République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : **EDP et Analyse numérique**

Par :

MENASRIA KHAWLA

Intitulé

Etude de quelques inégalités intégrales célèbres

Dirigé par :

Devant le jury

PRESIDENT	Dr: MEFTAH Badreddine	MCB	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr: AISSAOUI Fatima	MCB	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Pr : DEBBOUCHE Amar	Prof	Univ-Guelma

Session Juin 2018

بسم الله الرحمن الرحيم

REMERCIEMENTS

أحمد الله الذي أنار لي درب العلم و المعرفة، و أعانني على أداء هذا الواجب ووفقني إلى انجاز هذا العمل ...

اللّهم لك الحمد

La réalisation de ce mémoire a été possible grâce au concours de plusieurs personnes à qui je voudrais témoigner toute ma reconnaissance.

Je voudrais tout d'abord adresser ma gratitude à Mr.Boulares Hamid, d'avoir accepté d'encadrer ce travail, je les remercies pour ses conseils judicieux, qui ont contribué à alimenter ma réflexion.

Mes remerciements vont également aux membres du jury, qui ont accepté d'évaluer, discuter et examiner mon modeste travail.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail:

A la mémoire de ma grand-mère paternelle

Qui ont été toujours dans mon esprit et dans mon cœur, je vous dédie aujourd'hui

ma réussite. Que Dieu, le miséricordieux, vous accueille

dans son éternel paradis.

À ma grand-mère maternelle, À mes grands pères « Nous lui souhaitons la longévité »

À mes parents

À ma très chère Mère ; et à mon très cher Père ; pour ses sacrifices

De tous les instants.

À mon beau frère et belles sœurs

À Toute ma famille

À tous Mes enseignants sans Exception

À mes tendres amies

Et à tous ceux qui ont toujours cru en moi, m'ont accompagné et soutenu …

Trouvez ici ma profonde reconnaissance…

Nacer Nedjla

ملخص

نظرا لأهمية الدور الذي يلعبه مبدأ النقطة الصامدة في مجال التطبيقات حيث أنه يتدخل في حل العديد من المعادلات التفاضلية غير الخطية خاصة في المسائل المتعلقة بايجاد الحلول الوحيدة .

نتناول في هذه المذكرة البعض من تطبيقاته المتعددة كما ندرس بعض التعليمات لهذا المبدأ و بعض امتداداته التي تساهم في حل المعادلات التفاضلية الكسرية.

بمفهوم هاد مار (Hadmarad) ومبدأ النقطة الصامدة لشودر(Schauder).

من جهة أخرى، بتطبيق نظرية النقطة الصامدة لكراسنوسلسكي (Krasnoselskii) أثبتنا وجود حلول موجبة لبعض الجمل التفاضلية الكسرية

الكلمات المفتاحية

المعادلات التفاضلية الكسرية بمفهوم هاد مار، مبدأ التقليص لبناخ، متناوبة شودر غير الخطية ، نظرية النقطة الصامدة لكراسنوسلسكي.

Résumé

Le principe du point fixe a beaucoup d'applications.Il intervient dans l'étude de l'existence et l'unicité des équations différentielles fractionnaires.
Dans ce mémoire on aborde différentes approches de ce principe ainci que quelques unes de ses extensions pour l'étude des équations différentielles fractionnaires relatives à la dérivée de Hadamard.Nous établissons l'existence et l'unicité des solutions en utilisant le principe de contraction de Banach et l'alternative de Schauder non linéaire.
Par ailleurs,nous étudions la positivité de la solution d'un certain système d'équations différentielles fractionnaires via le théorème de point fixe Guo-Krasnoselskii dans un cone.

Mots clés : Dérivées fractionnaires au sens de Hadamard,principe de contraction de Banache,alternative de Scauder non linéaire,théorème du point fixe de krasnoselskii.

Abstract

The fixed point principle plays a crucial role in various domains of aplications.It is the main tool in the proof the existence and uniqueness of a numerous nonlinear differential equations,particularly in the theory of fractional differential equation using Hadamard derivvatives.

We consider in this dissertation different applications of this principle and some of its extensions which are applied in the study of fractional differential equation.We prove the existence and uniqueness of solutions of such problems by using Banach contraction principle and Scauder nonlinear alternative.On the other hand, we investigate the positivity of solution of some fractional differential system by using Guo-Krasnoselskii fixed point theorem in a cone as well as Leray-Schauder's theorem.

Keywords : Hadamard fractional derivative,Banach contraction principle,nonlinear Schauder alternative,Krasnoselskii fixed point theorem.

Table des matières

Introduction générale

Lorsqu'on introduit la notion de dérivée, on se rend vite compte qu'il est aussi possible de dériver cette fonction dérivée ainsi obtenue, ce qui nous ramène à la dérivée seconde. En continuant ainsi on obtient les dérivées successives d'ordres entiers L'intégration, opération inverse de la dérivation, peut éventuellement être vue comme une dérivation d'ordre"moins un". On peut aussi se demander si ces dérivées d'ordre successifs ont un équivalent d'ordres non entiers.

La théorie de dérivation fractionnaire est un sujet presque aussi ancien que le calcul classique tel que nous le connaissons aujourd'hui; ses origines remontaient vers la fin du $17^{ème}$siècle, l'époque où Newton et Leibniz ont développé les fondements du calcul différentiel et intégral. Leibniz a ainsi introduit le symbol $\frac{d^n f}{dt^n}$ pour désigner la $n^{ème}$ dérivée d'une fonction f. L'Hôpital a demandé dans une lettre adressée à Leibniz la signification de la notation $\frac{d^n f}{dt^n}$ si $n = \frac{1}{2}$. Cette lettre de L'Hôpital, écrire en **1695**, est aujourd'hui considérée comme étant la naissance de la dérivation fractionnaire, et le fait que l'Hôpital a demandé spécifiquement pour $n = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire un nombre non entier a en fait donné lieu à l'application de "dérivation et intégration"d'ordres non entiers.

Le concept de dérivation d'ordre fractionnaires a été introduit au 19 ème siècle par Reimann-Liouville et Leitinkov. leur but est de prolonger la dérivation et l'integration d'ordres fractionaires en utilisant non seulement un ordre entier mais également des ordres non entiers. Ce genre de calcul a été utilisé en mécanique depuis les années 1930 et en électrochimie depuis les années 1960. Plus tard, plusieurs mathématiciens et physiciens ont étudié les équations différentielles et les systèmes d'ordres fractionnaires.Le présent mémoire est structuré comme suit :

Le premier chapitre comporte quelques notions de base ainsi que toutes les notations et définitions nécessaires à la bonne compéhension du présent mémoire. Nous introduirons le calcul fractionnaire et nous insisterons sur les définitions et les propiétés des dérivées et intégrales fractionnaires au sens de Hadamard. Le théorème du point fixe de Banach est aussi présenté dans cette partie comme outil essentiel permettant de prouver l'existence et l'unicité de la solution des problèmes de Cauchy étudiés.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des équations différentielles relativement à la dérivée fractionnaire de Hadamard.

On commencera par réduire ce problème à une équation intégrale non linéaire de Voltérra dans des espaces de fonctions sommables et on établira l'existence et l'unicité de la solution. La méthode utilisée est basée sur le théorème du point fixe de Banach, ce chapitre contient les principaux résultats d'éxistence et d'uniité de quelques problèmes de Cauchy relatifs à la dérivée fractionnaire de Hadamard.

Dans le troisième chapitre, on étudiera un problème aux limites pour un système couplé d'équations différentielles fractionnaires non-linéaires relatives à la dérivée fractionnaire de Hadamard, et ce moyennant les théorrèmes de point fixe du Guo-Krasnoselskii et celui de Leray-Schauder.

Nous concluons ce chapitre par deux exemples illustratifs.

Enfin, une conclusion globale est présentée à la fin de ce memoire pour récapittuler les principaux résultat traités ainsi que les techniques utilisées.

Chapitre 1

Preliminaires

Dans ce chapitre nous introduisons certains espaces fonctionnels nécessaires à notre travail, le concept de dérivations et d'integration fractionnaire et de leurs propriétés.

Nous rappelons ensuite quelques essentielles de l'analyse fonctionnelle et nous énocerons le théorème du point fixe de Banach.

1.1 Espaces fonctionnels

1.1.1 Espace $L^p(a,b)$, $1 \leq p \leq \infty$

On introduit l'espace vectoriel des classes d'équivalence de fonctions de puissances p sommables $L^p(a,b)$, $1 \leq p \leq \infty$ comme suit :

Définition 1.1.1 *soient $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$, $a < b$ et $1 \leq p < \infty$. On définit l'espace $L^p(a,b)$ comme suit :*

$$L^P(a,b) = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{R},\ \textit{mesurable} : \|f\|_p < \infty \right\},\ \textit{où}\ \|f\|_p = \left(\int_a^b |f|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Les éléments de $L^p(a,b)$ doivent être compris en tant que classes d'équivalence des fonctions presque partout égales sur $[a,b]$.

Et pour $p = \infty$, L'espace $L^\infty(a,b)$ est l'espace des fonctions essentiellement bornées sur (a,b) muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{a \leq x \leq b} .ess\,|f(x)|,$$

$(\sup_{a \leq x \leq b} \cdot ess\,|f(x)|$, sup essentiel de $|f(x)|$ sur $[a,b])$.

Nous avons également bessoin de l'espace $X_c^p(a,b)$ des fonctions pondérées de puissances p sommables. nous avons

1.1.2 Espaces des fonctions intégrables pondérées $X_c^p(a,b)$

Définition 1.1.2 *L'espace $X_c^p(a,b)$, $(c \in \mathbb{R},\ 1 \leq p \leq \infty)$ est l'espace vectoriel des classes de fonctions mesurables à valeurs complexes f sur (a,b) telles que*

$$\|f\|_{X_c^p} = \left(\int_0^\infty |x^c f|^p \frac{dx}{|x|}\right)^{1/p} < \infty,\ si\ 1 \leq p \leq \infty,$$

et

$$\|f\|_{X_c^\infty} = \sup_{a \leq x \leq b} .ess\left(x^c |f(x)|\right) \prec \infty,\ si\ p = \infty.$$

cas particulier : losque $c = \frac{1}{p}$, l'espace $X_c^p(a,b)$ coïncide avec l'espace $L^p(a,b)$, on a

$$X_{1/p}^p(a,b) = L^p(a,b).$$

1.1.3 Espaces $C_\gamma^n[a,b]$

Définition 1.1.3 *Soit $[a,b]$ un intervalle fini et soit $\gamma \in \mathbb{C}$ avec $0 \leq \mathrm{Re}(\gamma) < 1$, on définit l'espace vectoriel $C_\gamma[a,b]$ des fonctions à valeurs complexes f définies sur $[a,b]$ par*

$$C_\gamma[a,b] = \left\{f : [a,b] \to \mathbb{C},\ \ (x-a)^\gamma f \in c[a,b]\right\}.$$

L'espace $C_\gamma[a,b]$ est appelé espace des fonctions continues pondérées.

Définition 1.1.4 *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $C_\gamma^n[a,b]$ l'espace de Banach des fonctions f qui sont continument dérivables jusqu'à l'ordre $n-1$ sur $[a,b]$ et ont dérivée $f^{(n)}(x)$ d'ordre n, telle que $f^{(n)} \in C_\gamma([a,b])$. On le munit de la norme*

$$\|f\|_{C_\gamma^n} = \sum_{k=0}^{n-1} \left\|f^{(k)}\right\|_C + \|f\|_{C_\gamma}.$$

Définition 1.1.5 *L'espace des fonctions continues pondérées $C_{\gamma,\log}[a,b]$ est défini par*

$$C_{\gamma,\log}[a,b] = \left\{f : \left(\log\frac{x}{a}\right)^\gamma f \in C[a,b]\right\}. \tag{1.1}$$

que nous munissons de la norme $\|f\|_{C_{\gamma,\log}} = \left\|\left(\log\frac{x}{a}\right)^\gamma f\right\|_{C}$.

1.1.4 Espace $AC_\delta^n[a,b]$

Soit $[a,b]$ un intervalle fini.

On désigne par $AC[a,b]$ l'espace des fonctions absolûment continues sur $[a,b]$; c'est l'espace des primitives de fonctions sommables de Lebesgue

$$f \in AC[a,b] \iff f(x) = c + \int_a^x \varphi(t)\,dt, \ \left(\varphi \in L^1(a,b)\right). \tag{1.2}$$

Ainsi une fonction absolûment continue $f(x)$ a une dérivée sommable $f'(x) = \varphi(x)$ dans $[a,b]$.

Il vient de (1.2) que

$$\varphi(t) = f'(t) \text{ et } c = f(a).$$

Définition 1.1.6 *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note par $AC^n[a,b]$ l'espace des fonctions à valeurs complexes $f(x)$ ayant des dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$ continues sur $[a,b]$ telles que $f^{(n-1)} \in AC[a,b]$.*

Définition 1.1.7 *L'espace $AC_\delta^n[a,b]$ des fonctions à valeurs complexes f sur (a,b), est défini par*

$$AC_\delta^n[a,b] = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{C}, et\ \delta^{n-1} f \in AC[a,b], \delta = x\frac{d}{dx} \right\}.$$

1.2 Transormée de Melllin

On rappelle dans cette section la définition de la transformée de Mellin ainsi que son inverse .La transformée de Mellin d'une fonction suffisamment régulière $f : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ est définie par

$$f^*(s) := \mathcal{M}\{f(t), s\} = \int_0^\infty f(t)\, t^{s-1} dt, \ \alpha < R(s) < \beta \tag{1.3}$$

et la transformée inverse de Mellin est formellement donnée par

$$f(t) = \mathcal{M}^{-1}\{f^*(s); t\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} f^*(s)\, t^{-s} ds, \ t > 0, \ \alpha < \gamma < \beta \tag{1.4}$$

où l'intégrale est comprise au sens de la valeur principale de Cauchy.

Il est à noter que la transformée de Mellin peut être obtenue à l'aide de la transformée de Fourier par la subdivision de variable $t = e^x$ et par rotation du plan complexe d'un angle droit, à savoir,

$$\mathcal{M}f(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\, t^{s-1} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(e^x)\, e^{ix(-ix)} dx = F\{f(e^x); -is\},$$

où $F(f(x), k)$ désigne la transformée de Fourier de la fonction f en k.

1.2.1 Transformée de Mellin de quelques fonctions

Nous verrons dans les prochaines sections les transformées de Mellin des intégrales fractionnaires de type Hadamard $\left(I_{0+,\mu}^{\alpha} f\right)(x)$, $\left(I_{-,\mu}^{\alpha} f\right)(x)$ et les dérivés fractionnaires de type de Hadamard $\left(D_{0+,\mu}^{\alpha} f\right)(x)$, $\left(D_{-,\mu}^{\alpha} f\right)(x)$.

Fonction	Transformée de Mellin
$f(at)$	$a^{-s} Mf(s)$, $a > 0$,
$t^{\alpha} f(t)$	$Mf(s+\alpha)$,
$f(t\alpha)$	$\frac{1}{\lvert\alpha\rvert} Mf(s/\alpha)$, $\alpha \neq 0$,
e^{-at}	$\frac{1}{\lvert\alpha\rvert} \Gamma(s/\alpha)$, *si* $\operatorname{Re}(s/\alpha) > 0$,
$\frac{\sin(2\sqrt{t})}{\sqrt{\pi}}$	$\frac{\Gamma(s+1/2)}{\Gamma(1-s)}$,
$\frac{\cos(2\sqrt{t})}{\sqrt{\pi}}$	$\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(1/2-s)}$,

1.3 Intégrale et dérivée au sens de Hadamard :

Définition 1.3.1 *Soient* $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ *et* $\alpha \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\alpha) > 0$. *On definit l'integrale fractionnaire gauche de* f *(resp. droite) d'ordre* α *au sens de Hadamard par*

$$\left(I_{a+}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \frac{f(t)\, dt}{t}, \quad (a < x < b), \tag{1.5}$$

resp.

$$\left(I_{b-}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \left(\log \frac{t}{x}\right)^{\alpha-1} \frac{f(t)\, dt}{t}, \quad (a < x < b).$$

Lorsque $a = 0$ et $b = \infty$, ces relations sont données par

$$\left(I_{0+}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \frac{f(t)\, dt}{t}, \quad (x > 0), \tag{1.6}$$

et

$$\left(I_{-}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\infty} \left(\log \frac{t}{x}\right)^{\alpha-1} \frac{f(t)\, dt}{t}, \quad (x > 0). \tag{1.7}$$

Définition 1.3.2 *Soit $\delta = xD$, avec $(D = d/dx)$. La $\delta-$dérivée fractionnaire de Hadamard à gauche (resp. à droite) d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ $(\mathrm{Re}(\alpha) \geq 0)$ d'une fonction f sur $[a,b]$ est définie par*

$$\begin{aligned} \left(D^{\alpha}_{a+}f\right)(x) &= \delta^{n}\left(I^{n-\alpha}_{a+}f\right)(x) \\ &= \left(x\frac{d}{dx}\right)^{n}\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{a}^{x}\left(\log\frac{x}{t}\right)^{n-\alpha-1}\frac{f(t)}{t}dt,\ x\in(a,b), \end{aligned} \tag{1.8}$$

(resp.

$$\left(D^{\alpha}_{b-}f\right)(x) = (-\delta)^{n}\left(I^{n-\alpha}_{b-}f\right)(x)$$

où $n = [Re(\alpha)] + 1)$.

Lorsque$a = 0$ et $b = \infty$ on a

$$\left(D^{\alpha}_{0+}f\right)(x) = \delta^{n}\left(I^{n-\alpha}_{0+}f\right)(x) \tag{1.9}$$

$$= \left(-x\frac{d}{dx}\right)^{n}\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{x}^{\infty}\left(\log\frac{t}{x}\right)^{n-\alpha-1}\frac{f(t)}{t}dt\ \ (x>0) \tag{1.10}$$

$$\left(D^{\alpha}_{-}f\right)(x) = (-\delta)^{n}\left(I^{n-\alpha}_{-}f\right)(x)\ \ (x>0)$$

Lorsque $\alpha = m \in \mathbb{N}$, on obtient

$$\left(D^{m}_{a+}f\right)(x) = \left(\delta^{m}f\right)(x) \text{ et } \left(D^{m}_{b-}f\right)(x) = (-1)^{m}\left(\delta^{m}f\right)(x).$$

Il peut être directement vérifié que les intégrales et les dérivées de Hadamard des fonctions $[log\left(\frac{x}{a}\right)]^{\beta-1}$ et $[log\left(\frac{x}{b}\right)]^{\beta-1}$ sont des fonctions logarithmiques de la même forme.

Exemple 1.3.1 *Si $Re(\alpha) > 0$, $\mathrm{Re}(\beta) > 0$, $(0 < a < b < \infty)$, et $f(x) = \left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta-1}$*

on a

$$I^{\alpha}_{a+}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta+\alpha-1}, \tag{1.11}$$

et

$$I^{\alpha}_{b-}\left(\log\frac{b}{x}\right)^{\beta-1}(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}\left(\log\frac{b}{x}\right)^{\beta+\alpha-1}. \tag{1.12}$$

Exemple 1.3.2 *Si* $Re(\alpha) > 0$, $\mathrm{Re}(\beta) > 0$ $(0 < a < b < \infty)$, *et* $f(x) = (\log \frac{x}{a})^{\beta-1}$, *alors on a*

$$D_{a+}^{\alpha}(\log \frac{t}{a})^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\beta-\alpha-1}, \tag{1.13}$$

$$D_{b-}^{\alpha} \left(\log \frac{b}{t}\right)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} \left(\log \frac{b}{x}\right)^{\beta-\alpha-1}. \tag{1.14}$$

Exemple 1.3.3 *Cas particulier, si* $\beta = 1$ *et* $\mathrm{Re}(\alpha) \geqq 0$, *alors les dérivées fractionnaires de Hadamard d'une constante, en générale, ne sont pas nulles ; en effet, on a*

$$\left(D_{a+}^{\alpha}1\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{-\alpha} \text{ et } \left(D_{b-}^{\alpha}1\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\log \frac{b}{x}\right)^{-\alpha}, \tag{1.15}$$

lorsque $0 < Re(\alpha) < 1$. D'autre part, pour $j = [Re(\alpha)] + 1$, on obtient

$$D_{a+}^{\alpha} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha-j} = 0 \text{ et } D_{b-}^{\alpha} \left(\log \frac{b}{x}\right)^{\alpha-j} = 0 \tag{1.16}$$

Nous introduisons dans ce qui suit les espaces suivants

Définition 1.3.3 *Pour tout* $n-1 < \alpha < n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, *on définit l'espace vectoriel* $C_{n-\alpha}^{\alpha}[a,b]$ *par*

$$C_{n-\alpha}^{\alpha}[a,b] = \{f \in C_{n-\alpha}[a,b],\ D_{n-\alpha}^{\alpha} f \in C_{n-\alpha}[a,b]\}. \tag{1.17}$$

Définition 1.3.4 *L'espace* $C_{\delta,n-\alpha,\gamma}^{\alpha}[a,b]$ *est défini, pour* $n-1 < \alpha \leqq n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, *et* $0 \leqq \gamma < 1$, *par*

$$C_{\delta,n-\alpha,\gamma}^{\alpha}[a,b] = \{f \in C_{n-\alpha,\log}[a,b] : D_{a+}^{\alpha} f \in C_{\gamma,\log}[a,b]\}. \tag{1.18}$$

Dans ce qui suit nous rappelons quelques résultat essentiels utiles pour notre étude.

Le premier résultat qui lie l'intégrale et la dérivée fractinnaires est d'écrit dans le théorème suivant :

Théorème 1.3.1 *Soit* $Re(\alpha) > 0$, $n = -[-\mathrm{Re}(\alpha)]$, *et* $0 < a < b < \infty$.

Si $f \in L^1(a,b)$ et $\left(I_{a+}^{n-\alpha} f\right) \in AC_\delta^n[a,b]$, alors

$$\left(I_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} f\right)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(\delta^{n-k}\left(I_{a+}^{n-\alpha} f\right)\right)(a)}{\Gamma(\alpha-k+1)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha-k}. \qquad (1.19)$$

En particulier, si $\alpha = n \in \mathbb{N}$ et $f \in AC_\delta^n[a,b]$, alors

$$\left(I_{a+}^{n} D_{a+}^{n} f\right)(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\left(\delta^{k} f\right)(a)}{k!} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{k}. \qquad (1.20)$$

Le deuxième résultat montre que I_{a+}^{α} et I_{b-}^{α} sont bornés sur $C_{\gamma,\log}[a,b]$.

Lemme 1.3.1 *Soit* $0 < a < b < \infty$, $\mathrm{Re}(\alpha) \geqq 0$, *et* $0 \leqq \mathrm{Re}(\gamma) < 1$.

(a) Si $\mathrm{Re}(\gamma) > \mathrm{Re}(\alpha) > 0$, alors les opérateurs d'intégration fractionnaire $I_{a+}^{\alpha}, I_{b-}^{\alpha}$ sont bornés de $C_{\gamma,\log}[a,b]$ vers $C_{\gamma-\alpha,\log}[a,b]$:

$$\left\|I_{a+}^{\alpha} f\right\|_{C_{\gamma-\alpha,\log}[a,b]} \leqq k_1 \|f\|_{C_{\gamma-\alpha,\log}[a,b]} \text{ et } \left\|I_{b-}^{\alpha} f\right\|_{C_{\gamma-\alpha,\log}[a,b]} \leqq k_1 \|f\|_{C_{\gamma-\alpha,\log}[a,b]},$$

où

$$k_1 = \left(\log \frac{b}{a}\right)^{\mathrm{Re}(\alpha)} \frac{\Gamma(\mathrm{Re}(\alpha))\,|\Gamma(1-\mathrm{Re}(\gamma))|}{|\Gamma(\alpha)|\,\Gamma(1+\mathrm{Re}(\alpha-\gamma))}.$$

Le troisième lemme affirme que I_{a+}^{α} est l'inverse à droite de D_{a+}^{α}.

Lemme 1.3.2 *Si* $\alpha > 0$ *et* $f \in L^p([a,b])$, $(1 \leq p \leq \infty)$, *alors*

$$D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} f(x) = f(x).$$

presque partout dans $[a,b]$.

1.4 Généralisation des intégrales et dérivées fractionnaires au sens de Hadamard

Définition 1.4.1 *Soient* $\alpha \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(\alpha) \geq 0$ *et* $\mu \in \mathbb{C}$. *On définit l'intégrale fractionnaire de type Hadamard d'ordre* α *d'une fonction* $f : [0,\infty[\to \mathbb{C}$ *par*

$$\left(I_{0+,\mu}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \left(\frac{t}{x}\right)^{\mu} \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \frac{f(t)\,dt}{t}, \quad (x > 0) \qquad (1.21)$$

et

$$\left(I_{-,\mu}^{\alpha}f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x}^{\infty}\left(\frac{x}{t}\right)^{\mu}\left(\log\frac{t}{x}\right)^{\alpha-1}\frac{f(t)\,dt}{t},\ (x>0).\tag{1.22}$$

Définition 1.4.2 *Soit $\alpha\in\mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(\alpha)\geq 0$ avec $n=[\operatorname{Re}\alpha]+1$. La dérivée fractionnaire de type Hadamard d'ordre α avec, $\mu\in\mathbb{C}$ d'une fonction $f:[0,\infty[\to\mathbb{C}$, est définie par*

$$\left(D_{0+,\mu}^{\alpha}f\right)(x)=x^{-\mu}\delta^{n}x^{\mu}\left(I_{0+}^{n-\alpha}f\right)(x)\tag{1.23}$$

où $I_{0+,\mu}^{n-\alpha}f$ et $I_{-,\mu}^{n-\alpha}f$ sont les integrales fractionnaires de type Hadamard de f d'ordre $n-\alpha$

$$\left(D_{-,\mu}^{\alpha}f\right)(x)=x^{\mu}(-\delta)^{n}x^{-\mu}\left(I_{b-,\mu}^{n-\alpha}f\right)(x)\ \ (a<x<b),$$

Lorsque $\alpha=m\in\mathbb{N}$, alors

$$\left(D_{0+,\mu}^{m}f\right)(x)=x^{\mu}\delta^{m}x^{-\mu}f(x)\ \text{ et }\ \left(D_{-,\mu}^{\alpha}f\right)(x)=x^{\mu}(-\delta)^{m}x^{-\mu}f(x),\ x>0.\tag{1.24}$$

Les exemples qui suivent illustrent les notions d'intégrales et dérivée fractionnaires des fonctions polynômes.

Exemple 1.4.1 *Soient α,β et $\mu\in\mathbb{C}$ tels que $\operatorname{Re}(\alpha)>0$*

a) Si $\operatorname{Re}(\mu+\beta)>0$, alors

$$\left(I_{0+,\mu}^{\alpha}t^{\beta}\right)(x)=(\mu+\beta)^{-\alpha}x^{\beta}\text{ et }\left(D_{0+,\mu}^{\alpha}t^{\beta}\right)(x)=(\mu+\beta)^{\alpha}x^{\beta}.\tag{1.25}$$

En particulier, si $\operatorname{Re}(\beta)>0$, alors

$$\left(I_{0+}^{\alpha}t^{\beta}\right)(x)=\beta^{-\alpha}x^{\beta}\text{ et }\left(D_{0+}^{\alpha}t^{\beta}\right)(x)=\beta^{\alpha}x^{\beta}\tag{1.26}$$

b) Si $\operatorname{Re}(\beta-\mu)<0$, alors

$$\left(I_{-,\mu}^{\alpha}t^{\beta}\right)(x)=(\beta-\mu)^{-\alpha}x^{\beta}\text{ et }\left(D_{-,\mu}^{\alpha}t^{\beta}\right)(x)=(\beta-\mu)^{\alpha}x^{\beta}.\tag{1.27}$$

En particulier, si $\operatorname{Re}(\beta)<0$, alors

$$\left(I_{-}^{\alpha}t^{\beta}\right)(x)=(-\beta)^{-\alpha}x^{\beta}\text{ et }\left(D_{-}^{\alpha}t^{\beta}\right)(x)=(-\beta)^{\alpha}x^{\beta}.\tag{1.28}$$

Les intégrales fractionnaires de Hadamard (1.5) avec $0 < a < b < \infty$ sont bien définies sur l'espace $L^p(a, b)$. Par ailleurs, les intégrales fractionnaires de type Hadamard $(1.21) - (1.22)$ sont bien définies sur $X_c^p(\mathbb{R}^+)$.

Les relations suivantes donnent la propriété du semi groupe entre les intégrales fractionnaires de Hadamard I_{a+}^{α} et $I_{0+,\mu}^{\alpha}$. Nous avons

Proprietés : Soient $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, $\mathrm{Re}(\beta) > 0$ et $1 \leqq p \leqq \infty$.

(a) Si $0 < a < b < \infty$, alors pour toute $f \in L^p(a, b)$, on a

$$I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} f = I_{a+}^{\alpha+\beta} f \text{ et } I_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\beta} f = I_{b-}^{\alpha+\beta} f. \tag{1.29}$$

(b) Si $\mu \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{R}$, $a = 0$ et $b = \infty$, alors pour toute $f \in X_c^p(\mathbb{R}^+)$,

$$I_{0+,\mu}^{\alpha} I_{0+,\mu}^{\beta} f = I_{0+,\mu}^{\alpha+\beta} f \ (\mathrm{Re}(\mu) > c) \text{ et } I_{-,\mu}^{\alpha} I_{-,\mu}^{\beta} f = I_{-,\mu}^{\alpha+\beta} f \ (\mathrm{Re}(\mu) > -c) \tag{1.30}$$

En particulier, pour $\mu = 0$, on a

$$I_{0+}^{\alpha} I_{0+}^{\beta} f = I_{0+}^{\alpha+\beta} f \ (c < 0) \text{ et } I_{-,\mu}^{\alpha} I_{-,\mu}^{\beta} f = I_{-,\mu}^{\alpha+\beta} f \ (c > 0) \tag{1.31}$$

Propriétés : Soient $\alpha \in \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{C}$ tels que $\mathrm{Re}(\alpha) > \mathrm{Re}(\beta) > 0$.

(a) Si $0 < a < b < \infty$ et $1 \leqq p \leqq \infty$, alors pour toute fonction $f \in L^p(a, b)$ on a

$$D_{a+}^{\beta} I_{a+}^{\alpha} f = I_{a+}^{\alpha-\beta} f \text{ et } D_{b-}^{\beta} I_{b-}^{\alpha} f = I_{b-}^{\alpha-\beta} f.$$

En particulier, Si $\beta = m \in \mathbb{N}$, alors

$$D_{a+}^{m} I_{a+}^{\alpha} f = I_{a+}^{\alpha-m} f \text{ et } D_{b-}^{m} I_{b-}^{\alpha} f = I_{b-}^{\alpha-m} f. \tag{1.32}$$

(b) Si $\mu \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{R}$, $a = 0$ et $b = \infty$, alors pour toute fonction $f \in X_c^p(\mathbb{R}^+)$, on a

$$D_{0+,\mu}^{\beta} I_{0+,\mu}^{\alpha} f = I_{0+}^{\alpha-\beta} f, \ \ \mathrm{Re}(\mu) > c \text{ et } D_{-,\mu}^{\beta} I_{-,\mu}^{\alpha} f = I_{-,\mu}^{\alpha-\beta} f, \ \ \mathrm{Re}(\mu) > -c \tag{1.33}$$

En particulier, Si $\beta = m \in \mathbb{N}$, alors

$$D_{0+,\mu}^{m} I_{0+,\mu}^{\alpha} f = I_{0+,\mu}^{\alpha} f, \ \ \mathrm{Re}(\mu) > c \text{ et } D_{-,\mu}^{m} I_{-,\mu}^{\alpha} f = I_{-,\mu}^{\alpha-m} f, \ \ \mathrm{Re}(\mu) > -c \tag{1.34}$$

Lorsque $\mu = 0$ et $m = \mathbb{N}$, on obtient

$$D_{0+}^{\beta} I_{0+}^{\alpha} f = I_{0+}^{\alpha-\beta} f, \ c < 0 \text{ et } D_{-}^{\beta} I_{-}^{\alpha} f = I_{-}^{\alpha-\beta} f, \ c > 0$$

$$D_{0+}^{m} I_{0+}^{\alpha} f = I_{0+}^{\alpha-m} f, \ c < 0 \text{ et } D_{-}^{m} I_{-}^{\alpha} f = I_{-}^{\alpha-m} f, \ c > 0 \tag{1.35}$$

Lemme 1.4.1 *Soient* $\operatorname{Re}(\alpha) \geqq 0$ *et* $n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1$. Si $f(x) \in AC_{\delta}^{n}[a,b]$, $(0 < a < b < \infty)$, *alors les dérivées fractionnaires de Hadamard* D_{a+}^{α} *et* D_{b-}^{α} *existent presque partout sur* $[a,b]$ *et peuvent être représentées sous la forme*

$$\left(D_{a+}^{\alpha}f\right)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left(\delta^{k}f\right)(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)} \left(\log\left(\frac{x}{a}\right)\right)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{a}^{x} \left(\log\frac{t}{x}\right)^{n-\alpha-1} \left(\delta^{n}f\right)(t)\,dt, \tag{1.36}$$

et

$$\left(D_{b-}^{\alpha}f\right)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k}\left(\delta^{k}f\right)(b)}{\Gamma(1+k-\alpha)} \left(\log\left(\frac{b}{x}\right)\right)^{k-\alpha} + \frac{(-1)^{n}}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{a}^{x} \left(\log\frac{t}{x}\right)^{n-\alpha-1} \left(\delta^{n}f\right)(t)\,dt, \tag{1.37}$$

respectivement.

En particulier, lorsque $0 < \operatorname{Re}(\alpha) < 1$, alors pour toute fonction $f \in AC[a,b]$, on a

$$\left(D_{a+}^{\alpha}f\right)(x) = \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\log\left(\frac{x}{a}\right)\right)^{-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{a}^{x} \left(\log\frac{x}{t}\right)^{-\alpha} f'(t)\,\frac{dt}{t},$$

et

$$\left(D_{b-}^{\alpha}f\right)(x) = \frac{f(b)}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\log\left(\frac{b}{x}\right)\right)^{-\alpha} - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{a}^{x} \left(\log\frac{t}{x}\right)^{-\alpha} f'(t)\,\frac{dt}{t}. \tag{1.38}$$

Nous allons considérer dans ce qui suit la transformée de Mellin des intégrales fractionnaires de type Hadamard. Nous avons

Lemme 1.4.2 *Soient* $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ *et* $\mu \in \mathbb{C}$ *et soit une fonction* f *telle que sa transformée de Mellin* $(\mathcal{M}f)(s)$ *existe pour tout* $s \in \mathbb{C}$. *Alors*

a)Si $\operatorname{Re}(\mu - s) > 0$, on a

$$\left(\mathcal{M}I_{0+,\mu}^{\alpha}f\right)(s) = (\mu - s)^{-\alpha}(\mathcal{M}f)(s).$$

En particulier, lorsque $\operatorname{Re}(s) < 0$, on obtient

$$\left(\mathcal{M}I_{0+}^{\alpha}f\right)(s) = (-s)^{-\alpha}(\mathcal{M}f)(s).$$

b)Si $\operatorname{Re}(\mu + s) > 0$, on a

$$\left(\mathcal{M}I_{-;\mu}^{\alpha}f\right)(s) = (\mu + s)^{-\alpha}(\mathcal{M}f)(s). \tag{1.39}$$

En particulier, lorsque $\mathrm{Re}(s) > 0$, on obtient

$$\left(\mathcal{M}I_{-}^{\alpha}f\right)(s) = s^{-\alpha}\left(\mathcal{M}f\right)(s). \tag{1.40}$$

La transformée de Mellin des dérivées fractionnares de type Hadamard est bornée par le résultat suivant :

Lemme 1.4.3 *Soient* $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ *et* $\mu \in \mathbb{C}$ *et soit une fonction* f *telle que sa transformée de Mellin* $(\mathcal{M}f)(s)$ *existe pour tout* $s \in \mathbb{C}$.

Si $\mathrm{Re}(\mu - s) > 0$, et $\mathcal{M}D_{0+,\mu}^{\alpha}f$ existe, alors

$$\left(\mathcal{M}D_{0+,\mu}^{\alpha}f\right)(s) = (\mu - s)^{\alpha}\left(\mathcal{M}f\right)(s). \tag{1.41}$$

En particulier, lorsque $\mathrm{Re}(s) < 0$, alors

$$\left(\mathcal{M}D_{0+}^{\alpha}f\right)(s) = (-s)^{\alpha}\left(\mathcal{M}f\right)(s). \tag{1.42}$$

Si $\mathrm{Re}(\mu + s) > 0$, et $\mathcal{M}D_{0+,\mu}^{\alpha}f$ existe, alors

$$\left(\mathcal{M}D_{0+,\mu}^{\alpha}f\right)(s) = (\mu + s)^{\alpha}\left(\mathcal{M}f\right)(s). \tag{1.43}$$

En particulier, lorsque $\mathrm{Re}(s) > 0$, alors

$$\left(\mathcal{M}D_{-}^{\alpha}f\right)(s) = s^{\alpha}\left(\mathcal{M}f\right)(s). \tag{1.44}$$

Lemme 1.4.4 *Soient* $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, $\mathrm{Re}(\beta) > 0$, *et* $0 \leqq \mathrm{Re}(\gamma) < 1$ *Les assertions suivantes ont lieu :*

(a) Si $f \in C_{\gamma,\log}[a,b]$, alors la première et la seconde relations (1.29) sont vraies pour tous $x \in (a,b]$ et $x \in [a,b)$, respectivement. Lorsque $f \in C[a,b]$, ces relations sont valables pour tout $x \in [a,b]$.

(b) Si $f \in C_{\gamma,\log}[a,b]$, alors la première et la seconde relations (1.30) sont vraies pour tous $x \in (a,b]$ et $x \in [a,b)$, respectivement. Lorsque $f \in C[a,b]$, ces relations sont valables pour tout $x \in [a,b]$.

(c) Soit $\mathrm{Re}(\alpha) > \mathrm{Re}(\beta) > 0$, $f \in C_{\gamma,\log}[a,b]$, alors la première et la seconde relations (1.32) on lieu pour tous $x \in (a,b]$ et $x \in [a,b)$, respectivement. Lorsque $f \in C[a,b]$, ces relations sont valables pour tout $x \in [a,b]$.

(d) Soit $n = [\mathrm{Re}(\alpha)] + 1$, et soient $f_{n-\alpha}(x) = I_{a+}^{n-\alpha}f(x)$ et $g_{n-\alpha}(x) = I_{b-}^{n-\alpha}g(x)$. Si $f \in C_{\gamma,\log}[a,b]$, et $f_{n-\alpha} \in C_{\delta,\gamma}^{n}[a,b]$, alors la relation (1.19) a lieu pour tout $x \in [a,b]$.

Lemme 1.4.5 *Si* $f \in C[a,b]$ *et* $f_{n-\alpha} \in C_{\delta}^{n}[a,b]$, *alors* (1.19) *a lieu pour tout* $x \in [a,b]$.

En particulier, si $f \in C_{\delta}^{n}[a,b]$, la relation (1.19) est vraie pour tout point $x \in [a,b]$.

1.5 Théorème du point fixe de Banach

Ce théorme joue un rôle fondamentale dans la preuve de l'existance et l'unicité d'un point fixe d'un certain opérateur non linéaire qui émane d'une équation différentielle fractionnaire relative à la dérivée de Hadamard qui est équivalente à un problème de Cauchy donné. Nous avons

Théorème 1.5.1 *Soit (U, d) un espace métrique non vide, et soit $0 \leqq \omega < 1$. Si $T : U \to U$ une application telle que pour tous $u, v \in U$, on a*

$$d(Tu, Tv) \leq \omega d(u, v), \tag{1.45}$$

alors l'opérateur T admet un point fixe unique $u^* \in U$.

En outre, si T^k $(k \in \mathbb{N}^*)$ est une suite d'opérateurs définie par

$$T^1 = T \text{ et } T^k = TT^{k-1}, \ (k = 2, 3...),$$

alors pour tout $u_0 \in U$, la suite $\{T^k u_0\}_{k=1}^{\infty}$converge vers l'unique point fixe u^*.

Chapitre 2

Équation différentielles fractionnaires relatives à la dérivée de Hadamard

L'objet de ce chapitre est l'étude de l'existence et l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy relative à une équation différentielle fractionnare associée à la dérivée fractionnaire de Hadamard.

Soit $\alpha > 0$ et $n = -[-\alpha]$. Considérons le problème de Cauchy ralatif à la dérivée fractionnaire de Hadamard,

$$\begin{aligned} \left(D_{a+}^{\alpha} y\right)(x) &= \left[f\left(x, y\left(x\right)\right)\right], \ x > a, \\ \left(D_{a+}^{\alpha-k} y\right)(a+) &= b_k, \ b_k \in \mathbb{R}, \ k = 1, ..., n. \end{aligned} \tag{2.1}$$

La notation $\left(D_{a+}^{\alpha-k} y\right)(a+)$ signifie que la limite est prise à droite du point a. On a

$$\left(D_{a+}^{\alpha-k} y\right)(a+) = \lim_{x \to a+} \left(D_{a+}^{\alpha-k} y\right)(x), \ \ (k = 1, ..., n-1) \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} \left(D_{a+}^{\alpha-n} y\right)(a+) &= \lim_{x \to a+} \left(I_{a+}^{\alpha-k} y\right)(x), \ \ (\alpha \neq n); \\ \left(D_{a+}^{0} y\right)(a+) &= y(a), \ \ (n = \alpha), \end{aligned} \tag{2.3}$$

où $I_{a+}^{\alpha-k}$ est l'opérateur d'intégration fractionnaire de Hadamard d'ordre $n - \alpha$ défini dans (2.4).

2.1 Equivalence du problème différentiel fractionnaire avec une équation intégrale

En utilisant les propriétés des opérateurs d'intégration et de dérivation de Hadamard donnés par (1.19) on arrive à l'équivalence du problème (2.1) avec l'équation intégrale de Volterra (2.4) ci-dessous

Définition 2.1.1 *Une fonction* $y \in C_{n-\alpha,\log}[a,b]$ *est dite solution du problème* $(2,1)$. Si *elle satisfait l'équation différontielle* $(2.1)_1$ *et les conditions initiales* $(2.1)_2$.

Théorème 2.1.1 *soient* $\alpha > 0$, $n = -[-\alpha]$ *et* $0 < \gamma < 1$. *Soit* G *un sous-ensemble ouvert de* $\mathbb{R}$ *et soit une fonction* $f : (a,b] \times G \to \mathbb{R} : f(.,y) \in C_{\gamma,\log}[a,b]$, *pour toute* $y \in G$. *Si* $y \in C_{n-\alpha,\log}[a,b]$, *alors* y *satisfait la relation* (2.1) *si, et seulement si,* y *satisfait l'équation intégrale de Volterra.*

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(n-j+1)} \left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha-j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} f(t,y(t))\frac{dt}{t}, \quad (x > a) \tag{2.4}$$

En particulier, si $0 < \alpha \leqq 1$ et $y(x) \in C_{1-\alpha,\log}[a,b]$, alors $y(x)$ satisfait le problème de Cauchy suivant

$$\begin{aligned} D_{a+}^{\alpha} y(x) &= f(x,y(x)), \\ \left(I_{a+}^{1-\alpha} y\right)(a+) &= b \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{2.5}$$

si, et seulement si, $y(x)$ satisfait l'équation intégrale suivante

$$y(x) = \frac{b}{\Gamma(\alpha)} \left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} f(t,y(t))\frac{dt}{t}, \quad (x > a), \tag{2.6}$$

Démonstration. Nous allons tout d'abord prouver la nécessité.

Soit $y \in C_{n-\alpha,\log}[a,b]$ une solution du problème (2.1).

On a $f(.,y) \in C_{\gamma,\log[a,b]}$, et la première relation problème (2.1) signifie que la dérivée fractionnaire $D_{a+}^{\alpha} y \in C_{\gamma,\log[a,b]}$, et grâce à (1.8) on a

$$D_{a+}^{\alpha} f(x) = \delta^n \left(I_{a+}^{n-\alpha} f\right)(x), \; n = -[-\alpha].$$

Appliquant le théorème 1.3.1 nous obtenons

$$I_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} y(x) = y(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{y_{n-\alpha}^{(n-j)}(a)}{\Gamma(n-j+1)} \left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha-j}, \quad (x > a) \tag{2.7}$$

et par (1.8) nous aurons

$$y_{n-\alpha}^{(n-j)}(x) = \left(x\frac{d}{dx}\right)^{n-j}\left(I_{a+}^{(n-j)-(\alpha-j)}y\right)(x) = D_{a+}^{\alpha-j}y(x). \tag{2.8}$$

utilisant cette relation et (2.1) l'équation (2.7) peut être réecrite sous la forme

$$I_{a+}^{\alpha}D_{a+}^{\alpha}y(x) = y(x) - \sum_{j=1}^{n}\frac{D^{\alpha-j}y(a^{+})}{\Gamma(n-j+1)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha-j},$$

d'où

$$y(x) = I_{a+}^{\alpha}D_{a+}^{\alpha}y(x) + \sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{\Gamma(n-j+1)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha-j}. \tag{2.9}$$

par le Lemme 1.3.1, l'intégrale $I_{a+}^{\alpha}f(t,y(t))(x) \in C_{\gamma,\log[a,b]}$ existe presque partout.

Appliquant l'opérateur $\left(I_{a+}^{\alpha}\right)$ aux deux membres de l'équation différentielle dans (2.1), utilisant (2.9) et (1.5), nous obtenons (2.4) et donc a nécessité est prouvée.

Démontrons maintenant la suffisance.

Supposons que $y(x) \in C_{\gamma,\log}[a,b]$ satisfait l'équation (2.4). Appliquant l'opérateur D_{a+}^{α}, aux deux membres de (2.4), on a d'une part

$$D_{a+}^{\alpha}y(x) = \sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{\Gamma(n-j+1)}D_{a+}^{\alpha}\left(\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\alpha-j}\right)(x) + D_{a+}^{\alpha}I_{a+}^{\alpha}f(t,y(t))(x).$$

Compte tenu de la fomule (1.16) et du Lemme 1.3.2, nous arrivons à l'équation différentielle du problème (2.1).

D'autre part, on va montrer que les conditions initiales du problème (2.1) sont satisfaites. Pour ceci, on applique l'opérateur $D_{a+}^{\alpha-k}$ $(k = 1, ..., n)$ aux deux membres de (2.4). Si $1 \leqq k \leqq n-1$, alors ,grâce à (1.5) et (1.16) et le théorème 1.3.1 (avec $f(x)$ est remplacée par $f(x, y(x))$, on obtient

$$\begin{aligned} D_{a+}^{\alpha-k}y(x) &= \sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}D_{a+}^{\alpha-k}\left(\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\alpha-j}\right)(x) + D_{a+}^{\alpha-k}I_{a+}^{\alpha}f(t,y(t))(x) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{\Gamma(k-j+1)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{k-j} + I_{a+}^{k}f(t,y(t))(x). \end{aligned}$$

d'où

$$D_{a+}^{\alpha-k}y(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(k-j+1)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{k-j}(x) + \frac{1}{(k-1)!} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{k-1} f(t, y(t)) \frac{dt}{t} \tag{2.10}$$

Si $k = n$, alors on obtient de manière similaire à (2.10)

$$D_{a+}^{\alpha-k}y(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(n-j)!} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{n-j} + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{n-1} f(t, y(t)) \frac{dt}{t} \tag{2.11}$$

Le passage à la limite, quand $x \to a$, dans la dernière relation nous donne la condition initiale de (2.1), ce qui montre la suffisance, ce qui achève la démonstration du théorème 2.1.1.

2.2 Existence et unicité de la solution du problème de Cauchy

Théorème 2.2.1 *Soient $\alpha > 0$,$n = -[-\alpha]$ et $0 \leqq \gamma < 1$. Soit G un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{C}$ et soit une fonction $f : (a, b] \times G \to \mathbb{C}$, telle que pour tout $y \in G$, $f(., y) \in C_{\gamma,\log}[a, b]$ et vérifie la condition de Lipschitz suivante :*

Il existe une constante positive $A > 0$ telle que pour tous $x \in [a, b]$ et $y_1, y_2 \in G$, on a

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqq A |y_1 - y_2| . \tag{2.12}$$

Alors il existe une solution unique y au problème de Cauchy (2.1) dans l'espace $C^{\alpha}_{\delta,n-\alpha,\gamma}[a, b]$.

En particulier, si $0 < \alpha < 1$ et $\gamma \geqq 1 - \alpha$ alors il existe une solution unique y au problème de Cauchy (2.5) dans l'espace $C^{\alpha}_{\delta,n-\alpha,\gamma}[a, b]$.

Démonstration. La preuve est basée sur le Théorème 2.1.1 et le Théorème du point fixe de Banach 1.5.1 dans l'espace $C^{\alpha}_{n-\alpha,\log}[a, x_1]$ qui est un espace métrique complet avec la distance donnée par

$$d(y_1, y_2) = \|y_1 - y_2\|_{C^{\alpha}_{\delta,n-\alpha,\gamma}[a,b]} := \max_{x\in[a,x_1]} \left| \left(\log \frac{x}{a}\right)^{n-\alpha} [y_1(x) - y_2(x)] \right| .$$

Choisissons x_1 $(a < x_1 < b)$ tel que les inégalités suivantes ont lieu :

$$\omega_1 := A \left(\log \frac{x_1}{a}\right)^{n-\gamma+\alpha} \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1+\alpha-\gamma)} < 1, \text{ pour } \gamma > \alpha,$$

$$\omega_2 := A \left(\log \frac{x_1}{a}\right)^{n-\gamma} \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1+\alpha-\gamma)} < 1, \text{ pour } \gamma \leqq \alpha.$$

On écrit l'équation (2.4) sous la forme $y(x) = (Ty)(x)$, où

$$(Ty)(x) = y_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} f(t, y(t)) \frac{dt}{t},$$

avec

$$y_0(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha-j},$$

et on applique le Théorème 1.5.1, pour montrer que, si $y \in C_{n-\alpha,\log}[a, x_1]$, alors $(Ty) \in C_{n-\alpha,\log}[a, x_1]$, et pour tous $y_1, y_2 \in C^{\alpha}_{n-\alpha,\log}[a, x_1]$, on a

$$\|Ty_1 - Ty_2\|_{C_{n-\alpha,\log}[a,x_1]} \leqq \omega_j \|y_1 - y_2\|_{C_{n-\alpha,\log}[a,x_1]}, \ 0 < \omega_j < 1, \ j = 1, 2.$$

Par conséquent, il existe une solution unique $y_0^* \in C_{n-\alpha,\log}[a, x_1]$ pour l'équation (2.4) de sorte que

$$\lim_{m\to\infty} \|y_m(x) - y(x)\|_{C_{n-\alpha,\log}[a,x_1]} = 0,$$

où $\{y_m\}_{m\geq 0}$ est définit par

$$y_m(x) := y_0(x) + \int_a^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} f\left[t, \left(T^{m-1}y\right)(t)\right] \frac{dt}{t}, \ (m \in \mathbb{N}^*).$$

Considérons l'intervalle $[x_1, x_2]$, où $x_2 = x_1 + h_1$, $h_1 > 0$ tel que $x_2 < b$. En appliquant les mêmes arguments de la preuve du théorème cité dans les pages 165-182([8]), nous pouvons montrer qu'il existe une solution unique $y = y_1^* \in C_{n-\alpha,\log}[x_1, x_2]$ de l'équation intégrale (2.4). En continuant ainsi nous pouvons obtenir pour chaque intervalle $[x_{k-1}, x_k]$ une solution unique $y = y_{k-1}^* \in C_{n-\alpha,\log}[x_{k-1}, x_k]$ de l'équation intégrale (2.4), $k = 1, ..., L$ où $x_0 = a < x_1 < ... < x_{L-1} < x_L = b$. Par conséquent, il existe une solution unique $y \in C[a, b]$ de l'équation intégrale (2.4).

Pour compléter la démonstration du théorème 2.2.1, en tenant compte de la définition 1.17, il suffit de prouver que $D^{\alpha}_{a+}y \in C_{\gamma}[a, b]$. En vertu de la preuve ci-dessus, la solution $y \in C_{n-\alpha,\log}[a, b]$ est la limite de la suite $y_m \in C_{n-\alpha,\log}[a, b]$, quand $m \to \infty$.

Nous pouvons directement montrer que

$$\lim_{m\to\infty} \left\| D^{\alpha}_{a+} y_m(x) - D^{\alpha}_{a+} y(x) \right\|_{C_{\gamma,\log}[a,b]} = 0,$$

et donc $D^{\alpha}_{a+}y \in C_{\gamma,\log}[a, b]$. ceci achève la démonstration du théorème 2.2.1.

Considéronss le problème suivant

$$\begin{aligned}\left(D_{a+}^{\alpha}y\right)(x) &= f(x,y(x)),\ (0<\alpha\leqq 1),\ a<x\leq b \\ \left(I_{a+}^{1-\alpha}y\right)\left(a^{+}\right) &= 0\end{aligned} \tag{2.13}$$

L'équation intégrale (2.6) correspondant au problème (2.13) est de la forme suivante

$$y(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}f(t,y(t))\frac{dt}{t},\ (x>a). \tag{2.14}$$

D'après le Lemme 1.3.1 (a), si $f(.,y)\in C_{\gamma,\log}[a,b]$, pour tout $y\in G$, $(0\leqq\gamma<1)$, alors le second membre de (2.14) ainsi que la solution y appartiennent à $C_{\gamma-\alpha}[a,b]$ pour $\gamma>\alpha$, et à $C[a,b]$, pour $\gamma\leqq\alpha$. Ceci est résumé dans le Théorème suivant :

Théorème 2.2.2 *Soient* $0<\alpha\leqq 1$ *et* $0\leqq\gamma<1$. *Soit* G *un sous-ensemble ouvert de* $\mathbb{C}$ *et soit une fonction* $f:(a,b]\times G\to\mathbb{C}$, *telle que pour tout* $y\in G, f(.,y)\in C_{\gamma,\log}[a,b]$.

On suppose que la condition de Lipschitz (2.12) est satisfait.

(a) Si $\gamma>\alpha$, alors le problème de Cauchy (2.13) admet une solution unique $y\in C^{\alpha}_{\delta,\gamma-\alpha,\gamma}[a,b]$.

(b) Si $\gamma\leqq\alpha$, alors le problème de Cauchy (2.13) admet une solution unique $y\in C^{\alpha}_{\delta,0,\gamma}[a,b]$.

Par analogie, nous pouvons établir le même résultat pour le problème suivant lorsque $\alpha>1$

$$\begin{aligned}\left(D_{a+}^{\alpha}y\right)(x) &= f[x,y(x)],\ (\alpha>1) \\ \left(D_{a+}^{\alpha-k}y\right)(a+) &= b_k\in\mathbb{R}\ (k=1,...,n-1;\ n=-[-\alpha]) \\ b_n &= 0,\end{aligned} \tag{2.15}$$

En voici un autre résultat intéressant

Théorème 2.2.3 *Soit* $\alpha>1, n=-[-\alpha]$. *Soit* G *un sous-ensemble ouvert de* $\mathbb{R}$ *et soit une fonction* $f:(a,b]\times G\to\mathbb{R}$, *telle que pour tout* $y\in G, f(.,y)\in C_{\gamma,\log}[a,b]$ *et satisfaite la condition de Lipschitz* (2.12)*. Alors le problème de Cauchy* (2.15) *admet une solution unique* $y\in C^{\alpha}_{\delta}[a,b]$.

En particulier, si $f(.,y)\subset C[a,b]$, pour tout $y\subset G$, alors le problème de Cauchy (2.15) admet une solution unique $y\in C^{\alpha}_{\delta}[a,b]$.

2.3 Problème de Cauchy pondéré

Considérons le problème différentiel fractionnaire non linéaire pondéré suivant :

$$\begin{aligned} \left(D_{a+}^{\alpha}y\right)(x) &= f[x,y(x)],\ \alpha < x \leq b,\ 0<\alpha<1, \\ \lim_{x\to a+}\left[\left(\log\frac{x}{a}\right)^{1-\alpha}y(x)\right] &= c,\ c\in\mathbb{R} \end{aligned} \tag{2.16}$$

Si $0<\alpha<1$, alors les résultats du Théorème 2.2.1 restent aussi vrais pour le problème (2.16)

Théorème 2.3.1 *Soient* $0<\alpha<1$ *et* γ *tels que* $\gamma \geqq 1-\alpha$. *Soit* G *un sous-ensemble ouvert de* $\mathbb{R}$. *Soit une fonction* $f:(a,b]\times G\to\mathbb{R}$, *telle que pour tout* $y\in G$, $f(.,y)\in C_{\gamma,\log}[a,b]$, *et elle satisfait la condition de Lipschitz* (2.12). *Alors il existe une solution unique* y *pour le problème de Cauchy pondéré* (2.16) *dans l'espace* $C_{\delta,1-\alpha,\gamma}^{\alpha}[a,b]$.

Considérons le problème de Cauchy pondéré avec limite nulle suivante :

$$\begin{aligned} \left(D_{a+}^{\alpha}y\right)(x) &= f[x,y(x)],\ \alpha < x \leq b,\ 0<\alpha<1, \\ \lim_{x\to a+}\left[\left(\log\frac{x}{a}\right)^{1-\alpha}y(x)\right] &= 0 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Le Théorème suivant assure l'existence et l'unicité de la solution du le problème de Cauchy pondéré (2.17).

Théorème 2.3.2 *Soient* $0<\alpha<1$ *et* $0\leqq\gamma<1$. *Soit* G *un sous-ensemble ouvert de* $\mathbb{R}$.*Soit une fonction* $f:(a,b]\times G\to\mathbb{R}$,*telle que pour tout* $y\in G$, $f(.,y)\in C_{\gamma,\log}[a,b]$ *et elle satisfait la condition de Lipschitz* (2.12).

(a) Si $\gamma>\alpha$, alors le problème de Cauchy pondéré (2.17) admet une solution unique $y\in C_{\delta,\gamma-\alpha,\gamma}^{\alpha}[a,b]$.

(b) Si $\gamma\leqq\alpha$, alors le problème de Cauchy pondéré (2.17) admet une solution unique $y\in C_{\delta,0,\gamma}^{\alpha}[a,b]$.

(c) En particulier, si $f(.,y)\in C[a,b]$, pour tout $y\in G$, alors le problème de Cauchy pondéré (2.17) admet une solution unique $y\in C_{\delta}^{\alpha}[a,b]$.

Les résultats ci-dessus peuvent être étendus à l'équation suivante qui est plus générale que celle du problème (2.1) :

$$\left(D_{a+}^{\alpha}y\right)(x) = f\left[x,y(x),\left(D_{a+}^{\alpha_1}y\right)(x),...,\left(D_{a+}^{\alpha_l}y\right)(x)\right]. \tag{2.18}$$

Théorème 2.3.3 *Soient $\alpha > 0, n = -[-\alpha]$ et $0 \leqq \gamma < 1$ tels que $\gamma \geqq n - \alpha$. Soient $l \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$ et $\alpha_j > 0$, $(j = 1, ..., l)$. Soit G sous un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^{l+1}$, et soit une fonction $f : (a, b] \times G \rightarrow \mathbb{R}$, telle que pour tout $(y, y_1, ..., y_l) \in G$, $f[x, y, y_1, ..., y_l] \in C_{\gamma,\log}[a, b]$ et vérifie la condition de Lipschitz suivante :*

Il existe une constante $A_l > 0$ telle que pour tous $x \in [a, b]$ et $(y_0, ..., y_1), (Y_0, ..., Y_1) \in G$, on a

$$|f[x, (y, y_1, ..., y_l)(x)] - f[x, (Y_0, ..., Y_1)(x)]| \leqq A_l \left[\sum_{j=0}^{l} |y_j - Y_j|\right]. \tag{2.19}$$

Alors, il existe une solution unique $y \in C^{\alpha}_{\delta,n-\alpha,\gamma}[a, b]$ satisfait l'équation différentielle fractionnaire (2.18) assujettie aux conditions initiales comme celles dans (2.1).

En particulier, si $0 < \alpha \leqq 1$ et $\gamma \geqq n - \alpha$, alors il existe une solution unique $y \in C^{\alpha}_{\delta,1-\alpha,\gamma}[a, b]$ du problème de Cauchy associé à l'équation (2.18) avec les conditins initiales

$$\begin{aligned} \left(J^{1-\alpha}_{a+} y\right)(a+) &= b \in \mathbb{R} \\ \text{et } \lim_{x \to a} \left[\left(\log \frac{x}{a}\right)^{1-\alpha} y(x)\right] &= c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Théorème 2.3.4 *Soit $\alpha > 0$ et $0 \leqq \gamma < 1$.et soit $l \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$ et $\alpha_j > 0$, $(j = 1, ..., l)$.Soit G un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^{l+1}$ et soit une fonction $f : (a, b] \times G \rightarrow \mathbb{R}$, telle que pour tout $(y, y_1, ..., y_l) \in G$, $f[x, y, y_1, ..., y_l] \in C_{\gamma,\log}[a, b]$ et la condition de Lipschitz (2.19) est satisfaite.*

(a) Si $0 < \alpha \leqq 1$ et $\gamma > \alpha$, alors il existe une solution unique $y \in C^{\alpha}_{\delta,\gamma-\alpha,\gamma}[a, b]$ pour le problème de Cauchy de l'équation (2.18) avec les conditions initiales

$$\begin{aligned} \left(J^{1-\alpha}_{a+} y\right)(a+) &= 0 \\ \text{et } \lim_{x \to a} \left[\left(\log \frac{x}{a}\right)^{1-\alpha} y(x)\right] &= 0. \end{aligned} \tag{2.20}$$

(b) Si $0 < \alpha \leqq 1$ et $\gamma \leqq \alpha$, alors il existe une solution unique $y \in C^{\alpha}_{\delta,0,\gamma}[a, b]$ pour le problème de Cauchy de l'équation (2.18) avec les conditions initiales (2.20).

(c) Si $\alpha > 1$, $n = -[-\alpha]$, alors le problème de Cauchy associé à l'équation (2.18) avec les conditions initiales

$$\begin{aligned}\left(D_{a+}^{\alpha-k}y\right)(a+) &= b_k,\ b_k\in\mathbb{C}\,(k=1,...,n-1) \\ b_n &= 0\end{aligned} \tag{2.21}$$

admet une solution unique $y\in C_\delta^\alpha\,[a,b]$.

(d) En particulier, Si pour tout $(y,y_1,...,y_l)\in G$, $f\,[x,y,y_1,...,y_l]\in C_{0,\log}\,[a,b]$,alors les problèmes de Cauchy de (a) à (c) admettent une solution unique $y\in C_\delta^\alpha\,[a,b]$.

Des théorèmes 2.2.1 à 2.3.4 nous pouvons obtenir des résultats correspondant aux problèmes de Cauchy relatifs aux équations différentielles linéaires fractionnaires. *A* titre d'exemple, d'après le théorème 2.3.3 nous déduisons le résultat suivant :

Soient $\alpha>1$, $n=-[-\alpha]$, et $0\leqq\gamma<1$ tels que $\gamma\geqq n-\alpha$. Soient $l\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$ et $\alpha_j>0$ $(j=1,...,l)$ tels que les conditions dans (2.22)

$$0=\alpha_0<\alpha_1<...<\alpha_1<\alpha \tag{2.22}$$

sont satisfaites, et soit $a_j(x)\in C\,[a,b]$, $(j=1,...,l)$ et $g(x)\in C_{\gamma,\log}^\alpha\,[a,b]$.

Alors le problème de Cauchy relatif à l'équation différentielle linéaire d'ordre α suivant

$$\left(D_{a+}^\alpha y\right)(x)+\sum_{j=1}^{l}a_j(x)\left(D_{a+}^{\alpha_j}y\right)(x)+a_0(x)\,y(x)=g(x)\,,\ x>a,$$

avec conditions initiales comme celles du probléme (2.1) admet une solution unique y dans l'espace $C_{\delta,n-\alpha,\gamma}^\alpha\,[a,b]$.

En particulier, il existe une solution unique $y\in C_{\delta,n-\alpha,\gamma}^\alpha\,[a,b]$ au probléme de Cauchy suivant

$$\begin{aligned}\left(D_{a+}^\alpha y\right)(x)+\sum_{j=1}^{l}\lambda_j(x-a)^{\beta_j}\left(D_{a+}^{\alpha_j}y\right)(x)+\lambda_j(x-a)^{\beta_j}y(x) &= g(x)\ \ (x>a) \\ \left(D_{a+}^{\alpha-k}y\right)(a+) &= b_k,\ b_k\in\mathbb{R},\ k=1,...,n \\ \text{où } \lambda_j &\in R \text{ et } \beta_j\geq 0(j=1,...,l)\end{aligned}$$

Exemple 2.3.1 *Considérons l'équation difféntielle fractionnaire non linéaire non homogène suivante d'ordre* $\alpha>0$

$$\left(D_{a+}^\alpha y\right)(x)=\lambda\left(\log\frac{x}{a}\right)^\beta y^m(x)\ \ (x>a;m>0;m\neq 1) \tag{2.23}$$

avec$\lambda,\beta\in\mathbb{R}$, $(\lambda\neq 0)$. Compte tenu de (1.13), il est facile de vérifier que,si la condition $((\beta+\alpha)/(1-m))>-1$ et satisfaite, alors l'équation (2.23) a pour une solution explicite

$$y(x)=\left[\frac{\Gamma\left(\frac{\beta+\alpha}{m-1}+1\right)}{\lambda\Gamma\left(\frac{\beta+\alpha m}{m-1}+1\right)}\right]^{1/(m-1)}\cdot\left(\log\frac{x}{a}\right)^{(\beta+1)/(m-1)}. \tag{2.24}$$

Soit

$$\gamma=\frac{\beta+m\alpha}{m-1},\ \gamma-\alpha=\frac{\beta+\alpha}{m-1}. \tag{2.25}$$

La solution ci dessus y vérifie

$$y\in C_{\gamma-\alpha}[a,b],\ \text{si } 0<\gamma-\alpha<1, \tag{2.26}$$

et on a

$$y\in C[a,b],\ \text{si } \gamma-\alpha\leqq 0. \tag{2.27}$$

Dans ce cas, le membre de droite de l'équation (2.23) prend forme

$$f(x,y(x))=\lambda\left[\frac{\Gamma\left(\frac{\beta+\alpha}{m-1}+1\right)}{\lambda\Gamma\left(\frac{\beta+\alpha m}{m-1}+1\right)}\right]^{m/(m-1)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{(\beta+\alpha m)/(1-m)}. \tag{2.28}$$

La fonction $f\in C_\gamma[a,b]$, si $0<\gamma<1$, et $f\in C[a,b]$, si $\gamma\leqq 0$. Par ailleurs,

$$f\in C_\gamma[a,b],\ \text{si } 0<\gamma=\frac{\beta+m\alpha}{m-1}<1, \tag{2.29}$$

et

$$f\in C[a,b],\ \text{si } \gamma=\frac{\beta+m\alpha}{m-1}\leqq 1. \tag{2.30}$$

En vertu des conditions (2.25), les cas suivants sont possibles pour les espaces appropriés de f et celui de la solution :

(a)-(2.29) et (2.26),
(b)-(2.29) et (2.27),
(c)-(2.30) et (2.27).

On peut directement vérifier que (2.24) est la solution explicite du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{D}^\alpha_{a+}y\right)(x)&=\lambda\left(\log\frac{x}{a}\right)^\beta y^m(x)\\ \left(J^{1-\alpha}_{a+}y\right)(a+)&=0,\ (0<\alpha<1).\end{aligned} \tag{2.31}$$

Par ailleurs, en remarquant que la condition de Lipcshitz (2.12) est satisfaite, dès que $\beta+(m-1)\omega\geqq 0$, alors, nous pouvons établir l'unicité de la solution de (2.31)et ce, en combinant entre les divers exposants intervenant dans le problème.

Chapitre 3

Système couplé d'équations différentielles fractionnaires

Dans ce chapitre, nous étudions un problèmes aux limites couplé différentielles fractionnaires non linéaires relativement à la dérivée fractionnaire de Hadamard .

3.1 Exemples d'applications des systèmes fractionnaires

Les systèmes fractionnaires apparaissent fréquemment dans les différents domaines d'apllications. Toutefois, l'intérêt progressif que l'on porte à ces systèmes et les applications en scienses de l'ingénieur reste encore un peu modeste.

3.1.1 Automatique

En automatique, peu d'auteurs on utilisé des lois de commande introduisant des dérivées fractionnaires. Podlubny a montré que la meilleure méthode pour assurer un contrôle efficace des systèmees fractionnaires est l'utilisation de contrôleurs fractionnaires. Le groupe CRONE, fondé par Oustaloup dans les années 70, a appliqué ces méthodes à de nombreux systèmes industriels : spectroscope, suspension de voitures, robot-cueilleur, charrue éléctro-hydrolique, batterie pour voitures, etc.

3.1.2 Électricité

Grâce à des expérimentales, Schmidt et Drumheller ont montré que le courant qui traverse un condensateur est proportionnel à la dérivée non entière de la tension.

3.1.3 Diffusion de la chaleur

L'exemple le plus simple de système fractionnaire est l'équation de la chaleur à une dimention spatiale, commandée aux bords En opérant un bon choix de la variable de sortie, nous obtenons un dérivateur d'ordre 1/2. A partir de ce transfert, il n'est pas compliqué de construire un système physique idéalisé qui représnte un transfert fractionnaire propre, à savoir un transfert d'ordre deux avec une dérivation d'ordre 3/2.

3.1.4 Acoustique

Pour certains instruments de musique à vent les pertes visco-thermiques peuvent être modélisées efficacement à l'aide de dérivées fractionaires temporelles.

3.2 Solution positives d'un système différentiel fractionnaire singulier

Considérons le systèmes d'équations différentielles fractionnaires non-linéaires défini par

$$\begin{cases} D^{\alpha}u(t)+\lambda f(t,u(t),v(t))=0,\ t\in(1,e),\lambda>0 \\ D^{\beta}v(t)+\lambda g(t,u(t),\ v(t))=0, \\ u^{(j)}(1)=v^{(j)}(1)=0,\ 0\leq j\leq n-2 \\ u(e)=\mu\int_1^e v(s)\frac{ds}{s},\ v(e)=v\int_1^e u(s)\frac{ds}{s}. \end{cases} \tag{3.1}$$

où D^{α}, D^{β} représentent les dérivées fractionnaires de Hadamard d'ordre $\alpha,\beta\in[n-1,n]$ et $n\geq 3, \lambda,\mu,v$ sont trois paramètres avec $0<\mu<\beta$, $0<v<\alpha$, et f,g deux fonctions continues qui peuvent être éventuellement singulières en $t=1$ et $t=e$.

Nous commençons par le lemme suivant :

Lemme 3.2.1 *Soient $x,y\in C[0.1]$ deus fonctions données.La solution (u,v) du problème aux limites suivant :*

$$\begin{cases} D^{\alpha}u(t)+x(t)=0,\ t\in(1,e),\ \lambda>0 \\ D^{\beta}u(t)+y(t)=0, \\ u^{(j)}(1)=v(1)^{(j)}=0,\ 0\leq j\leq n-2 \\ u(e)=\mu\int_1^e v(s)\frac{ds}{s},\ v(e)=\nu\int_1^e u(s)\frac{ds}{s}. \end{cases} \tag{3.2}$$

peut être représentée comme suit :

$$\begin{cases} u(t)=\int_1^e G_1(t,s)\frac{x(s)}{s}ds+\int_1^e H_1(t,s)\frac{y(s)}{s}ds \\ v(t)=\int_1^e G_2(t,s)\frac{x(s)}{s}ds+\int_1^e H_2(t,s)\frac{y(s)}{s}ds \end{cases} \tag{3.3}$$

où

$$H_1(t,s) = \frac{\mu\alpha(\log t)^{\alpha-1}(1-\log s)^{\beta-1}\log s}{(\alpha\beta-\mu\nu)\Gamma(\alpha)}, \tag{3.4}$$

$$H_2(t,s) = \frac{v\alpha(\log t)^{\beta-1}(1-\log s)^{\alpha-1}\log s}{\alpha\Gamma(\alpha)}, \tag{3.5}$$

et $G_1(t,s), G_2(t,s)$ sont données par

$$G_1(t,s) = \begin{cases} \frac{(\log t)^{\alpha-1}(1-\log s)^{\alpha-1}(\alpha\beta-\mu\nu+\mu\nu\log s)}{(\alpha\beta-\mu\nu)\Gamma(\alpha)} - \frac{(\log(t/s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \text{pour } 1 \leq s \leq t \leq e \\ \frac{(\log t)^{\alpha-1}(1-\log s)^{\alpha-1}(\alpha\beta-\mu\nu+\mu\nu\log s)}{(\alpha\beta-\mu\nu)\Gamma(\alpha)}, & \text{pour } 1 \leq t \leq s \leq e \end{cases} \tag{3.6}$$

$$G_2(t,s) = \begin{cases} \frac{(\log t)^{\beta-1}(1-\log s)^{\beta-1}(\alpha\beta-\mu\nu+\mu\nu\log s)}{(\alpha\beta-\mu\nu)\Gamma(\beta)} - \frac{(\log(t/s))^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, & \text{pour } 1 \leq s \leq t \leq e \\ \frac{(\log t)^{\beta-1}(1-\log s)^{\beta-1}(\alpha\beta-\mu\nu+\mu\nu\log s)}{(\alpha\beta-\mu\nu)\Gamma(\beta)}, & \text{pour } 1 \leq t \leq s \leq e \end{cases} \tag{3.7}$$

Démonstration. Soit (u,v) la solution du système différentiel (3.2) que nous pouvons écrire sous la forme d'équations intégrales de la forme

$$u(t) = c_{11}(\log t)^{\alpha-1} + c_{12}(\log t)^{\alpha-2} + \ldots + c_{1n}(\log t)^{\alpha-n} \tag{3.8}$$

$$-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} x(s)\frac{ds}{s} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} v(t) &= c_{21}(\log t)^{\beta-1} + c_{22}(\log t)^{\beta-2} + \ldots + c_{2n}(\log t)^{\beta-n} \\ &\quad -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} x(s)\frac{ds}{s} \end{aligned} \tag{3.10}$$

Pour $D_q^j u(0) = D_q^j v(0)$, $0 \leq j \leq n-2$, on aura $c_{in} = c_{i(n-1)} = c_{i2} = 0$, $(i = 1,2)$.
Nous en déduisons que

$$u(t) = c_{11}(\log t)^{\alpha-1} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} x(s)\frac{ds}{s}, \tag{3.11}$$

$$v(t) = c_{21}(\log t)^{\beta-1} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} x(s)\frac{ds}{s}.$$

En utilisant les conditions aux limites $u(e) = \mu\int_1^e v(s)\frac{ds}{s}$, $v(e) = v\int_1^e u(s)\frac{ds}{s}$, dans (3.11) on obtient

$$c_{11}=\mu\int_1^e v(s)\frac{ds}{s}+\int_1^e\frac{(1-\log s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}x(s)\frac{ds}{s}, \tag{3.12}$$

$$c_{21}=\nu\int_1^e u(s)\frac{ds}{s}+\int_1^e\frac{(1-\log s)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)}y(s)\frac{ds}{s}.$$

En combinant (3.11) et (3.12) on aura

$$u(t) = (\log t)^{\alpha-1}\left(\mu\int_1^e v(s)\frac{ds}{s}+\int_1^e\frac{(1-\log s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}x(s)\frac{ds}{s}\right) \tag{3.13}$$

$$-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^e\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}x(s)\frac{ds}{s}, \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned} v(t) &= (\log t)^{\beta-1}\left(\nu\int_1^e u(s)\frac{ds}{s}+\int_1^e\frac{(1-\log s)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)}x(s)\frac{ds}{s}\right)\\ &\quad -\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_1^e\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}y(s)\frac{ds}{s}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Intégrant les équations (3.13), on trouve

$$\begin{aligned}\int_1^e u(t) &= \int_1^e\left[\begin{array}{r}(\log t)^{\alpha-1}\left(\mu\int_1^e v(s)\frac{ds}{s}+\int_1^e\frac{(1-\log s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}x(s)\frac{ds}{s}\right)\\ -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^e\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}x(s)\frac{ds}{s}\end{array}\right]\frac{dt}{t}\\ &= \frac{\mu}{\alpha}\int_1^e v(s)\frac{ds}{s}+\int_1^e\frac{(1-\log s)^{\alpha-1}\log s}{\alpha\Gamma(\alpha)}x(s)ds.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_1^e v(t) &- \int_1^e\left[\begin{array}{r}(\log t)^{\beta-1}\left(v\int_1^e u(s)\frac{ds}{s}+\int_1^e\frac{(1-\log s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}y(s)\frac{ds}{s}\right)\\ -\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_1^e\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\beta-1}y(s)\frac{ds}{s}\end{array}\right]\frac{dt}{t}\\ &= \frac{v}{\beta}\int_1^e u(s)\frac{ds}{s}+\int_1^e\frac{(1-\log s)^{\beta-1}\log s}{\beta\Gamma(\beta)}y(s)ds.\end{aligned}$$

La résolution du système sur $\int_1^e u(s)\frac{ds}{s}$ et $\int_1^e v(s)\frac{ds}{s}$, nous donne

$$\int_1^e u(s)\frac{ds}{s}=\frac{\alpha\beta}{\alpha\beta-\mu\nu}\begin{pmatrix}\frac{\mu}{\alpha}\int_1^e\frac{(1-\log s)^{\beta-1}\log s}{\beta\Gamma(\beta)}y(s)\frac{ds}{s}\\ +\int_1^e\frac{(1-\log s)^{\alpha-1}\log s}{\alpha\Gamma(\alpha)}x(s)\frac{ds}{s}\end{pmatrix}, \tag{3.16}$$

$$\int_1^e v(s)\frac{ds}{s} = \frac{\alpha\beta}{\alpha\beta-\mu\nu}\begin{pmatrix} \frac{v}{\beta}\int_1^e \frac{(1-\log s)^{\alpha-1}\log s}{\alpha\Gamma(\alpha)}x(s)\frac{ds}{s} \\ +\int_1^e \frac{(1-\log s)^{\beta-1}\log s}{\beta\Gamma(\beta)}y(s)\frac{ds}{s} \end{pmatrix}.$$

La combinisons des équations (3.11), (3.12) et (3.16), nous permet d'voir les expresions de $u(t)$ et $v(t)$:

$$\begin{cases} u(t) = \int_1^e G_1(t,s)\frac{x(s)}{s}ds + \int_1^e H_1(t,s)\frac{y(s)}{s}ds, \\ u(t) = \int_1^e G_1(t,s)\frac{x(s)}{s}ds + \int_1^e H_1(t,s)\frac{y(s)}{s}ds. \end{cases}$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

Nous allons maintenant nous intéresser aux propriétés de la fonction de Green $G(t,s) = (G_1(t,s)\,; G_2(t,s))$ du problème aux limites (3.1). Nous avons

3.2.1 Propiétés de la fonction de Green $G(t,s)$

Comme les fonctions de Green interviennent dans la résolution explicite des problèmes aux limites classiques, nous les recontrerons aussi dans les problèmes aux limites fractionnaires.

En utilisant le lemme 3.2.1, nous voyons que le système (3.1) est équivalent aux deux équations intégrales suivantes :

$$\begin{cases} u(t) = \lambda\left(\int_1^e G_1(t,s)\,f(s,u(s),v(s))\,\frac{ds}{s} + \int_1^e H_1(t,s)\,g\left(s,u(s),v(s)\frac{ds}{s}\right)\right); \\ v(t) = \lambda\left(\int_1^e G_2(t,s)\,f(s,u(s),v(s))\,\frac{ds}{s} + \int_1^e H_2(t,s)\,g\left(s,u(s),v(s)\frac{ds}{s}\right)\right). \end{cases}$$

Nous énonçons quelques propriétés satisfaites par les fonctions G_1, G_2, H_1et H_2. On a

Lemme 3.2.2 *pour $t,s\in[1,e]$, les fonctions $G_1(t,s)$ et $H_1(t,s)$ définies par* $(3.4),(3.6)$ *satisfait*

$$\begin{aligned} \frac{\mu\nu}{(\alpha\beta-\mu\nu)\Gamma(\beta)}(\log t)^{\alpha-1}\rho_1(s) &\leq G_1(t,s) \leq \frac{\max\{(\alpha\beta-\mu\nu)(\alpha-1)+\mu\nu,\alpha\beta\}}{(\alpha\beta-\mu\nu)\Gamma(\alpha)}\rho_1(s) \\ \frac{\mu\nu}{(\alpha\beta-\mu\nu)\Gamma(\beta)}(\log t)^{\alpha-1}\rho_2(s) &\leq H_1(t,s) \leq \frac{\alpha\beta}{(\alpha\beta-\mu\nu)\Gamma(\beta)}\rho_2(s) \end{aligned}$$

$$G_1(t,s) \leq \frac{\max\{(\alpha\beta-\mu\nu)(\alpha-1)+\mu\nu,\alpha\beta\}}{(\alpha\beta-\mu\nu)\Gamma(\alpha)}(\log t)^{\alpha-1}$$

$$H_1(t,s) \leq \frac{\alpha\beta}{(\alpha\beta-\mu\nu)\Gamma(\beta)}(\log t)^{\alpha-1}$$

où

$$\rho_1(s) = (1-\log s)^{\alpha-1}\log s,\ \ \rho_2(s) = (1-\log s)^{\beta-1}\log s$$

De même, nous avons

Lemme 3.2.3 *Pour $t,s\in[1,e]$, les fonctions $G_2(t,s)$ et $H_1(t,s)$ définies par $(3.5),(3.7)$ satisfont*

$$\begin{aligned}
\frac{\mu\nu}{(\alpha\beta-\mu\nu)\Gamma(\beta)}(\log t)^{\beta-1}\rho_2(s) &\leq G_2(t,s)\leq\frac{\max\{(\alpha\beta-\mu\nu)(\beta-1)+\mu\nu,\alpha\beta\}}{(\alpha\beta-\mu\nu)\Gamma(\alpha)}\rho_2(s)\\
\frac{\mu\nu}{(\alpha\beta-\mu\nu)\Gamma(\alpha)}(\log t)^{\beta-1}\rho_1(s) &\leq H_2(t,s)\leq\frac{\alpha\beta}{(\alpha\beta-\mu\nu)\Gamma(\alpha)}\rho_1(s)
\end{aligned}$$

$$G_2(t,s)\leq\frac{\max\{(\alpha\beta-\mu\nu)(\alpha-1)+\mu\nu,\alpha\beta\}}{(\alpha\beta-\mu\nu)\Gamma(\beta)}(\log t)^{\beta-1}$$

$$H_2(t,s)\leq\frac{\alpha\beta}{(\alpha\beta-\mu\nu)\Gamma(\alpha)}(\log t)^{\beta-1}$$

D'après les lemmes3.2.2 et 3.2.3, pour $t,s\in[1,e]$, on a

$$\begin{aligned}
a(\log t)^{\alpha-1}\rho_1(s) &\leq G_1(t,s)\leq b\rho_1(s),\ G_1(t,s)\leq b(\log t)^{\alpha-1},\\
a(\log t)^{\alpha-1}\rho_2(s) &\leq H_1(t,s)\leq b\rho_2(s).
\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
H_1(t,s) &\leq b(\log t)^{\alpha-1},\ a(\log t)^{\beta-1}\rho_2(s)\leq G_2(t,s)\leq b\rho_2(s),\\
G_2(t,s) &\leq b(\log t)^{\beta-1},
\end{aligned}$$

$$a(\log t)^{\beta-1}\rho_1(s)\leq H_2(t,s)\leq b\rho_1(s),\ H_2(t,s)\leq b(\log t)^{\beta-1},$$

où

Body Math

$$a=\frac{\mu\nu}{(\alpha\beta-\mu\nu)\max\{\Gamma(\alpha),\Gamma(\beta)\}}$$

$$b=\max\left\{\frac{\max\{(\alpha\beta-\mu\nu)(\alpha-1)+\mu\nu,\alpha\beta\}}{(\alpha\beta-\mu\nu)\Gamma(\alpha)},\frac{\max\{(\alpha\beta-\mu\nu)(\beta-1)+\mu\nu,\alpha\beta\}}{(\alpha\beta-\mu\nu)\Gamma(\beta)}\right\}$$

3.2.2 Résultat d'existense et unicité

Dans le reste de ce chapitre,nous proposons les hypothèses suivantes :

(H$_1$) $f(t,u,v), g(t,u,v) \in C((1,e) \times [0,+\infty[\times[0,+\infty[;\mathbb{R})$; de plus, il existe deux fonctions $q_1(t), q_2(t) \in L^1([1,e],[0,+\infty])$ telles que

$$-q_1(t) \leq f(t,u,v), \quad -q_2(t) \leq g(t,u,v), \text{ pour tous } t \in (1,e), u,v \geq 0.$$

(H$_1^*$) $f(t,u,v), g(t,u,v) \in C((1,e) \times [0,+\infty[\times[0,+\infty[;\mathbb{R})$, f,g peuvent être singulières en $t=1$ ou e; de plus, il existe deux fonctions $q_1(t), q_2(t) \in L^1([1,e];[0,+\infty[)$ telles que

$$-q_1(t) \leq f(t,u,v), \quad -q_2(t) \leq g(t,u,v), \text{ pour tous } t \in (1,e), u,v \geq 0.$$

(H$_2$)

$$f(t,0,0) > 0 \text{ et } g(t,0,0) > 0, \text{ pour } t \in [1,e].$$

(H$_3$) il existe $[\theta_1,\theta_2] \subset (1,e)$ tel que

$$\lim_{u\to+\infty} \inf \min_{t\in[\theta_1,\theta_2]} \frac{f(t,u,v)}{u} = +\infty, \text{ et } \lim_{v\to+\infty} \inf \min_{t\in[\theta_1,\theta_2]} \frac{g(t,u,v)}{v} = +\infty$$

(H$_3^*$) il existe $[\theta_1,\theta_2] \subset (1,e)$ tel que

$$\lim_{v\to+\infty} \inf \min_{t\in[\theta_1,\theta_2]} \frac{f(t,u,v)}{v} = +\infty, \text{ et } \lim_{u\to+\infty} \inf \min_{t\in[\theta_1,\theta_2]} \frac{g(t,u,v)}{u} = +\infty$$

(H$_4$) $\int_1^e \rho_i(s)\, e_i(s)\, d_q s < +\infty, (i=1,2)$, $\int_1^e \rho_1(s) f(s,u,v)\, d_q s < +\infty$, $\int_1^e \rho_2(s)\, g(s,u,v)\, d_q s < +\infty$, pour tous $u,v \in [0,m]$, où m est une constante strictement positive.

L'alternative non linéaire de Leray-Scauder et le théorème du point fixe Guo-Krasnoselskii joueront un rôle remarquable dans notre prochaine analyse. Nous avons

Théorème 3.2.1 [*Leray-Schauder*] : *Soit X un espase de Banac, avec $\Omega \subset X$ convexe et fermé. Supposons U est un sous-ensemble ouvert de Ω avec $0 \in U$, et soit $S : \bar{U} \to \Omega$ une application continue et compacte. Alors, ou bien*

(a) S a un point fixe dans $\bar{U}$, ou bien

(b) il existe $u \in \partial U$ et $\lambda \in (0,1)$, avec $u = \lambda S u$.

et,

Théorème 3.2.2 [*Guo-Krasnoselskii*] : *Soit X un espace Banach ,et soit $\mathfrak{p} \subset X$ un cône dans X. Supposons Ω_1, Ω_2 sont deux ouverts de X avec $0 \in \Omega_1 \subset \bar{\Omega}_1 \subset \Omega_2$, et soit $s : \mathfrak{p} \to \mathfrak{p}$ un opérateur complatement continue tel que, ou bien*

(a) $\|Sw\| \leq \|w\|$, $w \in \mathfrak{p} \cap \partial\Omega_1$, $\|Sw\| \geq \|w\|$, $w \in \mathfrak{p} \cap \partial\Omega_2$, ou bien
(b) $\|Sw\| \geq \|w\|$, $w \in \mathfrak{p} \cap \partial\Omega_1$, $\|Sw\| \leq \|w\|$, $w \in \mathfrak{p} \cap \partial\Omega_2$,
Alors S a un point fixe dans $\mathfrak{p} \cap (\Omega_2 \backslash \bar{\Omega}_1)$.

Nous avons ce premier résultat d'existence et d'unicité :

Lemme 3.2.4 *Supposons les conditions (H_1) ou (H_1^*) sont vérifiées, le problème aux limites*

$$\begin{cases} -D^{\alpha}\omega_1(t) = \lambda q_1(t), -D^{\beta}\omega_2(t) = \lambda q_2(t),\ t \in (1,e),\ \lambda > 0 \\ \omega_1^{(j)}(1) = \omega_2^{(j)}(1) = 0,\ 0 \leq j \leq n-1 \\ \omega_1(e) = \mu \int_1^e \omega_2(s) \frac{ds}{s},\ \omega_2(e) = \nu \int_1^e \omega_1(s) \frac{ds}{s}, \end{cases}$$

a une solution unique

$$\begin{cases} \omega_1(t) = \lambda \left(\int_1^e G_1(t,s) \frac{q_1(s)}{s} ds + \int_1^e H_1(t,s) \frac{q_2(s)}{s} ds \right) \\ \omega_2(t) = \lambda \left(\int_1^e G_2(t,s) \frac{q_2(s)}{s} ds + \int_1^e H_2(t,s) \frac{q_1(s)}{s} ds \right) \end{cases} \tag{3.17}$$

qui satisfait

$$\begin{cases} \omega_1(t) \leq \lambda b (\log t)^{\alpha-1} \int_1^e (q_1(s) + q_2(s)) \frac{ds}{s},\ t \in [1,e], \\ \omega_2(t) \leq \lambda b (\log t)^{\beta-1} \int_1^e (q_1(s) + q_2(s)) \frac{ds}{s},\ t \in [1,e] \end{cases} \tag{3.18}$$

On obtient, l'espace de Banach $(E = [1,e], \|.\|_1)$ muni de la norme

$$\|(u,v)\|_1 = \|u\| + \|v\|,\ \ \|u\| = \max_{t\in[1,e]} |u(t)|,\ \ \|v\| = \max_{t\in[1,e]} |v(t)|,\ \forall (u,v) \in E$$

D'autre part, soit le cône $\mathfrak{p}$ de E

$$\mathfrak{p} = \left\{ (u,v) \in E : u(t) \geq \omega(\log t)^{\alpha-1} \|u\|,\ v(t) \geq \omega(\log t)^{\beta-1} \|v\| \right\},$$

pour $0 < \omega = a/b < 1$.

Considérons le problème aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} D^{\alpha}x(t) + \lambda \left(f(t, [x(t) - \omega_1(t)]^*, [y(t) - \omega_2(t)]^*) + q_1(t) \right) &= 0,\ \lambda > 0,\ t \in (1,e), && (3.19) \\ D^{\beta}y(t) + \lambda \left(g(t, [x(t) - \omega_1(t)]^*, [y(t) - \omega_2(t)]^*) + q_2(t) \right) &= 0,\ \lambda > 0,\ t \in (1,e), \\ x^{(j)}(1) &= y^{(j)}(1) = 0,\ 0 \leq j \leq n-1, \\ x(e) &= \mu \int_1^e y(s) \frac{ds}{s}, && (3.20) \\ y(e) &= v \int_1^e x(s) \frac{ds}{s} && (3.21) \end{aligned}$$

où la fonction modifiée $[z(t)]^*$ est définie, pour tout $z \in C[1;e]$, par $[z(t)]^* = z(t)$, si $z(t) \geq 0$, et $[z(t)]^* = 0$, si $z(t) < 0$.

Commençons tout d'abord par donner la définition d'une solution positive :

Définition 3.2.1 *Une solution (u, v) du problème aux limites (3.1) est dite positives si elle verifie $u(t) \geq \omega_1(t)$ et $v(t) \geq \omega_2(t)$, pour tout $t \in (1, e)$.*

Nous avons

Lemme 3.2.5 *Si $(x, y) \in C[1, e] \times C[1, e]$ avec $x(t) > \omega_1(t)$ et $y(t) > \omega_2(t)$, pour tout $t \in (1, e)$, est la solution positive du problème singulier (3.19), alors $(x - \omega_1, y - \omega_2)$ est utilisant une solution positive de système (3.1).*

En utilisant le lemme 3.2.1, le système (3.19) est équivalent à

$$\begin{cases} u(t) = \lambda \int_1^e G_1(t, s)\left(f\left(s, [x(s) - \omega_1(s)]^*, \ [y(s) - \omega_2(s)]^*\right) q_1(t)\right) \frac{ds}{s} \\ +\lambda \int_1^e H_1(t, s)\left(g\left(s, [x(s) - \omega_1(s)]^*, [y(s) - \omega_2(s)]^*\right) + q_2(t)\right) \frac{ds}{s}, \ t \in [1, e], \\ v(t) = \lambda \int_1^e G_2(t, s)\left(f\left(s, [x(s) - \omega_1(s)]^*, \ [y(s) - \omega_2(s)]^*\right) q_2(t)\right) \frac{ds}{s} \\ +\lambda \int_1^e H_2(t, s)\left(g\left(s, [x(s) - \omega_1(s)]^*, \ [y(s) - \omega_2(s)]^*\right) + q_1(t)\right) \frac{ds}{s}, \ t \in [1, e]. \end{cases} \tag{3.22}$$

Par une solution du système singulier (3.19), on entend une solution du système d'équation intégrales (3.22). On définit un opérateur $T : \mathfrak{p} \to \mathfrak{p}$

$$T(x, y) = (T_1(x, y), T_2(x, y)),$$

où les opérateurs $T_i : \mathfrak{p} \to C[1, e]$, $(i = 1, 2)$ sont définis par

$$T_1(x, y)(t) = \lambda \int_1^e G_1(t, s)\left(f\left(s, [x(s) - \omega_1(s)]^*, \ [y(s) - \omega_2(s)]^*\right) + q_1(t)\right) \frac{ds}{s}$$

$$+\lambda \int_1^e H_1(t, s)\left(g\left(s, [x(s) - \omega_1(s)]^*, \ [y(s) - \omega_2(s)]^*\right) + q_2(t)\right) \frac{ds}{s}, \ t \in [1, e],$$

$$T_2(t, s)(t) = \lambda \int_1^e G_2(t, s)\left(f\left(s, [x(s) - \omega_1(s)]^*, \ [y(s) - \omega_2(s)]^*\right) + q_2(t)\right) \frac{ds}{s}$$

$$+\lambda \int_1^e H_2(t, s)\left(g\left(s, [x(s) - \omega_1(s)]^*, \ [y(s) - \omega_2(s)]^*\right) + q_1(t)\right) \frac{ds}{s}, \ t \in [1, e],$$

il est clair que,si $(x; y) \in \mathfrak{p}$ est un point fixe de T, alors $(x; y)$ est une solution du système (3.19). Nous avons ce résultat :

Lemme 3.2.6 *Supposons que l'une des conditions (H_1)ou (H_1^*) a lieu, alors $T : \mathfrak{p} \to \mathfrak{p}$ est un opérateur complètement continu.*

3.2.3 Résultats principaux

Théorème 3.2.3 *Supposons que* (H_1) *et* (H_2) *sont vérifiées. Alors il existe une constante* $\lambda_* > 0$ *telle que le problème aux limites* (3.1) *a au moins une solution positive pour tout* $0 < \lambda \leq \lambda_*$.

Démonstration. Soient $\delta \in (0,1)$ et $0 < \epsilon < 1$ tels que

$$f(t,u,v) \geq \delta f(t,0,0) \text{ et } g(t,u,v) \geq \delta g(t,0,0), \text{ pour } 1 \leq t \leq e,\ 0 \leq u,v \leq \epsilon. \tag{3.23}$$

En posant

$$\bar{f}(\epsilon) = \max_{1\leq t\leq \epsilon, 0\leq u,v\leq \epsilon} \{f(t,u,v) + q_1(t)\}, \bar{g}(\epsilon) = \max_{1\leq t\leq \epsilon, 0\leq u,v\leq \epsilon} \{g(t,u,v) + q_2(t)\},$$

et $c_i = \int_1^e b\rho_i(s) \frac{ds}{s}$ $(i = 1,2)$, on obtient

$$\lim_{z\to 0} \frac{\bar{f}(z)}{z} = +\infty, \text{ et } \lim_{z\to 0} \frac{\bar{g}(z)}{z} = +\infty.$$

Supposons que $0 < \lambda < \epsilon/\left(8c\bar{h}(\epsilon)\right) := \lambda_*$.Pour $c = \max(c_1, c_2)$ et $\bar{h}(\epsilon) = \max\left(\bar{h}(\epsilon), \bar{g}(\epsilon)\right)$,

nous avons

$$\lim_{z\to 0} \frac{\bar{h}(z)}{z} = +\infty \text{ et } \frac{\bar{h}(\epsilon)}{\epsilon} < \frac{1}{8c\lambda},$$

ainsi il existe $R_0 \in (0,\epsilon)$ tel que

$$\frac{\bar{h}(R_0)}{R_0} < \frac{1}{8c\lambda}.$$

Soient

$$U = \{(u,v) \in P \left\|(u,v)\right\|_1 < R_0\},\ (u,v) \in \partial U$$

et $\theta \in (0,1)$ de manière que $(u,v) = \theta T(u,v)$, autrement dit,

$$u = \theta T_1(u,v),\ v = \theta T_2(u,v)$$

Nous affirmons que

$$\left\|(u,v)\right\|_1 \neq R_0$$

En effet,pour $(x,y) \in \partial U$ et $\left\|(u,v)\right\|_1 - R_0$, nous avons

$$\begin{aligned} u(t) &= \theta T_1(u,v)(t) \le \lambda \int_1^e b\rho_1(s)\frac{ds}{s}\bar{f}(R_0) + \lambda \int_1^e b\rho_1(s)\frac{ds}{s}\bar{g}(R_0) \\ &\le 2c\lambda\bar{h}(R_0). \end{aligned}$$

Nous avons de même

$$v(t) = \theta T_2(u,v)(t) \le 2c\lambda\bar{h}(R_0). \tag{3.24}$$

Il en résulte que $R_0 = \|(u,v)\|_1 \le 4c\lambda\bar{h}(R_0)$, d'où

$$\frac{\bar{h}(R_0)}{R_0} \ge \frac{1}{4\lambda c} > \frac{1}{8c\lambda} = \frac{\bar{h}(R_0)}{R_0},$$

ce qui implique que $\|(u,v)\|_1 \ne R_0$. En vertu de l'alternative non linéaire de Leray-Schauder, T a un point fixe $(u,v) \in \bar{U}$. De plus, la combinaison (3.23) – (3.24) et lr fait que $R_0 < \epsilon$, nous donnent

$$\begin{aligned} u(t) = \lambda \int_1^e & G_1(t,s)\left(f\left(s,[u(s)-\omega_1(s)]^*,\ [v(s)-\omega_2(s)]^*\right)+q_1(t)\right)\frac{ds}{s} \\ +\lambda \int_1^e & H_1(t,s)\left(g\left(s,[u(s)-\omega_1(s)]^*,\ [v(s)-\omega_2(s)]^*\right)+q_2(t)\right)\frac{ds}{s} \\ \ge \lambda \int_1^e & G_1(t,s)q_1(s)\frac{ds}{s} + \int_1^e H_1(t,s)q_2(s)\frac{ds}{s} = \omega_1(t), t \in [1,e], \end{aligned}$$

et de même, nous avons

$$v(t) \ge \omega_2(t), \ t \in [1,e].$$

Par conséquent, T a un point fixe positif (u,v) tel que $\|(u,v)\|_1 \le R_0 < 1$.

Soit $x(t) = u(t) - \omega_1(t) \ge 0$ et $y(t) = u(t) - \omega_2(t) \ge 0$. Alors (x,y) est une solution positive sur $(1,e)$ du problème aux limites (3.1). Ce qu'il fallait démontrer.

1) Supposons que (H_1^*) et (H_3) – (H_4) sont satisfaites,alors il existe une constante $\lambda_* > 0$ telle que le problème aux limites (3.1) a au moins une solution positive pour tout $0 < \lambda \le \lambda_*$.

2) Supposons que (H_1^*),(H_3) et (H_4) sont satisfaites, alors il existe une constante $\lambda_* > 0$ telle que le problème aux limites (3.1) a au moins une solution positive pour tout $0 < \lambda \le \lambda_*$.

3) Supposons que (H_1)-(H_3) ont lieu, alors le problème aux limites (3.1) admet au moins une solution positive pour chaque $\lambda > 0$.

4) Supposons que (H_1)-(H_2) et (H_3^*) ont lieu, alors le problème aux limites (3.1) admet au moins une solution positive pour tout $\lambda > 0$ suffisamment petit.

Nous concluons ce chapitre par ces deux exemples illustratifs :

3.3 Exemples

Exemple 3.3.1 *Considérons le système couplé d'équations différentielles fractionnaires (relativement à la dérivée de Hadamard) suivant :*

$$\begin{aligned}
D^{\alpha}u(t)+\lambda\left(u^{a}+\frac{1}{\sqrt{(1-\log t)\log t}}\cos(2\pi v)\right) &= 0,\ t\in(1,e),\lambda>0, \quad (3.25)\\
D^{\alpha}v(t)+\lambda\left(v^{b}+\frac{1}{\sqrt{(1-\log t)\log t}}\sin(2\pi u)\right) &= 0,\ t\in(1,e),\lambda>0,\\
u^{(j)}(1) &= v^{(j)}(1)=0,\ 0\le j\le n-1,\\
u(e) &= \mu\int_{1}^{e}v\frac{ds}{s}, \quad (3.26)\\
v(e) &= v\int_{1}^{e}u\frac{ds}{s}, \quad (3.27)
\end{aligned}$$

où $a,b>1$. Alors, si $\lambda>0$ est suffisamment petit, (3.25) a une solution positive (u,v) avec $u>0,v>0$ pour $t\in(1,e)$.

Nous avons ici

$$\begin{aligned}
f(t,u,v) &= u^{a}+\frac{1}{\sqrt{(1-\log t)\log t}}\cos(2\pi v)\\
g(t,u,v) &= v^{b}+\frac{1}{\sqrt{(1-\log t)\log t}}\sin(2\pi v)\\
q_i(t) &= q(t)=\frac{2}{\sqrt{(1-\log t)\log t}},\ i=1,2.
\end{aligned}$$

Il est clair que, pour $t\in(1,e)$, on a

$$\begin{aligned}
f(t,u,v)+q(t) &\ge u^{a}+\frac{1}{\sqrt{(1-\log t)\log t}}>0,\\
g(t,u,v)+q(t) &\ge v^{b}+\frac{1}{\sqrt{(1-\log t)\log t}}>0,\\
\liminf_{u\to\infty}\frac{f(t,u,v)}{u} &= +\infty,\ \liminf_{u\to\infty}\frac{g(t,u,v)}{v}=+\infty,\ t\in[\theta_1,\theta_2]\subset(1,e)
\end{aligned}$$

pour $u,v\ge 0$. Ainsi les hypothèses (H_1^{*}) et $(H_3)-(H_4)$ sont vérifées.

Soit $r=\frac{b^2}{a}\int_1^e\frac{2}{\sqrt{(1-\log t)\log t}}\frac{ds}{s}=\frac{2b^2\pi}{a}$ et $R_1=1+r$. Nous pouvons établir l'éstimation

$$\begin{aligned}
R &= \int_1^e b\rho_1(s)\left(\max_{0\leq u,v\leq R_1} f(s,u,v) + \frac{2}{\sqrt{(1-\log t)\log t}}\right)\frac{ds}{s} \\
&\quad + \int_1^e b\rho_2(s)\left(\max_{0\leq u,v\leq R_1} g(s,u,v) + \frac{2}{\sqrt{(1-\log t)\log t}}\right)\frac{ds}{s} \\
&\leq b\left(R_1^a + R_1^b + 6\pi\right).
\end{aligned}$$

Soit

$$\lambda^* = \min\left\{1, \frac{R_1}{2}(R+1)^{-1}, \frac{R_1}{2r}\right\},$$

Maintenant, si $\lambda < \lambda^*$,alors d'après la Remaque3.2.1 1) le problème (3.25) a une solution positive (u,v) avec $\|u\| \geq 1$ et $\|v\| \geq 1$.

Exemple 3.3.2 *Considérons le système couplé d'équations différentielles fractionnaires (relativement à la dérivée de Hadamard) suivant :*

$$\begin{aligned}
D^\alpha u(t) + \lambda\left(v^a + \cos(2\pi v)\right) &= 0,\ t\in(1,e), \lambda > 0, \qquad (3.28)\\
D^\alpha v(t) + \lambda\left(u^b + \cos(2\pi u)\right) &= 0,\ t\in(1,e), \lambda > 0, \\
u^{(j)}(1) &= v^{(j)}(1) = 0,\ 0\leq j\leq n-2, \\
u(e) &= \mu\int_1^e v\frac{ds}{s},\ v(e) = v\int_1^e u\frac{ds}{s}, \qquad (3.29)
\end{aligned}$$

où $a, b > 1$. Si $\lambda > 0$ est suffisamment petit, alors (3.28) a deux solutions positives $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$ avec $u_i(t) > 0, v_i(t) > 0$ pour $t \in (1,e), i = 1, 2$.

Pour (3.28), nous avons

$$f(t,u,v) = v^a + \cos(2\pi v),\ g(t,u,v) = u^b + \cos(2\pi u),\ q_1(t) = q_2(t) = q(t) = 2$$

Il est clair que,

$$\begin{aligned}
f(t,u,v) + q(t) &\geq u^a + 1 > 0,\ g(t,u,v) + q(t) \geq u^b + 1 > 0,\ \text{pour } t\in(1,e), \\
\liminf_{v\to\infty}\frac{f(t,u,v)}{v} &= +\infty,\ \liminf_{u\to\infty}\frac{g(t,u,v)}{u} = +\infty,\ t\in[\theta_1,\theta_2]\subset(1,e),
\end{aligned}$$

pour $u, v \geq 0$. Et $f(t,0,0) = g(t,0,0) = 1 > 0$, pour $t \in [1,e]$. Ainsi les hypothèses $(H_1) - (H_2)$ sont satisfaites.

Soient $\delta = 1/2$ et $\epsilon = 1/8$, $c_0 = \max\left\{\int_1^e b\rho_1(s)\frac{ds}{s}, \int_1^e b\rho_2(s)\frac{ds}{s}\right\}$

$$\begin{aligned}\bar{f}(\epsilon) &= \max_{1\leq t\leq\epsilon, 0\leq u,v\leq\epsilon}\{f(t,u,v)+e_1(t)\}\leq 8^{-a}+3\\ \bar{g}(\epsilon) &= \max_{1\leq t\leq\epsilon, 0\leq u,v\leq\epsilon}\{g(t,u,v)+e_2(t)\}\leq 8^{-a}+3\\ \bar{h}(\epsilon) &= \max\left(\bar{f}(\epsilon),\bar{g}(\epsilon)\right).\end{aligned}$$

Alors

$$\frac{\epsilon}{8c_0\bar{h}(\epsilon)}\geq\frac{1}{64c_0(1+3)}=\frac{1}{256c_0}.$$

Soit $\lambda_* = \frac{1}{256c_0}$. Maintenant, si $\lambda < \lambda_*$, alors le Théorème 3.2.3 et la Remarque 3.2.3 entrainent que (3.28) a une solution positive (u_1, v_1) avec $\|u_1\| \leq 1/8$ et $\|v_1\| \leq 1/8$.

$$R=\int_1^e b\rho_1(s)\left(\max_{0\leq u,v\leq R_1} f(t,u,v)+2\right)\frac{ds}{s}+\int_1^e b\rho_2(s)\left(\max_{0\leq u,v\leq R_1} g(t,u,v)+2\right)\frac{ds}{s},$$

et

$$\lambda_* = \min\left\{1, \frac{R_1}{2}(R+1)^{-1}, \frac{R_1}{2r}\right\}$$

Compte tenu de la Remarque 3.2.3 2), si $\lambda < \lambda^*$, alors (3.28) admet une solution positive (u_2, v_2) avec $\|u_2\| \geq 1$ et $\|v_2\| \geq 1$. Comme toutes les conditions Remarque 3.2.3 4) sont satisfaites si $\lambda < \min(\lambda_*, \lambda^*)$, alors le système couplé (3.28) possède deux solutions (u_1, v_1) et (u_2, v_2) avec $u_i(t) > 0$ et $v_i(t) > 0$, pour $t \in (1, e), i = 1, 2$.

Conclusion générale

Après avoir rappelé certaines propriétés des dérivées fractionnaires de Hadamard, nous avons étudié des problèmes de Cauchy relativement à la dérivée de Hadamard.

Nous avons ainsi établi grâce au principe de contraction de Banach l'existence et l'unicité de la solution de tels problèmes. Par ailleurs, nous avons étudié la positivité de la solution d'un système d'équations différentielles couplé relativement à la dérivée de Hadamard.En utilisant le Théorème de Krasnoselskii nous avons pu établir sous des hypothèse appropiées la positivité de la solution de ce système.

Enfin, nous avons présenté deux exemples qui illustrent et valident les résultats de positivité des solutions des deux systèmes d'équations différentielles couplés étudiés.

Bibliographie

[1] R. P. Agarwal, V. Lakshmikantham and J. J. Nieto, On the concept of solution for fractinal differentialequations with uncertaintry, Nonliear Anal. 72(2010), 2859-2862.

[2] B. Ahmad and A. Alsaedi, Existence and uniqueness of solutions for coupled systemes of higher-order nonlinear fractional differential equations, Fixed Point Theory Appl. 2010(2010), Art, ID 364560.

[3] B. Ahmad and J. Nieto, Existence of solutions for nonlocal boundary value problems of higher-order nonlinear fractional differential equations, Abstr. Appl. Anal. 2009(2009), Art. ID 494720.

[4] B Ahmad and S. K. Ntouyas, A fully Hadamard type integral boundary value problem of a coupled system of fractional equations, Fract. Calc. Appl. Anal. 17(2014), 348-360.

[5] P.L.Btzer,A.A.Kilbas and J.J.Trujillo,Fractional calculus in the Mellin setting and Hadamard-type fractional integrals, J. Math. Anal. Appl. 269(2002).

[6] Y. Cui, L. Liu and X. Zhang, Uniqueness and existence of positive solutions for singular differential systems with coupled integral boundary value problems, Abstr. Appl. Anal. 2013(2013), Art. ID 340487.

[7] C. Goodrich, Existence of a positive solution to systems of differential equations of fractional order, Comput. Math. Appl. 62, 1251-1268(2011).

[8] A. Kilbas, H. Srivastava and J. Trujillo, Theory and Aplications of Fractional Differential Equations. North-Holland Mathematics Studies 204, Jan van Mill, Elsevier 2006.

[9] Y. Li, and H.Zhang, Positive solutions for a nonlinear higher order differential system with coupled integral boundary conditions, J. Appl. Math. Math. 2014(2014), Art. ID 901094.

[10] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Academic Press, San-Diego(1999).

[11] S. G.Samko, A. A.Kilbas, and O. I.Marichev, Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications, Gordon and Breach, Yverdon, Switzerland, 1993.

[12] W. Yang, Positive solutions for singular coupled integral boundary value problems of nonlinear Hadamard fractional differential equations, 2010(2010).