République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : **EDP et Analyse numérique**

Par :

BOUANANI ZINEB

Intitulé

Existence et unicité des solutions d'une équation différentielle du troisième ordre à valeurs aux limites en trois points

Dirigé par : Meme FRIOUI ASSIA

Devant le jury

PRESIDENT	Pr: HITTA AMARA	PR	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr: FRIOUI ASSIA	MCA	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr: LAKHEL FAHIM	MCA	Univ-Guelma

Session Juin 2018

Remerciements

À la fin de ce travail, je tiens à remercier Allah, le tout Puissant, de m'avoir donné la santé, volonté et

la patience pour mener à terme ma formation de Master.

Je voudrais adresser toute ma gratitude à la directrice de ce mémoire, Mme "Frioui Assia",

pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont

contribués à alimenter ma réflexion du début à la fin.

Je remercie ma chère mère, "Zaghdouda", qui a toujours été là pour moi .

Ce travail n'aurait pas été possible sans le soutien affectueux de plusieurs personnes.

Je trouve submergé en leur offrant tous nos remercier à dédier

ce travail pour eux.

Par ailleurs, nous tenons à remercier vivement les membres de jury qui ont fait l'honneur d'accepter

de participer à notre soutenance de ce mémoire et de tous les enseignants du département de mathématiques.

Dédicace

Je tiens à dédier ce modeste travail à la fleur de ma vie ma mère "Zaghdouda",

A son plus grand amour, soutien et de l'aide continue pendant mes années d'études,

et aussi à l'esprit de mon père "Djeloul" qu'Allahlui fasse miséricorde.

Ce travail est également dédié à:

Tous mes sœurs Salwa, Nadjiba, Fatima et mes frères Hossin, Mohamed, Nabil

et tous leurs enfants sans exception.

Mon encadreur Mme Frioui Assia.

Mes dédicaces vont tendrement à mes chères amies:

Iman, Ahlam, Amina, Hasna, Faten, Hadjar, Sihem, Basma, Chrifa, Kawther

et tous les étudiants du département de mathématique.

En fin Je dédie cette note à tous ceux qui ont participé à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Résumé

L'objectif de ce mémoire s'inscrit dans l'étude de l'existence et l'unicité des solutions d'un problème à valeurs aux limites en trois points généré par une équation différentielle ordinaire du troisième ordre suivante :

$$(1.1)\begin{cases} u''' + f(t,u) = 0, \quad 0 < t < 1 \\ u(0) = \alpha u(1)\ ,\ u'(1) = \beta u'(\eta)\,, u'(0) = 0 \end{cases}$$

où $\eta \in (0,1)$, et α, β deux paramètres tels que $(1-\alpha)(1-\beta\eta) \neq 0$,et $f : [0,1]\times\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donnée vérifiant certaines hypothèses. Nous établissons des conditions suffisantes permettant d'obtenir l'éxistence et l'unicité des solutions en utilisant l'alternative non-linéaire de Leray-Schauder et le principe de contraction de Banach lorsque f est une fonction de carathéodory puis lorsque $f \in C([0,1]\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ .Comme applications les résultats sont illustrés par des exemples.

0.1 Introduction

Les problèmes aux limites en trois points ont connu un essor considérable et sont devenus un important sujet de recherche. Ceci est dû au fait que de nombreux phénomènes physiques peuvent être modélisés par des équations differentielles ordinaires aux conditions non locales. En revanche les problèmes liés aux conditions non locales ont beaucoup d'applications dans de nombreux problèmes tels que la dynamique des populations, le processus de conduction de la chaleur, la théorie du contrôle, etc. L'intêret porté sur l'introduction de ce type de conditions et que ses dernières peuvent améliorer les caractéristiques qualitatives et quantitatives du problème ce qui conduit à de bons résultats concernant l'existence et l'unicité de la solution. C'est dans ce contexte, que ce mémoire s'inscrit et l'objectif est donc l'étude de l'existence et l'unicitè des solutions d'un problème aux limites associé à une équation différentielle non linéaire d'ordre trois à conditions aux limites en trois points suivant :

$$(1.1)\begin{cases} u''' + f(t,u) = 0, & 0 < t < 1 \\ u(0) = \alpha u(1) \ , \ u'(1) = \beta u'(\eta), u'(0) = 0 \end{cases}$$

où $\eta \in (0,1)$, $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée vérifiant certaines hypothèses qui seront précisées plus tard et α , β deux paramètres tels que $(1-\alpha)(1-\beta\eta) \neq 0$.

L'idée général du travail consiste donc à transformer le problème aux limites (1.1) en un problème de point fixe. Au fait la théorie du point fixe se révèle être un outil trés important dans l'étude de ce type d'équations, plus particulièrement et en se basant sur l'alternative non linéaire de Leray- Schauder et le principe de contraction de Banach, nous proposons d'étudier alors l'éxistence et l'unicité de solutions non triviales du problème (1.1) lorsque f est une fonction de carathéodory, ensuite on éxamine le cas où $f \in C([0,1] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ où nous n'imposons aucune condition de monotonicité sur f mais nous supposons que $f(t,0) \neq 0$ et qu'ils existent deux fonctions positives $k, h \in L^1([0,1], \mathbb{R}_+)$ telles que

$$|f(t,x)| \leq k(t)|x|^p + h(t), \text{ où } p > 0, \ (t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R}.$$

Ce mémoire est organisé comme suit :

Chapitre 1 : Nous présentons dans ce chapitre quelques notations et définitions fondamentales concernant les opérateurs compacts et leurs propriétés ainsi que le théorème d'Ascoli-Arzela.

Chapitre 2 : Ce chapitre est dédié à quelques théorèmes de point fixe tels que le théorème de Banach, Brouwer, de Schauder et notamment l'alternative non linéaire de Leray- Schauder et le principe de contraction de Banach.

Chapitre 3 : Ce dernier est consacré entièrement à l'étude du problème aux limites (1.1) qui porte sur l'éxistence et l'unicité des solutions non triviales.

Chapitre 1

Rappels et notions fondamentales

1.1 Notations et définitions

- $L^2(\Omega)$: L'espace de classe des fonctions à carrées intégrables.
- $C(X,Y)$: L'ensemble des fonctions continues de X dans Y.
- $L(X,Y)$: L'ensemble des opérateurs linéaires de X dans Y.
- $K(X,Y)$: L'ensemble de tout les opérateurs compacts de X dans Y.
- $\overline{\Omega}$: L'adhérence de Ω.
- $\partial\Omega$: La frantière de Ω.
- $B_r(0,r)$:La boule borné de centre 0 et de rayon r.

Définition 1.1 *[2]Une équation différentielle ordinaire, également notée EDO, d'ordre n est une relation entre la variable réelle t et ses dérivées au point t définie par*

$$F\left(t,x,x',......x^n\right)=0 \tag{1.2}$$

où

$$F:U\subset[0,1]\times\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}$$

x^n répresente la dérivée d'ordre n de x par rapport à t.

· *L'ordre d'une* ***EDO*** *est défini comme le plus grand ordre de dérivation présent dans l'équation* (1.2) *c'est à dire* n.

· *La variable* t *représente en général le temps dans les équations qui modilisent un processus d'évolution en temps.*

Conditions aux limites

Une équation différentielle seule n'a que peu de sens sans la donnée des conditions aux limites. Deux grands types de conditions aux limites peuvent être donnés pour les **EDO** qui conduisent aux problèmes à valeurs initiales ou problème de Cauchy, soit aux problèmes à valeurs aux limites.

1.2 Espaces Fonctionnels

1.2.1 Définitions (Rappels)

Commençons par rappeler la définition d'un espace vectoriel normé.

Définition 1.2 *(Espace vectoriel normé)*

Nous considérerons des espaces vectoriels sur le corp $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. *Une norme sur l'espace vectoriel* E *est une application* $\|.\| : E \to \mathbb{R}^+$ *vérifiant pour tout* x, y *dans* E *et* α *dans* $\mathbb{k}$

i) $\|x\| = 0$ *si seulement si* $x = 0$.

ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Tout espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé.

Exemple 1.1 *Soit* $C([a, b], \mathbb{R})$, *l'espace vectoriel des fonctions continues sur* $[a, b]$ *à valeurs réelles.*

Pour tout $f \in C([a, b], \mathbb{R})$, *on pose*

$$\|f\|_1 = \int_a^b f(x)\, dx \quad et \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

Les applications $\|.\|_1$ *et* $\|.\|_\infty$ *sont des normes sur* $C([a,b],\mathbb{R})$.

Définition 1.3 *(Espace métrique complet)*

On dit que E *est un espace métrique complet si toute suite de Cauchy de* E *converge dans* E.

Définition 1.4 *(Espace de Banach)*

Tout espace vectoriel normé complet est appelé espace de Banach.

Exemple 1.2 $(C([a,b],\mathbb{R}),\|.\|_\infty)$ *est un espace de Banach.*

Définition 1.5 *(Espace* $C[a,b]$*)*

Des fonctions continues sur $[a,b]$*, de norme* $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$.

Définition 1.6 *(Espace* $C^k[a,b]$ *)*

Des fonctions k *fois continument dérivables sur* $[a,b]$*, de norme* $\|x\| = \sum\limits_{i=0}^{k} \max |x^i(t)|$, *telle que* $x^0(t) = x(t)$.

1.2.2 Espaces $L^p(\Omega)$

Définition 1.7 *(Espaces* $L^1(\Omega)$*)*

Soit Ω *un ouvert de* R^n*, on désigne par* $L^1(\Omega)$ *des fonctions intégrable sur* Ω *à valeur dans* R*, on pose*

$$\|f\|_1 = \int_\Omega |f(x)|\, dx$$

Définition 1.8 *Soit* $1 \leq p \leq +\infty$*, on pose*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}, f \text{ mesurable et } |f(x)|^p \in L^1(\Omega) \right\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = \infty$, on a $L^{\infty}(\Omega)$ est l'espace des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable, vérifiant

$$\exists c > 0 \text{ telle que } |f(x)| < c, \quad p.p. \text{ sur } \Omega.$$

La norme est notée par

$$\|f\|_{L^{\infty}} = \|f\|_{\infty} = \inf\{c > 0, |f(x)| \leq c, \ p.p. \text{ sur } \Omega.\}$$

1.3 Quelques propriétés

Définition 1.9 *(Espace de Hilbert)*

Un espace de Hilbert est espace vectoriel muni d'un produit scalaire, et qui est complet pour la norme associée à ce produit scalaire.

Théorème 1.1 *[1] $L^{p}(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{L^{p}(\Omega)}$ est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq \infty$.*

Remarque 1.1 *En particulier lorsque $p = 2$, $L^{2}(\Omega)$ muni du produit scalaire*

$$\langle f.g \rangle_{L^{2}(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x)\, g(x)\, dx$$

est un espace de Hilbert.

Théorème 1.2 *(Fubini)*

Si $f : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors les intégrales

$$\int_{c}^{d} \left(\int_{a}^{b} f(x,t)\, dx \right) dt \quad \text{et} \quad \int_{a}^{b} \left(\int_{c}^{d} f(x,t)\, dt \right) dx$$

existent et sont égales.

1.4 Notions sur les opérateurs

1.4.1 Les opérateurs linéaires bornés

Définition 1.10 *Soient X et Y deux espaces normés, un opérateur A défini sur X dans Y et dite linéaire s'il vérifie les conditions suivantes :*

pour tout u, v dans X et α, β dans $\mathbb{R}$

i) $Au \in Y$.

ii) $A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av$.

Définition 1.11 *Un opérateur linéaire A défini sur X dans Y et dite borné s'il existe une constante positive C, telle que :*

$$\|Au\|_Y \leq C \|u\|_X \,, \forall u \in X.$$

Définition 1.12 *Soit $(E, \|.\|)$ un espace de Banach , et soit $M \subset E$. Une application $T : M \to M$, est dite continue sur M, si pour toute suite $\{x_n\}$ de M;*

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0 \text{ entraine que } \lim_{n\to\infty} \|Tx_n - Tx\| = 0$$

Proposition 1.1 *Le plus petit de nombres C vérifiant cette inégalité s'appelle norme de l'opérateur et se note $\|A\|$, on a*

$$\|A\| = \sup_{\|u\|\leq 1} \|Au\| = \sup_{u\neq 0} \frac{\|Au\|}{\|u\|}$$

Proposition 1.2 *Soient X et Y deux espaces normés et $T : X \to Y$ un opérateur linéaire, les proprietés suivantes sont équivalentes*

i) L'opérateur T est continu sur X.

ii) L'opérateur T est continu au point 0.

iii) L'opérateur T est borne.

1.4.2 Opérateurs compacts

Définition 1.13 *Soit U un ensemble d'un espace normé X, U est dit compact si de tout recouvrement de U par des ouverts de U on peut extaire un sous-recouvrement fini i.e.*

$$\forall V_j, j \in J\,(ouvert);\ U \subset \bigcup_{j\in J} V_j, \exists V_{j(k)},\ j(k) = 1, 2, ..., n \text{ tel que } U \subset \bigcup_{k=0}^{n} V_j\,(k)$$

Définition 1.14 *Un sous ensemble d'un espace normé est dit relativement compact si son adhérence est compacte.*

Définition 1.15 *[3] Soit T un opérateur d'un espace normé X dans un espace normé Y, on dit que T est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné dans X à un ensemble relativement compact dans Y .*

Définition 1.16 *L'opérateur T est compact, si et seulement si pour toute suite bornée $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset X$, la suite $\{Tx_n\}_{n\geq 1}$ admet que sous suite convergente dans Y .*

Définition 1.17 *(Opérateur complètement continu)*

L'opérateur T est dite complètement continu, si il est continu et compact.

Définition 1.18 *Une famille de fonctions $F \subset C(X, R)$ est dite uniformément bornée s'il existe $M > 0$ telle que :*

$$|u(x)| \leq M, \quad \forall x \in X, \quad \forall u \in F.$$

Définition 1.19 *Soit (X, d) un espace métrique donné, une famille de fonctions $F \subset C(X, R)$ est dite équicontinue si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon \in X, \exists \delta > 0 : \forall (x, y) \in X^2, d(x, y) < \delta, \forall u \in F, \text{ on } a : |u(x) - u(y)| < \varepsilon.$$

Théorème 1.3 *[1] (Ascoli-Arzela)*

Soit X un espace métrique complet, alors une famille de fonctions $F \subset C(X,R)$ est relativement compact si et seulement si :

1) F est uniformément bornée.

2) F est équicontinue sur X.

Théorème 1.4 *Soit T un opérateur borné de X dans Y , à image $T(X)$ de dimension finie. Alors T est compact.*

Théorème 1.5 *Un opérateur compact est un opérateur borné, la réciproque est fausse.*

Preuve. En effet, si on désigne par

$$B(0,1) = \{x \in X, \|x\| \leq 1\},$$

alors $T(B(0,1))$ est relativement compact d'ou

$$\|Tx\| \leq C, \forall x \in B(0,1).$$

Alors T est borné.

Réciproquement, l'opérateur indentique I de X dans X est borné, mais il n'est pas compact car $I(B(0,1)) = B(0,1)$, n'est pas relativement compacte sauf si X est de dimension finie. ■

Remarque 1.2 *Tout opérateur linéaire compact est continu*

La condition de compacité est généralement utilisée sous la forme :

Pour toute suite bornée $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$, il existe une sous suite $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ telle que Tx_{n_k} converge.

Chapitre 2

Existence et unicité de solutions pour le problème (1.1) et théorèmes de point fixe

2.1 Quelques propriétés

Dans ce chapitre nous allons donner quelques résultats concernant les théorèmes de point fixe de Brouwer, de Schauder, L'alternative non linéaire de Leray-Schauder et le principe de contraction de Banach où ces deux derniers sont utilisés pour prouver l'existence et l'unicité des solutions du problème (1.1).

Nous allons présenter maintenent les théorèmes du point fixe pour une application continue dans les espaces de Banach en dimension finie et infinie. En particulier, nous présentons les théorèmes de Brouwer et Schauder.

Définition 2.1 *Soit T une application d'un ensemble X dans lui même. On appelle point fixe tout point $x \in X$ tel que .*

$$T(x) = x.$$

Définition 2.2 *Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach ; $T : E \rightarrow E$ une application .*

on dit que T est Lipschitzienne de constante $k \geq 0$ sur E si : $\|Tx - Ty\| \leq k \|x - y\|$.

· *Si* $k = 1$ *: On dit que T est contractante .*

· *Si* $k < 1$ *: On dit que T est strictement contractante .*

2.2 Théorème du point fixe de Brouwer

le théorème du point fixe de Brouwer est un résultat de topologie algébrique. Il fait partie de la grande famille des théorèmes du point fixe. Il existe plusieurs formes de ce théorème selon le contexte d'utilisation. Ce théorème donne l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur une boule fermée dans un espace de dimension finie.

Théorème 2.1 *[8] Soit K une partie non vide, compacte et convexe de $\mathbb{R}^n$ et $T : M \to M$ une application continue. Alors il existe $x \in K$ tel que $T(x) = x$.*

Les parties compactes et convexes de $\mathbb{R}$ sont les segments. Le théorème de Brouwer prend donc dans le cas $n = 1$ la forme particulière suivante :

Théorème 2.2 *Si $T : [a, b] \to [a, b]$ est continue, alors il existe $x \in [a, b]$ tel que $T(x) = x$.*

Preuve. Si T est continue de $[a, b]$ dans lui même, la fonction $g \to T(x) - x$ est continue, et prend en a la valeur $T(a) - a \geq 0$ et en b la valeur $T(b) - b \leq 0$. Alors par le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction g s'annule en un point x_0, qui est un point fixe de T. ∎

De même dans le plan, Les parties compactes et convexes sont les disques fermés ou bien les boules fermées, la forme du théorème de Brouwer prend la forme suivante :

Théorème 2.3 *Toute application T continue du disque férmé dans lui-même admet au moins un point fixe.*

2.3 Théorème du point fixe de Schauder

Ce théorème prolonge le résultat du théorème de Brouwer pour monter l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach. Le théorème du point fixe de Schauder est plus topologique, est affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique.

Et nous avons le résultat suivant :

Théorème 2.4 *[4](Premier théorème de Schauder)*
K un sous-ensemble non vide, compact, convexe dans un espace de Banach X et supposons $T : K \to K$ une application continue. Alors T admet un point fixe.

Théorème 2.5 *[4] (Deuxième théorème de Schauder)*
M une partie non vide et convexe d'un espace normé X et soit $T : M \to K$ une application continue, ou K est un sous-ensemble compact de M. Alors T possède un point fixe dans K.

2.4 L'alternative non linéaire de Leray-Schauder

Théorème 2.6 *[5] (L'alternative non linéaire)*

Soit X un espace de Banach et Ω sous-ensemble borné , ouvert de X tel que $0 \in \Omega$. Soit $T : \overline{\Omega} \to X$ est un opérateur complètement continue, alors :

i) Où bien il existe $x \in \partial\Omega$, $\lambda > 1$ telle que $T(x) = \lambda x$

ii) Où bien il existe un point fixe $x^* \in \overline{\Omega}$ de T.

Théorème 2.7 *[5](L'alternative de Leray-Schauder)*
$T : X \to X$ un opérateur complètement continu.
$\epsilon(T) = \{x \in X \setminus T(x) = \lambda x,$ pour tout $\lambda > 1\}$.
l'ensemble $\epsilon(T)$ est non borné, ou T admet un point fixe.

2.5 Principe de contraction de Banach

Le théorème de point fixe de Banach dit aussi principe de l'application contractante est à la base de la théorie du point fixe. Ce principe garantit l'existence d'un unique point fixe pour toute application contractante d'un espace métrique complet dans lui même.

Théorème 2.8 *soit (M,d) un espace métrique complet et soit $T : M \to M$ une application contractante,*

i.e qu'il existe $0 < k < 1$ telle que

$$d\left(T(x),T(y)\right) \leq k\ d(x,y);\ \forall x,y \in M$$

alors T admet un point fixe $x^* \in M$, de plus pour tout $x \in M$ on a :

$$\lim_{n\to\infty} T^n(x) = x^*$$

et

$$d\left(T^n(x),x^*\right) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x,T(x)).$$

Preuve. (a) Unicité Supposons qu'il existe $x,y \in M$ tel que

$$x = T(x)$$

et

$$y = T(y)$$

Alors

$$d(x;y) = d(T(x),T(y)) < kd(x,y).$$

Par conséquent

$$d(x,y) = 0$$

ce qui entraine

$$x = y$$

(b) Existence Soit $x \in M$, nous allons établir que $\{T^n(x)\}$ est une suite de Cauchy.

Pour tout $n \in N$, on a :

$$d(T^n(x), T^{n+1}(x)) \leq kd(T^{n-1}(x), T^n(x)) \leq ...... \leq k^n d(x, T(x))$$

Ainsi, pour $m > n$, où $n > 0$ on a

$$\begin{aligned} d(T^n(x), T^m(x)) &\leq d(T^n(x), T^{n+1}(x)) + d(T^{n+1}(x), T^{n+2}(x)) + ... + d(T^{m-1}(x), T^m(x)) \\ &\leq k^n d(x, T(x)) + ... + k^{m-1} d(x, T(x)) \\ &\leq k^n d(x, T(x))[1 + k + k^2 + ... + k^{m-n-1}] \\ &= \frac{k^n - k^m}{1-k} d(x, T(x)) \end{aligned}$$

Ainsi pour $m > n$, $n > 0$,

$$d(T^n(x), T^m(x)) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, T(x)) \qquad (1)$$

Ceci montre que$\{T^n(x)\}$est une suite de Cauchy et comme M est espace complet, alors il existe $x^* \in M$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} T^n(x) = x^*$$

De plus, la continuité de T entraine que

$$a = \lim_{n\to\infty} T^{n+1}(x) = \lim_{n\to\infty} T(T^n(x)) = T(a)$$

par conséquent, x^* est un point fixe de T. Ainsi si $m \to \infty$ dans (1) alors

$$d(T^n(x), x^*) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, T(x))$$

donne un résultat dans ce sens ■

Exemple 2.1 *Considérons l'application* $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $T(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$, *alors* T *une contraction avec* $0 < k = \frac{1}{2} < 1$, *et admet comme point fixe* $x = 1$ *de plus* $\lim \{T^n(x)\}_{n=1}^{\infty} = 1$

Remarque 2.1 *Les conditions du théorème sont nécessaires, pour s'en convaincre considérons les exemples suivants :*

Exemple 2.2 $T : [0,1] \to \mathbb{R}$, $T(x) = \frac{x}{2} + 1$, *est contractante mais n'admet pas de point fixe. Le problème est que* $T([0,1]) \nsubseteq [0,1]$ *et on ne peut pas itérer :* $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1.5$, *mais* x_3 *n'est pas défini !*

Exemple 2.3 $T :]0,1] \to]0,1]$, $T(x) = \frac{x}{2}$, *est contractante et vérifie* $T(]0,1]) \subset]0,1]$ *mais n'admet pas de point fixe. Le problème est que* $]0,1]$ *n'est pas fermé :* $\lim u_n = 0$ *n'est pas contenue dans* $]0,1]$.

Exemple 2.4 $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T(x) = x + \frac{1}{1+e^x}$ *vérifie* $|T(x) - T(y)| < |x - y|$ *pour tout* $x \neq y$, *mais n'admet pas de point fixe. Le problème est que* T *n'est pas contractante, et pour tout* $x_0 \in \mathbb{R}$ *on obtient* $x_n \to +\infty$.

2.6 Solution du problème (1.1)

Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$, muni de la norme $\|y(t)\| = \max_{t\in[0,1]} |y(t)|$, $\forall\ y \in E$.

L'idée générale du travail consiste à transformer le problème aux limites (1.1) en un problème de point fixe. Pour commencer et pour mieux encadrer la suite étudions un problème auxilliaire donné par le lemme préliminaire suivant :

Lemme 2.1 *soit* $y \in E$, *si* $\zeta = (1-\alpha)(1-\beta\eta) \neq 0$, *alors le problème aux limites*

$$\begin{cases} u''' + y(t) = 0, \quad 0 < t < 1 \\ u(0) = \alpha u(1) \ , \ u'(1) = \beta u'(\eta), u'(0) = 0 \end{cases}$$

admet une solution unique

$$u(t) = -\frac{1}{2}\int_0^t (t-s)^2 y(s)\,ds - \frac{\beta}{2\zeta}\left(t^2(1-\alpha)+\alpha\right)\int_0^\eta (\eta - s)\,y(s)\,ds$$

$$+\frac{1}{2\zeta}\int_0^1 (1-s)\left(t^2(1-\alpha)+\alpha\beta\eta(1-s)+\alpha s\right)y(s)\,ds.$$

Preuve. On intègre trois fois l'équation suivante :

$$u''' + y(t) = 0$$

on obtient

$$u''(t) = -\int_0^t y(s)\,ds + C_1.$$

$$u'(t) = -\int_0^t \left(\int_0^x y(s)\,ds\right)dx + C_1 t + C_2,$$

$$u'(t) = -\int_0^t (t-s)\,y(s)\,ds + C_1 t + C_2,$$

$$u(t) = -\frac{1}{2}\int_0^t (t-s)^2 y(s)\,ds + C_1\frac{t^2}{2} + C_2 t + C_3,$$

Cherchons C_1, C_2 et C_3

de

$$u'(0) = 0$$

on a

$$C_2 = 0$$

de

$$u'(\eta) = -\int_0^\eta (\eta - s)y(s)\,ds + \eta C_1 + C_2$$

et

$$u'(1) = -\int_0^1 (1 - s)y(s)\,ds + C_1 + C_2 = \beta u'(\eta)$$

ona

$$C_1 = -\frac{\beta}{1-\beta\eta}\int_0^\eta (\eta - s)y(s)\,ds + \frac{\beta}{1-\beta\eta}\int_0^1 (1 - s)y(s)\,ds + (\beta - 1)\,C_2.$$

on remplace C_2 dans C_1 on trouve

$$C_1 = -\frac{\beta}{1-\beta\eta}\int_0^\eta (\eta - s)y(s)\,ds + \frac{\beta}{1-\beta\eta}\int_0^1 (1 - s)y(s)\,ds$$

de

$$u(1) = -\frac{1}{2}\int_0^1 (1-s)^2\,y(s)\,ds + \frac{C_1}{2} + C_2 + C_3$$

et

$$u(0) = C_3 = \alpha u(1),$$

alors,on a

$$C_3 = -\frac{\alpha}{2(1-\alpha)}\int_0^1 (1-s)^2\,y(s)\,ds + \frac{\alpha}{2(1-\alpha)}C_1 + \frac{\alpha}{1-\alpha}C_2,$$

on remplace C_1 et C_2 dans C_3 on trouve

$$C_3 = -\frac{\alpha(1-\beta\eta)}{2\zeta}\int_0^1 (1-s)^2\,y(s)\,ds - \frac{\alpha\beta}{2\zeta}\int_0^\eta (\eta - s)y(s)\,ds + \frac{\alpha}{2\zeta}\int_0^1 (1 - s)y(s)\,ds$$

avec $\zeta = (1-\alpha)(1-\beta\eta) \neq 0$;

en remplaçant C_1 , C_2 et C_3 dans

$$u(t) = -\frac{1}{2}\int_0^t (t-s)^2\,y(s)\,ds + C_1\frac{t^2}{2} + C_2 t + C_3,$$

on obtient

$$
\begin{aligned}
u(t) &= -\frac{1}{2}\int_0^t (t-s)^2 y(s)\,ds - \frac{\beta}{2\zeta}\left(t^2(1-\alpha)+\alpha\right)\int_0^\eta (\eta-s)\,y(s)\,ds \\
&\quad +\frac{1}{2\zeta}\int_0^1 (1-s)\left(t^2(1-\alpha)+\alpha\beta\eta(1-s)+\alpha s\right) y(s)\,ds.
\end{aligned}
$$

■

Définissons l'opérateur intégral $T : E \rightarrow E$, par

$$
\begin{aligned}
Tu(t) &= -\frac{1}{2}\int_0^t (t-s)^2 f(s,u(s))\,ds \\
&\quad -\frac{\beta}{2\zeta}\left(t^2(1-\alpha)+\alpha\right)\int_0^\eta (\eta-s)\,f(s,u(s))\,ds \\
&\quad +\frac{1}{2\zeta}\int_0^1 (1-s)\left(t^2(1-\alpha)+\alpha\beta\eta(1-s)+\alpha s\right) f(s,u(s))\,ds.
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

En accord avec le lemme 2.1, le problème (1.1) a une solution si et seulement si l'opérateur T admet un point fixe dans E. Pour ce faire, nous prouvons deux résultats, le premier est un résultat d'unicité basé sur le principe de contraction de Banach où nous montrons que T est une contraction. Le deuxième est un résultat d'éxistence basé sur l'alternative non linéaire de Leray-Schauder où nous prouvons par le théorème d'Ascolie-Arzela que T est un opérateur complètement continu.

Chapitre 3

Solutions non triviales du probleme aux limites (1.1)

3.1 Existence et unicité

Dans toute cette section, pour établir nos résultats d'éxistence nous supposons la fonction $f : [0,1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory c'est à dire une fonction vérifiant les hypothèses suivantes :

(i) $t \rightarrow f(t,x)$ est mesurable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(ii) $x \rightarrow f(t,x)$ est continue presque pour tout $t \in [0,1]$.

Théorème 3.1 *Supposons qu'il existe une fonction positive $k \in L^1([0,1], \mathbb{R}_+)$ telle que*

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq k(t)|x-y| \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad t \in [0,1] \tag{3.1}$$

et

$$A = \int_0^1 \left[(|\zeta| + |\alpha\beta|)(1-s)^2 + (1+2|\alpha|)(|\beta|+1)(1-s) \right] k(s)ds < 2|\zeta|,$$

alors, le problème aux limites (1.1) admet une seule solution u^* dans E.

Preuve. Transformons le problème (1.1) en un problème de point fixe où l'opérateur T est défini dans (2.1).

A présent, montrons que T est une contraction. En effet, soient $u, v \in E$, alors,

$$\begin{aligned} |Tu(t) - Tv(t)| &\leq \frac{1}{2}\int_0^1 (1-s)^2 |f(s,u(s)) - f(s,v(s))|\, ds \\ &+\frac{1}{2}\left|\frac{\beta}{\zeta}\right|(1+2|\alpha|)\int_0^1 (1-s)|f(s,u(s)) - f(s,v(s))|\, ds \\ &+\frac{1}{2|\zeta|}\int_0^1 (1-s)(1+2|\alpha| + |\alpha\beta|(1-s))|f(s,u(s)) - f(s,v(s))|\, ds, \end{aligned} \tag{3.2}$$

en vertu de (3.1), on obtient

$$\begin{aligned} |Tu(t) - Tv(t)| &\leq \frac{1}{2}\int_0^1 (1-s)^2 k(s)|u(s) - v(s)|\, ds \\ &+\frac{1}{2}\left|\frac{\beta}{\zeta}\right|(1+2|\alpha|)\int_0^1 (1-s)k(s)|u(s) - v(s)|\, ds \\ &+\frac{1}{2|\zeta|}\int_0^1 (1-s)(1+2|\alpha| + |\alpha\beta|(1-s))k(s)|u(s) - v(s)|\, ds \\ &\leq \frac{1}{2|\zeta|}\int_0^1 \left[(|\zeta| + |\alpha\beta|)(1-s)^2 \right. \\ &\qquad \left. + (1+2|\alpha|)(|\beta|+1)(1-s)\right] k(s)|u(s) - v(s)|\, ds \end{aligned} \tag{3.3}$$

D'où en passant au suprémum $\|Tu - Tv\| < \|u - v\|$. Conséquemment T est une contraction dés lors, elle admet un unique point fixe qui est l'unique solution du problème (1.1). ■

Théorème 3.2 *Supposons que* $f(t,0) \neq 0$ *et qu'ils éxistent deux fonctions positives* $k, h \in L^1([0,1], \mathbb{R}_+)$ *telles que*

$$|f(t,x)| \leq k(t)|x| + h(t), (t,x) \subset [0,1] \times \mathbb{R}, \tag{3.4}$$

$$\left(1 + \eta\frac{|\alpha\beta|}{2|\zeta|}\right)\int_0^1 (1-s)^2 k(s)\, ds + \frac{|\beta|(1+2|\alpha|)}{2|\zeta|}\int_0^\eta (\eta - s)k(s)\, ds \tag{3.5}$$

$$+\frac{(1+2|\alpha|)}{2|\zeta|}\int_0^1 (1-s)\,k(s)\,ds<1$$

Alors le problème aux limites (1.1) *a au moins une solution non triviale* $u^* \in E$.

Pour démontrer ce théorème nous appliquons l'alternative non linéaire que nous rappelons ici

Lemme 3.1 *[4] Soit* F *un espace de Banach et* Ω *un sous ensemble ouvert, borné de* F *tel que* $0 \in \Omega$. *Soit* $T : \overline{\Omega} \to F$ *un opérateur complètement continu. Alors, soit qu'il existe* $x \in \partial\Omega$, $\lambda > 1$ *tels que* $T(x) = \lambda x$, *ou il existe un point fixe* $x^* \in \overline{\Omega}$ *de* T.

Preuve. Tout d'abord, définissons un ouvert, borné $\Omega \subset E$. Soient

$$\begin{aligned} M &= \left(1+\eta\frac{|\alpha\beta|}{2|\zeta|}\right)\int_0^1 (1-s)^2 k(s)\,ds + \frac{|\beta|(1+2|\alpha|)}{2|\zeta|}\int_0^\eta (\eta-s)k(s)\,ds \\ &\quad + \frac{(1+2|\alpha|)}{2|\zeta|}\int_0^1 (1-s)\,k(s)\,ds \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} N &= \left(1+\eta\frac{|\alpha\beta|}{2|\zeta|}\right)\int_0^1 (1-s)^2 h(s)\,ds + \frac{|\beta|(1+2|\alpha|)}{2|\zeta|}\int_0^\eta (\eta-s)h(s)\,ds \\ &\quad + \frac{(1+2|\alpha|)}{2|\zeta|}\int_0^1 (1-s)\,h(s)\,ds, \end{aligned}$$

On vertu de l'hypothèse (3.5), nous savons que $M < 1$. Comme $f(t,0) \neq 0$, alors il existe un intervalle $[\sigma,\tau] \subset [0,1]$ tel que $\min\limits_{\sigma \le t \le r} |f(t,0)| > 0$. Puisque $h(t) \geq |f(t,0)|$, $\forall t \in [0,1]$, d'où $N > 0$. Soit $m = \dfrac{N}{1-M}$, alors l'ensemble ouvert, borné Ω est defini par $\Omega = \{u \in C[0,1] : \|u\| < m\}$.

Montrons que T est un opérateur complètement continu dans Ω.

(i) T est continu, en effet, soit (u_n) convergente pour la norme $\|\cdot\|$ vers une limite u dans E. Alors

$$
\begin{aligned}
|Tu_n(t) - Tu(t)| &\leq \frac{1}{2}\max_{t\in[0,1]}\int_0^t (t-s)^2\,|f(s,u_n(s)) - f(s,u(s))|\,ds \\
&\quad + \frac{|\beta|}{2|\zeta|}\max_{t\in[0,1]}\left(t^2(1+|\alpha|) + |\alpha|\right)\int_0^\eta (\eta - s)\,|f(s,u_n(s)) - f(s,u(s))|\,ds \\
&\quad + \frac{1}{2|\zeta|}\max_{t\in[0,1]}\int_0^1 (1-s)\left(t^2(1+|\alpha|) + |\alpha\beta|\,\eta\,(1-s) + |\alpha|\,s\right) \\
&\qquad\qquad \times |f(s,u_n(s)) - f(s,u(s))|\,ds \\
&\leq \frac{1}{2}\int_0^1 (1-s)^2\,|f(s,u_n(s)) - f(s,u(s))|\,ds \\
&\quad + \frac{1}{2}\left|\frac{\beta}{\zeta}\right|(1+2|\alpha|)\int_0^1 (1-s)\,|f(s,u_n(s)) - f(s,u(s))|\,ds \\
&\quad + \frac{1}{2|\zeta|}\int_0^1 (1-s)(1+2|\alpha| + |\alpha\beta|(1-s))\,|f(s,u_n(s)) - f(s,u(s))|\,ds \\
&\leq \left(1 + \frac{(|\beta|+1)(1+2|\alpha|) + |\alpha\beta|}{|\zeta|}\right)\|f(.,u_n(.)) - f(.,u(.))\|_{L_1}
\end{aligned}
$$

Comme f est de type carathéodory alors,

$$
\|Tu_n - Tu\| \leq \left(1 + \frac{(|\beta|+1)(1+2|\alpha|) + |\alpha\beta|}{|\zeta|}\right)\|f(.,u_n(.)) - f(.,u(.))\|_{L_1} \to 0 \text{ quand } n \to \infty.
$$

D'où T est continu.

(ii) Soit $B_r = \{u \in E, \|u\| \leq r\}$ un sous ensemble borné. Montrons que $T(\Omega \cap B_r)$ est relativement compact :

a) Soit $u \in \Omega \cap B_r$ alors en tenant compte de (3.4)

$$
|(Tu)(t)| \leq
$$

$$
\begin{aligned}
||u|| \Bigg[\left(1 + \eta\frac{|\alpha\beta|}{2|\zeta|}\right)\int_0^1 (1-s)^2 k(s)\,ds + \frac{|\beta|(1+2|\alpha|)}{2|\zeta|}\int_0^\eta (\eta - s)k(s)\,ds + \\
\frac{(1+2|\alpha|)}{2|\zeta|}\int_0^1 (1-s)\,k(s)ds\Bigg] +
\end{aligned}
$$

$$\left(1+\eta\frac{|\alpha\beta|}{2|\zeta|}\right)\int_0^1 (1-s)^2 h(s)ds+\frac{|\beta|(1+2|\alpha|)}{2|\zeta|}\int_0^\eta (\eta-s)\,h(s)ds$$
$$+\frac{(1+2|\alpha|)}{2|\zeta|}\int_0^1 (1-s)\,h(s)ds = M\|u\|+N.$$

Donc $\|Tu\|\leq Mr+N$ est par suite $T(\Omega\cap B_r)$ est uniformément borné.

b) $T(\Omega\cap B_r)$ est équicontinu. En effet, soient $t_1,t_2\in[0,1]$, $t_1<t_2$ et $u\in\Omega$, nous avons par application de (3.4)

$$|Tu(t_1)-Tu(t_2)| = \left|\begin{array}{c} -\frac{1}{2}\int_0^{t_1}(t_1-s)^2 f(s,u(s))\,ds \\ -\frac{\beta}{2\zeta}\left(t_1^2(1-\alpha)+\alpha\right)\int_0^\eta(\eta-s)f(s,u(s))\,ds \\ +\frac{1}{2\zeta}\int_0^1(1-s)\left(t_1^2(1-\alpha)+\alpha\beta\eta(1-s)+\alpha s\right)f(s,u(s))\,ds \\ +\frac{1}{2}\int_0^{t_2}(t_2-s)^2 f(s,u(s))\,ds \\ +\frac{\beta}{2\zeta}\left(t_2^2(1-\alpha)+\alpha\right)\int_0^\eta(\eta-s)f(s,u(s))\,ds \\ -\frac{1}{2\zeta}\int_0^1(1-s)\left(t_2^2(1-\alpha)+\alpha\beta\eta(1-s)+\alpha s\right)f(s,u(s))\,ds \end{array}\right|$$

$$\leq\left|-\frac{1}{2}\int_0^{t_1}(t_1-s)^2 f(s,u(s))\,ds+\frac{1}{2}\int_0^{t_2}(t_2-s)^2 f(s,u(s))\,ds\right|$$
$$+\left|\begin{array}{c} -\frac{\beta}{2\zeta}\left(t_1^2(1-\alpha)+\alpha\right)\int_0^\eta(\eta-s)f(s,u(s))\,ds \\ +\frac{\beta}{2\zeta}\left(t_2^2(1-\alpha)+\alpha\right)\int_0^\eta(\eta-s)f(s,u(s))\,ds \end{array}\right|$$
$$+\left|\begin{array}{c} +\frac{1}{2\zeta}\int_0^1(1-s)\left(t_1^2(1-\alpha)+\alpha\beta\eta(1-s)+\alpha s\right)f(s,u(s))\,ds \\ -\frac{1}{2\zeta}\int_0^1(1-s)\left(t_2^2(1-\alpha)+\alpha\beta\eta(1-s)+\alpha s\right)f(s,u(s))\,ds \end{array}\right|$$

on pose

$$A=\left|-\frac{1}{2}\int_0^{t_1}(t_1-s)^2 f(s,u(s))\,ds+\frac{1}{2}\int_0^{t_2}(t_2-s)^2 f(s,u(s))\,ds\right|$$
$$=\left|\begin{array}{c} -\frac{1}{2}\int_0^{t_2}(t_1-s)^2 f(s,u(s))\,ds-\frac{1}{2}\int_{t_2}^{t_1}(t_1-s)^2 f(s,u(s))\,ds \\ +\frac{1}{2}\int_0^{t_2}(t_2-s)^2 f(s,u(s))\,ds, \end{array}\right|$$

$$= \left| -\frac{1}{2}\int_0^{t_2} \left((t_1 - s)^2 - (t_1 - s)^2 \right) f(s, u(s))\, ds - \frac{1}{2}\int_{t_2}^{t_1} (t_1 - s)^2 f(s, u(s))\, ds \right|$$

$$\leq \left| -\frac{1}{2}\int_0^{t_2} (t_1 - t_2)^2 f(s, u(s))\, ds - \frac{1}{2}\int_{t_2}^{t_1} (t_1 - s)^2 f(s, u(s))\, ds \right|$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_0^{t_2} (t_1 - t_2)^2 |f(s, u(s))|\, ds - \frac{1}{2}\int_{t_2}^{t_1} (t_1 - t_2)^2 |f(s, u(s))|\, ds$$

en vertu de (3.4) ; on obtient

$$A \leq \max_{t_1, t_2 \in [0,1]} \left[\frac{1}{2}\int_0^{t_2} (t_1 - t_2)^2 k(s) |u(s)|\, ds - \frac{1}{2}\int_{t_2}^{t_1} (t_1 - t_2)^2 k(s) |u(s)|\, ds \right]$$

$$\leq \int_0^1 (1 - s)^2 k(s)\, ds \, \|u(t_1) - u(t_2)\|,$$

et

$$B = \left| \begin{array}{l} -\frac{\beta}{2\zeta}\left(t_1^2(1-\alpha) + \alpha\right) \int_0^\eta (\eta - s) f(s, u(s))\, ds \\ +\frac{\beta}{2\zeta}\left(t_2^2(1-\alpha) + \alpha\right) \int_0^\eta (\eta - s) f(s, u(s))\, ds \end{array} \right|$$

$$\leq \frac{|\beta|}{2|\zeta|}\left(t_1^2(1 + |\alpha|) + |\alpha|\right) \int_0^\eta (\eta - s) |f(s, u(s))|\, ds$$

$$+ \frac{|\beta|}{2|\zeta|}\left(-t_2^2(1 + |\alpha|) + |\alpha|\right) \int_0^\eta (\eta - s) |f(s, u(s))|\, ds$$

$$\leq \frac{|\beta|}{2|\zeta|}(1 + 2|\alpha|) \int_0^\eta (\eta - s) k(s)\, ds \, \|u(t_1) - u(t_2)\|,$$

et

$$C = \left| \begin{array}{l} \frac{1}{2\zeta}\int_0^1 (1-s)\left(t_1^2(1-\alpha) + \alpha\beta\eta(1-s) + \alpha s\right) f(s, u(s))\, ds \\ -\frac{1}{2\zeta}\int_0^1 (1-s)\left(t_2^2(1-\alpha) + \alpha\beta\eta(1-s) + \alpha s\right) f(s, u(s))\, ds \end{array} \right|$$

$$\leq \frac{1}{2|\zeta|}\int_0^1 (1-s)\left(t_1^2(1 + |\alpha|) + |\alpha\beta|\eta(1-s) + |\alpha| s\right) |f(s, u(s))|\, ds$$

$$+ \frac{1}{2|\zeta|}\int_0^1 (1-s)\left(-t_2^2(1 + |\alpha|) + |\alpha\beta|\eta(1-s) + |\alpha| s\right) |f(s, u(s))|\, ds$$

$$\leq \frac{1}{2|\zeta|}\int_0^1 (1-s)\left((1 + 2|\alpha|) + |\alpha\beta|\eta(1-s)\right) k(s)\, ds \, \|u(t_1) - u(t_2)\|,$$

d'où

$$|Tu(t_1) - Tu(t_2)| \leq \left[\begin{array}{c} \left(1 + \frac{|\alpha\beta|\eta}{2|\zeta|}\right) \int_0^1 (1-s)^2 k(s)\, ds + \frac{|\beta|}{2|\zeta|} (1 + 2|\alpha|) \int_0^\eta (\eta - s) k(s)\, ds \\ + \frac{(1+2|\alpha|)}{2|\zeta|} \int_0^1 (1-s) k(s)\, ds \end{array} \right]$$

$$\times \|u(t_1) - u(t_2)\|,$$

par conséquent

$$\|Tu(t_1) - Tu(t_2)\| \leq M \|u(t_1) - u(t_2)\|,$$

lorsque $t_1 \to t_2$, alors $\|Tu(t_1) - Tu(t_2)\|$ tend vers 0, par conséquent $T(\Omega \cap B_r)$ est equicontinu. En vue du théorème d'Ascoli-Arzela, T est complètement continu.

A présent, nous pouvons appliquer l'alternative non linéaire pour $T : \overline{\Omega} \to E$. Supposons que $u \in \partial\Omega$, $\lambda > 1$ tels que $Tu = \lambda u$ alors,

$$\lambda m = \lambda ||u|| = ||Tu|| = \max_{0 \leq t \leq 1} |(Tu)(t)| \leq$$

$$||u|| \left[\left(1 + \eta \frac{|\alpha\beta|}{2|\zeta|}\right) \int_0^1 (1-s)^2 k(s)\, ds + \frac{|\beta|(1+2|\alpha|)}{2|\zeta|} \int_0^\eta (\eta - s) k(s)\, ds + \frac{(1+2|\alpha|)}{2|\zeta|} \int_0^1 (1-s) k(s) ds \right] +$$

$$\left(1 + \eta \frac{|\alpha\beta|}{2|\zeta|}\right) \int_0^1 (1-s)^2 h(s) ds + \frac{|\beta|(1+2|\alpha|)}{2|\zeta|} \int_0^\eta (\eta - s) h(s) ds$$

$$+ \frac{(1+2|\alpha|)}{2|\zeta|} \int_0^1 (1-s) h(s) ds = M\|u\| + N.$$

D'ici on obtient $\lambda \leq M + N/m - 1$, contradiction avec le fait que $\lambda > 1$. En vertu du lemme 3.1, on conclut que T a un point fixe $u^* \in \overline{\Omega}$ et donc le problème (1.1) a une solution non triviale $u^* \in E$. ■

3.2 Exemples

Comme applications, nous considérons deux exemples permettant d'illustrer les résultats obtenus.

Exemple 3.1 *Considérons le problème aux limites en trois points suivant :*

$$\begin{cases} u''' + 2\frac{\sqrt{3}u^3}{3+u^4}\sqrt{t} + te^{-t} = 0, \quad 0 < t < 1 \\ u(0) = -2u(1), u'(1) = 3u'\left(\frac{1}{2}\right), u'(0) = 0 \end{cases} \tag{P_1}$$

Nous avons $\alpha = -2$, $\beta = 3, \eta = \frac{1}{2}$, $\zeta = \frac{3}{2}$, $f(t,x) = 2\frac{\sqrt{3}x^3}{3+x^4}\sqrt{t} + te^{-t}$ *et* $|f(t,x)| \leq k(t)|x| + h(t)$, *où* $k(t) = \sqrt{t}$, $h(t) = te^{-t}, k$, $h \in L_1([0,1], \mathbb{R}_+)$. *En utilisant le théorème 3.2, on obtient*

$$\begin{aligned} M &= \frac{4}{3}\int_0^1 (1-s)^2\sqrt{s}ds + \frac{5}{3}\int_0^1 (1-s)\sqrt{s}ds + 5\int_0^\eta (\eta - s)\sqrt{s}ds \\ &= 0,88286 < 1. \end{aligned}$$

Alors, le problème P_1 *a au moins une solution non triviale* u^* *dans* E.

Exemple 3.2 *Considérons un autre problème aux limites*

$$\begin{cases} u''' + \frac{tu}{\sqrt{3}\sqrt{t^3+1}} - e^t + \cos t^2 = 0, 0 < t < 1, \\ u(0) = \frac{1}{3}u(1), u'(1) = -\frac{1}{2}u'\left(\frac{1}{4}\right), u'(0) = 0 \end{cases} \tag{P_2}$$

où $\alpha = \frac{1}{3}, \beta = -\frac{1}{2}$, $\eta = \frac{1}{4}$, $|\zeta| = \frac{3}{4}$.*Par application du Théorème 3.1, il découle*

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq k(t)|x-y|, \forall x, y \in \mathbb{R}, t \in [0,1].$$

où $k(t) = \frac{t}{\sqrt{3}\sqrt{t^2+1}}$. *D'un simple calcul on obtient donc*

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \frac{11}{12}(1-s)^2\frac{s}{\sqrt{3}\sqrt{s^2+1}} + \frac{5}{2}(1-s)\frac{s}{\sqrt{3}\sqrt{s^2+1}}ds \\ &= 0.25 < 3/2. \end{aligned}$$

Alors, il éxiste au moins une solution non triviale u^* dans E du problème P_2.

3.3 Autres résultats d'éxistences

Dans cette section, en considérant $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et en se plaçant dans un cadre plus général, nous prouvons les resultats suivants.

Théorème 3.3 *Supposons que $f(t,0) \neq 0$, $\zeta \neq 0$, $0 < p < 1$, et qu'ils existent deux fonctions positives $k, h \in L^1[0,1]$, $k(t) \neq 0$ presque pour tout $t \in [0,1]$ et telle que*

$$|f(t,x)| \leq k(t)|x|^p + h(t), \text{ pour } (t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R}, \tag{3.6}$$

alors, le problème aux limites (1.1) *a au moins une solution non trivial $u^* \in E$.*

Preuve. Comme k est positive et $k(t) \neq 0$, *pour* $t \in [0,1]$, alors $M \neq 0$, soit $m = (M+N)^{\frac{1}{1-p}}$, $r = \max(1,m)$, $B_r = \{u \in E : ||u|| < r+1\}$, $u \in \partial B_r$ et $0 < \lambda < 1$ tel que $u = \lambda Tu$. On a

$$||u|| = \lambda ||Tu|| \leq M ||u||^p + N.$$

Si $||u|| > 1$, il s'ensuit que

$$||u||^{1-p} \leq M + N ||u||^{-p} \leq M + N,$$

par conséquent

$$||u|| < (M+N)^{\frac{1}{1-p}} = m \tag{3.7}$$

Sinon $||u|| < 1$, donc $||u|| \leq \max(1,m) = r$, ce qui montre que la condition (3.7) contredit le fait que $u \in B_r$. D'aprés le lemme 3.1, on conclut que l'opérateur T possède un point fixe $u^* \in \overline{B_r}$ et donc le problème (1.1) admet une solution non triviale $u^* \in C[0,1]$. ■

Théorème 3.4 *Supposons que* $f(t,0) \neq 0$, $\zeta \neq 0$, $p = 1$ *et qu'ils existent deux fonctions positives* $k, h \in L^1[0,1]$ *telles que*

$$|f(t,x)| \leq k(t)|x| + h(t), \text{ pour } (t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R},$$

$$M < 1 \tag{3.8}$$

alors, le problème aux limites (1.1) *a au moins une solution non triviale* $u^* \in C[0,1]$.

Preuve. Comme f est continue et $f(t,0) \neq 0$, il existe donc un intervalle $[\sigma, \tau] \subset [0,1]$ telle que $\min_{\sigma \leq t \leq \tau} |f(t,0)| > 0$ et puisque $h(t) \geq |f(t,0)|$, pour tout $t \in [0,1]$ alors $N > 0$. Posons $r = \dfrac{N}{1-M}$, alors $r \neq 0$.Soit $B_r = \{\, u \in E : ||u|| < r\}$, $u \in \partial B_r$ et $\lambda > 1$ tel que $Tu = \lambda u$. Alors

$$\lambda r = \lambda ||u|| = ||Tu|| = \max_{0 \leq t \leq 1} |(Tu)(t)| \leq M\|u\| + N.$$

D'ici on obtient $\lambda \leq M + \frac{N}{r} = 1$. Ce qui contredit le fait que $\lambda > 1$. En vertu du Lemme 3.1 on conclut que l'opérateur T a un point fixe $u^* \in \overline{B_r}$ et donc le problème aux limites (1.1) admet une solution non triviale $u^* \in C[0,1]$. ■

Théorème 3.5 *Supposons que* $f(t,0) \neq 0$, $\zeta \neq 0$, $p > 1$ *et qu'ils existent deux fonctions positives* $k, h \in L^1[0,1]$, $k(t) \neq 0$, *pour tout* $t \in [0,1]$ *et telle que*

$$|f(t,x)| \leq k(t)|x|^p + h(t),$$

$$M + N < 1. \tag{3.9}$$

alors, le problème aux limites (1.1) *a au moins une solution non triviale* $u^* \in C[0,1]$.

Preuve. Soit $B_1 = \{\, u \in E : ||u|| < 1\}$, $u \in \partial B_1$ et $\lambda > 1$ tel que $Tu = \lambda u$. Alors

$$\lambda ||u|| = ||Tu|| \leq M\|u\| + N.$$

Des lors $\lambda \leq M + N = 1$. La condition (3.9) entraine $\lambda < 1$, contrediction avec le fait que $\lambda > 1$. En conséquence T a un point fixe $u^* \in \overline{B_1}$ qui est une solution du problème (1.1). ■

3.4 Exemples

Comme applications, nous considérons deux exemples permettant d'illustrer les résultats obtenus.

Exemple 3.3 *Considérons le problème aux limites suivant*

$$\begin{cases} u''' + \dfrac{u^{\frac{1}{3}}}{2} \arcsin t + 2\cos t + 4\sin t = 0, \ 0 < t < 1 \\ u(0) = -\frac{1}{5}u(1), \ u'(1) = -\frac{1}{2}u'\left(\frac{1}{3}\right), \ u'(0) = 0. \end{cases} \tag{P_3}$$

Nous avons $f(t,x) = \left(\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{2}\right) \arcsin t + 2\cos t + 4\sin t$. *Alors* $|f(t,x)| \leq \left(\frac{1}{2}\arcsin t\right)|x|^{\frac{1}{3}} + 2\cos t + 4\sin t = k(t)|x|^{\frac{1}{3}} + h(t)$, $p = \frac{1}{3} < 1$, $\zeta = \frac{7}{5} \neq 0$, $f(t,0) = 2\cos t + 4\sin t \neq 0$. *Par le théorème 3.3, on conclut que le problème P_3 a au moins une solution non triviale u^* dans E.*

Exemple 3.4 *Considérons le problème aux limites suivant*

$$\begin{cases} u''' + \frac{1}{(1+t)^5}u^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{1+t^2} = 0, \ 0 < t < 1 \\ u(0) = \frac{1}{6}u(1), \ u'(1) = 8u'\left(\frac{1}{4}\right), \ u'(0) = 0. \end{cases} \tag{P_4}$$

Nous avons $f(t,x) = \frac{1}{(1+t)^5}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{1+t^2}$. *Alors* $|f(t,x)| \leq \frac{1}{(1+t)^5}|x|^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{1+t^2} = k(t)|x|^{\frac{3}{2}} + h(t)$, $f(t,0) \neq 0$, $p = \frac{3}{2} > 1$, $\zeta = \frac{5}{6} \neq 0$. *Par application du théorème 3.5, on obtient*

$$M + N = 0.4564 + 0.20690 = 0.6633 < 1.$$

Dés lors, le problème P_4 a au moins une solution non triviale u^* dans E.

Bibliographie

[1] H.Brézis, Analyse Fonctionnelle,Théorie et Applications, Masson Paris1983.

[2] S.D.CHatterji, Cours d'analyse. Equations différentielles ordinaires et aux dérivée partielles, 1998.

[3] A. Kolmogrov, S. Fomine. Elements de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle, Mir. 1977.

[4] K. Deimling, Nonlinear Functional Analysis, Springer, Berlin, 1985.

[5] A. Granas, J. Dugundji. Fixed point theory, Springer, Monographs in mathematics,1985.

[6] A. Guezane-Lakoud, A. Frioui, Existence of solutions of a nonlinear third order boundary value problem, Fixed Point Theory,13 (2012), No.2, 501-506.

[7] A. Guezane-Lakoud, A. Frioui, Nonlinear three point boundary value problem, Sarajevo Journal of Mathematics, Vol.8 (20) (2012), 1-6.

[8] D. R. Smart, Fixed Point Theorems, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1980.