.2).

Démonstration 3.2.2 *D'une part, T est continu. En effet, puisque f et G sont continus. Soit $B_r = \{x \in E, \|x\| \le r\}$ un sous ensemble de E. on a $T(B_r)$ est relativement compact, en effet*
(i) Pour $x \in B$, utilisant (3.28), on trouve

$$\begin{aligned} |Tx(t)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha-2)} \left[\int_0^1 G(t,s) f(s, x(s), x'(s)) ds - \frac{t}{\alpha-2} \int_0^\eta (\eta - s)^{\alpha-2} f(s, x(s), x'(s)) ds \right] \right| \\ &\le \frac{1}{\Gamma(\alpha-2)} \left[\int_0^1 |G(t,s)| [k(s)\Psi(|x(s)|) + h(s)\Phi(|x'(s)|) + g(s)] ds \right. \\ &+ \left. \frac{t}{(\alpha-2)} \int_0^\eta (\eta - s)^{\alpha-2} [k(s)\Psi(|x(s)|) + h(s)\Phi(|x'(s)|) + g(s)] ds \right], \end{aligned} \tag{3.32}$$

comme Φ et Ψ sont croissantes, il s'ensuit alors (3.32) implique que

$$\begin{aligned} |Tx(t)| &\le \frac{1}{\Gamma(\alpha-2)} \left[\int_0^1 |G(t,s)| [k(s)\Psi(\|x(s)\|) + h(s)\Phi(\|x'(s)\|) + g(s)] \, ds \right. \\ &+ \left. \frac{t}{(\alpha-2)} \int_0^\eta (\eta - s)^{\alpha-2} [k(s)\Psi(\|x(s)\|) + h(s)\Phi(\|x'(s)\|) + g(s)] ds \right] \\ &\le \frac{1}{\Gamma(\alpha-2)} \left[\int_0^1 |G(t,s)| [k(s)\Psi(r) + h(s)\Phi(r) + g(s)] \, ds \right. \\ &+ \left. \frac{t}{(\alpha-2)} \int_0^\eta (\eta - s)^{\alpha-2} [k(s)\Psi(r) + h(s)\Phi(r) + g(s)] ds \right], \end{aligned} \tag{3.33}$$

de plus,

$$\begin{aligned}|Tx(t)| &\leq \Psi(r)[\|I^{\alpha-1}k\|_{L^1} + |\beta|\|I^{\alpha-2}k(1) + I^{\alpha-1}k(\eta)]\\ &+ \Phi(r)[\|I^{\alpha-1}h\|_{L^1} + |\beta|\|I^{\alpha-2}h(1) + I^{\alpha-1}h(\eta)]\\ &+ \|I^{\alpha-1}g\|_{L^1} + |\beta|\|I^{\alpha-2}g(1) + I^{\alpha-1}g(\eta)\\ &\leq C_k\Psi(r) + C_h\Phi(r) + C_g.\end{aligned}$$

Donc

$$|Tx(t)| \leq C_1(\Psi(r) + \Phi(r) + 1), \tag{3.34}$$

avec C_1 *définie par (3.30). D'autre part, on a*

$$\begin{aligned}|T'x(t)| &= \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha-2)}\left[\int_0^1 G_1(t,s)f(s,x(s),x'(s))ds - \frac{t}{\alpha-2}\int_0^\eta(\eta-s)^{\alpha-2}f(s,x(s),x'(s))ds\right]\right|,\\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha-2)}\left[\left|\int_0^1 G_1(t,s)[k(s)\Psi(r) + h(s)\Phi(r) + g(s)]\ ds\right.\right.\\ &- \left.\left.\frac{t}{(\alpha-2)}\int_0^\eta(\eta-s)^{\alpha-2}[k(s)\Psi(r) + h(s)\Phi(r) + g(s)]ds\right|\right],\\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha-2)}\left[\Psi(r)\left|\int_0^1 G_1(t,s)k(s)ds - \frac{t}{(\alpha-2)}\int_0^\eta(\eta-s)^{\alpha-2}k(s)ds\right|\right.\\ &+ \Phi(r)\left|\int_0^1 G_1(t,s)h(s)ds - \frac{t}{(\alpha-2)}\int_0^\eta(\eta-s)^{\alpha-2}h(s)ds\right|\\ &+ \left.\left|\int_0^1 G_1(t,s)g(s)ds - \frac{t}{(\alpha-2)}\int_0^\eta(\eta-s)^{\alpha-2}g(s)ds\right|\right].\end{aligned} \tag{3.35}$$

A l'aide du (3.24) *et* (3.25), *on peut avoir*

$$|T'x(t)| \leq A_k\Psi(r) + A_h\Phi(r) + A_g, \tag{3.36}$$

$$|T'x(t)| \leq C_2(\Psi(r) + \Phi(r) + 1), \tag{3.37}$$

avec C_2 *définie par (3.30). En combinant* (3.34) *et*(3.37) *on obtient*

$$\|Tx(t)\| \leq (C_1 + C_2)(\Psi(r) + \Phi(r) + 1). \tag{3.38}$$

Par la suite $T(B_r)$ *est uniformément borné.*

(ii) $T(B_r)$ *est équicontinu*

Soit $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, *et* $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$ *tel que* $|t_2 - t_1| < \delta$ *avec*

$$\delta = \frac{\varepsilon}{C_2(\Psi(r) + \Phi(r) + 1)}.$$

$$\begin{aligned}
|Tx(t_1) - Tx(t_2)| &= \int_{t_1}^{t_2} |T'x(t)|dt, \\
&\leq \int_{t_1}^{t_2} (A_k\Psi(r) + A_h\Phi(r) + A_g)dt, \\
&\leq (t_2 - t_1)(A_k\Psi(r) + A_h\Phi(r) + A_g), \\
&\leq (t_2 - t_1)(C_2(\Psi(r) + \Phi(r) + 1), \\
&\leq \varepsilon. \qquad (3.39)
\end{aligned}$$

D'après (3.39) *T(Br) est équicontinu.*

Une application du théorème d'Arzela-Ascoli mène à déduire que T est un opérateur relativment compact, donc le problème fractionnaire(3.1) *possède une solution.*

3.3 Existence de la solution positive

Dans cette section on cherche la positivité de la soluiton de notre problème fractionnaire (3.1). On impose les hypothèses suivantes.

(H1) $f(t, u, v) = a(t)f_1(u, v)$, où $a \in \mathcal{C}([0, 1], (0, \infty))$ et $f_1 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$.

(H2)

$$0 < \int_0^1 \Psi(s)\frac{a(t)}{(1-s)^{3-\alpha}}ds < \infty,$$

où

$$\Psi(s) = \begin{cases} \beta - \frac{(\eta-s)^{\alpha-2}(1-s)^{3-\alpha}}{\alpha-2}, & \text{si } s \leq \eta, \\ \beta & \text{si } s > \eta \end{cases} \qquad (3.40)$$

La solution du problème fractionnaire (3.1) est

$$x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-2)}\left[\int_0^1 G(t,s)f(s,x(s),x'(s))ds - \frac{t}{\alpha-2}\int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha-2}f(s,x(s),x'(s))ds,\right]. \tag{3.41}$$

On peut réecrire la fonction x sous la forme

$$x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-2)}\int_0^1 \frac{H(t,s)}{(1-s)^{3-\alpha}}a(s)f_1(x(s),x'(s))ds, \tag{3.42}$$

où

$$H(t,s) = \begin{cases} \frac{((t-s)^{\alpha-1}(1-s)^{3-\alpha})}{(\alpha-2)(\alpha-1)} + t\beta - \frac{t(\eta-s)^{\alpha-2}(1-s)^{3-\alpha})}{(\alpha-2)} & s \le t, s \le \eta, \\ t\beta - \frac{t(\eta-s)^{\alpha-2}(1-s)^{3-\alpha})}{(\alpha-2)} & s > t, s \le \eta, \\ \frac{((t-s)^{\alpha-1}(1-s)^{3-\alpha})}{(\alpha-2)(\alpha-1)} + t\beta & s \le t, s > \eta, \\ t\beta & s > t, s > \eta. \end{cases} \tag{3.43}$$

On outre, pour la suite donnant les propriétés de la fonction de Green $H(t,s)$.

Lemme 3.3.1 *si* $\beta > \frac{(\eta-s)^{\alpha-2}(1-s)^{3-\alpha}}{(\alpha-2)}$ *alors* $H(t,s)$ *a les propriétés suivantes :*
(i) $H(t,s) \in \mathcal{C}([0,1]\times[0,1]), H(t,s) > 0,$ *pour tout* $t,s \in [0,1]$.
(ii) $t \in [\tau,1], \tau > 0,$ *alors, pour tout* $t,s \in [0,1]$ *on a*

$$0 < \tau\Psi(s) \le H(t,s) \le 2\Psi(s). \tag{3.44}$$

Preuve

(i) Il est facile de voir que $H(t,s) \in \mathcal{C}([0,1]\times[0,1])$, de plus, on a

$$\frac{((t-s)^{\alpha-1}(1-s)^{3-\alpha})}{(\alpha-2)(\alpha-1)} > 0 \quad et \quad t\beta > 0 \quad pour \quad tout \quad t,s \in [0,1],$$

implique $H(t,s) > 0$ si

$$t\beta - \frac{t(\eta-s)^{\alpha-2}(1-s)^{3-\alpha}}{(\alpha-2)} > 0.$$

Donc $H(t,s)$ est positive si $\beta > \frac{t(\eta-s)^{\alpha-2}(1-s)^{3-\alpha}}{(\alpha-2)}$ pour tout $t, s, \eta \in [0,1]$.
(ii) soit $t \in [\tau, 1]$, comme $\Psi(s) \neq 0$, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{H(t,s)}{\Psi(s)} &= \frac{\frac{((t-s)^{\alpha-1}(1-s)^{3-\alpha})}{(\alpha-2)(\alpha-1)} + t\beta - \frac{t(\eta-s)^{\alpha-2}(1-s)^{3-\alpha})}{(\alpha-2)}}{\beta - \frac{(\eta-s)^{\alpha-2}(1-s)^{3-\alpha})}{(\alpha-2)}}, \qquad s \leq t, \eta < s,\\ &= \frac{(t-s)^{\alpha-1}(1-s)^{3-\alpha}}{(\alpha-1)(\beta(\alpha-2)-(\eta-s)^{\alpha-2}(1-s)^{3-\alpha})} + t \leq 2.\end{aligned}$$

$$\frac{H(t,s)}{\Psi(s)} = \frac{\left[\frac{t\beta}{(1-s)^{3-\alpha}} - \frac{t(\eta-s)^{\alpha-2}}{\alpha-2}\right]}{\left[\frac{\beta}{(1-s)^{3-\alpha}} - \frac{\beta}{(1-s)^{3-\alpha}}\right]} = t \leq 2, \qquad t < s \leq \eta.$$

$$\begin{aligned}\frac{H(t,s)}{\Psi(s)} &= \frac{\frac{((t-s)^{\alpha-1}(1-s)^{3-\alpha})}{(\alpha-2)(\alpha-1)} + t\beta}{\beta}, \qquad \eta < s \leq t,\\ &\leq \frac{(1-s)^2}{(\alpha-1)} + t \leq 2.\end{aligned}$$

$$\frac{H(t,s)}{\Psi(s)} = t \leq 2, \qquad t < s, \eta < s.$$

D'autre part, remarquant que

$$\frac{H(t,s)}{\Psi(s)} \geq t \geq \tau,$$

comme $\Psi(s)$ est positive, on aboutit à :

$$0 \leq \tau\Psi(s) \leq H(t,s) \leq 2\Psi(s).$$

Finalement on présente la définition la solution positive.
Terminé la démonstration.

3.4 Exemple

Le problème fractionnaire suivant

$$\begin{cases} {}^{c}D^{\alpha}x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}\left[\frac{4\pi}{x+x'+6\pi} + \exp(-\pi(x+|x'|))\right], \quad 0 \leq t \leq 1, \\ x(0) = x'(0) = 0, \qquad x'(\eta) = \alpha x''(1), \end{cases} \tag{3.45}$$

a au moins une solution positive si $\alpha = \frac{7}{4}$, $\beta = \frac{7}{2}$ et $\eta = \frac{1}{4}$,
vérifions les conditions (H1) et (H2).
(i) Pour (H1) on a

$$f(t,u,v) = a(t)f_1(u,v),$$

où

$$\begin{aligned} f(t,x,x') &= \frac{1-t^2}{1+t^2}\left[\frac{4\pi}{x+x'+6\pi} + \exp(-\pi(x+|x'|))\right], \\ a(t) &= \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ f_1(u,v) &= \frac{4\pi}{x+x'+6\pi} + \exp(-\pi(x+|x'|)). \end{aligned}$$

Donc $a \in \mathcal{C}([0,1],(0,\infty))$ et $f_1 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$.
(ii) Pour (H2) on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 \Psi(s)\frac{a(t)}{(1-s)^{3-\alpha}}ds &= \int_0^{\eta}\left(\beta - \frac{(\eta-s)^{\alpha-2}(1-s)^{3-\alpha}}{\alpha-2}\right)\left(\frac{\frac{1-s^2}{1+s^2}}{(1-s)^{3-\alpha}}\right) \\ &+ \int_{\eta}^1 \beta\left(\frac{\frac{1-s^2}{1+s^2}}{(1-s)^{3-\alpha}}\right), \\ &= \int_0^{\frac{1}{4}}\left(\frac{7}{2} - \frac{(\frac{1}{4}-s)^{\frac{7}{3}-2}(1-s)^{3-\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}-2}\right)\left(\frac{\frac{1-s^2}{1+s^2}}{(1-s)^{3-\frac{7}{3}}}\right) \\ &+ \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{7}{2}\left(\frac{\frac{1-s^2}{1+s^2}}{(1-s)^{3-\frac{7}{3}}}\right), \\ &= 2.6481 < \infty. \end{aligned}$$

Donc le problème (3.45) admet au moins une solution positive.

Bibliographie

[1] Bai, Z., Lü, H. : Positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation. J. Math. Anal.(2005).

[2] Belakroum.K : Existence et positivité de la solution d'un problème aux limites fractionnaire(2013).

[3] Boyer.F, Fabrie.P, Mathematical Tools for the Study of the Incompressible Navir-Stokes Equations and Related Models, Appl.Math.Sci, New York, 2013.

[4] Erdelyi A, Magnus W, Oberhettinger F and Tricomi F, Higher Transcendental Functions, Vol.III,Krieger Pub, Melbourne, Florida, (1981).

[5] Kilbas.A.A, Srivastava.H.M and Trujillo.J.J. Theory and applications of fractional differential Equations, North Holland Mathematical studies 204, Ed van Mill, Amsterdam, (2006).

[6] Naceri.M : étude de certains problème aux conditions aux limites pour l'équation différentéielle ordinaire non linéaire d'ordre trois et quatre.

[7] Matar.M : On existence of positive solution for initial value problem of nonlinear fractional differential.

[8] Podlubny.I : Fractional differential equations. Academic Press, San Diego (1999).

[9] Yang C, Zhai C.B, Uniqueness of Positive Solutions for a Fractional Differential Equation Via a Fixed Point Theorem of a Sum Operator, Elec.J.Diff.Eqs. (2012).

[10] Samko.S.G, Klbas.A.A and Marichev O.I. (1993), Fractional integrals and derivatives : theory and applications, Gordon and Breach, New York equations of order $1 < \alpha < 2$. Acta Math. Univ. Comen. 84(1), 51.57 (2015).

[11] Smart.D.R : Fixed point theorems. Cambridge University Press, Cambridge (1980).

[12] Zhang.S : The existence of a positive solution for a fractional differential equation. J. Math. Anal. (2000).