République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : **EDP et Analyse numérique**

Par :

Mlle Aouissi Nesrine

Intitulé

Une martingale non pure, dont la filtration est brownienne

Dirigé par :
Mme Sekrani Samia

Devant les jury

PRESIDENT	Dr:	Ezzebssa Abdelali	MCB Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr:	Sekrani Samia	MCA Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr:	Bouhadjar Slimane	MCB Univ-Guelma

Saison Juin 2018

Remercîment

En préambule à ce mémoire, j'adresse ces quelques mots pour remercier notre Allah tous puissant pour exprimer mes reconnaissances envers sa grande générosité. Allah ma donnée la volonté, la patience, et la santé durant toutes mes années d'étude.

Je remercie m'encadreur « Mdm Secrani Samia », pour ses conseils précieuse durant toute cette période et pour sa patience avec moi .

Je suis très honore que Dr A. Ezzebssa , ait accepté de rapporter mon travail et de présider mon jury de mémoire . Je le remercie pour ces conseils et ces précieuses remarques.

Je remercie « Dr S. Bouhadjar » d'avoir accepté d'examiner mon travail . Je suis très heureuse de le voir participer à mon jury.

Un grand merci à mon guide « Abdelkader . » pour ces conseils , instructions et leur patience avec moi merci .

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

à mes très chers parents qui m'ont guidé durant les moments les plus pénibles de ce long chemin, ma mère (Yasmina) qui a
été toujours à ma coté et elle ma soutenu toute ma vie, et mon père (Farouk) qui a sacrifié toute sa vie afin de me voir devenir ceque je suis, merci infiniment mes parents.

A mes chères sœurs (Ikram, Nachwa) et mon petit frére (Taim Allah) .

A toute ma famille mes tantes (Warda,Khandouda,Abla et Fella) et à mes oncles sure tout (Abd El Baki) et ma grandemére (Djamila) et spécialement pour mon frére et cousin (Aouissi Mohamed).

A mes meilleurs amis avec vous j'ai vie mes meilleirs moments et avec vous j'ai pu résisté les difficiles jours qui m'enface
(Nour el HoudaSéridi, Aouissi Nassima, BouhaliSarra, AieychiaWehida, BennourSarra, SarraGarnin et Abd El Ghani Ben Zaid) .

A m'encadreur « mmesekrani Samia » qui a fait tout sa possibilitée pour nous orienter dans l'élaboration de notre mémoire .

A toute la promotion de 2018.

Table des matières

Introduction

Les martingales sont des processus vraiment fondamentaux. Voici certains de leur utilisation dans des différents domaines :

- Les martingales sont critiques dans les modèles de jeu (et par extension, le contrôle stochastique et l'arrêt optimal). Une caractéristique importante des martingales est le théorème d'arrêt optionnel de Doob, qui dit que l'attente d'une martingale est constante, même si on arrête la martingale à certain moment aléatoire (tant que ce temps aléatoire ne regarde pas dans le futur). En pratique, cela signifie que si nous parions sur un jeu équitable (disons une pièce juste), alors peu importe à quel point notre stratégie de mise et d'arrêt est alambiquée, nous ne pourrons jamais arriver en tête, dans l'attente.

- Le processus de temps continu le plus essentiel, Le mouvement brownien est une martingale.

- Si vous êtes plus axé sur l'analyse, les martingales, fournissent la preuve la plus naturelle du théorème de Radon-Nikodym (ok, pour les algèbres sigma séparables). La preuve est une application du théorème de convergence de Martingale.

- En finance mathématique et en économie, les martingales sont cruciales pour les modèles de tarification. Par exemple, si nous modélisons un actif financier comme un processus aléatoire, nous exigeons des règles de tarification (mesures) selon lesquelles l'actif est une martingale. La martingalité d'un actif équivaut à ne pas être en mesure de procéder à un arbitrage par le biais d'opérations sur cet actif.

- Les martingales sont essentielles à l'intégration stochastique. La raison principale est un petit truc technique de martingales, qui est que lorsque vous placez une martingale, vous pouvez le discrétiser en une somme télescopique de ses incréments, et les termes croisés abandonner.

- Les méthodes Martingale peuvent traiter le contrôle stochastique dans des paramètres non markoviens (les méthodes PDE ne peuvent être utilisées que dans les paramètres de Markov). La programmation dynamique va de pair avec les méthodes de martingale.

- Connexions profondes à l'analyse complexe. Pour une fonction de valeur complexe f, et un mouvement brownien B à 2D dans le plan complexe, f (B) est une martingale si elle est analytique. Si vous connaissez le lemme d'Ito, vous pouvez le prouver dans une ligne, et vous pouvez prouver plusieurs des résultats célèbres de l'analyse complexe en utilisant ce fait.

Dans ce travail, les espaces de probabilités sont toujours complets, les sous-tribus considérées contiennent tous les négligeables et les filtrations sont continues à droite.

Le processus intégrale stochastique de H par rapport à X sera noté $\int HdX$,la filtration naturelle d'un processus X sera notée $\mathcal{F}^X$. Une $\mathcal{F}$-martingale locale continue X a la PRP par rapport à la filtration $\mathcal{F}$ si pour toute $\mathcal{F}$-martingale M, il existe un processus $\mathcal{F}$-prévisible H tel que

$$M = M_0 + \int HdX.$$

X est dite $\mathcal{F}$-extrémale si $\mathcal{F}_0$ est triviale et si X a la $\mathcal{F}$-PRP .Si de plus $\mathcal{F}^X = \mathcal{F}$, M est dite extrémale (cette terminologie est justifiée par le fait que la loi d'une martingale extrémale est une point extrémale dans l'ensemble convenxe m de toutes les mesures de probabilté sur W=C($\mathbb{R}^+$,$\mathbb{R}$) , qui rendent le processus des coordonnées une martingale locale). Une martingale local continue X telle que $\langle X\rangle_\infty = \infty$ est dite pure si $\mathcal{F}^X_\infty = \mathcal{F}^B_\infty$ où B est les mouvement brownien de Dubins -Schwartz (DDS) associé à X , ce qui équivaut à dire que tout t , $\langle X\rangle_t$ est $\mathcal{F}^B_\infty$ – mesurable

Toute martingale pure est extrémale mais l'inverse n'est pas vrai. Yor a donné un exemple d'une martingale extrémale non pure, sa filtration naturelle est en fait brownienne, c'est ce qu'on démontre dans ce travail.

Résumé

Soit $(\mathcal{B}_t)_{t\geq 0}$ la filtration d'un mouvement brownien $(\mathrm{B}_t)_{t\geq 0}$ dans $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$. Un exemple d'une martingale extrémale non-pure qui engendre la filtration $(\mathcal{B}_t)_{t\geq 0}$, est donné. On discute aussi d'un exemple de F. Knight, d'une martingale non-extrémale avec la même propriété. En plus, on donne des exemples de filtrations avec Sp Mult ≤ 2.

Chapitre 1

le mouvement brownien et les martingales

Dans ce chapitre on va présenter quelques définitions et des théorèmes nécissaires pour développer et améliorer ce travail.

Dans tout ce qui suit, (Ω, F, P) désigne un espace de probabilité complet.

1.1 Les filtrations

Définition 1.1 *On appelle tribu de parties de Ω toute famille $\mathcal{F}$ de parties de Ω satisfaisant :*

i) $\emptyset \in \mathcal{F}$

ii) $\mathrm{A} \in \mathcal{F} \Longrightarrow \mathrm{A}^c \in \mathcal{F}$

iii) Si $(\mathrm{A}_n)_{n\geq 1}$ est une suite de $\mathcal{F}$ alors

$$\bigcup_{n\geq 1} \mathrm{A}_n \in \mathcal{F}$$

Le couple $(\Omega\ ,\ \mathcal{F}\ )$ où $\mathcal{F}$ est une tribue des parties de Ω est applé un *espace propabilisable.*

Définition 1.2 *La tribu engendrée par une famille de variables aléatoires $(X_t; t \in [0;T])$ est la plus petite tribu contenant les ensembles $\{X^{-1}(A)\}$ pour tout $t \in [0;T]$. On la note $\sigma(X_t\ t \leq T)$.*

Tribu borélienne

Rappelons que pour la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ un ensemble O de $\mathbb{R}$ est un ouvert si

$$\forall\, x \in O\ \exists\ \text{a,b} \in O,\ x \in]a, b[\ \subset O.$$

On note $\mathcal{O}$ l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$.

Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$. Notons

$$I = \{(\rho, r) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}_+^*,\ ]\ \rho - r, rho + r\ [\ \subset O\}$$

Alors I est dénombrable et

$$\mathcal{O} = O \bigcup_{(\rho,r)\in\ I}]\ \rho - r, \rho + r\ [.$$

Définition 1.3 *La tribu $\sigma(\mathcal{O})$ engendrée par $\mathcal{O}$ est appelée la tribu borélienne de $\mathbb{R}$. On la note $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et ses éléments sont appelés les boréliens.*

Définition 1.4 ***(Vecteurs gaussiens)*** *On dit qu'une v.a.r X définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est une variable aléatoire gaussienne de paramétres (m, σ^2), $(m \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}_+^*)$ si sa fonction de densité f_X est donné par :*

$$f_X\ (x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}(\frac{x-m}{\sigma})^2)$$

Dans ce cas, sa loi P_x est donnée par :

$$\forall\ A \in \beta_{\mathbb{R}}, \quad P_X(A) = \int_A f_X\ (x)\ dx$$

et on note X $\sim N(m, \sigma^2)$. ($\beta_{\mathbb{R}}$ est la tribu borélienne).

Remarque 1.1 *Lorsque* $\sigma = 0$, X *est une variable constante i.e* $X = m P$*-p.s*

Définition 1.5 $X = (X_1, X_2, ...X_n)$ *est une vecteur aléatoire gaussien si toutes les combinaisons linéaire de ses composantes sont gaussiennes i.e.* $\forall a_1, a_2, ...a_n \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ *est une v.a.r gaussienne.*

Exemple 1.1 *Si X et Y sont deux variables aléatoires gaussiennes indépandantes alors (X,Y) et (X-Y,X+Y) sont des vecteurs gaussiens aussi.*

Définition 1.6 *Une filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t>0}$ *est une suite croissante de sous tribus de* $\mathcal{F}$.
Si $(\mathcal{F}_t)_{t>0}$ *est une filtration de* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *alors* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t>0}, P)$ *est appelé espace de probabilité filtré.*

Définition 1.7 *- Si* $(\mathcal{F}_t)_{t>0}$ *est une filtration alors on définit la filtration suivante* $\mathcal{F}_{t^+} = (\bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s)$.
- On dit qu'une filtration est continue à droite si $\forall t \geq 0$, $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+}$.
Soit N la classe des ensembles de $\mathcal{F}$ *qui sont P- négligeable. Si* $N \subset \mathcal{F}_0$, *on dit que la filtration* $(\mathcal{F}_t)$ *est complète.*
On dit qu'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t>0}$ *satisfaite les conditions habituelles si elle est à la fois continue à droite et complète.*

Définition 1.8 *Soit* $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *une filtration. Un processus* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *est adaptée à la filtration* $\mathcal{F}$ *si* X_t *est* $\mathcal{F}_t$ *mesurable pour tout* $t \geq 0$

1.2 le mouvement brownien

Définition 1.9 ***(Le mouvement brownien)*** *Le mouvement brownien standard est un processus stochastique réel* $B = (B_t)_{t\geq 0}$ *vérifiant :*

i) $B_0 = 0$ P-p.s

ii) $\forall\ s \in [0,t]$, $B_t - B_s \sim N(0, t-s)$.

iii) $\forall\ n \geq 1, \forall\ t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n$; $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, ..., B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ sont indépendantes.

iv) $P - p.s$, l'application t$\rightarrow B_t$ est continue.

- Soit $x \in \mathbb{R}$, un mouvement brownien issu de x $\quad B^x = (B_t^x)_{t>0}$ est un processus qui vérifie ii), iii) et iv) et $B_0 = x$, P-p.s.

- Un mouvement standard dans $\mathbb{R}^d$ noté BM^d est un processus $B = (B_t)_{t>0}$ où $B_t = (B_t^1, ..., B_t^d)$ avec $\{(B_t^i), 1 \leq i \leq d\}$ des mouvements browniens standard indépandants.

Le mouvement brownien posséde de nombreuses bonnes propriétés, en effet :

Proposition 1.1 *Soit $B = (B_t)_{t\ \geq 0}$ un mouvement brownien défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ alors*

a)-symétrie :

Le processus (-B) $= (-B_t)_{t\ \geq 0}$ est encore un mouvement brownien.

b)-changement d'échelle (scaling) :

Soit $\lambda > 0$. Le processus $B^\lambda = (B_t^\lambda)_{t>0}$ avec $\quad B_t^\lambda = (\frac{1}{\lambda})B_{\lambda^2}$ $\quad$ est encore un mouvement brownien.

c)-Propriété de Markov simple :

Pour $s \geq 0$, posons $\mathcal{F}_s = \sigma(B_u, u \leq s)$ et $B_t^{(s)} = B_{t+s} - B_s$.

alors $B^{(s)} = (B_t^{(s)})_{t>0}$ est un mouvement brownien indépendant de $\mathcal{F}_s$,

Définition 1.10 *Soit $(\mathcal{F}_t)$ une filtration et $T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ une application, on dit que T est un temps d'arrêt par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t>0}$ si*

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \qquad \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Lemme 1.1 ***(Propriété de Markov forte)***

Soient $B = (B_t)_{t>0}$ un mouvement brownien,T un temps d'arrêt. Posons pour t ≥ 0

$$Y_t = B_{T+t} - B_T$$

Alors, sur $\{T < \infty\}$ le processus $(Y_t)_{t \geq 0}$ est un moüvement brownien indépandente de $\mathcal{F}_T$.

Définition 1.11 *Une variable aléatoire L a valeur dans $[0, \infty]$ est un temps honnête pour une filtration $\mathcal{F}$ s'il existe pour chaque $t \geq 0$ une variable aléatoire l_t mesurable pour $\mathcal{F}_t$ et telle que $L = l_t$ sur $\{L \leq t\}$.*

Définition 1.12 ***(Processus prévisible)*** *Un processus stochastique est dit $(\mathcal{F}_t)$ -prévisible si la fonction de $(t, \omega) \in \tau \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable par rapport à la tribu sur $\tau \times \Omega$ engendrée par les processus adaptés est continue à gauche. En quelque sort, la valeur de X en t est entiérement déterminé à partir des valeurs passées de $X(s)$, $s < t$. Intuitivement un processus prévisible est un processus dont la valeur en t découle des valeurs observés avant t*

1.3 Martingales à temps continu

Les Martingales

On suppose donné un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$

Définition 1.13 *Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus adapté et intégrable, on dit que X est ;*

1.Une surmartingale si

$$\forall\, 0 \leq s \leq t, \qquad E(X_t / \mathcal{F}_s) \leq X_s$$

2.Une martingale si

$$\forall 0 \leq s \leq t, \qquad E(X_t / \mathcal{F}_s) = X_s$$

3. Une sousmartingale si

$$\forall\, 0 \leq s \leq t, \qquad E(X_t/\mathcal{F}_s) \geq X_s$$

Théorème 1.1 ***(Théorème de convergence des martingales)*** *Soit X une martingale continue les assertions suivantes sont équivalentes :*
(a)- X est une martingale fermée par X_∞
(b)- X converge p.s et dans L^1 vers X_∞
(c)- X est uniformement intégrable.

On prendra garde, dans ce théorème, que la limite de X_t est une variable aléatoire X_∞. De plus, il existe des martingales qui ne sont pas uniformément intégrables, autrement dit qui ne converge pas.

Un exemple typique de martingale non convergente est le mouvement brownien.

Définition 1.14 ***(Martingale locale)*** *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ un espace de probabilité filtré, $X = (X_t)_{t\,\geq 0}$ un processus continu. On dit que X est une $(\mathcal{F}_t, P)$-martingale locale, s'il existe une famille de temps d'arrêt $\{T_n, n \geq 1\}$, telle que*

i) La suite $(T_n)_{n\geq 1}$ est croissante et $\lim\limits_{t\to\infty} T_n = +\infty$ p.s,
ii) Pour tout n, le processus

$$X^{T_n} 1_{\{T_n > 0\}} = (X_t^{T_n} 1_{\{T_n > 0\}})_{t\,\geq\,0}$$

est une $(\mathcal{F}_t, P) - martingales$ uniformément intégrable.

La classe des martingales locales est srtictement plus large que celle des martingales continues.

Théorème 1.2 *Si $M = (M_t)_{t\,\geq 0}$ est une martingale locale alors il existe un "unique" processus continu, adapté, croissant et issu de 0 noté $(< M,M >_t)_{t\,\geq 0}$ tel que :*

$$(M_t^2 - < M, M >_t)_{t\,\geq 0}$$

Soit une martingale locale (continue).

De plus, pour tout $t > 0$, toute suite $(\Delta_n)_{n\,\geq 0}$ de subdivision de [0,t] avec $\mid \Delta_n \mid \to 0$,

$$\sup_{s\leq t}(T_t^{\Delta_n}(M) - < M, M >_t) \xrightarrow{P} 0.$$

Si M $=(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale locale, on a vu que le $< M, M >_t$est bien défini.

De plus t $\rightarrow < M, M >_t$ est une fonction positive croissante, ainsi on peut poser pour $\omega \in \Omega$

$$< M, M >_\infty (\omega) = \lim_{t\to\infty} < M, M >_t (\omega).$$

Définition 1.15 ***(Semimartingale)*** *Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus continu, on dit que M est semimartingale s'il s'écrit :*

$$X_t = X_0 + M_t + A_t$$

où $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale locale continue issue de 0 et $(A_t)_{t\geq 0}$ est un processus continu à variation bornée issue de 0.

Théorème 1.3 *Si $M = (M_t)_{t\geq 0}$ une martingale locale issue de 0 et $H = (H_t)_{t\geq 0} \in L^2_{loc}(M)$ alors il existe "unique" processus noté $((H.M)_t)_{t\geq 0}$ est une martingale locale issue de 0*

- Pour toute martingale locale N $= (N_t)_{t\geq 0}$

$$< H.M, N >= \text{H}.< M, N >$$

on note aussi

$$(\text{H.M})_t = \int_0^t H_s dM_s.$$

Passons à présent à l'integrale sthochastique par rapport aux semimartingales.

Soient H $= (H_t)_{t\geq 0}$ un processus continu et adapté, X $= (X_t)_{t\geq 0}$ une semimartingale continue i.e

$$X_t = X_0 + M_t + V_t$$

où M $= (M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale locale issue de 0 et V $= (V_t)_{t\geq 0}$ est un processus à variation bornée, continu et issu de 0. On note

$$(H.X)_t = \int_0^t H_s dX_s.$$

Définition 1.16 *Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ une semimartingale continue qui se décompose*

$$X_t = X_0 + M_t + V_t$$

- Si $H = (H_t)_{t\geq 0}$ est un processus continu et adapté alors l'intégrale stochastique de H par rapport à X est définie par

$$H.X = H.M + H.V$$

Définition 1.17 ***(Martingales araignées) :*** *Soit $n \geq 2$ un entier, E un espace vectoriel de dimension $n-1$ et U un ensemble de n vecteurs de E, de somme nulle et engendrant E, la toile de l'arainée sera la réunion $T = \{\lambda u \ \ , \lambda \geq 0,\ u \in U\}$ des demi droites issues de l'origine dans les directions de U.*

Nous appellrons Martingale-araignée sur la toile T toute martingale locale continue à valeurs dans T. l'entier n est appelé la multiplicité de la toile et de la martingale-araignée. Une martingale-araignée est dite multiple si $n \geq 3$.

Définition 1.18 ***(Martingale d'Ocone)*** *Une martingale locale continue M dont la représentation est $M_t = B_{\langle M\rangle_t}$ est dite une martingale locale d'Ocone si B est indépendant de $\langle M\rangle$.*

Changement de temps

Maintenant on passe à la définition de la notion **"Changement de temps"** et quelques de ces propositions

Proposition 1.2 *Soit A un processus croissant continue adapté,*
définit (son inverse) $C_t = \inf\ \{s : A_s > t\ \}$ alors
1)-C est croissant continue à droite.
2)-C_t est un temps d'arrêt.

Définition 1.19 *Un changement de temps C est une famille de temps d'arrêt tel que les fonction $t \mapsto C_t$ sont p.s croissantes et continues à droite.*

Proposition 1.3 *Si C est un changement de temps alors*

$$A_t = \inf\{s : C_s > t\}$$

est un processus croissant continu à droite.

Proposition 1.4 *Soit C un changement de temps et M une martingale continue tel que M est constante sur l'intervalle $[C_{t^-}, C_t]$ alors $M \circ C$ est une $(\mathcal{F}_{C_t})$ martingale continue et*

$$\langle M \circ C \rangle = \langle M \rangle \circ C.$$

Les Martingales pures et extrémales :

Définition 1.20 ***(Dambis, Dubins-Schwarz "DDS")*** *Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale continue telle que $M_0 = 0$ et $\langle M \rangle_\infty = \infty$. Il existe un mouvement brownien (B_t), tel que pour tous $t \geq 0$, $M_t = B_{\langle M \rangle}$*

D'aprés la définition en dessus on peut définir la martingale pure comme suit :

Définition 1.21 *Une martingale continue $M = B_{\langle M \rangle}$ où B est un mouvement brownien de DDS alors on dit que la martingale M est pure si et selement si $\mathcal{F}^M_\infty = \mathcal{F}^B_\infty$.*

Théorème 1.4 P $\in$ *$ext(M)$ (resp X.) a la propriété de représentation prévisible (PRP) sous P si et seleument si toutes les $(\mathcal{F}, P)$-martingales (resp. nulles en 0) se représenter comme :*

$$M_t = c + \int_0^t m_s dX_s,$$

où $c \in \mathbb{R}$ (resp $c = 0$) et $(m_s)_{s\geq 0}$ est un processus prévisible.

Ceci nous méne à considérer la définition suivante :

Théorème 1.5 *La martingale X a la propriété de représentation prévisible (PRP) sous P si toutes les $(\mathcal{F}, P)$-martingales nulles en 0 peuvent se représenter comme*

$$M_t = \int_0^t m_s dX_s, où (m_s)_{s \geq 0}$$

est un processus prévisible.

Proposition 1.5 *Si $\{\langle M \rangle_t \ , t \geq 0\}$ est mesurable par rapport à B où B est un mouvement brownien de Dubins-Schwartz (DDS) de M, alors P est extrémale.*
Dans ce cas, on dit que P est une distribution pure et M est une martingale pure.

Chapitre 2

Une Martingale non pure, dont la filtration est brownien

Parmi la série de question posées la question suivante : une filtration étant donnée sur un espace probabilisé, comment reconnaitre si elle est engendrée par un mouvement brownien ou non ? Cette question a surtout de l'intérét pour une filtration faiblement brownienne, i.e il existe un $\mathcal{F}$-mouvement brownien qui a la propriété de représentation prévisible (PRP) par rapport à $\mathcal{F}$.

En toute généralité, il existe des filtrations faiblement browniennes, qui ne sont pas browniennes, notamment, comment établir "effectivement" le caractére non-brownien d'une filtration faiblement brownienne ? Dans tous les travaux ci-dessus, c'est la notion de non-confort de ces filtrations qui sert de critére pour montrer qu'elle sont non-browniennes.

On pourrait, penser qu'une filtration engendrée par une martingale extrémale non pure ou par une martingale non extrémale, ne peut être brownienne. En fait nous montrons dans la section 2, que ceci n'est pas vrai. Le caractére non-brownien d'une filtration faiblement browninne est beaucoup plus délicat. Dans la section 2 on montre aussi que la filtration brownienne peut-être engendrée par une martingale non-extrémale. Dans la section 4, on discute la propriété suivante noté par (*) dans [1] :

Notons par M une martingale continue et par $\mathcal{F}$ sa filtration naturelle M satisfait la propriété (*) si et selement si pour tout T, $\mathcal{F}$-temps d'arrêt p.s fini tel que P($M_{T=0}$)=0,

$$\mathcal{F}^+_{G_T} = \mathcal{F}^-_{G_T} \vee \sigma(M_T < 0), \qquad (*)$$

où $G_T = \sup\{s \leq t, M_s > 0\}, \in [0 + \infty[$.

Les auteurs de [1] ont montré que la propriété (*) est satisfaite par toute martingale pure. On comprend ici que (*) est une propriété de filtration plutôt que de martingale. On termine notre chapitre par un complément au théorème 1 de [14] .

Définition 2.1 *Une filtration $\mathcal{F}$ est dite immergée dans une filtration $\mathcal{G}$ (définie sur le même espace de probabilité) si toute $\mathcal{F}$-martingale est une $\mathcal{G}$-martingale.*

2.1 Exemple de martingale non-extrémale dont la filtration est brownienne :

On a la caractérisation suivante des martingales extrémales par rapport à une filtration brownienne :

Lemme 2.1 *Soit B un mouvement brownien, ß sa filtration naturelle et M une ß-extrémale si et selement si $d\langle M\rangle$ est équivalente à λ p.s où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^+$.*

Preuve. Supposons que M soit ß-extrémale mais que $d\langle M\rangle$ ne soit pas équivalent à λ *p.s.* Il existe un processus ß-prévisible H tel que :

$$M = M_0 + \int HdB \text{ et } H^2 = \frac{d\langle M\rangle}{d\lambda}$$

La ß-martingale $\int \mathbf{1}_{\{H=0\}} dB$ ne peut être représentée par M.

-Si maintenant $d\langle M\rangle \sim \lambda$ il suffit de représenter B comme intégrale stochastique par rapport à M. On a $H \neq 0$ $\lambda \otimes dP$ p.p donc

$$B = \int \frac{1}{H} dM$$

- Si B est un mouvement brownien, f borélienne et M la martingale $\int f(B)dB$, sous quelles conditions la filtration $\mathcal{F}^M$ est -elle brownienne ?

Un exemple important est lorsque f ≥ 0, $\mu(\{f = 0\}) > 0$ et {f=0} ne contenant aucun intervalle (μ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$). Ce cas a été étudié par Knight avec F= {f=0} un sous ensemble de [0,1], construit par la méthode de Cantor, en supprimant $]\frac{3}{8}, \frac{5}{8}[$ puis $]\frac{5}{32}, \frac{7}{32}[$ et $]\frac{19}{32}, \frac{21}{32}[$ et ainsi de suite. On définit les ensembles (F_n) au moyen de leurs complémentaire F_n^c par :

$$F_1^c =]\frac{3}{8}, \frac{5}{8}[, F_2^c = F_1^c \cup]\frac{5}{32}, \frac{7}{32}[\cup]\frac{19}{32}, \frac{21}{32}[,$$

$$F_n^c = F_{n-1}^c \cup \bigcup_{k=1}^{2n-1} A_n^k, \qquad n \geq \ 2,$$

où $A_n^k =]a_n^k\ ,\ b_n^k\ [$ sont des intervalles disjoints de longueur $\frac{1}{4^n}$.

$$F^c = \bigcup_n F_n^c = \bigcup_{n\geq 1} \bigcup_{k=1}^{\ell_n} A_n^k, \ \ avec \ell_n = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 2^n - 1.$$

D'où $\mu(F^c) = \lim_{n\to\infty} \mu(F_n^c) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{4^n} = \frac{1}{2}$. ∎

Proposition 2.1 *Soit B un mouvement brownien, ß sa filtration et M la martingale définie par*

$$M = c' \int \mathbf{1}_{\{B<0\}}dB + c" \int \mathbf{1}_{\{B>1\}}dB + \sum_{n\geq 1} \sum_{n=k}^{\ell_n} c_n^k \int \mathbf{1}_{A_n^k}(B)dB,$$

oú les nombres (c_n^k), $n \geq 1$, $k \in \{1,...,\ell_n\}$, c' et c'' sont strictement positifs et tous différents. La martingale M est non extrémale et on a $\mathcal{F}^M = ß$.

Remarque 2.1 *Afin de ne pas alourdir la démonstration de cette Proposition, on a rassemblé à la fin de ce chapitre (en appendice) quelques points non détaillés.*

Preuve. les processus B^- *et* $(B\text{-}1)^+$ sont $\mathcal{F}^M -$ *adaptés* (points 1), il nous reste à démontrer que $B_t\ \mathbf{1}_{\{0<B_t<1\}}$ est $\mathcal{F}^M -$ *adapté.*

On considére les martingales $M_n^k = \int \mathbf{1}_{A_n^k}(B)dB$ (remarquons que (M_n^k) sont aussi $\mathcal{F}^M$ – *adaptées* (point 1) et les temps d'arrêt $\{(S_n^k)^r, (T_n^k)^r\}_{r\geq 1}$ d'entrée et de sortie successifs de B dans l'ensemble A_n^k. Ces temps d'arrêt sont $\mathcal{F}_\infty^{M_n^k}$ – *mesurables* car ce sont les instants oú $\Delta C_n^k > 0$ avec C_n^k l'inverse de $\langle M_n^k \rangle$.

(attention ! a, b, N et α dépendent de k et n). montrons que la suite double $(B_{S^r}, B_{T^r})_{r\geq 1}$ est $\mathcal{F}_\infty^M$ - mesurable. On a $N_t = 0$ jusqu'à S^1 *et* $B_{S1} = a$.

Si $t \in [S^1, T^1]$, alors

$$N_t = \int_{S^1}^{t} dB_s = B_t - a.$$

d'où on connait B_{T^1} et pour tout $r \geq 1$ et $t \in [S^r, T^r]$ on a :

$$M_t - M_{S^r} = \alpha(N_t - N_{S^r}) = \alpha(B_t - B_{S^r}). \qquad (1)$$

Alors

$$M_t - M_{S^r} = \alpha(B_{T^r} - B_{S^r}).$$

Donc, si on connait M *et* B_{T^r}, *on* peut connaître B_{S^r} et vice-versa.

Si $M_{T^r} - M_{S^r} > 0$ *alors* $B_{T^r} = b$ *et* $B_{S^r} = a$.

$$B_{t_0} = B_{t_0} - B_{S^r} + B_{S^r}.$$

et l'égalité (1) nous donne

$$B_{t_0} = \frac{1}{\alpha}(M_{t_0} - M_{S^r}) + B_{s^r}$$

Comme F^c est dense dans $[0,1]$ (point 3), on a :

$$B_t \mathbf{1}_{\{0<B_t<1\}} = \limsup_{s\downarrow t} B_s \mathbf{1}_{\{B_s \in F^c\}} et\ \mathcal{F}^M = ß.$$

Il reste à établir que M est non-extrémale. Ceci découle aisément du Lemme (2-1-1), puisque $\mu(F) > 0$.

Si $M_{T^r} - M_{S^r} < 0$ alors $B_{T^r} = a$ *et* $B_{S^r} = b$. Il nous reste le cas où $M_{T^r} - M_{S^r} = 0$ alors $B_{T^r} = b$ (et donc $B_{T^r} = B_{S^r}$).

Remarquons que

$$B_{T^r} = B_{S^{r+1}} \qquad (2)$$

En effet, si B est au dessus de]a,b[aprés T^r, alors $B_{T^r} = b = B_{S^{r+1}}$, et si B est en dessous de $]a,b[$ aprés T^r, alors $B_{T^r} = a = B_{S^{r+1}}$.Supposons qu'on connaisse M jusqu'à l'instant t, puisqu'on connait B_{T^1}, alors de (2), on peut connaître B_{S^2} et B_{T^3} et ainsi de suite, on peut connaître la suite (B_{T^r}, B_{S^r}). pour $T^r, S^r \leq t$.Pour finir la preuve, soit $t_0 \leq t$, l'ensemble $\{B_{t_0} \in F^c\}$ est $\mathcal{F}^M_{t_0}$-mesurable (point 2). Si $B_{t_0} \in F^c$, alors il existe n et k tels que $B_{t_0} \in A^k_n$ et donc, il existe r tel que $t_0 \in]S^r, T^r[$. On a

$$B_{t_0} = B_{t_0} - B_{S^r} + B_{S^r}.$$

et l'égalité (1) nous donne

$$B_{t_0} = \frac{1}{\alpha}(M_{t_0} - M_{S^r}) + B_{s^r}$$

Comme F^c est dense dans $[0,1]$ (point 3), on a :

$$B_t \mathbf{1}_{\{0<B_t<1\}} = \limsup_{s \downarrow t} B_s \mathbf{1}_{\{B_s \in F^c\}} et\ \mathcal{F}^M = ß.$$

■

Il reste à établir que M est non-extrémale. Ceci découle aisément du Lemme (2-1-1), puisque μ(F) > 0.

2.2 une classe de martingale qui satisfont la propriété $(\star)$

Dans [1], les auteurs ont discuté une propriété $(\star)$ vérifiée par toutes les martingales purcs, en donnant des exemples de martingales extrémales non pures et de martingales non extrémales qui néanmoins satisfont la propriété $(\star)$:

Soit M une martingale continue et $\mathcal{F} = \mathcal{F}^M$. *Pour* tout T, $\mathcal{F}$-temps d'arrêt p.s fini tel que $\mathbf{P}(M_T = 0) = 0$,

$$\mathcal{F}^{\dagger}_{G_T} = \mathcal{F}_{G_T} \vee \sigma(M_T < 0),$$

où $G_T = \sup\{s \leq t, M_s = 0\}, t \in [0, \infty[$.

L'exemple donné dans [1] d'une martingale extrémale non pure qui satisfait la propriété $(\star)$ est en fait exemple de Yor [15]. On a démontré ci-dessus que sa filtration est brownienne et donc, il est évident que cette martingale vérifie $(\star)$ grâce à la propriété de Barlow démontrée dans [3]. De la même façon, notre martingale non extrémale de la Proposition 2.1, satisfait $(\star)$. De façon générale, on peut énoncer la proposition suivante :

Proposition 2.2 *Soit $\mathcal{F}$ une filtration telle que toutes les $\mathcal{F}$-martingales soient continues et Sp Mult[$\mathcal{F}$] ≤ 2 (voir la définition ci-dessous), alors toutes les martingales qui engendrent $\mathcal{F}$ satisfont la propriété $(\star)$.*

Avant de prouver cette proposition, on rappelle la définition suivante :

Définition 2.2 *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \boldsymbol{P})$ un espace de probabilité et $\mathcal{T}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$. Appellons $\mathcal{Q}$ l'ensemble de toutes les partitions finies mesurables de $(\Omega, \mathcal{A})$, pour $Q \in \mathcal{Q}, |Q|$ est le cardinal de Q. La multiplicité conditionnelle de $\mathcal{A}$ par rapport à $\mathcal{T}$ est la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$:*

$$Mult[\mathcal{A} \mid \mathcal{T}] = \underset{Q.\ \in \mathcal{Q}}{ess\sup} \mid Q \mid \ \mathbf{1}_{S_B}(Q)$$

où

$$S_B(Q.) = \{\forall A \in Q, P(A \mid \mathcal{T}) > 0\}$$

La multiplicité de Scindage d'une filtration $\mathcal{F}$ est le plus petit entier n tel que : Mult $[\mathcal{F}_{T+} \mid \mathcal{F}_L]$ $\leq n$, pour tout temps honnête L pour $\mathcal{F}$. On la note Sp Mult [$\mathcal{F}$]

Preuve. de la proposition 2-2-1. Grâce à la proposition 2.1.1, il suffit de démontrer $(\star)$ pour T=t.

Soit A $= \{\mathrm{M}_t > 0\}$, on a $\mathbf{E}[\mathrm{M}_t \mid \mathcal{F}_{G_t}] = 0$ p.s, car $\mathrm{M}_{G_t} = 0$ p.s (c'est le Théorème XX-35 de [6]), d'où

$$\mathbf{E}[M_t \mathbf{1}_A \mid \mathcal{F}_{G_t}] = -\mathbf{E}[M_t \mathbf{1}_A \mid \mathcal{F}_{G_t}] p.s. \qquad (3)$$

On définit les ensembles $C_1 = \{\mathbf{P}(A \mid \mathcal{F}_{G_t}) = 0\}$ et $C_2 = \{\mathbf{P}(A^c \mid \mathcal{F}_{G_t}) = 0\}$ qui sont dans $\mathcal{F}_{G_t}$. On a

$$\mathbf{P}(A \cap C_1) = 0, et \qquad \mathbf{P}(A^c \cap C_2) = 0$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbf{E}[\mathbf{1}_{C_1} M_t \mathbf{1}_{\{0<M_t<n\}} \mid \mathcal{F}_{G_t}] \leq n\mathbf{P}(A \cap C_1 \mid \mathcal{F}_{G_t}) = 0,$$

d'oú

$$\mathbf{1}_{C_1}\mathbf{E}[M_t \mathbf{1}_A \mid \mathcal{F}_{G_t}] = 0$$

et de (3), on a

$$\mathbf{1}_{C_1}\mathbf{E}[M_t \mathbf{1}_{A^c} \mid \mathcal{F}_{G_t}] = 0.$$

Alors, $\mathbf{E}[M_t \mathbf{1}_{c_1 \cap A^c}] \;= 0$ et $C_1 \subset \{M_t = 0\}$.

De la même façon, on a $C_2 \subset \{M_t = 0\}$ En appliquant l'hypothése $\{M_t = 0\}$ est $\mathbf{P}$-négligeable, on aura $\mathbf{P}(C_1 \cup C_2) = 0$.

Donc

$$\mathcal{F}_{G_t}^{+} = \mathcal{F}_{G_t} \vee \sigma(M_t > 0),$$

d'aprés la proposition 3 de [3] (voir aussi Lemme 4.3,Chap . I de [5]). ∎

Voici un exemple d'une filtration de Sp Mult≤ 2.

Définition 2.3 *Une filtration engendrée par une martingale pure est dite pure.*

Proposition 2.3 *Soient $\mathcal{F}$ une filtration et $C =(C_t)$ un changement de temps pour $\mathcal{F}$. Notons*

$$\hat{\mathcal{F}} := (\mathcal{F}_{G_t})$$

On a :

(a) Sp Mult $(\mathcal{F}) \leq Sp$ Mult$(\hat{\mathcal{F}})$. Si de plus C est strictement croissant, on a :
Sp Mult $(\mathcal{F}) = Sp$ Mult$(\hat{\mathcal{F}})$.

En particulier, si $\mathcal{F}$ est pure (non triviale), alors Sp Mult $(\mathcal{F}) = 2$.

(b) Soient $\mathcal{F}$ la filtration naturelle d'une martingale continue M et C l'inverse de $\langle M \rangle$.

Si $\mathcal{F}$ est brownienne, alors M est extrémale et $\mathcal{F}$ est pure.

(a) supposons que Sp Mult$(\mathcal{F})$ =n $\in \mathbb{N}^*$. Soit M une $\mathcal{F}$-martingale araignée de multiplicité n+1, bornée et issue de l'origine. Alors $M_c = \mathbf{E}[M_\infty \mid \hat{\mathcal{F}}]$ est une

$\mathcal{F}$-araignée de multiplicité n+1 et est issus de l'oigine, la Proposition 13 de [3] nous donne

$M_\infty = 0$ p.s et Sp Mult$(\mathcal{F}) \leq n$

Si C est strictement croissant et si τ est son inverse, alors d'aprés le Lemme 5.9 de [12], on a :

$$\hat{\mathcal{F}}_\tau = \mathcal{F}_{C_\tau} = \mathcal{F}.$$

Si $\mathcal{F}$ est pure, il existe un changement de temps que l'on note aussi C, tel que $\mathcal{F}_c$ soit brownienne, alors Sp Mult$(\hat{\mathcal{F}}) = 2$ et

Sp Mult$(\mathcal{F}) \leq 2$.

(b) Soients W un mouvement brownien qui engendre $\hat{\mathcal{F}}$ et X la martingale $W_{\langle M \rangle}$ (par construction, X est pure).

Montrons que M est extrémale : soit B le mouvement brownien de DDS de MB est un $\hat{\mathcal{F}}-$ *mouvement* brownien qui a la $\hat{\mathcal{F}} - PRP$ (car $\hat{\mathcal{F}} est$ brownienne), comme $\mathcal{F}_{C_0}$ est triviale, $\mathcal{F}_0$ l'est aussi, et M est extrémale.

Remarquons maintenant que

$$\mathcal{F}^X_\infty = \mathcal{F}^w_\infty = \hat{\mathcal{F}}_\infty = \mathcal{F}_\infty. \qquad (4)$$

et

$$M_t = \int_0^t \varepsilon_{\langle M \rangle_s} dX_s,$$

avec $\varepsilon_t := \frac{d\langle B,W\rangle_t}{dt}$. D'oú X est $\mathcal{F}$-extrémale (et comme elle est extrémale), la Proposition 7.1 de [12], nous donne que $\mathcal{F}^X$ est immergée dans $\mathcal{F}$. On a donc $\mathcal{F}$=$\mathcal{F}^X$ en utilisant (4).

La question suivante se pose maintenant naturellement :*Est-ce que la réciproque de la proposition 2.2 est vraie ? i.e si toutes les martingales qui engendrent une filtration $\mathcal{F}$ satisfont la propriété* $(\star)$, a-t-on : Sp Mult$(\mathcal{F}) = 2$?

Pour l'instant, nous n'avons pas de réponse générale à cette question. Remarquons en tout cas, que l'exemple suivant donné dans [1] section 6, n'apporte pas de réponse négative : soit

$$M_t = \int_0^t \frac{X_s dY_s - Y_s dX_s}{(X_s^2 + Y_s^2)^\alpha},$$

où $(X_t + iY_t)$ est un mouvement brownien plan issu de z $\in \mathbb{C}^*$ et $\alpha \in]-\infty, \frac{1}{2}]$.

Soient $\mathcal{F}$ la filtration de M, C l'inverse de $\langle M\rangle$ et $\hat{\mathcal{F}} = \mathcal{F}_{C_t})_{t\geq 0}$. $\hat{\mathcal{F}}$ est brownienne, donc $\mathcal{F}$ est pure et d'aprés la Proposition 2.1, M satisfait la propriété $(\star)$.

On termine notre travail par un complément au Théorème 1 de [14].

Théorème 2.1 *Soit M une martingale locale d'Ocone de filtration naturelle $(\mathcal{M}_t)$ et φ un processus $(\mathcal{M}_t)$-prévisible tels que*

$$D_t^\varphi := exp(\int_0^t \varphi_s dM_s - \frac{1}{2}\int_0^t \varphi_s^2 d\langle M\rangle_s)$$

soit une martingale.

$Q|_{\mathcal{F}_t} = D_t^\varphi.\mathbf{P}\,|_{\mathcal{F}_t}$, *alors* $\tilde{M} := M - \int_0^t \varphi_s d\langle M\rangle_s$ *satisfait*

$$\mathcal{L}_Q(\tilde{M}) = \mathcal{L}_P(M).$$

Preuve. Notons $(\mathcal{N}_t)$ la filtration naturelle de $\langle M\rangle$, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_Q\,[F(\tilde{M}_u, u \leq t] &= \mathbf{E}_P[F(\tilde{M}_u, u \leq t) D_t^\varphi] \\ &= \mathbf{E}_P[\mathbf{E}_P[F(\tilde{M}_u, u \leq t) D_t^\varphi \mid \mathcal{N}_\infty]]. \end{aligned}$$

Mais $\mathbf{P}_M = \int \mathbf{P}(\langle M\rangle \in da).W^\alpha$ (où W^α est la loi d'un processus gaussien ayant α comme crochet) D'où

$\mathbf{E}_P[F(\widetilde{M}_u, u \leq t)D_t^\varphi H(\langle M\rangle_s, s \geq 0)] = \int \mathbf{P}(\langle M\rangle \in da)H(a_s, s \geq 0)W^\alpha(F(\widetilde{\omega}_u, u \leq t)\exp(\int_0^t \varphi(\omega_u, u \leq s)d\omega_s - \frac{1}{2}\int_0^t \varphi_s^2 da_s))$

où

$\widetilde{\omega}_u = \omega_u - \int_0^t \varphi(\omega_u, u \leq s)da_s$. Mais pour W^α : si $\mathbf{P}' = \exp(\int_0^t \varphi(\omega_u, u \leq s)d\omega_s - \frac{1}{2}\int_0^t \varphi_s^2 da_s).W^\alpha$, alors la propriété (ii) de [9] est satisfaite, c'est-à-dire

$$\{\widetilde{\omega}, \mathbf{P}'\} = \{\omega, W^\alpha\}.$$

D'où

$W^\alpha(F(\widetilde{\omega}_u, u \leq t)\exp(\int_0^t \varphi_s d\omega_s - \frac{1}{2}\int_0^t \varphi_s^2 da_s))$
$= \mathbf{P}'\ (F(\widetilde{\omega}, u \leq t)) = W^\alpha(F(\omega_u, u \leq t))$.

On a donc

$$\mathbf{E}_P[F(\widetilde{M}_u, u \leq t)D_t^\varphi H(\langle M\rangle_s, s \geq 0)] = \mathbf{E}_P[F(M_u, u \leq t)]$$

comme on l'a déjà dit (dans le paragraphe 1), la loi d'une martingale extrémale est un point extrémale dans l'ensemble convexe $\mathcal{M}$
de toutes les mesures de probabilité sur C($\mathbb{R}^+$,$\mathbb{R}$), qui rendent le processus des coordonnées, une martingale locale. ∎

En fait une martingale locale d'Ocone est extrémale si et selement si elle est gaussienne (voir [14]), on a en plus le résultat suivant :

Théorème 2.2 *Soit π la distribution d'un processus croissant, continu et nul en 0. Si X est une martingale locale d'Ocane telle que $\mathcal{L}(\langle M\rangle) = \pi$, alors $\mathcal{L}(X)$ est un point extrémal dans l'ensemble convexe*

$$\mathcal{M}_\pi := \{\mathbf{P} \in \mathcal{M}, \mathcal{L}_{\mathbf{P}}(\langle X\rangle) = \pi\}.$$

est la loi de $\langle X \rangle$ sous **P***)*

Preuve. Notons $\mathbf{P}_0 := \mathcal{L}(X), \mathcal{F}$ la filtration naturelle de X et $(\mathcal{N}_t)_{t\leq 0}$ celle de $\langle X \rangle$. Soient $\mathbf{P}' \ll \mathbf{P}_0$, $\mathrm{D}_t := \frac{d\mathbf{P}'}{d\mathbf{P}_0} \mid_{\mathcal{F}_t}$ *et*

$$\widetilde{X}_t = X_t - \int_0^t \frac{d\langle X, D\rangle_s}{D_s}.$$

$\mathcal{L}_{P'}(\langle X \rangle) = \pi$, alors $\mathcal{L}_{\mathbf{P}'}(\widetilde{X}) = \mathcal{L}(X)$. En effet (voir Théorème 2 de [14])

$$D_t = 1 + \int_0^t h_s dF_s + \int_0^t \varphi_s dX_s.$$

F est une $(\mathcal{N}_t)_{t\geq 0}$ -martingale locale et h et φ sont deux processus $\mathcal{F}-$*prévisibles*. la condition $\mathcal{L}_{P'}(\langle X \rangle) = II$ est équivalente à $\mathbf{E}[\mathrm{D}_t \mid \mathcal{N}_t] = 1, \forall t \geq 0$. D'où,

$$\mathcal{L}_{\mathbf{P}'}(F) = \mathcal{L}_{P_0}(F)$$

c'est-à-dire que F est une **P'**-martingale locale et

$$\int_0^t \frac{d\langle F, D\rangle}{D_s} - 0,$$

donc $\int_0^t h_s d\langle F \rangle_s = 0$ et $\mathrm{D}_t = 1 + \int_0^t \varphi_s dX_s$.
D appartient à l'espace stable engendré par X, si P' $\in \mathcal{M}_\pi$, alors D$\equiv$ 1 (en raisonnant de la même façon que dans le Théorème 4.1) et **P** est extrémale dans $\mathcal{M}_\pi$.

■

2.3 Appendice

Point 1. Remarquons que

$$\int \mathbf{1}_{\{B<0\}} dB = \frac{1}{c'} \int \mathbf{1}_{\{B<0\}} dM$$

et

$$\int \mathbf{1}_{\{B>1\}} dB = \frac{1}{c''} \int \mathbf{1}_{\{B>1\}} dM.$$

D'où, en appliquant le Lemme de Skorokhod (Lemme 2.1, Chap.VI de [11]) il suffit de voir que les ensembles $\{B_t < 0\} = \{\frac{d\langle M\rangle}{dt}(t) = c'\}$ et $\{B_t > 0\} = \{\frac{d\langle M\rangle}{dt}(t) = c''\}$,

et de la même façon pour les martingales (M_n^k), n≥ 1 , k $\in \{1, ..., \varrho_n\}$.

Point 2 . D'aprés le Point 1, la martingale $\int \mathbf{1}_{F^c}(B)dB = \sum_n \sum_k M_n^k$ est $\mathcal{F}^M$ *– adaptée*, ainsi donc que son crochet.

Point 3 . On va montrer seulement que $0 \in \bar{F^c}$, plus précisément : inf $F^c = 0$.

Soit $x_n = \inf F_n^c$. On a

$$x_n = \frac{x_{n-1}}{2} - \frac{1}{2\times 4^n}, n \geq 2 \text{ et } x_1 = \frac{3}{8},$$

d'où

$$x_n = \frac{x_1}{2^{n-1}} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{n+1-k}\times 4^k}.$$

Mais

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{-k}\times 4^k} = \frac{1}{2^n \times 4}(1 - (\frac{1}{2})^{n-1}),$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n+1}}(1 - \frac{1}{2^n}) = 0.$$

Chapitre 3

Des exemples sur les martingales extrémales non pures et non extrémales, dont la filtration est brownienne et faiblement brownienne :

Dans ce chapitre on va donner quelques exemples de martingales non pures dont les filtrations sont browniennes et faiblements browniennes pour expliquer mieux notre idée et faciliter le comprendre.

3.1 Exemples de martingale extrémales non pures dont les filtrations sont browniennes

On va démontrer maintenant que la filtration de la martingale extrémale non pure donné est brownienne

Théorème 3.1 *La filtration brownienne peut-être engendrée par une martingale extrémale non* *pure.*

Preuve. Soit B un mouvement brownien et ß sa filtration naturelle. On commence par considérer l'équation stochastique $dX_t = \varphi(X_t)dB_t$, $X_0 = 0$, oú

$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2+\frac{x}{1+|x|}}}$. Remarquons que φ est à variation finie et $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq | \varphi(x) | \leq 1$, $\forall$ x $\in \mathbb{R}$. Le théorème 3.5(iii), chap.IX de [11] est applicable : on a donc $\mathcal{F}^x$ = ß,. La fonction φ est une bijection de $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}^+$, d'où $\mathcal{F}^{\langle X \rangle} = \mathcal{F}^X$. On définit la martingale

$$M_t = \tilde{\gamma}\langle X\rangle_t \qquad \text{oú } \tilde{\gamma}_t = \int_0^t sgn\gamma_s d\gamma_s$$

et γ est le mouvement brownien de DDS associé à X. On a : $\mathcal{F}^{\langle M \rangle} = \mathcal{F}^M$ =ß.

Il nous reste à montrer que M est extrémale non pure. Comme φ est strictement positive, dA est équivalente à la mesure de Lebesgue, mais $\mathcal{F}^M$ est une filtration brownienne, en conséquence à l'aide du (Lemme 2-1-1), on déduit que M est extrémale. M est non pure car

$$\mathcal{F}^{\tilde{\gamma}}_\infty \underset{\neq}{\subseteq} \mathcal{F}^{\gamma}_\infty = \mathcal{F}^M_\infty.$$

■

Voici un autre exemple d'une martingale extrémale non pure qui engendre une filration brownninne :

Théorème 3.2 *Soit B un mouvement brownien.Il existe processus prévisible H strictement positif tel que:*

$$N_t = \int_0^t H(B_u, u \leq s)dB_s$$

soit une martingale extrémale non pure.

Preuve. *Notons (T_t) un changement de temps strictement croissant et absolument continue tel que (B_{T_t}) engendre une filtration non brownienne (en vertu du Théorème 4.1 de [8]). On a*

$$M_t := B_{T_t} = \int_0^t f(M_u, u \leq s)d\gamma_s$$

(voir Proposition 3.8, Chap V de [11]), pour γ un mouvement bronien et f un processus prévisible qui peut-être choisi strictement positif. Comme M est pure (donc $\mathcal{F}_C^M = \mathcal{F}^B$)

$$B_t = \int_0^t g(B_u, u \leq s) d\gamma c_s$$

oú g est un processus $\mathcal{F}^B$ – prévisible et C l'inverse de T, donc

$$N_t := \gamma c_t = \int_0^t H_s dB_s$$

avec $H = \frac{1}{g}$. Comme la filtration de M est non brownienne, on a $\mathcal{F}^M \neq \mathcal{F}^\gamma$ et la martingale γc n'est pas pure. Mais $\mathcal{F}^N = \mathcal{F}^B$.

■

Remarque 3.1 *Le Théorème ci-dessus, répond affirmativement à la question suivante posée à la fin du Chap. V de [11] : existe t-il un processus prévisible H strictement positive tel que la martingale $N_t = \int_0^t H_s dB_s$ soit non pure ?*

3.2 Exemples de martingales non-extrémales

Dans le cas où $X_t = B_{\langle X \rangle_t}$ avec B indépandent de $\langle X \rangle$, X est dite martingales d'ocone.

Proposition 3.1 *Soit X une martingale d'Ocone, X est extrémale si et seleument si X est gaussienne.*

En effet, si X est une martingale d'Ocone, la loi de X extrémale dans l'ensemble convexe

$$\mathbf{M}_\pi = \{\mathbf{P} \in \mathbf{M}, \mathcal{L}_P(\langle X \rangle) = \pi(\mathcal{L}_P(\langle X \rangle))$$

(est la loi de $\langle X \rangle$ sous **P**).

3.3 Filtration brownienne et filtration faiblement brownienne

Définition 3.1 *Une filtration* $(\mathcal{F}_t)$ *sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbf{P})$ *telle que* $\mathcal{F}_0$ *soit triviale, est dite faiblement brownienne s'il existe un* $\mathcal{F}-$*mouvement brownien B ayant la PRP par rapport à* $(\mathcal{F}_t)$ *(on dit que B est* $\mathcal{F}-$*extrémale).*

Voici une condition nécissaire et suffisante pour que B soit $\mathcal{F}-$extrémale.

Proposition 3.2 *Soient* $\mathcal{F}$ *une filtration sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbf{P})$ *telle que* $\mathcal{F}_0$ *soit triviale et M une* $\mathcal{F}-$*martingale continue. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*
(i) M est $\mathcal{F}-$*extrémale.*
pour toute probabilité Q sur $\mathcal{F}_\infty$ *tel que* $Q \ll \mathbf{P}$ *et M reste une Q-martingale, on a* $Q = \boldsymbol{P}$.

D. W. Stroock et M.Yor ont posé la question suivante : Une filtration faiblement brownienne $\mathcal{F}$ est-elle engendrée par un mouvement brownien ?

Théorème 3.3 *[DFST] Soit W la mesure de Winner sur* Ω. *Il existe une probabilité Q équivalente à W, telle que la filtration naturelle* $\mathcal{F}$ *de X (le processus des coordonnées) ne peut être engendrée par aucun mouvement brownien.*

Références

[1] AZEMA J., RAINER C., YOR M.(1996) : une propriété des martingales pures, Sém. Prob. XXX,Lec .Not.in Math. Springer.

[2] AZEMA J., YOR M. (1992) : sur les zéros des martingales continues, Sém. Prob. $XXVI$, Lec.Not. in math. 1526, Springer.

[3] BARLOW M. T., EMERY M., KNIGHIT F.B., SONG S., YOR M. (1998) : Autour d'un théorème de Tsirel'son sur les filtrations browniennes et non-browniennes, Sém. Prob. $XXXII$, Lec. Not. in Math. 1686, Springer.

[4] BEGHDEDI-SAKRANI S., EMERY M. (1999) : On certain probabilities equivalent to coin-tossing, D'aprés SCHACHERMANYER, Sém. Prob. $XXXIII$, Lec. Not. in Math. 1709, Springer.

[5] BEGHDADI-SAKRANI S. (2000) : Martingales continues, filtrations faiblement browniennes et mesures signées, Thése de l'Univ. P. et M. Curie, Paris.

[6] DELLACHERIE C., MAISONNEUVE B., MEYER P. A. (1992) : Probabilités et potentiel, Chap.$XVII$ à $XXIV$, Processus de Markov (fin), Compléments de calcul stochastique, Hermann.

[7] DUBINS L., FELDMAN J., SMORODINSKY M., TSIRL'SON B. (1996) : Decreasing sequences of $\sigma-$fields and a measure change for Brownian motion, Ann. Prob.

[8] EMERY M., SCHACHERMAYER W. (1999) : Brownian filtrations are not stable under equivalent time-changes, Sém. Prob. $XXXIII$, Lec. Not. in Math.1709, Springer.

[9] KNIGHT F. B. (1987) : On invesibility of martingale time changes, Sém. Stoch. Proc., Birkhäuser , Basel 1988.

[10] LANE D. A. (1978) : On the fields of some Brownian martingales, Ann. Prob. 6.

[11] REVUZ D., YOR M (1994) : continious Martingales and

Brownian Motion, second edition, Grundlehren der mathimatischen Wissenschaften, Springer.

[**12**] STROOCK D. W., YOR M. (1980) : On extremal solutions of martingales Problems, Ann. Scient. E.N.S., $4^{éme}$ série, t.

[**13**] TSIRL'SON B. (1997) : Triple points : From non-Brownian filtrations to harmonic measures, GAFA, Geom. Funct. Anal. 7.