

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques



M K10 250



Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

Option : EDP Et Analyse numérique

Par : HAIMOUDE Saida

Intitulé

**Solutions numérique des équations intégrales différentielles de
Volterra linéaires et non linéaire au moyen d'une méthode
quadratique**

Dirigé par :

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. BENDJAZIA Nassima	MCB	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. FERNANE Khairedine	MCA	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. TABOUCHE Noura	MCB	Univ-Guelma

Session Juin 2018



Remerciements

Je tiens à exprimer toutes mes reconnaissances au Docteur "**Fernane Khairddine**" de m'avoir proposé ce sujet de recherche et d'avoir dirigé mon travail.

Je lui témoigne aussi, ma gratitude pour son soutien, sa grande disponibilité et surtout ses conseils et ses encouragements tout au long de mes recherches.

j'exprime également mes chaleureux remerciement au docteur **Bendjazai Nassima** et au Docteur **Tabouche Noura**, pour l'honneur qu'ils m'ont fait d'avoir accepté de faire partie de ce jury.



Dédicace

Merci Allah (mon dieu) de m'avoir donné la capacité d'écrire et de réfléchir, la force d'y croire, la patience d'aller jusqu'au bout du rêve et le bonheur de lever mes mains vers le ciel et de dire " Al hamdo li Allahi "

Je dédie ce modeste travail à celle qui m'a donné la vie, le symbole de tendresse, qui s'est sacrifiée pour mon bonheur et ma réussite, à ma mère et mon père, et pour mes sœurs **roqaya,somia** et mes frères et leurs enfants et la famille **Haimoud** en générale.

Je dédie Surtout à mon mari ainsi ma fille **Anfal** et la famille **Ben krinah**.

Et je n'oublie pas mes amis et collègues de l'étude Hana,Hanen,Ikram.

A tout ceux que j'aime Je dédie ce travail



Table des matières

1	Notations et résultats préliminaires	4
1.1	Les Opérateurs	4
1.1.1	Opérateurs compacts	4
1.1.2	Opérateur intégrale linéaire	4
1.2	Approximation d'une fonction	5
1.2.1	Interpolation polynomiale	6
2	Equations Intégrale - Equations Intégré-différentielles Linéaires	13
2.1	Equations Intégrale	13
2.1.1	Classification des équations intégrales	14
2.2	Equations Intégré-Différentielles	17
2.2.1	introduction :	17
2.2.2	Classification de l'équation intégré-différentielle (E.I-D) :	18
2.3	Liaison entre les équations différentielles linéaires et les équations intégrales de Volterra	20
3	Méthode quadratique intégrale généralisée	23
3.1	Introduction	23
3.2	Cas d'équation intégrale de Volterra [6] :	23
3.2.1	Formulation :	23
3.2.2	Algorithme de la méthode	27
3.3	Exemple	27

3.4	Cas d'équation intgro-différentielle [7]	29
3.4.1	Exemples	31
3.5	Conclusion	33



Introduction générale

De nombreux phénomènes physiques, mécanique, chimique, biologique, etc., peuvent être représentés, modélisés, par une équation aux dérivées partielles (EDP) ou une équation intégrale. Une équation intégrale est une équation fonctionnelle dans laquelle la fonction inconnue paraît sous le signe d'intégrale, mais elle contient ses dérivées.

La théorie des équations intégrales porte sur deux types principaux, les équations intégrales linéaires et non linéaires de Fredholm, et les équations intégrales linéaires et non linéaires de Volterra.

La résolution d'une équation intégrale (équation intégrale-différentielle) est a priori plus difficile que celle d'une équation différentielle ordinaire (EDO) du fait qu'une EDO relie une fonction et ses dérivées qui ne portent que sur une seule variable.

Fredholm (1866-1927) a étudié la méthode pour résoudre les équations intégrales du deuxième espèce.

En 1887, V. Volterra (1860-1940) a établi la méthode de résolution des équations intégrales par les noyaux itérés. En outre, il a étendu la théorie des équations intégrales aux équations intégrales différentielles et aux équations intégrales singulières.

Ainsi, la théorie des équations intégrales a été un domaine de recherche actif dans les mathématiques appliquées et la physique mathématique.

L'importance des équations intégrales dans toutes les branches de la science et l'ingénierie nous amène à étudier certaines de ces équations et les résoudre numériquement.

Le but de notre travail est de résoudre numériquement des équations intégrales-différentielles, et d'analyser la convergence et l'estimation de l'erreur.

Notre travail est présenté en trois chapitres :

Le premier chapitre aborde des notions et résultats préliminaires sur quelques définitions,

et rappel sur les équations intégrales ainsi des méthodes numériques des résolutions des équations Intégré-différentielle de Volterra de 2 ème espèce, nous intéressons la méthode Quadratique.

Dans ce chapitre, nous précisons tout d'abord quelques points de vocabulaire que nous utiliserons ensuite dans ce mémoire.

Dans le deuxième chapitre nous présentons une introduction à la terminologie et à la classification des équations intégrales, qui a pour objectif de familiariser le lecteur avec le concept d'équation intégrale (Intégré-différentielle).

Dans le troisième chapitre nous exposons la méthode Quadratique pour résoudre numériquement les équations intégrale (Intégré-différentielle) de Volterra en se basant sur la méthode d'interpolation de Lagrange telle que les solutions approchées sous forme de polynômes. Cette méthode sera conjuguées avec des exemples, en estimant les erreurs et de comparer les solutions approchées avec la solution exacte par programmation en Matlab.

Notations et résultats préliminaires



Nous introduisons les notations et les définitions nécessaires qui sont utilisées par la suite.

1.1 Les Opérateurs

Définition 1.1.1 (*ensembles bornés*)

Une ensemble $S \subset C(G)$ est dite bornée, s'il existe un constant $M > 0$ telle que $|\Phi(x)| \leq M$ pour tout $x \in G$ et pour tout $\Phi \in S$.

Définition 1.1.2 (*Ensembles relativement compactes*)

Une ensemble $G \subset E$ est relativement compacte si pour toute suite Φ_n de G , il existe une sous suite $\Phi_{n(k)}$ qui converge dans E .

1.1.1 Opérateurs compacts

Définition 1.1.3 Soit A un opérateur linéaire d'un espace normé E dans un espace normé F , on dit que A est un opérateur compact s'il envoie toute ensemble bornée dans E à une ensemble relativement compacte dans F .

1.1.2 Opérateur intégrale linéaire

Définition 1.1.4 soit $K : C[a, b] \times C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue l'opérateur intégrale linéaire A définit par :

$$A : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$$

$$(A\varphi)(x) = \int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt \quad (1.1.1)$$

où la fonction $k(x; t)$ s'appelle le noyau de A .

Proposition 1.1.1 Soient X, Y deux espaces normés, alors on a :

- 1) L'ensemble des opérateurs compacts de X dans Y est un sous espace vectoriel de l'espace des opérateurs linéaire $L(x, y)$.
- 2) Le produit $A_1 A_2$ de deux opérateurs bornés A_1 et A_2 est compact si l'un des opérateurs A_1 ou A_2 est compact.
- 3) Si A un opérateur borné de X dans Y à image $A(x)$ de dimension finie alors A est compact.

Théorème 1.1.1 Soit X un espace normé et Y un espace de Banach et soit $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs compacts, si $\|A_n - A\| = 0$ alors A est compact.

Théorème 1.1.2 l'opérateur intégral A de $C(G)$ dans $C(G)$ à noyau continu est un opérateur compact.

Théorème 1.1.3 (Théorème de Rolle)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que : $f(a) = f(b)$. Alors il existe un point $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$.

1.2 Approximation d'une fonction

Les polynômes font partie des fonctions les plus simples qu'on rencontre en analyse. Leurs valeurs en un point sont aisément calculables par des opérations algébriques élémentaires. Dans cette partie, on cherche à approcher une fonction par un polynôme ; et si la différence entre la fonction et son polynôme d'approximation est assez petite, alors on peut dans certains cas pratiques remplacer les calculs sur la fonction, par des calculs sur son polynôme associé.

Il existe plusieurs manières d'approcher une fonction par des polynômes, suivant l'usage qu'on veut faire de cette approximation. Dans certains cas, la fonction considérée est définie par une expression mathématique ou plus fréquemment, par une suite de valeurs prises en des points distincts x_i telle que $f_i = f(x_i)$, $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ (f est dite alors échantillonnée ou discrétisée).

Pour de nombreuses questions, il est alors utile d'approcher f par une fonction polynomiale P convenablement choisie tel que $P(x_i) = f_i$. Pour $i = 1, 2, \dots, n$. Cette approche peut être réalisée soit sur un intervalle $[a, b]$, soit sur un voisinage d'un point x_0 .

1.2.1 Interpolation polynomiale

Etant donné $(n+1)$ couples (x_i, y_i) , $i = 0, \dots, n$; le problème consiste à trouver une fonction f telle que $f(x_i) = y_i$; on dit alors que f interpole l'ensemble de valeurs $\{y_i\}_{i=0}^n$ aux noeuds $\{x_i\}_{i=0}^n$.

Les quantités y_i représentent les valeurs aux noeuds x_i d'une fonction f connue analytiquement ou des données expérimentales. Dans le premier cas, l'approximation a pour but de remplacer f par une fonction plus simple en vue d'un calcul numérique d'intégrale ou de dérivée. Dans l'autre cas, le but est d'avoir une représentation synthétique de données expérimentales (dont le nombre peut être très élevé).

On parle d'interpolation polynomiale quand f est un polynôme et d'interpolation polynomiale par morceaux (ou d'interpolation par fonctions splines) si f est polynomiale par morceaux.

Notons $\mathbb{R}^m[x]$ l'espace vectoriel formé par tous les polynômes de degré inférieur ou égale à n . Il est bien connu que $\mathbb{R}^m[x]$ a dimension $(m+1)$ et que sa base canonique est donnée par $\{1, x, x^2, \dots, x^m\}$.

Supposons que l'on veuille chercher un polynôme P_m de degré $m \geq 0$ qui pour des valeurs $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ ($n \geq 0$) distinctes données (appelés noeuds d'interpolation), prenne les valeurs $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ respectivement, c'est-à-dire

$$P_m(x_j) = y_j \quad \text{pour } 0 \leq j \leq n \quad (1.2.1)$$

Si un tel polynôme existe, il est appelé polynôme d'interpolation ou polynôme interpolant.

Formule d'interpolation de Lagrange

Théorème 1.2.1 *Pour tout choix de $(n + 1)$ points de la subdivision de $[a, b]$ et pour toute donnée $(f(x_0), \dots, f(x_n))$, il existe un unique polynôme $P \in P_m[x]$ qui vérifie :*

$$P(x_j) = f(x_j), \quad \forall j = 0, 1, \dots, n \quad (1.2.2)$$

Preuve. Pour chercher une solution dans \mathbb{P}_m , on doit déterminer $(m + 1)$ points inconnus qui sont les coefficients de P , soit :

$$P(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k \quad (1.2.3)$$

alors les équations qui doivent être satisfaites sont :

$$\sum_{k=0}^m a_k x_j^k = f(x_j) \quad \forall j = 0, 1, \dots, n \quad (1.2.4)$$

On a ainsi $(n + 1)$ équations à $(m + 1)$ inconnus, il est naturel de prendre $m = n$ et de résoudre le problème d'interpolation dans l'espace vectoriel \mathbb{P}_n . À partir de la formule (1.2.4) on obtient le système linéaire suivant

$$(S) \begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_n x_1^n = f(x_1) \\ \dots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_n x_n^n = f(x_n) \end{cases} \quad (1.2.5)$$

Ou sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & \dots & \dots & \dots & x_0^n \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & \dots & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix} \quad (1.2.6)$$

i.e

$$DA = F \quad (1.2.7)$$

Avec

$$D \in M_{n+1}(\mathbb{R}), A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} F = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix} \quad (1.2.8)$$

Puisque $x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$, on a :

$$\det D = \prod_{0 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j) \neq 0 \quad (1.2.9)$$

(determinant de Vandermonde), donc le système (S) possède une solution (a_0, a_1, \dots, a_n) unique. Désignons par $L_n(x)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange. ■

Calcul des coefficients de Lagrange

Corollaire 1.2.1 Pour tout choix de $(n+1)$ points de la subdivision $[a, b]$ et $\forall j \in \{0, 1, \dots, n\}$; il existe un unique polynôme de degré inférieur ou égal à n satisfaisant :

$$\Phi_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (1.2.10)$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (1.2.11)$$

D'abord, nous calculons explicitement les $\Phi_i(x)$ pour $i \neq j$, $\Phi_i(x_j) = 0$ et pour $i = j$, $\Phi_i(x_i) = 1$, on a donc :

$$\Phi_i(x) = c \prod_{j=0, j \neq i}^n (x - x_j) \quad (1.2.12)$$

Où c est une constante à déterminer et comme

$$\Phi_i(x_i) = 1 = c \prod_{j=0, j \neq i}^n (x_i - x_j) \quad (1.2.13)$$

Alors

$$c = \frac{1}{\prod_{j=0, j \neq i}^n (x_i - x_j)} \quad (1.2.14)$$

Ainsi on déduit que :

$$\Phi_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \left(\frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \right) \quad (1.2.15)$$

Le polynôme

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \Phi_i(x) \quad (1.2.16)$$

Coïncide avec le polynôme d'interpolation de la fonction f aux points x_i . Comme il est de degré inférieur ou égal à n , il est donc égal à ce polynôme d'interpolation. D'après le théorème précédent on peut donc écrire le polynôme d'interpolation de Lagrange sous la forme :

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \Phi_i(x) \quad (1.2.17)$$

Posant :

$$\Pi_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j) \quad (1.2.18)$$

et en dérivant ce produit par rapport à x on obtient :

$$\frac{d}{dx} (\Pi_{n+1}(x)) = \sum_{i=0}^n \prod_{j=0, j \neq i}^n (x - x_j) \quad (1.2.19)$$

Pour $x = x_i$ il vient

$$\frac{d}{dx} (\Pi_{n+1}(x))_{x=x_i} = \prod_{j=0, j \neq i}^n (x_i - x_j) \quad (1.2.20)$$

Il s'ensuit que la formule d'interpolation du polynôme de Lagrange peut-être écrite sous la

forme suivante :

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(x-x_i)\Pi'_{n+1}(x)} f(x_i) \quad (1.2.21)$$

on pose :

$$L_i^{(n)}(x) = \sum_{j=0}^n \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(x-x_j)\Pi'_{n+1}(x)} \quad (1.2.22)$$

Sont dits aussi les coefficients de Lagrange, alors la formule de Lagrange s'écrit

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i^{(n)}(x) f(x_i) \quad (1.2.23)$$

Erreur de la formule de Lagrange

Théorème 1.2.2 Soient f une fonction de classe C^{n+1} sur $[a, b]$ et $L_n(x)$ son polynôme d'interpolation de Lagrange en $(n+1)$ points $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ dans $[a, b]$, alors $\forall x \in [a, b]$, $\exists \xi \in [a, b]$ tel que :

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \Pi_{n+1}(x) \quad (1.2.24)$$

preuve on pose

$$u(x) = f(x) - L_n(x) - k \Pi_{n+1}(x) \quad (1.2.25)$$

k est une constante qui sera choisie par la suite. Remarquons que $u(x)$ possède $(n+1)$ racines aux points $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. Choisissons maintenant k de sorte que $u(x)$ ait une $(n+2)$ -ième racine en un point quelconque \bar{x} fixé dans $[a, b]$, $\bar{x} \neq x_i, \forall i \in \{0, 1, \dots, n\}$. A cet effet il suffit de poser :

$$f(\bar{x}) - L_n(\bar{x}) - k \Pi_{n+1}(\bar{x}) = 0 \quad (1.2.26)$$

d'où

$$k = \frac{f(\bar{x}) - L_n(\bar{x})}{\Pi_{n+1}(\bar{x})} \quad (1.2.27)$$

La fonction $u(x)$ a $(n+1)$ racines sur $[a, b]$ et s'annule aux extrémités de chaque intervalle compact, $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_i, \bar{x}], \dots, [x_{n-1}, x_n]$. En appliquant le théorème de Rolle sur chaque intervalle pour la fonction $u(x)$, on voit que $u(x)$ a au moins $(n+1)$ racines sur l'intervalle $[a, b]$, et on procède de la même façon jusqu'à la dérivée d'ordre n on pouvait finalement remarquer que la fonction $u^{(n+1)}(x)$ possède au moins une racine dans l'intervalle

$[a, b]$ c-à-d :

$\exists \xi \in]a, b[$ tel que $u^{(n+1)}(\xi) = 0$. Comme la dérivée d'ordre $(n+1)$ de $L_n(x)$ égale à zéro c-à-d :

$$L_n^{(n+1)}(x) = 0 \quad (1.2.28)$$

Et

$$\Pi_{n+1}^{(n+1)}(x) = (n+1)! \quad (1.2.29)$$

l'équation (1.2.25) entraîne la relation suivante :

$$u^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - k(n+1)! \quad (1.2.30)$$

Pour $x = \xi$ on obtient :

$$k = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad (1.2.31)$$

La comparaison des deux formules (1.2.27) et (1.2.31) de la valeur k donne :

$$\frac{f(\bar{x}) - L_n(\bar{x})}{\Pi_{n+1}(\bar{x})} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad (1.2.32)$$

C'est-à-dire

$$f(\bar{x}) - L_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \Pi_{n+1}(\bar{x}) \quad (1.2.33)$$

Puisque \bar{x} est quelconque cette formule peut s'écrire :

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \Pi_{n+1}(x) \quad (1.2.34)$$

où $\xi, x \in [a, b]$ et ξ dépend de x . On désigne par :

$$M_{n+1} = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)| \quad (1.2.35)$$

On obtient l'estimation suivante de l'erreur absolue de la formule d'interpolation de Lagrange

$$|R_n(x)| = |f(x) - L_n(x)| \leq M_{n+1} \frac{\prod_{n+1}(x)}{(n+1)!} \quad (1.2.36)$$

Equations Intégrale - Equations Intégréo-différentielles Linéaires

2.1 Equations Intégrale

Définition 2.1.1 Une équation différentielle est une équation liant une fonction f et sa ou ses dérivées f' , f'' , ..., f^n .

Définition 2.1.2 L'équation intégrale est une équation où l'inconnue est une fonction qui apparaît sous le signe intégrale. par exemple l'équation :

$$\lambda y(t) + f(t) = \int_E K(t, s, y(s)) ds \quad (s \in E) \quad (2.1.1)$$

est appelée équation intégrale (EI).

Où $y(t)$ est la fonction inconnue, $f(t)$ est la fonction donnée, $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}) est un paramètre numérique ,

E est un ensemble fermé, borné et mesurable d'une espace euclidien de dimension n .

Si

$$K(t, s, y(s)) = K(t, s)y(s) \quad (2.1.2)$$

$y(s)$ nous étudierons le cas unidimensionnel (i.e. les variables x et t parcourent un intervalle $[a; b]$).

l'équation devient linéaire, ie.

$$f(t) = \int_E K(t,s)y(s)ds - \lambda y(t) \quad (t \in E). \quad (2.1.3)$$

Le type le plus général d'une équation intégrale linéaire est :

$$\phi(t)y(t) = f(t) + \lambda \int_E K(t,s)y(s)ds \quad (t \in E) \quad (2.1.4)$$

Remarque 2.1.1 1- Si $f(t) = 0$, l'équation (2.1.4) est dite homogène.

2- Si $f(t) \neq 0$, l'équation (2.1.4) est dite non homogène.

2.1.1 Classification des équations intégrales

La théorie des équations intégrales porte sur deux types principaux, les équations intégrales linéaires et non linéaires de Fredholm, et les équations intégrales linéaires et non linéaires de Volterra.

Dans l'équation de Fredholm la région d'intégration est fixée, et l'équation de Volterra la région d'intégration est variable.

Nous savons l'équation intégrales linéaire dans ce formulaire :

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t,y(t))dt \quad (2.1.5)$$

ou α, β sont les limites de l'intégration. On peut facilement observer que la fonction inconnue $y(x)$ apparaît sous le signe de l'intégrale. Il est à noter ici que le noyau $k(x,t)$ et la fonction $f(x)$ dans l'équation intégrale sont des fonctions données, et λ est une constante paramètre.

i) cas des équations intégrale linéaire

- Equations intégrales de Volterra

La forme la plus classique de l'équation intégrale de Volterra linéaire est de la forme :

$$\phi(x)y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)y(t)dt \quad (2.1.6)$$

où a et une constante donné.

a) Equation de seconde espèce : pour $\phi(x) = 1$, l'équation devient tout simplement

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x;t)y(t)dt \quad (2.1.7)$$

cette équation est connue comme l'équation intégrale de Volterra du second type.

b) Equation de première espèce : pour $\phi(x) = 0$, l'équation est :

$$f(x) = \lambda \int_a^x k(x,t)y(t)dt \quad (2.1.8)$$

qui est connu comme l'équation de Volterra du premier type.

c) Equation de Volterra homogène : L' équation de Volterra homogène de première espèce est définie par la relation suivante :

$$\lambda \int_a^x k(x,t)y(t)dt = 0 \quad (2.1.9)$$

et L' équation de Volterra homogène de seconde espèce est définie par :

$$y(x) = \lambda \int_a^x k(x,t)y(x)dt \quad (2.1.10)$$

Equations intégrales de Fredholm

La forme plus standard d'équation intégrale linéaire de Fredholm est donnée par la formule

$$\phi(x)y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)y(t)dt \quad (2.1.11)$$

où a, b deux constantes donnés.

a) Equation de second espèce : pour $\phi(x) = 1$ l'équation devient tout simplement :

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)y(t)dt \quad (2.1.12)$$

Cette équation est appelée équation intégrale de Fredholm du second type.

b) Equation de première espèce : pour $\phi(x) = 0$, l'équation est :

$$f(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)y(t)dt \quad (2.1.13)$$

qui s'appelle l'équation intégrale de Fredholm de première espèce.

c) Equation de Fredholm homogène : L' équation de Fredholm homogène de première espèce est définie par la relation suivante :

$$\lambda \int_a^b k(x,t)y(t)dt = 0 \quad (2.1.14)$$

et L'équation de Fredholm homogène de seconde espèce est définie par :

$$y(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)y(t)dt \quad (2.1.15)$$

ii) Cas des équations intégrales non linéaire

Nous savons l'équation intégrales non linéaire dans ce formulaire :

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t,y(x))dt \quad (2.1.16)$$

ou α, β sont les limites de l'intégration, et $k(x,t,y(t))$ le noyau d'équation intégrale non linéaire, et λ est une constante paramètre.

Equation intégrale de Volterra :

a) Equation de second espèce : l'équation intégrale de Volterra du second type est définie par :

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t, y(t)) dt \quad (2.1.17)$$

b) Equation de première espèce : l'équation intégrale de Volterra du première type est définie par :

$$f(x) = \lambda \int_a^x k(x; t, y(t)) dt \quad (2.1.18)$$

Equations intégrales de Fredholm

a) Equation de second espèce : l'équation intégrale de Fredholm du second type non linéaire est définie par :

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t, y(t)) dt \quad (2.1.19)$$

b) Equation de première espèce : l'équation intégrale de Fredholm du second type non linéaire est définie par :

$$f(x) = \lambda \int_a^b k(x, t, y(t)) dt \quad (2.1.20)$$

Equation intégrale singulier :

Une équation intégrale du singulier est définie comme une intégrale avec des limites infinies ou lorsque le noyau de l'intégrale devienne non lié à un certain moment dans l'intervalle.

2.2 Equations Intégro-Différentielles

2.2.1 Introduction :

Les équations intégro-différentielles (E.I-D) est une branche importante de mathématique moderne et survient fréquemment dans beaucoup de domaines appliqués, qui incluent mécanique de l'ingénieur, physiques, chimies, astronomies, biologies, économies, théorie potentielle et électrostatique. Une (E.I-D) est une équation composée de deux opérations

2.2 Equations Intégro-Différentielles

intégrales et différentielles qui impliquent la fonction inconnue y . Nous intéressons dans ce chapitre aux types les plus simples qui concernent les (E.I-D) unidimensionnelle (la fonction inconnue y dépend d'une variable). La forme générale d'une équation intégro-différentielle non linéaire d'ordre n est :

$$y^{(n)}(x) = F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x), \lambda \int_E k(x, t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) dt \quad (2.2.1)$$

Avec les conditions initiales :

$$y(\alpha) = \beta_0, \quad y'(\alpha) = \beta_1, \quad y''(\alpha) = \beta_2, \dots, y^{(n-1)}(\alpha) = \beta_{n-1}$$

telle que : $\alpha \in T$ et β_i ($0 \leq i \leq n-1$) nombres donnés

K : noyau de l'équation intégro-différentielle.

$y, y', \dots, y^{(n)}$: les inconnues.

E : un ensemble fermé, borné et mesurable d'un espace euclidien de dimension finie, (x et t des éléments de cet espace).

λ : est paramètre numérique.

La forme linéaire d'une (E.I-D) d'ordre n est :

$$L_x(y) = \lambda \int_E K(x, t) M_t(y) + f(x) \quad (2.2.2)$$

où :

$$L_x(y) = \sum_{i=0}^n a_i(x) y^{(i)}(x) \quad \text{et} \quad M_t(y) = \sum_{j=0}^m b_j(t) y^{(j)}(t), \quad n, m \in \mathbb{N}$$

et $a_i(x), b_j(x)$ et $f(x)$ sont des fonctions données et ($0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m$)

2.2.2 Classification de l'équation intégro-différentielle (E.I-D) :

Une importante classification des (E.I-D) existe, et sont classées par leurs caractéristiques en cinq types suivants :

1) Les limites de l'intégration :

On distingue trois types majeurs de l'équations intégro-différentielles

- a) Si les limites de l'intégrations sont fixés, alors l'(E.I-D) est dite de Fredholm

$$y^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t) y(t) dt \quad (2.2.3)$$

et $y^{(n)}$ indique la dérivée n-ième de $y(x)$. autres dérivés de l'ordre de moins peuvent apparaitre avec $y^{(n)}$ sur le coté gauche .

- b) Si $b = x$ alors l'(E.I-D) est dite de Volterra :

$$y^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)y(t)dt \quad (2.2.4)$$

ou $y^{(n)}$ indique la dérivée n-ième de y . Autres dérivées de l'ordre de moins peuvent apparaitre avec $y^{(n)}$ sur le coté gauche .

- c) Si les deux opérateurs de l'intégration de Fredholm et Volterra consistent alors l'équation intégro-différentielle est dite de Fredholm-Volterra :

$$y^{(n)}(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k(x, t)y(t)dt + \lambda_2 \int_a^b k(x, t)y(t)dt \quad (2.2.5)$$

2)Ordre de équation intégro-différentielle :

L'ordre d'une (E.I-D) est l'ordre de plus haute dérivée qui apparait dans l'opérateur différentiel.

3)linéaire ou non linéaire :

L'équation intégro-différentielle est dite linéaire sous la forme (2.2.2) ou non linéaire sous la forme (2.2.1)

4)Première ou deuxième espèce :

Première ou deuxième espèce Le (E.I-D) est dite de première espèce si la partie différentiel est nul, sinon est dite de deuxième espèce.

5)Nombre de variable de la fonction inconnue y :

Une (E.I-D) est dite ordinaire si la fonction inconnue dépende d'une seule variable indépendante, alors si dépende de deux ou plusieurs variables indépendantes l'(E.I-D) est dite partielle.

remarque 1.1 : l'équation (2.2.2) à coefficients constants si tous les a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) et b_j ($j = 1, 2, \dots, m$) sont des constants , si un ou plusieurs de ses coefficients n'est pas constants ,alors (2.2.2) est dite à coefficients variables.

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + \alpha_1(x) \frac{dy(x)}{dx} + \alpha_2(x)y(x) = F(x) \quad (2.3.3)$$

Avec les conditions

$$y(0) = c_0 \quad , \quad y'(0) = c_1 \quad (2.3.4)$$

on pose

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = u(x) \quad (2.3.5)$$

Et donc

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = u(x) \iff \frac{dy(x)}{dx} = \int_0^x u(x) + k_1 \iff y(x) = \int_0^x (x-t)u(x) + k_1 x + k_2 \quad (2.3.6)$$

Nous avons utilisé la formule :

$$\int_{x_0}^x \int_{x_0}^x \dots \int_{x_0}^x f(z) dz dz \dots dz = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-z)^{n-1} f(z) dz \quad (2.3.7)$$

On utilisé la formule (2.3.6) l'équation (2.3.3) devient :

$$u(x) + \int_0^x \alpha_1(x)u(x)dt + k_1 \alpha_1(x) + \int_0^x \alpha_2(x)(x-t)u(x)dt + k_1 x \alpha_2 + k_2 \alpha_2(x) = F(x) \quad (2.3.8)$$

Où

$$u(x) + \int_0^x [\alpha_1(x) + \alpha_2(x)(x-t)]u(t)dt = F(x) - k_1 \alpha_1(x) + k_1 x \alpha_2(x) - k_2 \alpha_2(x) \quad (2.3.9)$$

$$\begin{cases} K(x, t) = -[\alpha_1(x) + \alpha_2(x)(x - t)] \\ f(x) = F(x) - k_1 \alpha_1(x) + k_1 x \alpha_2(x) - k_2 \alpha_2(x) \end{cases} \quad (2.3.10)$$

Et donc l'équation (2.3.9) devient :

$$u(x) = \int_0^x K(x, t)y(t)dt + f(x) \quad (2.3.11)$$

Equation Intégrale de Volterra de seconde espèce.

Méthode quadratique intégrale généralisée



3.1 Introduction

Dans le début des années 1900, Vito Volterra a étudié le phénomène de croissance de la population, et nouveaux types d'équations développées et nommés comme équations intégro-différentielles. Dans ce type d'équations, la fonction inconnue apparaît comme la combinaison du dérivé ordinaire et sous le signe intégral.

La résolution effective de ce type d'équations est en général un problème difficile, qui n'admet que rarement une solution explicite en termes de fonctions simples. Il faut bien souvent recourir à des approximations numériques ou analytiques (développement en approximations successives).

Les équations intégrales sont a priori moins simples à résoudre que les équations algébriques ou les équations différentielles, Nous allons voir dans ce chapitre que pour des équations intégrales linéaires, une fois réalisée la discrétisation de ces équations, on se ramène au problème de la recherche de solutions d'un système linéaire. Les équations intégro-différentielles qui va nous intéresser dans la suite de ce travail sont les équations intégro-différentielles de Volterra.

3.2 Cas d'équation intégrale de Volterra [6] :

3.2.1 Formulation :

Soit l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce avec un noyau non singulier est donnée par :

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)y(t)dt, 0 \leq x \leq T \quad (3.2.1)$$

Où λ est un paramètre numérique, a est une constante, f est une fonction donnée (Supposons que continue dans $[0, T]$) et $k(x, t)$ est le noyau de l'équation intégrale.

Soit $x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_j \leq \dots \leq x_N$ une division de l'intervalle $[0, T]$ avec

$$x_j = \frac{T}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{2j+1}{2N+2}\pi\right) \right], j = 0, \dots, N \quad (3.2.2)$$

Sont les points d'interpolations de Tchebychev .

On souhaite obtenir une approximation de la fonction y sur l'intervall $[0, T]$

On pose alors :

$$U(x) = \int_0^x K(x,t)y(t)dt \quad (3.2.3)$$

Celle-ci donne :

$$U(x_i) = \int_0^{x_i} K(x_i,t)y(t)dt \quad 0 \leq i \leq N \quad (3.2.4)$$

on peut-être approximée (3.2.4) par :

$$U(x_i) - \sum_{j=0}^N C_{ij}K(x_i, x_j)y(x_j) \quad , \quad 0 \leq i \leq N \quad (3.2.5)$$

Ou C_{ij} représentent les coefficients au points de l'intégrale simple est sont des inconnus à déterminer. On remplace y par son polynôme d'interpolation de Lagrange de degré inférieur ou égal à N , l'inconnu y peut être approximée par :

$$y(x_j) = P_{N,k}(x_j) \quad (3.2.6)$$

Avec

$$P_{N,k}(x_j) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j \\ 0 & \text{si } k \neq j \end{cases} \quad (3.2.7)$$

Le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré N associé à y et aux points $\{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ est :

$$P_{N,k}(x) = \frac{G_N(x)}{(x-x_k)G_N^{(1)}(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots, N \quad (3.2.8)$$

Où

$$G_N(x) = \prod_{j=0}^N (x-x_j) \quad \text{et} \quad G_N^{(1)}(x_k) = \frac{\partial G_N(x_k)}{\partial x} = \prod_{j=0; j \neq k}^N (x_k - x_j) \quad (3.2.9)$$

Remplaçant (3.2.6) dans (3.2.5), on obtient :

$$U_k(x_i) = \sum_{j=0}^N C_{i,j} K(x_i, x_j) P_{N,k}(x_j) \quad (3.2.10)$$

et par suite

$$C_{ij} = K^{-1}(x_i, x_j) U_j(x_i) \quad (3.2.11)$$

de (3.2.10) et (3.2.11) on peut définir successivement les fonctions C_{ij} par :

$$C_{ij} = K^{-1}(x_i, x_j) \int_0^{x_i} K^{-1}(x_i, t) P_{N,i}(t) dt \quad (3.2.12)$$

Dans le but de trouver une expression simple pour le polynôme $P_{N,k}(t)$, on écrit :

$$P_{N,k}(t) = (t-x_0) Q(N, l, k, t), \quad N \geq 1 \quad (3.2.13)$$

$$P_{N,k}(t) = (t-x_0) \frac{\prod_{j=1}^N (t-x_j)}{\prod_{j=0; j \neq k}^N (x_k - x_j)} \quad (3.2.14)$$

il s'ensuit alors

$$Q(N, l, k, t) = b_{0,k} \prod_{j=1; j \neq k}^N (t-x_j) \quad (3.2.15)$$

$$Q(N, l, k, t) = \sum_{l=0}^N b_{N-l,k} t^l, N \geq 1 \quad (3.2.16)$$

Où les coefficients $b_{l,k}$ sont liés par les relations suivantes :

$$\sum_{j=1, j \neq k}^N x_j = -\frac{b_{1,k}}{b_{0,k}} \quad (3.2.17)$$

$$\sum_{\substack{m < j \\ m \neq k, j \neq k}}^N x_m x_j = \frac{b_{2,k}}{b_{0,k}}$$

⋮
⋮

$$\prod_{j=1, j \neq k}^N x_j = (-1)^N \frac{b_{N,k}}{b_{0,k}} \quad (3.2.18)$$

Les premiers membres des égalités (3.2.18) sont les sommes des combinaisons une à une, deux à deux, etc...des racines du polynôme $Q(N, l, k, x)$ et $b_{0,k} \neq 0$ est identifié comme :

$$b_{0,k} = \frac{1}{\prod_{j=0; j \neq k}^N (x_k - x_j)} \quad (3.2.19)$$

et par conséquent les C_{ij} peuvent prendre la forme suivante :

$$C_{i,j} = K^{-1}(x_i, x_j) \sum_{l=0}^N b_{N-l,j} \int_0^{x_i} K(x_i, t) t^l dt, \quad i = 0, \dots, N \quad (3.2.20)$$

Dans les calculs pratiques, au lieu d'utiliser (3.2.20) pour évaluer $C_{i,i}$ d'autres relations peuvent-être établies pour obtenir $C_{i,i}$. Par conséquent les relations (3.2.10) et (3.2.12) ensemble avec (3.2.20) donnent :

$$\sum_{j=0}^N C_{i,j} K(x_i, x_j) = \int_0^{x_i} K(x_i, t) dt \quad \text{pour } i = 0, \dots, N \quad (3.2.21)$$

ainsi les coefficients $C_{i,i}$ peuvent-être calculés par :

$$C_{i,i} = \int_0^{x_i} \bar{K}(x_i, t) dt - \sum_{j=0, j \neq i}^N C_{i,j} \bar{K}(x_i, x_j), \quad \text{pour } i = 0, \dots, N \quad (3.2.22)$$

où $\bar{K}(x_i, t) = \frac{K(x_i, t)}{k(x_i, x_i)}$.

3.2.2 Algorithme de la méthode

Étape1.

Calcule de $b_{i,k}$ et les $b_{0,k}$ pour $i, k = 1, \dots, N$.

Étape2.

Calcule de $C_{i,j}$ et les $C_{i,i}$ pour $i, j = 1, \dots, N$

Étape3.

Résolution de système linéaire : $(I - \lambda R)Y = F$ où $R = C K$ est une matrice carrée d'ordre $(N + 1)$ où $R_{ij} = C_{ij}K_{ij}$ et F est le vecteur qui contient les valeurs de f aux noeuds .

3.3 Exemple

Exemple 3.3.1 *Considérons l'Equation Integrale de Volterra :*

$$y(x) = x^2 - \frac{1}{4}x^5 + \int_0^x xty(s)ds \quad (3.3.1)$$

Avec la solution exacte est donnée par $y_{ex}(x) = x^2$

En se servant du logiciel Matlab, on a résolu ce système pour obtenir les résultats de la figure (3.1) pour $N = 8$.

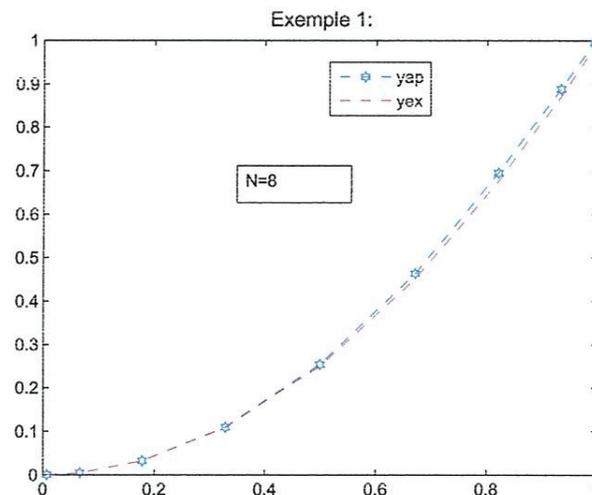


FIGURE 3.1 – Solution numérique de l'équation (3.3.1). Comparaison avec la solution exacte

Dans cet exemple l'interpolation polynomiale de Lagrange d'ordre 8 est employée pour résoudre ce problème. On constate bien que la solution numérique présente un faible décalage par rapport à la solution exacte.

Exemple 3.3.2 Considérons l'Equation Integrale de Volterra :

$$y(x) = -x^2 + x + 1 + \int_0^x xty(s)ds \quad (3.3.2)$$

Avec la solution exacte est donnée par $y_{ex}(x) = e^x$. En se servant du logiciel Matlab, on a résolu ce système pour obtenir les résultats de la figure (3.3) pour $N = 1$. Dans cet exemple l'interpolation polynomiale de Lagrange d'ordre 8 est employée pour résoudre ce problème. La comparaison est un peu moins convaincante sur $y_{ap}(x)$.

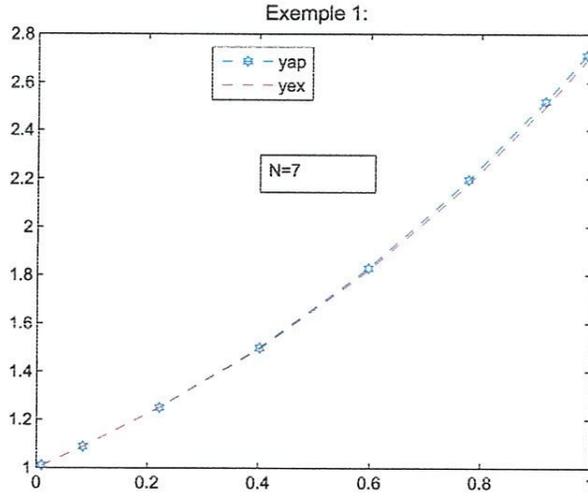


FIGURE 3.2 – Solution numérique de l'équation (3.3.2). Comparaison avec la solution exacte

3.4 Cas d'équation intgro-différentielle [7]

Soit l'équation intgro-différentielle avec noyau faiblement singulier :

$$\sum_{k=1}^l \gamma_k(x) \frac{d^k y(x)}{dx^k} = \alpha(x)y(x) + \beta(x) + \lambda w(x), \quad \alpha \leq x \leq T, \quad (3.4.1)$$

où $w(x)$ et donné par

$$w(x) = \int_a^x (x-s)^{-v} k(x,s)y(s) ds \quad (3.4.2)$$

Avec λ et v sont des paramètres et $0 < v < 1$. $\alpha(x)$, $\beta(x)$ et $\gamma_k(x) (k = 0, \dots, m)$ sont des fonctions, et $k(x,s)$ et le noyaux de l'équation intgro-différentielle, c'est supposé que la fonction impliquée dans (3.4.1) est suffisamment régulière. les équations ci-dessus pour $v = 0$ deviennent des équations intgro-différentielle régulière .

Afin d'éviter la singularité, on intgrer par partie l'équation (3.4.1) on obtenons :

$$w(x) = \frac{1}{1-v} [-(x-a)^{1-v} k(x,a)y(a)] - \frac{1}{(1-v)} \int_a^x (x-s)^{1-v} \frac{d[k(x,s)y(s)]}{ds} ds \quad (3.4.3)$$

la relation (3.4.1) devient :

$$w(x) = \frac{1}{1-v} [-(x-a)^{1-v} k(x,a)y(a)] - \frac{1}{(1-v)} \int_a^x (x-s)^{1-v} \frac{d[k(x,s)y(s)]}{ds} ds \quad (3.4.3)$$

la relation (3.4.1) devient :

$$\sum_{k=1}^l \gamma_k(x) \frac{d^k y(x)}{dx^k} = \alpha(x)y(x) + \beta_v(x) + \frac{\lambda}{(1-v)} \int_a^x (x-s)^{1-v} \frac{d[k(x,s)y(s)]}{ds} ds \quad (3.4.4)$$

et $\beta_v(x) = \beta(x) + \frac{\lambda}{1-v} (-(x-a)^{1-v} k(x,a)y(a))$.

A ce stade, nous introduisons l'aspect quadrature des solutions. Les dérivée et intégrale dans l'exprection (3.4.4) sont l'approchées par :

$$\frac{d^k}{dx^k} y(x_m) = \sum_{j=0}^N D_{mj}^k y(x_j) \quad (3.4.5)$$

$$\int_a^{x_m} (x_m-s)^{1-v} \frac{d[k(x_m,s)y(s)]}{ds} ds = \sum_{j=0}^N I_{mj} y(x_j) \quad (3.4.6)$$

et $\{x_k\}_{k=0}^N$ sont des points d'interpolations, pris comme les points de tchebychev de la forme :

$$x_j = \frac{T}{2} [1 - \cos(\frac{2j+1}{2N+2}\pi)], 0 \leq j \leq N$$

D_{ij} et I_{mj} sont les coefficients de pondération liés aux polynomes d'interpolations de la-grange $P_{N,j}(x)$ et sont explicitement donnée par :

$$D_{mj}^k = \frac{d^k P_{N,j}(x_m)}{dx^k} \quad (3.4.7)$$

$$I_{mj} = \int_0^{x_m} (x_m-s)^{1-v} \frac{d [k(x_m,s) P_{N,j}(s)]}{ds} ds \quad (3.4.8)$$

avec peut d'effort les problemes originaux (3.4.1) peuvent être convertis en un système algébrique et prendre les formes compacts suivantes :

$$\alpha(x_m)y(x_m) + \beta_v(x_m, x_m) = \sum_{j=0}^N U_{mj}^I y(x_j), \quad m = 0, \dots, N \quad (3.4.9)$$

Où

$$U_{mj}^l = \sum_{k=0}^l \gamma_k(x_m) D_{mj}^k - \frac{\lambda}{(1-v)} I_{mj} \quad (3.4.10)$$

La relation (3.4.10) est une système réel de $(M \times M)$ équation de $(M \times M)$ coefficients réels inconnus, où $M = N + 1$. Pour éviter calcul inutile et d'optimiser le calcul aspect, il est donc plus pratique d'obtenir le coefficients D_{ii} , I_{ii} sous la forme suivantes :

$$D_{ii}^k = - \sum_{j=0, j \neq i}^N D_{ij}^k, \text{ pour } i = 0, \dots, N, k = 1, \dots, l \quad (3.4.11)$$

$$I_{ii} = \int_a^{x_i} (x_i - s)^{1-v} \frac{dk(x_i, s)}{ds} ds - \sum_{j=0, j \neq i}^N I_{ij}, \text{ pour } i = 0, \dots, N \quad (3.4.12)$$

Mintenant, les expressions (3.4.9), (3.4.10), (3.4.11) et (3.4.12) fournir les formules pratiques et attrayantes pour la pondération coefficients. une fois que les valeurs de la fonction à tous les points de la grill sont obtenu ,il est alors facile de déterminer les valeurs de le domaine global en termes d'approximation polynomiale tel que :

$$y(x) = \sum_{j=0}^N y(x_j) P_{N,j}(x) \quad (3.4.13)$$

3.4.1 Exemples

Exemple 3.4.1 Dans cet exemple, nous utilisons l'équation l'intégo-différentielles de Volterra donnée par :

$$y'(x) = y(x) - x(x+1) + x(x+1)e^x - \frac{1}{4}x^5 + \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-s}} y(s) ds \quad (3.4.14)$$

Avec la solution exacte est donnée par $y_{ex}(x) = x^2 + e^x$.

En se servant du logiciel Matlab, on a résolu ce système pour obtenir les résultats de la figure (3.3) pour $N = 10$. Dans cet exemple l'interpolation polynomiale de Lagrange

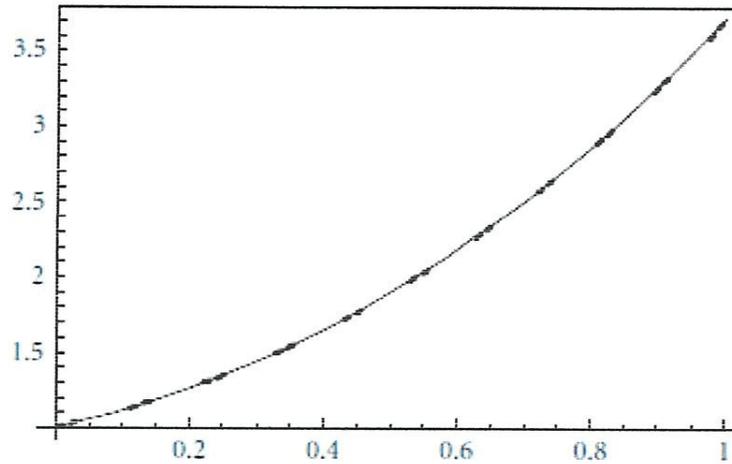


FIGURE 3.3 – Solution numérique de l'équation (3.4.14). Comparaison avec la solution exacte

d'ordre 10 est employée pour résoudre ce problème.

La comparaison est un peu moins convaincante sur $y_{ap}(x)$.

Exemple 3.4.2 Nous considérons la solutions numérique de l'équation intgro-différentielle de Volterra suivant :

$$\begin{cases} y''(x) = y(x) + \frac{3}{2}\sqrt{x} + x\sqrt{x} + \frac{3\pi}{8}x^2 + \\ \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-s}}y(s)ds, & 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = 0. \end{cases} \quad (3.4.15)$$

La solution exacte est donnée par $y_{ex}(x) = x^{\frac{3}{2}}$.

En se servant du logiciel Matlab, on a résolu ce système pour obtenir les résultats de la figure (3.3) pour $N = 10$.

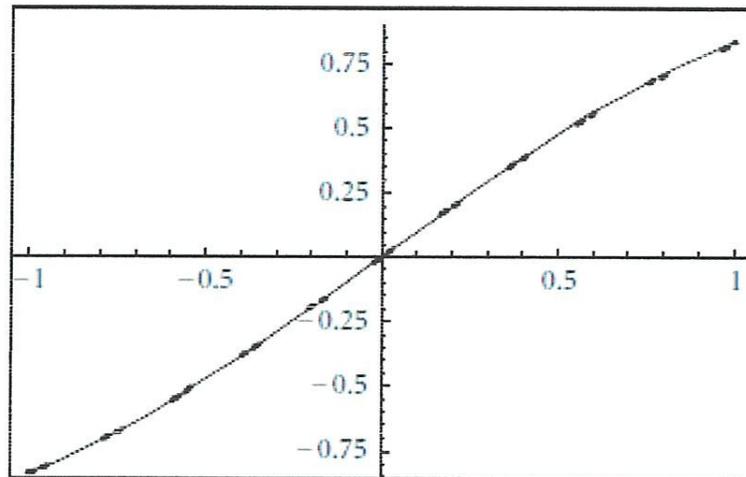


FIGURE 3.4 – Solution numérique de l'équation (3.4.15). Comparaison avec la solution exacte

Dans cet exemple l'interpolation polynomiale de Lagrange d'ordre 8 est employée pour résoudre ce problème.

La comparaison est un peu moins convaincante sur $y_{ap}(x)$.

3.5 Conclusion

Nous proposons une méthode numérique (méthode quadratique) de résolution des équations intégrales et des équations intgro-différentielle de Voltera. Notre objectif été de voir la performance de cette méthode et de contribuer à l'étude du comportement de l'erreur commise dans cette approche. Les résultats obtenus jusqu'ici ne sont pas convaincants.

On pourrait croire que la convergence du polynôme de Lagrange est d'autant meilleure que l'écart entre les points d'interpolation est plus petit. l'interpolation avec le polynôme de Lagrange ne converge pas toujours vers la fonction interpolée en tous points. La divergence s'observe aux bords de l'intervalle : la convergence n'est pas uniforme.

Lagrange ne converge pas toujours vers la fonction interpolée en tous points. La divergence s'observe aux bords de l'intervalle : la convergence n'est pas uniforme.



Bibliographie

- [1] Ben Amara Karima, quelques méthodes pour la résolution des équations intégrales différentielles, Mémoire de Master, Université KASDI MERBAH Ouargla(2015).
- [2] Amal Berrahlia, Méthodes Analytique pour la résolution des équations intégrales différentielles, mémoire de Master, Université 8 Mai 1945-Guelma (2016).
- [3] Soufiane Benyoussef, Résolution numérique des équations intégrales différentielles de Fredholm, Mémoire de Magistère, Université M'SILA(2014).
- [4] Hanan Fedaoui, Résolution numérique des (E.I) et (E.I-D) linéaires avec noyau singulier, mémoire de Master, Université 8 Mai 1945-Guelma (2017).
- [5] Ramili Oum El Houari, Equations Intégrales de Frontiere Exemples de Resolution Numérique, Mémoire de Magister, Université D'ORAN ES-SENIA.
- [6] Abdesselam SOUKEUR, Sur l'aspect numérique des solutions des équations intégrales de Volterra linéaires et non linéaires au moyen d'une nouvelle méthode quadratique intégrale généralisée (QIG), Mémoire de Magister en Mathématiques, Université MOHAMED KHIDER- BISKRA(2004).
- [7] A. Zerarka, A. On Some Volterra and Fredholm Problems via the Unified Integro-differential Quadrature Method, International Scholarly Research Network ISRN Computational Mathematics Volume 2012, Article ID 139514, 5 pages doi :10.5402/2012/139514.