République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : **EDP Et Analyse numérique**

Par :

Melle. BEN NECER Marwa

Intitulé

Méthode de perturbations singulières: avantages, inconvénients et applications

Dirigé par : **Mme. BADI Sabrina**

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. MENACEUR Amor	MCB	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. BADI Sabrina	MCA	Univ-Guelma
Co- RAPPORTEUR	Dr. ELLAGGOUNE Fateh	Prof	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. SELLAMI Nabil	MCB	Univ-Guelma

Session Juin 2018

Table des matières

Remerciements

Premièrement et avant tout, je remercie énormément notre Dieu qui m'a aidé à réaliser ce travail.

Je tiens à remercier spécialement mon encadreur Mme : Badi Sabrina, pour la qualité du projet qu'elle m'a proposé. Ses spécieux conseils, et ses grands efforts pour m'avoir aidé à améliorer ce mémoire.

Je remercie aussi Mr : Ellaggoune Fateh. Mon co-encadreur, d'avoir accepté cette tache de contribuer à ce mémoire .

Je remercie chaleureusement mes parents : ma mère de m'avoir poussé de faire le mieux qui soit.

Finalement : je remercie tous ceux qui m'ont aidé à réaliser ce travail.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

Mon père (a eu la pitié de Dieu) qui sans ses conseils et ses enseignements inculqués de puis ma naissance, je n'aurai pas atteint ce que je suis maintenant.

Ma mère qui m'encourageait de suivre mes études et m'a longtemps souhaité le meilleur.

Mon cher frère et mes soeurs : Rima, Fatma, Ahlem et ses enfants.

Mes enseignants qui ont contribué à ma formation.

Tous mes collègues et mais amies : Sarra, Souha, Radia

et spécialement Bouafia Abdallah et Raouf

Toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à réaliser ce travail.

Résumé

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à la résolution approximative des équations différentielles ordinaires non linéaires d'ordre 2. De la forme :

$$\begin{cases} L(y, \dot{y}, \ddot{y}) = \varepsilon f(y, \dot{y}) \\ 0 < \varepsilon << 1 \end{cases}$$

Pour cela, nous explicitons différentes méthodes de perturbations, nous faisons des applications pour mieux comprendre le principe de chaque méthode. Nous présentons aussi les avantages et les inconvénients de chaque méthode.

abstract

In this brief, we are interested in approximate solving of ordinary differential equations nonlinear order 2. Of the form :

$$\begin{cases} L(y, \dot{y}, \ddot{y}) = \varepsilon f(y, \dot{y}) \\ 0 < \varepsilon << 1 \end{cases}$$

for this, we clarify different methods of disruption, we make applications to better understand the principle of each method. We also present the advantages and disadvantages of each method.

Introduction

Les équations différentielles sont apparues dès le début du calcul différentiel ($16^{ème}$ _ $17^{ème} siècle$) pour résoudre beaucoup de problèmes dans différents domaines. Elles sont particulièrement importantes pour la description des mouvements, ou des systèmes dynamiques.

Dès le début du $18^{ème}$ siècle, la théorie des perturbations a été utilisée par les astronomes pour les besoins de la mécanique céleste. Cet aspect de la théorie des perturbations a été synthétisé à la fin du $19^{ème}$ siècle avec l'évènement en 1954 de la "théorie KAM", du nom de ses trois concepteurs : Kolmogorov, Arnold et Moser.

La méthode a par ailleurs été abondamment utilisée au $20^{ème}$ siècle pour les besoins de la physique quantique, des champs perturbatrices.

Le sujet du travail proposé ci-dessous est l'étude théorique et approximative des équations non linéaire qui sont sous la forme :

$$\begin{cases} L(y, \dot{y}, \ddot{y}) = \varepsilon f(y, \dot{y}) \\ 0 < \varepsilon << 1 \end{cases} \tag{1}$$

Nous explicitons différentes méthodes de perturbations, à savoir : méthode de Lindstedt, des échelles de temps multiples et la méthode de la moyenne .

Ce mémoire est scindé en quatre chapitres :

Chapitre 1 :

Ce chapitre va principalement porter sur la résolution des équations différentielles linéaires d'ordre 2

Chapitre 2 :

Dans ce chapitre, nous allons développer et appliquer la méthode de perturbation régulière à l'équation (1) qui est non linéaire d'ordre 2, et voir surtout l'inconvénient majeur de cette méthode.

Chapitre 3 :

L'objet de cette section est d'expliciter évidemment les méthodes singulières, présenter le principe de chaque méthode et faire des applications.

Chapitre 4 :

L'objet de ce chapitre est de comparer les différentes méthodes explicitées.

Chapitre 1

Notions préliminaires et généralités

Dans ce chapitre, on donne un rappel succinct de certaines notions fondamentales, sur les équations différentielles linéaires d'ordre 2.

1.1 Généralités

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application définie sur un ouvert Ω de $I \times \mathbb{R}^{n+1}$.

On appelle équation différentielle ordinaire (EDO) d'ordre n une équation fonctionnelle de la forme :

$$f(t, u, u^{'}, ..., u^{(n)}) = 0 \tag{1.1}$$

On dit que l'EDO (1.1) est sous la forme implicite.

Définition 1.1.1

On dit qu'une EDO d'ordre n est sous forme normale (explicite) si elle est donnée par :

$$y^n = f(t, y, y', ..., y^{(n-1)})$$

Définition 1.1.2

Une EDO linéaire d'ordre n à coefficients variables est une équation écrite sous forme :

$$a_0(t)\, y + a_1(t)\, y' + ... + a_n(t)\, y^n = b(t)$$

Dans le cas contraire on dira que l'équation différentielle est non linéaire.

Définition 1.1.3

On dit qu'une EDO linéaire est à coefficients constants si les coefficients $a_i(t)$ sont tous constants.

On dit qu'une EDO linéaire est homogène si son second membre $b(t)$ est nulle, dans le cas contraire elle est dite non homogène.

Remarques 1.1.1

1. *La solution générale d'une EDO dépend d'autant de constants arbitraires que l'ordre de l'EDO.*
2. *Il apparaîtra dans les cas étudiés que la solution générale d'une EDO pourra prendre les formes suivantes :*

- *Forme explicite:* $y = y(t) + c$;
- *Forme implicite:* $f(t, y, c) = 0$;
- *En coordonnées polaire:* $r = f(\theta) + c$.

1.2 Résolution d'une EDO linéaire d'ordre 2 sans second membre

On considère l'équation différentielle homogène :

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0, \ a, b, c \in \mathbb{R} \ a \neq 0 \tag{1.2}$$

Pour résoudre ce type d'équation, on commence par chercher les solutions de la forme :

$$y = e^{\lambda x}$$

D'où

$$\dot{y} = \lambda e^{\lambda t}, \ddot{y} = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

On substitue : $y, \dot{y}, \ddot{y}$ dans (1.2), on obtient :

$$(a\lambda^2 + b\lambda + c)e^{\lambda x} = 0 \Rightarrow a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

Donc : $y = e^{\lambda x}$ est la solution de (1.2) si et seulement si λ est racine de l'équation

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \tag{1.3}$$

Cette dernière équation s'appelle : équation caractéristique de (1.2).

La solution générale de (1.2) repose sur le nombre et la nature des racines de l'équation (1.3) qui revient au même sur le signe du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ de l'équation (1.3) :

1. Si $\Delta > 0$: l'équation (1.3) a deux racines réelles distinctes :

$$\lambda_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \lambda_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$\Rightarrow e^{\lambda_1 x}$ et $e^{\lambda_2 x}$ sont deux solutions de (1.2) et comme $W(e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}) \neq 0$; Alors la solution générale de (1.3) est :

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda 2x}$$

2. Si $\Delta = 0$: l'équation (1.3) a une racine double : $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{-b}{2a} \Rightarrow y_1 = e^{\frac{b}{2a}x}$

est une solution de (1.2), On utilise la méthode de réduction d'ordre pour obtenir une deuxième solution y_2, on obtient :

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x}$$

3. Si $\Delta < 0$: l'équation (1.3) a deux racines distinctes complexes et conjuguées

$$\lambda_1 = \gamma + \imath\mu, \ \lambda_2 = \gamma - \imath\mu$$

Où $\gamma, \mu \in \mathbb{R}$. Alors la solution générale de (1.2) est :

$$y - c_1 e^{\gamma x} \cos \mu x + c_2 e^{\gamma x} \sin \mu x$$

(*)W : wronskien qui est définie par :

$$W[y_1, y_2, \ldots y_m] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_m' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(m-1)} & y_2^{(m-1)} & \cdots & y_m^{(m-1)} \end{vmatrix}; \quad \forall t \epsilon I.$$

Notons que : $W[y_1, y_2, ...y_m] \neq 0 \Rightarrow$ les y_i, $i = 1, 2, ...m$ sont linéairement indépendantes.

1.3 Résolution d'une EDO linéaire d'ordre 2 avec second membre

Les EDO linéaire d'ordre 2 avec second membre sont de la forme :

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = g(x), a \neq 0, g(x) \neq 0 \tag{1.4}$$

Pour résoudre cette équation, il faut connaître un système fondamental de solution y_1, y_2 de l'équation homogène :

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0 \tag{1.5}$$

Dans ce cas la solution générale de (1.5) notée y_{GH} est :

$$y_{GH} = c_1y_1 + c_2y_2$$

La solution générale de (1.4) : $y = y_{GH} + y_p$. Maintenant pour calculer y_p, on utilise la méthode de lagrange. Le principe de cette méthode est de remplacer les composantes c_1 et c_2 par des fonctions $U_1(x)$ et $U_2(x)$ inconnues qu'on va déterminer de tel que $y_p = U_1y_1 + U_2y_2$ vérifie l'équation non homogène (1.4)

Pour trouver $U_1(x)$ et $U_2(x)$ on a besoin de deux conditions, la $1^{ère}$ condition est

$$\dot{U}_1y_1 + \quad \dot{U}_2y_2 = 0$$

Qu'on appelle équation arbitraire de compatibilité. Dans ce cas on pose :

$$y_p = U_1 y_1 + U_2 y_2 \Rightarrow \dot{y}_p = U_1 \dot{y}_1 + U_2 \dot{y}_2$$

et

$$\ddot{y}_p = \dot{U}_1 \dot{y}_1 + U_1 \ddot{y}_1 + \dot{U}_2 \dot{y}_2 + U_2 \ddot{y}_2$$

On substitue $\ddot{y}_p, \dot{y}_p$ et y_p dans (1.4), on trouve :

$$\dot{U}_1 \dot{y}_1 + \dot{U}_2 \dot{y}_2 = \frac{g(x)}{a}$$

qui représente la $2^{ème}$ condition. On obtient alors un système :

$$\begin{cases} \dot{U}_1 y_1 + \dot{U}_2 y_2 = 0 \\ \dot{U}_1 \dot{y}_1 + \dot{U}_2 \dot{y}_2 = \dfrac{g(x)}{a} \end{cases}$$

Le déterminant de ce dernier système n'est autre que le wronskien qui est non nul, d'où la solution unique de ce système est :

$$\begin{cases} \dot{U}_1(x) = -\dfrac{y_2 g(x)}{aW(y_1, y_2)} \\ \dot{U}_2(x) = -\dfrac{y_1 g(x)}{aW(y_1, y_2)} \end{cases} \Rightarrow y_p = y_1 \int -\frac{y_2 g(x)}{aW(y_1, y_2)} dx + y_2 \int \frac{y_1 g(x)}{aW(y_1, y_2)} dx$$

Enfin :

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p$$

Remarque 1.3.1 *En général, il n'ya pas de méthode générale pour résoudre les équations différentielles non linéaires. La méthode de perturbation est* *une technique qui permet de trouver une solution approximative d'une équation différentielle non linéaire ou d'un système d'équations différentielles non linéaires.*

1.4 Introduction aux méthodes de perturbations

La théorie de perturbation est une méthode mathématique générale qui permet de trouver une solution approchée d'une équation mathématique (E_ε) dépendante d'un paramètre ε lorsque la solution de l'équation (E_0), correspondant à la valeur $\varepsilon = 0$, est connue exactement. L'équation mathématique (E_ε) peut être une équation algébrique, une équation différentielle, une équation aux valeurs propres, ... La méthode consiste à chercher la solution approchée de l'équation (E_ε) sous la forme d'un développement en série des puissances du paramètre ε, cette solution approchée étant supposée être une approximation d'autant meilleure de la solution exacte, mais inconnue, que la valeur absolue du paramètre ε est plus "petit" ($\varepsilon << 1$). (voir réf [3]).

Dans ce travail on va considérer les équations (E_ε) comme étant des équations différentielles. On va appliquer la théorie de perturbation pour résoudre des équations différentielles non linéaires du second ordre sous la forme

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y + \varepsilon f(y, \frac{dy}{dt}) = 0 \qquad (\mathrm{E}_\varepsilon)$$

Où ε est un petit paramètre et f est une fonction analytique non linéaire de y et $\frac{dy}{dt}$. Pour bien comprendre le principe de cette méthode, on considère cet exemple :

Soit le problème à valeur initial

$$\frac{dy_\varepsilon}{dt} + y_\varepsilon = \varepsilon, \quad y_\varepsilon(0) = 1$$

Sa solution est :

$$y_\varepsilon(t) = \varepsilon + (1-\varepsilon)e^{-t}$$

La solution du problème non perturbé

$$\frac{dy}{dt} + y = 0, y(0) = 1$$

Est :

$$y(t) = e^{-t}$$

Et la différence entre la solution de problème non perturbé et problème perturbé est :

$$|y_\varepsilon(t) - y(t)| = \left|\varepsilon - \varepsilon e^{-t}\right| = \varepsilon\left|1 - e^{-t}\right| \leq \varepsilon, \forall t \geq 0.$$

Exemple 1.4.1 *La situation est différente pour le problème*

$$\frac{dy_\varepsilon}{dt} - y_\varepsilon = \varepsilon, y_\varepsilon(0) = 1$$

La solution est :

$$y_\varepsilon(t) = -\varepsilon - (1+\varepsilon)e^{t}$$

Le problème non perturbé :

$$\frac{dy}{dt} - y = 0, y(0) = 1$$

A la solution : $y(t) = e^t$

$$|y_\varepsilon(t) - y(t)| = \varepsilon \left|1 - e^t\right|$$

Sur l'intervalle $0 \leq t \leq 1$,l'erreur est de l'ordre de ε. Ce n'est pas le cas pour $t > 1$ où la différence croît sans être bornée.

1.5 Solution périodique

On dit que $y(t)$ est une solution périodique pour l'équation

$$\frac{d^2t}{dt^2} + y + \varepsilon f(y, \frac{dy}{dt}) = 0$$

S'il existe un constante positive $T > 0$ qui vérifie :

$$y(T) = y(0) \tag{1.6}$$

On qualifie le période le plus petit T vérifiant (1.6)

Remarque 1.5.1 *Les multiples de la période sont aussi des périodes.*

Chapitre 2

Méthode de perturbation régulière

2.1 Définition

Supposons qu'on a un problème $p(\varepsilon)$ avec un petit paramètre $0 < \varepsilon << 1$ et la solution $y(\varepsilon), \varepsilon > 0$. Si

$$\lim_{\varepsilon \to 0} y(\varepsilon) = y(0)$$

alors on dit que le problème $p(\varepsilon)$ est régulier.(voir réf [2]).

Soit l'équation différentielle du second ordre non linéaire perturbée contenant un petit paramètre $0 < \varepsilon << 1$ suivante :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y + \varepsilon f(y, \frac{dy}{dt}) = 0 \tag{2.1}$$

On suppose qu'une solution de l'équation (2.1) peut être écrite sous la forme d'un développement en série des puissances du paramètre ε comme suit :

$$y = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + ... + \varepsilon^n y_n(t) + ... \tag{2.2}$$

Où les coefficients des puissances du paramètre ε sont des fonctions de la variable indépendante t.

On justifie l'équation (2.2) par le premier résultat trouvé par Poincaré et qui montre que si une équation différentielle contient des termes avec un paramètre, alors la solution est une fonction analytique de ce paramètre. Ainsi, si ε est suffisamment petit, les séries qui sont trouvées par (2.2) convergent. Les fonctions y_n sont trouver par substitution de l'équation (2.2) dans l'équation différentielle (2.1) et qu'on détermine récursivement en résolvant un ensemble infini d'équations différentielles linéaire non homogène. Ceci est l'avantage majeur de cette méthode car elle permet de remplacer l'équation différentielle non linéaire (2.1) par un système d'équations différentielles linéaires.

Nous introduisons l'idée de base de la théorie de perturbation régulière par l'exemple suivant :

Exemple 2.1.1 *Soit un système qui est modelé initialement par l'équation :*

$$\dot{y} + 2y = 0, y(0) = 1$$

Ce système après perturbation est devenu :

$$\dot{y} + 2y + \varepsilon y^2 = 0, y(0) = \cosh \varepsilon \tag{2.3}$$

Où ε est le paramètre de perturbation $0 < \varepsilon << 1$.

On cherche la solution :

$$y(t,\varepsilon) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + ... \tag{2.4}$$

En substituant (2.4) *dans* (2.3) , *on obtient :*

$$(\dot{y}_0 + 2y_0) + \varepsilon(\dot{y}_1 + 2y_1 + y_0^2) + \varepsilon^2(\dot{y}_2 + 2y_2 + 2y_0y_1) + ... = 0$$

$$\begin{aligned} y_0(0) + \varepsilon y_1(0) + \varepsilon^2 y_2(0) + ... &= \cosh \varepsilon \\ &= 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^4}{24} + ... \end{aligned}$$

En regroupant les termes de la même puissance de ε, on a le système suivant :

À l'ordre ε^0 : $\dot{y}_0 + 2y_0 = 0, \quad y_0(0) = 1$

À l'ordre ε^1 **:** $\dot{y}_1 + 2y_1 = -y_0^2, y_1(0) = 0$

À l'ordre ε^2 **:** $\dot{y}_2 + 2y_2 = -2y_0y_1, y_2(0) = \frac{1}{2}$

On trouve en résolvant une à une ces dernières équations :

$$\begin{aligned} y_0(t) &= e^{-2t} \\ y_1(t) &= \tfrac{1}{2}(e^{-4t} - e^{-2t}) \\ y_2(t) &= \tfrac{1}{4}(3e^{-2t} + e^{-6t} - 2e^{-4t}) \end{aligned}$$

La solution est :

$$y(t) = e^{-2t} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}(e^{-4t} - e^{-2t}) + \frac{\varepsilon^2}{4}(3e^{-2t} + e^{-6t} - 2e^{-4t}) + ...$$

On voit que le coefficient de chaque ε^n est borné et comme $0 \leq \varepsilon << 1$ la contribution du $(n+1)^{iéme}$ terme est petite comparée au $n^{iéme}$. En vu de cela, nous pouvons tronquer le développement après le second terme et considérer ceci comme une solution approximative de l'équation (2.3).

2.1.1 Remarque :

1. Si nous obtenons $y_1(t) = 0$ dans le développement on utilise $y_0(t) + \varepsilon^2 y_2(t)$ comme solution approximative, plus généralement si : $y_1(t) = \dots = y_{n-1}(t) = 0$; alors la solution approximative est :$y_0(t) + \varepsilon^n y_n(t)$.
2. Notons que le développement de perturbation remplace l'équation (2.3) qui est non linéaire par un système d'équation linéaire non homogène. Ceci est l'un des avantages majeur de cette approche car il n'y a pas de méthode générale pour résoudre les équations différentielles non linéaire.

Cette technique faite pour une équation peut-être utilisée pour chercher une solution approximative d'un système d'équations.

Exemple 2.1.2 *Soit le système :*

$$\begin{cases} \dot{x} &= -2x + y + \varepsilon y^2 \\ \dot{y} &= x - 2y + \varepsilon x^2 \\ x(0) &= y(0) = 1, 0 < \varepsilon << 1. \end{cases}$$

Posons :

$$\begin{cases} x = x_0 + \varepsilon x_1 + \dots \\ y = y_0 + \varepsilon y_1 + \dots \end{cases}$$

On remplace dans le système, on obtient à l'ordre ε^0 :

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = -2x_0 + y_0 \\ \dot{y}_0 = x_0 - 2y_0 \\ x_0 = y_0 = 1 \end{cases}$$

à l'ordre ε^1 :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + y_1 + (y_0)^2 \\ \dot{y}_1 = x_1 - 2y_1 + (x_0)^2 \\ x_1 = y_1 = 0 \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{cases} x_0 = y_0 = e^{-t} \\ x_1 = y_1 = e^{-t} - e^{-2t} \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{cases} x(t) = e^{-t} + \varepsilon(e^{-t} - e^{-2t}) + o(\varepsilon^2) \\ y(t) = e^{-t} + \varepsilon(e^{-t} - e^{-2t}) + o(\varepsilon^2) \end{cases}$$

Par fois la méthode de perturbation régulière ne donne pas les fonctions $y_n(t)$ *bornées. Dans ce cas nous utilisons la méthode des perturbations singulières.*

Comme exemple pour cette idée, on considère l'équation différentielle non linéaire suivante qu'on appelle équation de Duffing :

$$\ddot{y} + y + \varepsilon y^3 = 0, \varepsilon > 0 \tag{2.5}$$

Avec conditions initiales :

$$y(0) = A \text{ et } \dot{y}(0) = 0$$

On cherche la solution sous la forme de l'équation (2.2) *. En substituant l'équation* (2.2) *dans* (2.5), *on obtient :*

$$(\ddot{y}_0 + \varepsilon\ddot{y}_1 + \varepsilon^2\ddot{y}_2 + ...) + (y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + ...) + \varepsilon(y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + ...)^3 = 0$$

et en assemblant les termes de la même puissance de ε, *ceci donne :*

$$(\ddot{y}_0 + y_0) + \varepsilon(\ddot{y}_1 + y_1 + y_0^3) + \varepsilon^2(\ddot{y}_2 + y_2 + 3y_0^2 y_1) + \varepsilon^3(...) + ... = 0 \quad (2.6)$$

Puisque l'équation (2.6) est un développement en séries de puissance de ε identiquement nul, les différents coefficients de puissance de ε doivent être tous nuls. Ainsi on trouve un système infini d'équations différentielles linéaire non homogène à résoudre :

$$\begin{array}{ccccc}
\ddot{y}_0 & + & y_0 & = & 0 \\
\ddot{y}_1 & + & y_1 & = & -y_0^3 \\
\ddot{y}_2 & + & y_2 & = & -3y_0^2 y_1 \\
\vdots & + & \vdots & = & \vdots \\
\ddot{y}_n & + & y_n & = & f(y_0, y_1, y_2, ..., y_{n-1}) \\
\vdots & + & \vdots & = & \vdots
\end{array}$$

Où f_n est un polynôme en $y_0, y_1, y_2, ..., y_{n-1}$. On remarque que ce système peut-être résolu récursivement.

Les conditions initiales $y(0) = A$ et $\dot{y}(0) = 0$, après substitution de l'équation (2.2) conduisent aux conditions initiales suivantes (dépendent de $y_n(t)$) :

$$\begin{array}{lcll}
y_0(0) & = & A & \\
y_i(0) & = & 0 & pour i \geq 1 \\
\dot{y}_k(0) & = & 0 & pour k > 0
\end{array} \quad (2.7)$$

A l'ordre zéro de ε : on obtient :

$$y_0(t) = A\cos t$$

A l'ordre 1 : L'équation pour y_1 est :

$$\ddot{y}_1 + y_1 = -y_0^3 = -(\frac{3A^3}{4})\cos t - (\frac{A^3}{4})\cos 3t$$

Qui est linéaire non homogène, sa solution particulière est :

$$y_1^p = (\frac{A^3}{32})\cos 3t - (\frac{3A^3}{8})t\sin t$$

Par conséquent, sa solution générale est :

$$y_1(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + (\frac{A^3}{32})\cos 3t - (\frac{3A^3}{8})t\sin t$$

Les conditions initiales de l'équation (2.7) *permettent de déterminer les constantes* C_1 *et* C_2*, on trouve :*

$$y_1(t) = (\frac{A^3}{32})(\cos 3t - \cos t) - (\frac{3A^3}{8})t\sin t$$

Ainsi, à l'ordre ε*, la solution de l' équation* (2.5) *est donnée par :*

$$y(t) = A\cos t + \varepsilon(\frac{A^3}{32})\left[(\cos 3t - \cos t) - 12t\sin t\right] \tag{2.8}$$

Malheureusement, l'équation (2.8) montre que $y(t)$ n'est pas bornée quand $t \to \infty$, mais aussi non périodique ce dernier inconvénient montre qu'une simple application de l'équation (2.2) conduit à des sérieux problèmes si notre but était de trouver des solutions périodiques

Chapitre 3

Méthodes des perturbations singulières

3.1 Termes Séculaires

Définition 3.1.1 *On appelle terme séculaire tout terme écrit sous la forme :* $t^n \cos t$ *où* $t^n \sin t$

Il est claire que l'existence de telle expressions qui devenu non bornées quand $t \to \infty$ détruisent la périodicité de l'expression.(voir réf [2]). Comme il est le cas du développement de la fonction périodique $t \sin(1+\varepsilon)$ suivant :

$$t \sin(1+\varepsilon) = \sin t + \varepsilon t \cos t - (\frac{\varepsilon^2 t^2}{2}) \sin t + ...$$

Une technique pour éviter les termes séculaires est donnée par Lindstedt qui est définie par :

3.2 Méthode de Lindstedt :

La méthode de Lindstedt s'applique aux équations de la forme :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y + \varepsilon f(y, \frac{dy}{dt}) = 0 \tag{3.1}$$

La base de la méthode consiste d'introduire une transformation de la variable indépendante. Cette transformation nous permet d'éviter les termes séculaires dans les solutions sous forme d'une série de perturbation de l'équation (3.1).

L'idée fondamentale de cette méthode (voir réf [1]). consiste à faire un changement d'échelle de temps en introduisant une nouvelle variable $\tau = \omega t$ avec : y et ω sont développés en série des puissances du paramètre ε comme suit :

$$y(\tau, \varepsilon) = y_0(\tau) + \varepsilon y_1(\tau) + \varepsilon^2 y_2(\tau) + ... + \varepsilon^n y_n(\tau) + ... \tag{3.2}$$

$$\omega(\varepsilon) = 1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + ... + \varepsilon^n\omega_n + ... \tag{3.3}$$

Où les ω_k sont des constantes inconnues.

Si on substitue les équations (3.2) et (3.3) dans l'équation (3.1) et on met les différents coefficients des puissances de ε nulles, et si on utilise la notation :

$$\dot{y} = \frac{dy}{d\tau}, \quad \ddot{y} = \frac{d^2y}{d\tau^2}$$

et

$$f_y(y, \dot{y}) = \frac{\partial f(y, \dot{y})}{\partial y}, \quad f_{\dot{y}}(y, \dot{y}) = \frac{\partial f(y, \dot{y})}{\partial \dot{y}}$$

Alors on obtient pour les y_n les équations suivantes :

$$\ddot{y}_0 + y_0 = 0 \tag{3.4}$$

$$\ddot{y}_1 + y_1 = -2\omega_1\ddot{y}_0 - f(y_0, \dot{y}_0) \tag{3.5}$$

$$\ddot{y}_2 + y_2 = -2\omega_1\ddot{y}_1 - (\omega_1^2 + 2\omega_2)\ddot{y}_0 - f_y(y_0, \dot{y}_0)y_1 + f_y(y_0, \dot{y}_0)(\omega_1\dot{y}_0 + \dot{y}_1) \tag{3.6}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\ddot{y}_n + y_n = G_n(y_0, y_1, ..., y_{n-1}; \dot{y}_0, \dot{y}_1, ..., \dot{y}_{n-1}) \tag{3.7}$$

Si $f(y, \frac{dy}{dt})$ est une fonction polynomiale de y et $\frac{dy}{dt}$, alors G_n est aussi une fonction polynomiale de ses arguments.

Notons que la condition de la périodicité de la nouvelle variable est :

$$y(\tau) = y(\tau + 2\pi)$$

La condition correspondante pour les y_n est :

$$y_n(\tau) = y_n(\tau + 2\pi)$$

Le second membre du système linéare ne doit pas contenir des multiples de $\cos\tau$ et $\sin\tau$, sinon on aura les termes séculaires.

L'élimination de ses termes permet de déterminer les paramètres ω_k.

De cette détermination et avec les conditions initiales, on peut résoudre facilement les équations différentielles (3.4), (3.5), (3.6) et (3.7).

Finalement, on trouve la solution de la forme (3.2) de l'équation (3.1).

Illustrons la méthode avec les deux exemples suivants :

Exemple 3.2.1 :

L'équation de Duffing :

Soit l'équation de Duffing :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y + \varepsilon y^3 = 0 \tag{3.8}$$

avec condition initiales

$$y(0) = A \; et \; \frac{dy(0)}{dt} = 0 \tag{3.9}$$

Posons $\tau = \omega t$, on obtient :

$$\omega^2 \frac{d^2y}{d\tau} + y + \varepsilon y^3 = 0; y(0) = A, \dot{y} = 0 \tag{3.10}$$

où $y = y(\tau)$. On pose

$$y(\tau, \varepsilon) = y_0(\tau) + \varepsilon y_1(\tau) + \varepsilon^2 y_2(\tau) + ... + \varepsilon^n y_n(\tau) + ...$$

$$\omega(\varepsilon) = 1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + ... + \varepsilon^n\omega_n + ...$$

Les conditions initiales deviennent :

$$\begin{cases} y(0) = A \Rightarrow y_0(0) = A, \; y_n(0) = 0, \; \forall n \geq 1 \\ \dot{y}(0) = 0 \Rightarrow \dot{y}_0(0) = 0, \; \dot{y}_n(0) = 0, \; \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Après substitution on a :

$$(1+\varepsilon\omega_1+\varepsilon^2\omega_2+...)^2(\ddot{y}_0+\varepsilon\ddot{y}_1+\varepsilon^2\ddot{y}_2+...)+(y_0+\varepsilon y_1+\varepsilon^2 y_2+...)+\varepsilon(y_0+\varepsilon y_1+\varepsilon^2 y_2+...)^3=0$$

En identifiant les termes de même puissance de ε on obtient :

$\varepsilon^0 : \ddot{y}_0 + y_0 = 0,\ y_0(0) = A,\ \ \dot{y}_0(0) = 0$

$\varepsilon^1 : \ddot{y}_1 + y_1 = y_0^3 - 2\omega_1\ddot{y}_0,\ y_1(0) = \dot{y}_1(0) = 0$

$\varepsilon^2 : \ddot{y}_2 + y_2 = 3y_0^2 y_1 - 2\omega_1\ddot{y}_0 - (\omega_1^2 + 2\omega_2)\ddot{y}_0,\ y_2(0) = \dot{y}_2(0) = 0$

. : ....

La première équation a pour solution générale :

$$y_0(\tau) = A\cos\tau$$

On porte alors cette dernière expression dans la seconde équation différentielle, et on trouve sa solution générale :

$$\ddot{y}_1 + y_1 = 2\omega_1 A\cos\tau + A^3\cos^3\tau$$

on réutilise la formule trigonométrique :

$$\cos^3\tau = \frac{1}{4}(2\cos\tau + \cos 3\tau)$$

D'où :

$$\ddot{y}_1 + y_1 = (2\omega_1 A + \frac{3A^3}{4})\cos\tau + (\frac{A^3}{4})\cos 3\tau$$

Le terme séculaire peut-être éliminer si le coefficient de $\cos\tau$ est nul, en posant :

$$2\omega_1 A - \frac{3A^3}{4} = 0\ i.e\ \ \omega_1 = \frac{3A^2}{8}$$

Alors la solution de la deuxième équation est :

$$y_1(\tau) = (\frac{A^3}{32})(\cos\tau - \cos 3\tau)$$

La troisième équation devient :

$$\ddot{y}_2 + y_2 = (\frac{21A^4}{128} + 2\omega_2)A\cos\tau + N.S.T$$

Où N.S.T : Non Secular Terms qui est donnée par :

$$N.S.T = (\frac{3A^5}{16})\cos 3\tau - (\frac{3A^5}{128})\cos 5\tau$$

On a utilisé :

$$\cos^2\tau = \frac{1+\cos 2\tau}{2} \text{ et } \cos 2\tau\cos 3\tau = \frac{1}{2}(\cos\tau + \cos 5\tau)$$

D'où :

$$\ddot{y}_2 + y_2 = (\frac{21A^4}{128} + 2\omega_2)A\cos\tau + N.S.T$$

Pour éliminer le terme séculaire on pose :

$$\omega_2 = -\frac{21A^4}{256}$$

La solution de la troisième équation est :

$$y_2(\tau) = (\frac{A^5}{1024})(23\cos\tau - 24\cos 3\tau + \cos 5\tau)$$

Alors la solution de l'équation (3.8) est :

$$y(\tau) = A\cos\tau + \varepsilon(\frac{A^3}{32})(-\cos\tau + \cos 3\tau) + \varepsilon^2(\frac{A^5}{1024})(23\cos\tau - 24\cos 3\tau + \cos 5\tau) + \ldots$$

Où $\tau = \omega t$ et

$$\omega(\varepsilon) = 1 + \varepsilon(\frac{3A^2}{8}) - \varepsilon^2(\frac{21A^4}{256}) + ...$$

Exemple 3.2.2 *L'équation de Van der Pol :*

On considère l'équation de Van der pol suivante :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y - \varepsilon(1 - y^2)\frac{dy}{dt} = 0 \tag{3.11}$$

avec conditions initiales données par l'équation (3.9) dans l'exemple précédent.

$\tau = \omega t$

$\omega^2 \ddot{y}(\tau) + y(\tau) - \varepsilon(1 - y^2(\tau))\omega \dot{y}(\tau) = 0$

$\omega(\varepsilon) = 1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + ... + \varepsilon^n\omega_n + ...$

$y(\tau, \varepsilon) = y_0(\tau) + \varepsilon y_1(\tau) + \varepsilon^2 y_2(\tau) + ... + \varepsilon^n y_n(\tau) + ...$

Après substitution on a :

$(1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + ...)^2(\ddot{y}_0 + \varepsilon\ddot{y}_1 + \varepsilon^2\ddot{y}_2 + ...) + (y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + ...) - \varepsilon(1 - (y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + ...)^2)(1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + ...)(\dot{y}_0 + \varepsilon\dot{y}_1 + \varepsilon^2\dot{y}_2 + ...) = 0$

Les équations différentielles pour $y_0(\tau)$, $y_1(\tau) et$ $y_2(\tau)$, sont obtenues faci lement et sont données par les expressions suivants :

$$\begin{aligned}
\varepsilon^0 : \ddot{y}_0 + y_0 &= 0, y_0(0) = A, \quad \dot{y}_0(0) = 0 \\
\varepsilon^1 : \ddot{y}_1 + y_1 &= -2\omega_1\ddot{y}_0 + (1 - y_0^2)\dot{y}_0, \ y_1(0) = \dot{y}_1(0) = 0 \\
\varepsilon^2 : \ddot{y}_2 + y_2 &= -2\omega_1\ddot{y}_0 - (\omega_1^2 + 2\omega_2)\ddot{y}_0 - 2y_0 y_1 \dot{y}_0 \\
&+ (1 - y_0^2)(\dot{y}_1 + \omega_1\dot{y}_0), \ \ y_2(0) = \dot{y}_2(0) = 0 \\
. &: ....
\end{aligned}$$

La solution de la $1^{ère}$ équation est :

$$y_0(\tau) = A \sin \tau$$

En substituant cette solution dans la $2^{ème}$ équation et en simplifiant, on trouve :

$$\ddot{y}_1 + y_1 = 2\omega_1 A \cos \tau - A(1 - \frac{A^2}{4}) \sin \tau + \frac{A^3}{4} \cos 3\tau$$

En éliminant les termes séculaires :

On pose :

$2\omega_1 A = 0$ et $A(1 - \frac{A^2}{4}) = 0$ avec $A \neq 0$

On trouve :

$$\begin{cases} \omega_1 = 0 \\ A^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = 0 \\ A = 2 \end{cases}$$

et

$$\ddot{y}_1 + y_1 = \frac{A^3}{4} \cos 3\tau = 2 \cos 3\tau, y_1(0) = \dot{y}_1(0) = 0$$

Cette équation a pour solution

$$y_1(\tau) = \frac{1}{8}(3 \cos \tau - \cos 3\tau)$$

La troisième équation devient :

$$\ddot{y}_2 + y_2 = (4\omega_2 + \frac{1}{4}) \cos \tau - \frac{3}{2} \cos 3\tau + \frac{5}{2} \cos 5\tau$$

On élimine le terme séculaire en posant :

$$4\omega_2 + \frac{1}{4} = 0 \quad \Rightarrow \omega_2 = -\frac{1}{16}$$

On obtient :

$$\ddot{y}_2 + y_2 = -\frac{3}{2}\cos 3\tau + \frac{5}{2}\cos 5\tau$$

On a

$$y_2 = C_1 \cos\tau + C_2 \sin\tau - \frac{5}{96}\cos 5\tau$$

D'où

$$y_2 = -\frac{13}{96}\cos\tau + \frac{1}{96}(18\cos 3\tau - 5\cos 5\tau)$$

L'équation (3.11) a une solution :

$$y(\tau) = 2\cos\tau + \frac{\varepsilon}{8}(3\cos\tau - \cos 3\tau) + \frac{\varepsilon^2}{96}(-13\cos\tau + 18\cos 3\tau - 5\cos 5\tau)$$

Où :

$$\tau = \omega t, \ \omega(\varepsilon) = 1 - \frac{\varepsilon^2}{16} + ...$$

Remarque 3.2.1 *Cette méthode ne donne pas toutes les solutions du problème car nous avons supposé que chaque terme $y_n(t)$ était périodique ; la méthode de Lindstedt ne donne que les solutions périodiques.*

Remarque 3.2.2 *En général pour une valeur quelconque de A, il n'existe pas des solutions périodiques (pour d'autres équations pas pour Duffing)*

3.3 Méthode des échelles de temps multiples

A la lumière des exemples précédents, on va construire la méthode des échelles multiples. (voir réf [1]). Cette méthode rationalise l'approximation des Amplitudes Variables. Formellement, elle consiste à chercher une solution $y(t,\varepsilon)$ sous forme de développement asymptotique en échelles multiples $T_0, T_1, ..., T_n$ (Considérées comme des variables indépendantes). Elle s'applique aux équations de la forme :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y + \varepsilon f(y, \frac{dy}{dt}) = 0 \tag{3.12}$$

On introduit les échelles de temps :

$$\begin{array}{lcll} T_0 & = & t & = \varepsilon^0 t \\ T_1 & = & \varepsilon^1 t & \\ T_2 & = & \varepsilon^2 t & \\ \ldots & & & \\ T_n & = & \varepsilon^n t & \\ T_{n+1} & = & \varepsilon^{n+1} t & \\ \ldots & & & \end{array}$$

Avec $T_{n+1} < T_n$

On cherche la solution $y(t,\varepsilon)$ sous la forme :

$$y = y_0(T) + \varepsilon y_1(T) + \varepsilon^2 y_2(T) + \cdots + \varepsilon^n y_n(T) + \cdots \tag{3.13}$$

Les opérations de dérivation s'écrivent :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial T_0}\frac{\partial T_0}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial T_1}\frac{\partial T_1}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial T_2}\frac{\partial T_2}{\partial t} + \cdots$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial T_2} + \cdots$$

$$\Rightarrow D = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \cdots \tag{3.14}$$

Où $D = \frac{dy}{dt}$, $D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}$

On utilise (3.13) et (3.14), donc la dérivée première de y est :

$$\frac{dy}{dt} = D_0 y_0 + \varepsilon(D_0 y_1 + D_1 y_0) + \varepsilon^2(D_0 y_2 + D_1 y_1 + D_2 y_0) + \cdots \tag{3.15}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = D_0^2 y_0 + \varepsilon(D_0^2 y_1 + 2D_0 D_1 y_0) + \varepsilon^2(D_0^2 y_2 + 2D_0 D_1 y_1 + D_1^2 y_0 + 2D_0 D_2 y_0) + \cdots \tag{3.16}$$

Les conditions initiales :

$$\begin{cases} y(0) = A \\ \dfrac{dy(0)}{dt} = 0 \end{cases}$$

devient, si on fait les calculs jusqu'à l'ordre ε^2 :

$$\begin{cases} y_0(0) = A \\ y_n(0) = 0, n \geq 1 \\ \dfrac{\partial y_0(0)}{\partial T_0} = 0 \\ \dfrac{\partial y_1(0)}{\partial T_0} + \dfrac{\partial y_0(0)}{\partial T_1} = 0 \\ \dfrac{\partial y_2(0)}{\partial T_0} + \dfrac{\partial y_1(0)}{\partial T_1} + \dfrac{\partial y_0(0)}{\partial T_2} = 0 \end{cases} \tag{3.17}$$

Après, en substituant les équations (3.15) et (3.16) dans l'équation (3.12), et regroupant les termes de même puissance de ε et on résout les équations trouvées. Mais ces équations peuvent contenu des termes séculaires on impose alors leur élimination.

Finalement, on trouve la solution de la forme (3.13) de l'équation (3.12).

Exemple 3.3.1 *Soit l'équation :*

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = -2\varepsilon\frac{dy}{dt} \tag{3.18}$$

Posons :

$$y(t) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + ... + \varepsilon^n y_n(t) + ...$$

On obtient après substitutions :

Pour l'ordre zéro de ε : $\ddot{y}_0 + y_0 = 0$

Pour l'ordre un de ε : $\ddot{y}_1 + y_1 = -2\dot{y}_0$

Pour l'ordre deux de ε : $\ddot{y}_2 + y_2 = -2\dot{y}_1$

La première équation donne :

$$y_0 = A\cos(t + \phi)$$

où A et ϕ sont des constantes.

Une solution particulière de la $2^{ème}$ équation est :

$$y_1(t) = -At\cos(t + \phi)$$

Une solution particulière de la $3^{ème}$ équation est :

$$y_2(t) = \frac{1}{2}At^2\cos(t + \phi) + \frac{1}{2}At\sin(t + \phi)$$

D'où :

$$y(t) = A\cos(t + \phi) - \varepsilon - At\cos(t + \phi) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 At^2\cos(t + \phi) + \frac{1}{2}At\sin(t + \phi)$$

Pour approcher, il faut que t, εt et $\varepsilon^2 t$ soient petits, plus clairement :

La solution exacte est :

$$y(t) = \alpha e^{-\varepsilon t}\cos(\sqrt{1-\varepsilon^2 t} + \phi)$$

On sait que :

$$f(\varepsilon) = f(0) + \varepsilon f'(0) + \cdots$$

alors :

$$e^{-\varepsilon t} = 1 - \varepsilon t + \frac{\varepsilon^2 t^2}{2} - \cdots$$

et

$$\cos(\sqrt{1-\varepsilon^2 t} + \phi) = \cos(t+\phi) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 t\sin(1+\phi) + \cdots$$

D'où

$$y(t) = a\cos(t+\phi) - \varepsilon a t\cos(t+\phi) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 a[t^2\cos(t+\phi) + t\sin(1+\phi)] + \cdots$$

Quand on tronque $e^{-\varepsilon t}$, c'est εt qui est la variable importante et non t.

Quand on tronque $\cos(\sqrt{1-\varepsilon^2 t} + \phi)$, c'est $\varepsilon^2 t$ la variable importante et non t.

C'est pour cela qu'on définit les nouvelles variables :

$$\begin{array}{lcll} T_0 & = & t & = \varepsilon^0 t \\ T_1 & = & \varepsilon^1 t & \\ T_2 & = & \varepsilon^2 t & \\ \dots & & & \\ T_n & = & \varepsilon^n t & \\ T_{n+1} & = & \varepsilon^{n+1} t & \\ \dots & & & \end{array}$$

On a $T_{n+1} < T_n$

Pour utiliser ces variables dans l'équation :

$$\ddot{y} + y = -2\varepsilon\dot{y}$$

On introduit :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial T_0}\frac{\partial T_0}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial T_1}\frac{\partial T_1}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial T_2}\frac{\partial T_2}{\partial t} + \cdots$$

Alors

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial T_0} + \varepsilon\frac{\partial y}{\partial T_1} + \varepsilon^2\frac{\partial y}{\partial T_2} + \cdots$$

Ce qui implique que

$$\frac{dy}{dt} - (\frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial T_2} + \cdots)y$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial T_2} + \cdots$$

$$\Rightarrow D = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \cdots$$

Où $\quad D = \frac{dy}{dt}, \;\; D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}$

L'équation (3.18) s'écrit :

$$D^2y + y = -2\varepsilon Dy$$

Ce qui implique :

$$(D^2 + 1)y = -2\varepsilon Dy$$

Alors

$$[(D_0+\varepsilon D_1+\varepsilon^2 D_2+\cdots)^2+1](y_0+\varepsilon y_1+\varepsilon^2 y_2+...) = -2\varepsilon(D_0+\varepsilon D_1+\varepsilon^2 D_2+\cdots)(y_0+\varepsilon y_1+\varepsilon^2 y_2+\cdots)$$

$$(D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \cdots)^2 + 1 = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \cdots + 1$$

En identifiant les coefficients de même puissance de ε, on trouve :

$$(D_0^2 + 1)y_0 = 0$$

$$(D_0^2 + 1)y_1 = -2D_0 D_1 y_0 - 2D_0 y_0$$

On a :

$$y_0 = A\cos(T_0 + \phi)$$

Où

$$A = A(T_1, T_2, \cdots) \quad et \quad \phi = \phi(T_1, T_2, \cdots)$$

La deuxième équation s'écrit :

$(D_0^2+1)y_1 = 2D_1[A\sin(T_0+\phi)] + 2A\sin(T_0+\phi)$

Alors

$$(D_0^2+1)y_1 = 2(D_1A+A)\sin(T_0+\phi) + 2A(D_1\phi)\cos(T_0+\phi)$$

Pour avoir des solutions bornées, on doit supprimer les termes séculaires ;

On pose :

$$D_1A + A = 0 \quad et \quad D_1\phi = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial A}{\partial T_1} + A = 0 \quad et \quad \frac{\partial \phi}{\partial T_1} = 0$$

Ce qui implique que :

$$A = \alpha e^{-T_1}, \ \phi = C$$

où : $\alpha = \alpha(T_2, T_3, \cdots)$*et* C=C($T_2$,$T_3$,$\cdots$), on peut les prendre pour des constantes à cette échelle de temps.

On a alors :

$$y(t) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \cdots$$

$$y(t) = A\cos(T_0 + C) + \cdots$$

$$y(t) = \alpha e^{-T_1}\cos(T_0 + C) + \cdots$$

La solution approximative est :

$$y(t) = \alpha e^{-\varepsilon T_1} \cos(T_0 + C) + \cdots$$

Soit l'équation de Duffing :

$$\ddot{y} + y = -\varepsilon y^3$$

On a

$$D = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \cdots$$

On substitue et on trouve :

$$(D_0^2 + 1 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \cdots)(y_0 + \varepsilon y_1 + \cdots) = -\varepsilon(y_0 + \varepsilon y_1 + \cdots)^3$$

On regroupe selon les termes de même puissance de ε :

$\varepsilon^0 : (D_0^2 + 1)y_0 = 0$

$\varepsilon^1 : (D_0^2 + 1)y_1 = -D_0 D_1 y_0 - y_0^3$

$\cdots : \cdots$

La première équation donne :

$$\begin{cases} y_0 = A\cos(T_0 + \phi) \\ A = A(T_1, T_2, \cdots), \ \ \phi = \phi(T_1, T_2,) \end{cases}$$

La deuxième équation devient :

$(D_0^2 + 1)y_1 = -2D_0 D_1[A\cos(T_0 + \phi)] - A^3 \cos^3(T_0 + \phi)$

$(D_0^2 + 1)y_1 = 2D_1(A\sin(T_0 + \phi)) - A^3 \cos^3(T_0 + \phi)$

$(D_0^2+1)y_1 = 2[\dot{A}\sin(T_0+\phi)+A\dot{\phi}\cos(T_0+\phi)]-\frac{A^3}{4}(3\cos(T_0+\phi)+\cos(3(T_0+\phi)))$

avec :

$$\dot{A} = D_1 A = \frac{\partial A}{\partial T_1},\ \phi = D_1 \phi = \frac{\partial \phi}{\partial T_1}$$

$$(D_0^2 + 1)y_1 = 2\dot{A}\sin(T_0 + \phi) + (2A\dot{\phi} - \frac{3A^3}{4})\cos(T_0 + \phi) + N.S.T$$

N.S.T : non secular terms.

Pour supprimer les termes séculaires, on pose :

$$\dot{A} = 0 \ et \ 2A\dot{\phi} - \frac{3A^3}{4} = 0$$

$$A = \alpha(T_2, T_3, \cdots) = \alpha$$

$$2\alpha\dot{\phi} - \frac{3\alpha^3}{4} = 0 \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{3\alpha^2}{8}$$

alors :

$$\phi = \frac{3\alpha^2}{8} T_1 + const$$

La solution générale est :

$$y(t) = \alpha\cos(t + \frac{3\alpha^2}{8}\varepsilon t + const) + \cdots$$

La méthode des échelles de temps multiples donne n'importe quelle solution et non seulement les solutions périodiques.

3.4 Méthode de la moyenne

La méthode de la moyenne donne n'importe quelle solution et non seulement les solutions périodiques. (voir réf [1]). Cette méthode s'applique aux équations de la forme :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y + \varepsilon f(y, \frac{dy}{dt}) = 0, \quad 0 < \varepsilon << 1 \tag{3.19}$$

Pour $\varepsilon = 0$, la solution générale est :

$$y(t) = Asin(\omega t + \phi) \tag{3.20}$$

Où : A et ϕ sont les constantes. La méthode de la moyenne consiste à poser :

$$\begin{cases} y(t) = A(t)\sin(\omega t + \phi(t)) \\ \dot{y}(t) = A(t)\omega\cos(\omega t + \phi(t)) \end{cases} \tag{3.21}$$

Où : $A(t)$ et $\phi(t)$ varient lentement avec le temps et

$$x = \dot{y}$$

D'où

$$\dot{x} = -\omega^2 y - \varepsilon f(y, x) \tag{3.22}$$

Nous cherchons une solution sous la forme :

$$\begin{cases} y(t) = A(t)\sin(\omega t + \phi(t)) \\ x(t) = A(t)\omega\cos(\omega t + \phi(t)) \end{cases} \tag{3.23}$$

D'où

$$A(t)\omega\cos(\omega t+\phi(t)) = \dot{A}(t)\sin(\omega t+\phi(t)) + A(t)(\omega+\dot{\phi}(t))\cos(\omega t+\phi(t))$$

Ainsi

$$\dot{A}(t)\sin(\omega t+\phi(t)) + A(t)\dot{\phi}(t)\cos(\omega t+\phi(t)) = 0 \tag{3.24}$$

Substituons (3.23) dans (3.22), on aura :

$$\dot{A}(t)\omega\cos(\omega t+\phi(t)) - A(t)\omega(\omega+\dot{\phi}(t))\sin(\omega t+\phi(t)) = -\omega^2 A(t)\sin(\omega t+\phi(t)) - \varepsilon f(y,x)$$

En résolvant l'équation précédente et l'équation (3.24), on obtient :

$$\begin{cases} \dot{A}(t) = \frac{-\varepsilon}{\omega}\cos(\omega t+\phi(t))f(A(t)\sin(\omega t+\phi(t)), A(t)\omega\cos(\omega t+\phi(t))) \\ \dot{\phi}(t) = \frac{\varepsilon}{\omega}\sin(\omega t+\phi(t))f(A(t)\sin(\omega t+\phi(t)), A(t)\omega\cos(\omega t+\phi(t))) \end{cases} \tag{3.25}$$

La méthode de la moyenne consiste à remplacer $\dot{A}(t)$ et $\dot{\phi}(t)$ dans (3.25) par leurs valeurs moyennes sur une période $\frac{2\pi}{\omega}$. $A(t)$ et $\phi(t)$ sont considérés comme des constantes en prenant la moyenne. Ce procédé connu comme méthode de la moyenne conduit à :

$$\begin{cases} \dot{A}(t) = \frac{-\varepsilon}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\cos(\omega t+\phi)f(A\sin(\omega t+\phi)), A\omega\cos(\omega t+\phi))dt \\ \dot{\phi}(t) = \frac{\varepsilon}{2\pi A}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\sin(\omega t+\phi)f(A\sin(\omega t+\phi)), A\omega\cos(\omega t+\phi))dt \end{cases}$$

Posons $\theta = \omega t+\phi$, on a :

$$\begin{cases} \dot{A} = \frac{\varepsilon}{2\pi\omega}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\cos\theta f(A\sin\theta, A\cos\theta)d\theta \\ \dot{\phi} = \frac{\varepsilon}{2\pi A\omega}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\sin\theta f(A\sin\theta, A\cos\theta)d\theta \end{cases} \tag{3.26}$$

Les équations exactes de (3.25) sont remplacées par les équations approximatives de (3.26) . Une fois les intégrales trouvées, on aura à résoudre des équations différentielles du 1^{er} ordre pour $A(t)$ et $\phi(t)$. On a les formules qui peuvent être trouvées par intégration par partie

$$I_{m,n} = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin^m(y)\cos^n(y)dy$$

$$I_{m,n} = \frac{m-1}{m+n} I_{m-2,n} \tag{3.27}$$

$$I_{m,n} = \frac{m-1}{m+n} I_{m,n-2} \tag{3.28}$$

Les équations (3.27) et (3.28) sont utilisées jusqu'à ce qu'on arrive à :

$$I_{0.0} = 2\pi$$

Notons que :

$$I_{m,n} \neq 0$$

seulement pour m et n pairs.

Appliquons la méthode de la moyenne à l'équation de Van der pol :

Exemple 3.4.1

$$\ddot{y} + y - \varepsilon(1-y^2)\dot{y} = 0$$

Où

$$f(y,\dot{y}) = -(1-y^2)\dot{y}$$

et

$$\omega = 1$$

Le système (3.26) *devient :*

$$f(A\sin\theta, A\cos\theta) = -(1 - A^2\sin^2\theta)A\cos\theta$$

telle que :

$$\begin{cases} \dot{A} = \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi} A(1 - A^2\sin^2\theta)\cos^2\theta d\theta \\ \dot{\phi} = \frac{-\varepsilon}{2\pi A}\int_0^{2\pi} A(1 - A^2\sin^2\theta)\cos\theta\sin\theta d\theta \end{cases}$$

Alors

$$\begin{array}{rcl} \dot{A}(t) & = & \frac{\varepsilon A}{2\pi}(I_{0.2} - A^2 I_{2.2}) \\ \dot{A}(t) & = & \frac{\varepsilon A}{2\pi}(\frac{1}{2}2\pi - A^2\frac{1}{4}\frac{1}{2}2\pi) \\ \dot{A}(t) & = & \frac{\varepsilon A}{8} - (4 - A^2) \end{array}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dA}{dt} = \int \frac{\varepsilon A}{8}(4 - A^2)$$

$$\Rightarrow \int \frac{dA}{A(2-A)(2+A)} = \frac{\varepsilon}{8}\int dt$$

Après les calculs, on obtient :

$$\ln\left[\frac{A^2}{C(4 - A^2)}\right] = \varepsilon t$$

Supposons que $A(0) = A_0$ *ce qui implique :* $C = \frac{A_0^2}{4-A_0^2}$

$$\Rightarrow A^2(t) = \frac{\frac{4A_0^2}{4-A_0^2}e^{\varepsilon t}}{1 + \left(\frac{A_0^2}{4--A_0^2}\right)e^{\varepsilon t}}$$

D'où :

$$A(t) = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{4}{A_0^2} - 1\right) e^{\varepsilon t} + 1}}$$

Notons que $A(t) \to 2$ *quand* $t \to \infty$ *est indépendamment de* A_0

$$\dot{\phi}(t) = \frac{-\varepsilon}{2\pi}(I_{1,1} - A^2 I_{3,1}) = 0$$

Ce qui implique que :

$$\phi(t) = \phi_0 = \phi(0) = const$$

La solution approximative est :

$$y(t) = Asin(t + \phi)$$

c.à.d

$$y(t) = \frac{2\sin(t + \phi_0)}{\sqrt{\left(\frac{4}{A_0^2} - 1\right) e^{\varepsilon t} + 1}}$$

Si $A = 2$, *on a la solution :*

$$y(t) = 2\sin(t + \phi_0)$$

c'est une solution périodique, de période $T = 2\pi$.

Chapitre 4

Avantages et inconvénients de chaque méthodes

Dans les chapitres précédent on a considéré différentes techniques pour résoudre des équations différentielles non linéaires sous la forme :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y + \varepsilon f(y, \frac{dy}{dt}) = 0, \ 0 < \varepsilon << 1 \tag{4.1}$$

Ou ε est un petit paramètre, $0 < \varepsilon << 1$, et f est une fonction polynomial non linéaire. Le but de ce chapitre est de donner les avantages et les inconvénients de ces différentes techniques.

4.1 Méthode de perturbation régulière

Le principal avantage de l'application de la méthode de perturbation régulière pour obtenir des solutions approchées de l'équation (4.1), et que la technique est simple à appliquer. En outre, la méthode nous permet d'obtenir des expansions uniformément valables pour les solutions périodiques. L'inconvénient de cette méthode est que le calcul des approximations d'ordre supérieur peut être compliqué, aussi parfois on trouve des solutions qui sont non bornées

4.2 Méthode de lindstedt

Le principal avantage de l'application de cette méthode est d'éviter les termes séculaires pour avoir des solutions bornées, la méthode de lindstedt à deux inconvénients majeurs :
Cette méthode ne donne pas toutes les solutions du problème, elle ne donne que les solutions périodiques.

Le deuxième inconvénient est que les calculs d'ordre supérieur sont longs et compliqués.

4.3 Méthode des échelles de temps multiples

La méthode des échelles de temps multiples permet la dépendance de la solution sur les différentes échelles de temps pour être facilement obtenu. Cela permet souvent d'interpréter la signification physique de la solution et dans les comparaisons avec les données expérimentales.

L'inconvénient majeur de la méthode des échelles de temps multiples, c'est qu'en général, même pour obtenir des résultats de premier ordre, on doit résoudre un certain nombre d'équations aux dérivées partielles.
Les détails algébriques peuvent devenir très difficile pour une équation qui comporte une fonction $f\ (y, \frac{dy}{dt})$ non linéaire qui est une fonction compliquée de ses arguments.

4.4 Méthode de la moyenne

La méthode de la moyenne présente trois avantages majeurs :

1. Le calcul en première approximation se réduit à l'intégration de deux intégrales définies pour les dérivés de l'amplitude et la phase. L'amplitude et la phase peuvent être obtenues, en générale, en utilisant des techniques d'intégration élémentaires du calcul.
2. Cette Méthode peut être appliquée à des systèmes qui sont assortis de modalités d'amortissement ou des forces dissipatives (forces dissipatives sont des forces de la nature tels que l'énergie est perdue à partir d'un système de temps.) et peut pas donc donner la dépendance temporelle de l'amplitude.
3. Si les cycles limites (cycle limite est une solution périodique isolée) et point limites existent pour une équation différentielle non linéaire donné, la méthode nous permet de les déterminer. En outre, nous pouvons obtenir le comportement du système à mesure qu'elle s'approche de ces cycles limites et les points.

L'inconvénient majeur de cette méthode est que les calculs d'ordre supérieur sont longs et compliqués, et en général, la quantité d'effort nécessaire pour calculer des termes d'ordre supérieur ne se justifie pas par la petite quantité de renseignements supplémentaires obtenus.

4.5 Conclusion

Tout au long de ce travail nous avons étudié certaines techniques de résolution concernant l'équation :

$$L(y, \dot{y}, \ddot{y}) = \varepsilon f(y, \dot{y})$$

Qui sont :

1. la méthode de perturbation régulière.
2. les méthodes singulières : Lindstedt, Échelles de temps multiples, La moyenne.

En parcourant ces méthodes, on aperçoit que la méthode de perturbation régulière nous donne une solution différente (une solution très lointaine de la réalité).

Ce qui fait que les méthodes singulières sont beaucoup meilleures comparées à celle de la méthode régulière. En travaillant sur la méthode de Lindstedt, on obtient uniquement des solutions périodiques, ce qui rend la méthode inutile une fois qu'on n'a pas de solution périodique.

Cependant la méthode de la moyenne et des échelles de temps multiples donnent toutes les solutions possibles.

Par conséquent, il est préférable de choisir la méthode de résolution avant de travailler. D'ailleurs chaque méthode donne une solution approximative est s'avère acceptable comparée au résultat exact.

Bibliographie

[1] Donald R.Smith, *Singular perturbation : A*n Introduction with Applications, Cambridge University Press, (1985), ISBN 0-521-30042-8

[2] Hinch Ej, *Perturbation Method.* Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, (1991), ISBN 0-521-37897-4.

[3] Ali H.Nayef, *Introduction to perturbation Techniques.* john Wiley and Sons (New York-1981),ISBN 0-471-3113-1.

[4] L.Perko, *Differential Equation and Dynamical system.*

[5] COURS DE 1^{ERE} Année Magister : option Systèmes dynamiques et Equations Différentielles.(2000-2001).