République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

M/510.289

جامعة 08 ماي 45 قالمة
مصلحة
الإعارة
الخارجية
كلية الرياضيات، الإعلام الآلي وعلوم المادة

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : **EDP et Analyse numérique**

Par :

ATSAMNIA HENA

Intitulé

Equation différentielle hypergéomètrique

Dirigé par :
OUENNASE NAWEL

Devant le jury

PRESIDENT	Dr: BAHLOUL Tarek	MCB	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr: OUENNASE Nawel	MCB	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr: AISSAOUI Fatima	MCB	Univ-Guelma

Session Juin 2018

Table des matières

Remerciements

Nous remercions tout d'abord Allah de nous avoir éclairé le chemin du savoir et de nous avoir armé de fois de patience et de force afin d'élaborer ce travail.

Nous tenons à exprimer notre reconnaissance et nos profonds remerciements à notre encadreur

Mme : OUENNASE NAWEL et nous le remercions chaleureusement pour sa confiance, ses conseils précieux et pour le temps qu'il nous a accordé malgré ses obligations, ses devoirs et ses responsabilités. Nos vifs remerciements vont également aux membres du jury qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner notre travail et de l'enrichir par leurs propositions. Je n'oublie pas mes parents pour leur soutien et leur patience. Enfin j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches et amis.

Merci à tous et à toutes.

Dédicace

Je dédie ce travail à :

Mes très chers parents qui m'ont donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance.

Mes chers frères et mes soeurs : Hani, Saleh, Wiam et Djouhaina.

Mes proche et chères : Nessma, Romaissa, Dounia, Rania, Fatma, Nada.

Ma niéce Rana.

Merci

Introduction

L'analyse mathématique regroupe sous le terme de fonctions spéciales un ensemble de fonctions analytiques non élémentaires dont l'usage est très fréquent. Parmi ces fonctions, on trouve un grand nombre qui sont des solutions d'équations de la physique mathématique (des équations différentielles du second ordre et des équations aux dérivées partielles d'ordre deux et quatre,...). Ces fonctions sont toutefois très utiles puisque non seulement elles interviennent dans l'expression des solutions exactes de certaines équations aux dérivées partielles pour des conditions aux limites particulières, mais elles fournissent, par le biais des méthodes spectrales, les meilleures approximations numériques pour des conditions aux limites. Certaines d'entre elles jouent également un rôle de premier plan en théorie des nombres. Parmi les fonctions spéciales le plus rencontrées citons :

-Fonctions eulériennes : Gamma, beta, gamma incomplète, digamma,...

-Fonctions d'erreur, sinus intégrale, cosinus intégrale.

-Fonctions hypergéométriques.

-Fonction zêta de Riemann.

-Fonctions cylindriques : Bessel, Hankel,...

Les fonctions spéciales sont définies pour un grand nombre d'entre elles dans les logiciels de calcul symbolique (Maple, Mathematica,...). Notons aussi que certaines familles de polynômes orthogonaux (polynômes de Jacobi, polynômes d'Hermite,...) sont aussi considérées comme des fonctions spéciales.

Les suites de polynômes orthogonaux apparaissent fréquemment en physique mathématique et en mathématiques appliquées. La littérature s'occupant de l'étude de ces suites est trés abondante.

Dans ce travail, dans une première étape, on étudie la notion de base dans la théorie générale des équations différentielles de second ordre et la recherche de la solution respectivement au point singuliers et au point réguliers et nous proposons a chaque fois la méthode pour déterminer la second solutions. La second partie de ce travail est consacré a la fonction hypergéométrique est également solution d'une équation différentielle complexe linéaire du second ordre

$$A(z)\frac{d^2u(z)}{dz^2} + B(z)\frac{du(z)}{dz} + C(z)u(z) = 0 \tag{1.1}$$

, dite hypergéométrique, comprenant trois points singuliers réguliers (en). Toute équation différentielle linéaire du second ordre comprenant également trois points singuliers réguliers peut se ramener à cette équation, en mathématiques, le terme de fonction hypergéométrique désigne généralement une fonction spéciale particulière, dépendant de trois paramètres α, β, γ, notée

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z)$$

, et qui s'exprime sous la forme de la série hypergéométrique, (lorsque celle-ci converge). Selon les valeurs prises par les paramètres, cette fonction correspond à de nombreuses fonctions usuelles ou spéciales, notamment des polynômes orthogonaux.

Chapitre 1

Propriétés de base de la solution

Dans ce chapitre, les concepts de base des équations différentielles de second ordre sont présentées précisément les propriétés générales des solutions aux points singuliers et réguliers sont analysées.

1.1 L'équation différentielle ordinaire de second ordre

1.1.1 La forme standard

La forme standard d'une équation différentielle linéaire du second ordre (1.1) est

$$\frac{d^2u(z)}{dz^2} + p(z)\frac{du(z)}{dz} + q(z)u(z) = 0 \tag{1.2}$$

Où $p(z)$ et $q(z)$ sont des fonctions analytiques dans un domaine $S \subset \mathbb{C}$. ou analytiques dans S sauf à un nombre fini de points isolés, Nous cherchons des solutions $u(z)$ à cette équation qui sont analytiques dans une parties du domaine S.

L'équation (1.2) peut être transformée en une **forme réduite**

$$\frac{d^2u_1(z)}{dz^2} + q_1(z)u_1(z) = 0 \tag{1.3}$$

Avec le changement de la variable suivant

$$\begin{cases} u(z) = u_1(z)\exp\left\{\frac{-1}{2}\int_b^z p(\alpha)d\alpha\right\} \\ q_1(z) = q(z) - \frac{1}{2}\frac{dp(z)}{dz} + \frac{1}{4}\left(p(z)\right)^2 \end{cases} \tag{1.4}$$

Preuve. Soit $u(z) = u_1(z)\exp\left\{\frac{-1}{2}\int_b^z p(\alpha)d\alpha\right\}$ .alors,

$$\begin{aligned} \frac{du(z)}{dz} &= \frac{d}{dz}\left[u_1(z)\exp\left\{\frac{-1}{2}\int_b^z p(\alpha)d\alpha\right\}\right] \qquad (1.5)\\ &= \frac{du_1(z)}{dz}\exp\left\{\frac{-1}{2}\int_b^z p(\alpha)d\alpha\right\} + u_1(z)\left(\frac{-1}{2}\right)p(z)\exp\left\{\frac{-1}{2}\int_b^z p(\alpha)d\alpha\right\} \end{aligned}$$

de plus

$$\begin{aligned} \frac{d^2u(z)}{dz^2} &= \frac{d}{dz}\left[\frac{du_1(z)}{dz}\exp\left\{\frac{-1}{2}\int_b^z p(\alpha)d\alpha\right\} + u_1(z)\left(\frac{-1}{2}\right)p(z)\exp\left\{\frac{-1}{2}\int_b^z p(\alpha)d\alpha\right\}\right] \quad (1.6)\\ &= \frac{d^2u_1(z)}{dz^2}\left|\exp\left\{\frac{-1}{2}\int_b^z p(\alpha)d\alpha\right\} + \frac{du_1(z)}{dz}\left(\frac{-1}{2}\right)p(z)\exp\left\{\frac{-1}{2}\int_b^z p(\alpha)d\alpha\right\}\right. \\ &\quad + \left|\frac{du_1(z)}{dz}\left(\frac{-1}{2}\right)p(z)\exp\left\{\frac{-1}{2}\int_b^z p(\alpha)d\alpha\right\} + u_1(z)\left(\frac{-1}{2}\right)\exp\left\{\frac{-1}{2}\int_b^z p(\alpha)d\alpha\right\}\right. \\ &\quad \left.\frac{d}{dz}p(z) + \left(\frac{1}{4}\right)p^2(z)\exp\left\{\frac{-1}{2}\int_b^z p(\alpha)d\alpha\right\}\right| \end{aligned}$$

(1.4), (1.5) et (1.6) dans (1.3) on trouve

$$\begin{aligned} &\exp\left\{\frac{-1}{2}\int_b^z p(\alpha)d\alpha\right\} \times \left\{\left\{\frac{d^2u_1(z)}{dz^2} - \frac{du_1(z)}{dz}p(z) - \frac{1}{2}u_1(z)\frac{d}{dz}p(z) + \frac{1}{4}p^2(z)\right\}\right. \\ &\left. + p(z)\exp\left\{\frac{-1}{2}\int_b^z p(\alpha)d\alpha\right\}\frac{du_1(z)}{dz} - \frac{1}{2}u_1(z)p(z)\right\} \\ &+ q(z)\exp\left\{\frac{-1}{2}\int_b^z p(\alpha)d\alpha\right\}u_1(z) = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\exp\left\{\frac{-1}{2}\int_b^z p(\alpha)d\alpha\right\} \times \left[\frac{d^2u_1(z)}{dz^2} + \left(q(z) - \frac{1}{2}\frac{dp(z)}{dz} + \frac{1}{4}\left(p(z)\right)^2\right)u_1(z)\right] = 0$$

alors

$$\frac{d^2u_1(z)}{dz^2} + \left(q(z) - \frac{1}{2}\frac{dp(z)}{dz} + \frac{1}{4}\left(p(z)\right)^2\right)u_1(z) = 0$$

Posons $q_1(z) = q(z) - \frac{1}{2}\frac{dp(z)}{dz} + \frac{1}{4}\left(p(z)\right)^2$, on trouve

$$\frac{d^2u_1(z)}{dz^2} + q_1(z)u_1(z) = 0$$

c'est l a **forme réduite de** (1.2). ■

1.1.2 Classification de points

Le point $z = c$ dans le plan complexe est classifi en fonction de la propriété analytique des fonctions $p(z)$ et $q(z)$ à $z = c$.la définition suivante est essentiel pour l'analyse des équations différentielles de second ordre.

Définition 1.1 *Un point $z = d \in \mathbb{C}$ est appelé point régulier de* (2.1) *si $p(z)$ et $q(z)$ sont analytiques dans un voisinage de $z = c$.*

1.2 Le Wronskien

Définition 1.2 *Soient $u_1(z)$ et $u_2(z)$ deux fonctions mésomorphes dans un domaine S, le Wronskien de $u_1(z)$ et $u_2(z)$ est alors défini comme suite*

$$W(u_1, u_2, z) = u_1(z)u_2'(z) - u_1'(z)u_2(z), z \in S$$

Le lemme suivant montre que si $u_1(z)$ et $u_2(z)$ des solutions de (2.1), *$W(z)$ dépend uniquement de la variable z et de la fonction $p(z)$.*

Lemme 1.1 *Soit $S \in \mathbb{C}$ qui contient que des points réguliers de* (1.1), *alors le Wronskien de $u_1(z)$ et $u_2(z)$ est*

$$W(z) = u_1(z)u_2'(z) - u_1'(z)u_2(z)$$

Dans S on a

$$W(z) = W(a) \exp \left\{ - \int_{\alpha}^{z} p(\alpha) d\alpha \right\}$$

avec a et z dans S.

Remarque 1.1 *D'après le lemme 1.1, on voit que $W(z)$ ne dépend pas des fonctions explicites $u_1(z)$ et $u_2(z)$, mais seulement sur $p(z)$.*

1.3 Solutions à un point régulier

Dans un voisinage d'un point régulier, une solution de(1.1) peut toujours être trouvé cette partie contient les détails d'une telle construction explicite.

Soit $z = b \in \mathbb{C}$ un point régulièr, et S_b un voisinage de b ($S_b = B(b, v_b)$),P_1 le plus proche point régulier.

Supposons que $p(z) = 0$.

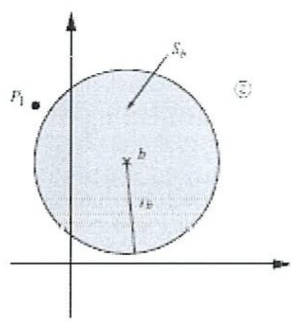

Fig 1.1 Le point régulier z=b et le point P_1.

En donnant a_0,a_1 $\in \mathbb{C}$,définissons une suite de fonctions $u_n(z), n \in \mathbb{N}$ par le système itératif

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0(z) = a_0 + a_1(z-b), \quad a_0, a_1 \in \mathbb{C} \\ u_0(z) = \int_b^z (\varepsilon - z) q(\varepsilon) u_{n-1}(\varepsilon) d\varepsilon, \quad n \in \mathbb{Z}_{+} \end{array} \right. \tag{1.7}$$

Nous avons le théorème fondamental suivant :

Théorème 1.1 *Dans le domaine circulaire S_b, au point régulière $z = b \in \mathbb{C}$,la série*

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(z), \; z \in S_b \tag{1.8}$$

Obtenue à partir de la formule de récurrence à (1.7) est uniformément convergente et est une fonction analytique, précisément $u(z)$ satisfait l'équation (1.2) avec les conditions initiales suivantes à $z = b$:

$$\begin{cases} u\,(b) = a_0 \\ u'(b) = a_1 \end{cases}$$

Preuve. *La démonstration se fait en 4 étapes*

Etape 1 : *la récurrence (1.7) satisfit*

$$|u_n(z)| \leq \mu M^n \frac{|z-b|}{n!}^{2n}, \; \text{pour tout } z \in S_b, n \in \mathbb{Z}_+$$

avec

$$\begin{cases} |u_0(z)| \leq \mu \\ |q(z)| \leq M \end{cases} \quad \text{pour tout } z \epsilon S_b$$

Etape 2 : *la série*

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(z), \; z \epsilon S_b$$

est uniformément convergente dans S_b donc elle est analytique.

Etape 3 : *la fonction analytique $u(z)$ dans (1.8) satisfait*

$$\frac{d^2u(z)}{dz^2} + q(z)u(z) = 0$$

car

$$\begin{cases} u_n'(z) = -\int_b^z q(\varepsilon)u_{n-1}(\varepsilon)\,d\varepsilon \\ u_n''(z) = -q(z)u_{n-1}(z) \end{cases} \quad n \epsilon \mathbb{Z}_+$$

La substitution dans la forme réduite (1.2) *donne*

$$\frac{d^2u(z)}{dz^2} = \frac{d^2u_0(z)}{dz^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2u_n(z)}{dz^2} = -q(z) \sum_{n=1}^{\infty} u_{n-1}(z) = -q(z)u(z)$$

En point $z = b$

$$\begin{cases} u_0(b) = a_0 \\ u_n(b) = 0 \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z}_+$$

$$\begin{cases} u_0'(b) = a_1 \\ u_n'(b) = 0 \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z}_+$$

Ce qui implique que

$$\begin{cases} u(b) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(b) = a_0 \\ u'(b) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n'(b) = a_1 \end{cases}$$

Ce qu'il faut démontrer.

Etape 4 : *la fonction analytique* $u(z)$ *qui satisfit*

$$\frac{d^2u(z)}{dz^2} + q(z)u(z) = 0$$

où

$$\begin{cases} u(b) = a_0 \\ u'(b) = a_1 \end{cases}$$

est unique, car supposons qu'il ya deux solutions analytiques $u_1(z)$ *et* $u_2(z)$, *et soit* $v = u_1 - u_2$ *de plus elle vérifie*

$$\frac{d^2v(z)}{dz^2} + q(z)v(z) = 0$$

où

$$\begin{cases} v(b) = 0 \\ v'(b) = 0 \end{cases}$$

Dans S_b, au point régulier $z = b$, $[|q(b)| < \infty]$ on obtient $v''(b) = 0$, la dérivation donne

$$v'''(z) + q'(z)v(z) + q(z)v'(z) = 0$$

Au point $z = b$, on trouve que

$$v'''(b) = 0$$

Nous remarquons par la dérivation n fois on trouve toujours $v^{(n)}(b) = 0$;$\forall\ n \in \mathbb{N}$.comme la solution est analytique à $z = b$ nous concluons que $v(z) = 0$, $\forall\ z \in S_b$. ■

Par conséquent du théorème 1.1 on peut construire une solution analytique en tout point régulier de l'équation (1.1) dans le plan complexe, cela signifie que nous pouvons construire une Solution à tous les points du plan $\mathbb{C}$ sauf au niveau des points singuliers de (1.1), où la solution a un comportement singulier à partir d'une condition initiale, on obtient une solution unique à chaque point régulier.

1.3.1 La deuxième solution

Supposons que nous avons une solution $u_1(z)$ de (1.1) par la construction explicite de théorème 1.1, dans cette partie nous proposons la construction de la deuxième solution $u_2(z)$ à partir de $u_1(z)$ ($u_1(z)$ et $u_2(z)$ sont linéairement indépendantes).

Selon le Wronskien de définition 1.2

$$W(z) = u_1(z)u_2'(z) - u_1'(z)u_2(z) = (u_1(z))^2 \frac{d}{dz}\left(\frac{u_2(z)}{u_1(z)}\right)$$

De lemme 1.1 on a :

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{u_2(z)}{u_1(z)}\right) = \frac{W(a)}{(u_1(z))^2} \exp\left\{-\int_a^z p(\alpha)d\alpha\right\}$$

intégration donne :

$$\frac{u_2(z)}{u_1(z)} = W(a)\int_{\alpha}^{z} \frac{1}{(u_1(\gamma))^2} \exp\left\{-\int_{\alpha}^{\gamma} p(\alpha)d\alpha\right\} d\gamma + \frac{u_2(a)}{u_1(a)}$$

alors

$$u_2(z) = u_1(z)\int^{z} \frac{1}{(u_1(\gamma))^2} \exp\left\{-\int^{\gamma} p(\alpha)d\alpha\right\} d\gamma$$

De la forme réduite de (1.2), en particulier où $p(z) = 0$, on a une forme particulière de la deuxième solution donnée par

$$u_2(z) = u_1(z)\int^{z} \frac{d\gamma}{(u_1(\gamma))^2}$$

La méthode présentée dans cette section a été employée de trouver une seconde solution de l'équation (1.1) dans un voisinage d'un point régulier, mais cette méthode peut également fois le potentiel lorsque nous cherchons la deuxième solution au voisinage d'un point singulier.

Exemple 1.1 *Nous illustrons le résultat ci-dessus avec un exemple simple*

Soit l'équation différentielle

$$\frac{d^2u(z)}{dz^2} - k^2u(z) = 0$$

À la solution $u_1(z) = e^{kz}$; $k \neq 0$ la deuxième solution est

$$u_2(z) = u_1(z)\int^{z} \frac{d\gamma}{(u_1(\gamma))^2} = e^{kz}\int^{z} e^{-2k\gamma}d\gamma = -\frac{1}{2k}e^{kz}e^{-2kz} = \frac{-1}{2k}e^{-kz}$$

$u_1(z)$ et $u_2(z)$ sont linéairement indépendants.

1.4 La solution à un point singulier

Dans la partie précédente on a vue que généralement deux solutions linéairement indépendantes de (1.1) peuvent être construites en tous points de $\mathbb{C}$ sauf aux points singuliers, dans cette partie, nous allons voir le comportement de la solution au voisinage de ces points singuliers.

Définition 1.3 *Supposons* $z = c \in \mathbb{C}$ $(|c| < \infty)$ *est un point singulier de* (1.1), *le point* z *est dite point régulier de* (1.1) *si* $p(z)$ *et* $q(z)$ *ont la forme :*

$$p(z) = \frac{P(z)}{z-c}, \; q(z) = \frac{Q(z)}{(z-c)^2}$$

avec $P(z)$ *et* $Q(z)$ *sont des fonctions analytiques dans un voisinage de* $z = c$, *sinon* z *est dit un point singulier irrégulier de l'équation* (1.1) .

1.4.1 L'équation indicielle

L'équation au point singulier régulier $z = c$ est

$$\frac{d^2u(z)}{dz^2} + \frac{P(z)}{z-c}\frac{du(z)}{dz} + \frac{Q(z)}{(z-c)^2}u(z) = 0 \qquad (1.9)$$

Avec $P(z)$ et $Q(z)$ sont analytiques au voisinage de $z = c$, de plus

$$\begin{cases} P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (z-c)^n \\ Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (z-c)^n \end{cases} \qquad (1.10)$$

Lesquelles sont convergentes pour tous $z \in S_c = \{|z-c| < r_c\}$.

Nous savons que $u(z)$ montre un comportement singulier prés de point singulier régulier $z = c \in \mathbb{C}$, utilisons la méthode de Frobenius on trouve que

$$u(z) = (z-c)^{\alpha} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-c)^n\right] \qquad (1.11)$$

L'objectif est de déterminer les coefficients a_n, $n \in \mathbb{Z}$.

La substitution de (1.11) dans (1.9) donne

$$(z-c)^2 u''(z) + (z-c)P(z)u'(z) + Q(z)u(z) = 0$$

on obtient

$$(z-c)^{\alpha}\left\{\alpha(\alpha+1) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\alpha+n)(\alpha+n-1)(z-c)^n + \right.$$
$$\left. P(z)(\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\alpha+n)(z-c)^n) + Q(z)(1+\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-c)^n\right\} = 0$$

Utilisons (1.10) on trouve que

$$\begin{cases} \text{n=0}, \alpha^2 + (p_0-1)\alpha + q_0 = 0 \\ \text{n=1}, a_1\left\{(\alpha+1)^2 + (p_0-1)(\alpha+1) + q_0\right\} + p_1\alpha + q_1 = 0 \\ \text{n=2}, a_2\left\{(\alpha+2)^2 + (p_0-1)(\alpha+2) + q_0\right\} + a_1\left\{p_1(\alpha+1) + q_1\right\} + p_2\alpha + q_2 = 0 \\ \vdots \\ \text{n}, a_n\left\{(\alpha+n)^2 + (p_0-1)(\alpha+n) + q_0\right\} + \sum_{m=1}^{n-1} a_{n-m}\left\{p_m(\alpha+n-m) + q_m\right\} + p_n\alpha + q_n = 0 \end{cases}$$

Nous définissons l'équation indicielle

$$I(\alpha) = \alpha^2 + (p_0-1)\alpha + q_0 = 0 \tag{1.12}$$

d'où

$$\begin{cases} I(\alpha) = 0 \\ a_1 I(\alpha+1) + p_1\alpha + q_1 = 0 \\ a_2 I(\alpha+2) + a_1\left\{p_1(\alpha+1) + q_1\right\} + p_2\alpha + q_2 = 0 \\ \vdots \\ a_n I(\alpha+n) + \sum_{m=1}^{n} a_{n-m}\left\{p_m(\alpha+n-m) + q_m\right\} = 0 \end{cases} \tag{1.13}$$

Les deux racines α_1 et α_2 de (1.12) satisfait

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 - p_0 \\ \alpha_1 \alpha_2 = q_0 \end{cases} \tag{1.14}$$

On $z = c$, les deux fonctions $P(z)$ et $Q(z)$ déterminant la valeur de α_1 et α_2. Pour déterminer les a_n, $n \in \mathbb{Z}_+$ on utilise

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_n &= -\frac{\sum_{m=1}^{n} a_{n-m}\left\{p_m(\alpha + n - m) + q_m\right\}}{I(\alpha + n)} \end{aligned} \tag{1.15}$$

avec

$$I(\alpha + n) = n(\alpha_1 - \alpha_2 + n)$$

1.4.2 La convergence de la solution

La question de la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - c)^n$$

Construit explicitement par l'algorithme de la section 1.4.1.

Théorème 1.2 *Soient α_1 et α_2 les deux racines de l'équation indicielle* (1.12) *avec **Re** $\alpha_1 \geq$ **Re** α_2, la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - c)^n$$

Où les coefficients a_n, obtenu par l'itération (1.15) *à partir de la racine α_1, présente une fonction analytique dans un voisinage du point singulier régulier $z = c$ même chose la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - c)^n$$

est une autre solution, ces coefficient a'_n sont déterminer par l'itération (1.15) *à partir de la racine α_2.*

Ce théorème garantit qu'il existe au moins une solution de l'équation (1.1) .si les deux racines α_1 et α_2 de (1.12) sont distinctes ($\alpha_1 \neq \alpha_2$) on peut déterminer les deux solutions (1.1) au voisinage de point singulier régulier

$$u_1(z) = (z-c)^{\alpha_1}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-c)^n\right) \text{ et } u_2(z) = (z-c)^{\alpha_2}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-c)^n\right)$$

avec a_n et b_n sont déterminés par l'itération (1.15) .

Chapitre 2

L'équation différentielle hypergéométrique

L'équation différentielle avec trois points singuliers réguliers (l'un situé à l'infini) jouent un rôle important en physique mathématique, et dans ce chapitre, nous examinons cette situation en détail.

2.1 Les propriétés de base

L'équation différentielle hypergéométrique est de la forme

$$z(z-1)u''(z) + [(\alpha+\beta+1)z-\gamma]\,u'(z) + \alpha\beta u(z) = 0 \qquad (2.1)$$

a trois points singuliers réguliers à $z = 0$,1 et ∞ nous pouvons également l'écrire comme suite

$$u''(z) + \frac{(\alpha+\beta+1)z-\gamma}{z(z-1)}u'(z) + \frac{\alpha\beta}{z(z-1)}u(z) = 0 \qquad (2.2)$$

Les racines de l'équation indicielle sont données par

$$I(\lambda) = \lambda^2 + (p_0-1)\lambda + q_0 = 0 \qquad (2.3)$$

Les racines de l'équation indicielle sont résume dans le tableau suivant

Point	p_0	q_0	racine λ
$z=0$	γ	0	$0, 1-\gamma$
$z=1$	$1+\alpha+\beta-\gamma$	0	$0, \gamma-\alpha-\beta$
$z=\infty$	$1-\alpha-\beta$	$\alpha\beta$	α, β

Etudions maintenant la solution de (2.2) dans le voisinage de point singulier régulier $z = 0$, où les racines de (2.3) sont $\lambda_1 = 0$,$\lambda_2 = 1-\gamma$. Selon la section 1.4.1 de chapitre précédent il y a deux solutions linéairement indépendantes $u(z)$ et $v(z)$ de la forme

$$u(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \;\; v(z) = z^{1-\gamma}(1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n) \tag{2.4}$$

Notons que la solution $u(z)$ est analytique par contre la solution $v(z)$ ne l'est pas au voisinage de point régulier singulier $z = 0$.la solution $u(z)$ dans (2.4) est appelée la série hypergéométrique, le rayon de convergence de cette série est la distance de la plus proche point singulier (une exception se produit si $\alpha\beta = 0$, alors $u(z) = 1$ est une solution qui a rayon de convergence infini). Ce rayon est inférieur ou égale à 1.

L'extension analytique d'un série hypergéométrique dans le plan complexe est dénoté la fonction hypergéométrique, nous adoptons la notation $F(\alpha, \beta, \gamma, 0) = 1$

2.2 Séries hypergéométriques

L'objectif de cette partie est de déterminer explicitement les coefficients a_n et b_n dans (2.4),nous utilisons la méthode de Frobenius présenté dans la section 1.4, mais en raison de la forme particulière de l'équation (2.1).

Déterminons les a_n, $n \geq 1$, par la substitution de $u(z)$ dans (2.1) donne

$$n(n-1)a_n - (n+1)na_{n+1} + (\alpha+\beta+1)na_n - \gamma(n+1)a_{n+1} + \alpha\beta a_n = 0$$

donc

$$(n+1)(n+\gamma)a_{n+1} = (n+\alpha)(n+\beta)a_n$$

où encore

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+\alpha)(n+\beta)}{(n+1)(n+\gamma)}, n \in \mathbb{N}$$

Eliminons les valeurs de $\gamma \in \mathbb{Z}_-$, pour raison d'assurer que $u(z)$ est analytique, dans ce cas la, les coefficients $a_n, n \in \mathbb{N}$ peut être déterminé par la récurrence suivante

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = \frac{a_n}{a_0} = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{a_{j+1}}{a_j} = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{(j+\alpha)(j+\beta)}{(j+1)(j+\gamma)} \end{cases} \tag{2.5}$$

Utilisons le symbole de Appel ou Prochhammer définie par

$$\begin{cases} (\alpha, n) = \prod_{j=0}^{n-1}(j+\alpha) = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \times ... \times (\alpha+n-1) = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)} \\ (\alpha, 0) = 1 \end{cases} \tag{2.6}$$

dans ce cas (2.5) devient

$$a_n = \frac{(\alpha,n)(\beta,n)}{(\gamma,n)(1,n)} = \frac{(\alpha,n)(\beta,n)}{(\gamma,n)n!}$$

notons que $(1,n) = n!$.

Cette solution représente une fonction hypergéométrique dans le plan complexe où la série converge. Le domaine de convergence de la série hypergéométrique est étudié dans le théorème suivant :

Théorème 2.1 *La série hypergéométrique*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha,n)(\beta,n)}{(\gamma,n)} \frac{z^n}{n!} \tag{2.7}$$

Converge si $|z| < 1$, de plus elle présente une fonction analytique.si $|z| > 1$ la série diverge.

Une série hypergéométrique représente une fonction hypergéométrique dans le domaine de convergence de la série c'est à dire

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha, n)(\beta, n)}{(\gamma, n)} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < 1 \tag{2.8}$$

Preuve. Selon le rayon de convergence

$$r^{-1} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(\alpha + n)(\beta + n)}{(n+1)(n+\gamma)} \right| = 1$$

La série converge absolument pour $|z| < 1$ et elle diverge pour $|z| > 1$, on $r = 1$ utilisant le teste de Raabe, on obtient

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+\alpha)(n+\beta)}{(n+1)(n+\gamma)} = 1 + \frac{\alpha + \beta - \gamma - 1}{n} + o(n^{-2})$$

comme la série est absolument convergente dans $|z| = 1$, cela implique que

$\mathbf{Re}(\gamma - \alpha - \beta) > 0$. ■

2.3 La représentation intégrale de $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$

L'une des moyennes de prolonger le domaine d'analycité est l'utilisation de représentation intégrale, dans cette partie nous présentons une représentation intégrale de la fonction hypergéométrique.

Théorème 2.2 *La fonction hypergéométrique a la représentation intégrale suivante*

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \beta)} \int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-uz)^{-\alpha} du \tag{2.9}$$

valable pour tout $\mathbf{Re}(\gamma) > \mathbf{Re}(\beta) > 0$ *et* $z \in \mathbb{C} - \{[1, \infty[\}$.

Preuve. On remarque que $u(z) = (1-uz)^{-\alpha}$ est une solution de

$$z(z-1)u''(z) + ((\alpha+1)z)u'(z) = 0$$

cela implique que

$$(1-uz)^{-\alpha} = F(\alpha, 0, 0, z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha, n) \frac{z^n}{n!}$$

d'autre part pour $|z| < 1$ et $u \in [0, 1]$

$$(1-uz)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} -\alpha \\ n \end{pmatrix} (-1)^n u^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha, n) u^n \frac{z^n}{n!}$$

par identification

$$\begin{pmatrix} -\alpha \\ n \end{pmatrix} = \frac{\Gamma(-\alpha+1)}{\Gamma(-\alpha+1-n)(1+n)} = (-1)^n \frac{(\alpha, n)}{n!}$$

c'est à dire

$$\frac{\Gamma(-\alpha+1)}{\Gamma(-\alpha+1-n)} = (-1)^n \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)} = (-1)^n (\alpha, n)$$

on obtient

$$\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-uz)^{-\alpha} du = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha, n) \frac{z^n}{n!} \underbrace{\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1} u^n du}_{\frac{\Gamma(n+\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma+n)}}$$

justifier que $\mathbf{Re}(\boldsymbol{\beta}) > \mathbf{0}$ et $\mathbf{Re}(\gamma - \beta) > 0$ car nous savons que

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \ \mathbf{Re}\ x, \mathbf{Re}\ y > 0$$

alors

$$\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha-\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha, n) \frac{\Gamma(n+\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma+n)} \frac{z^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha, n)(\beta, n)}{(\gamma, n)} \frac{z^n}{n!}$$

■

Corollaire 2.1 ***(Formule de Gauss)*** *Pour* $\gamma \neq 0, -1, -2, ...$*et* **Re** $(\gamma - \alpha - \beta) > 0$ *on a*

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)} \tag{2.10}$$

Preuve. Pour $z = 1$ dans (2.9) on trouve

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \beta)} \int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-\beta-1} du$$

Converge si **Re** $(\boldsymbol{\beta}) > \mathbf{0}$ et **Re** $(\gamma - \alpha - \beta) > 0$, donc

$$\int_0^1 \mu^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-\beta-1} du = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)}$$

■

Par changement de variable simple $(\mu \to 1/\mu)$, on aura le corollaire suivant :

Corollaire 2.2 *La série hypergéométrique a une représentation intégrale suivante*

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \beta)} \int_1^\infty u^{\alpha-\gamma}(u-1)^{\gamma-\beta-1}(u-z)^{-\alpha} du \tag{2.11}$$

valable pour **Re**$\gamma >$ **Re**$\beta > 0$ *et* $z \in \mathbb{C} - \{[1, \infty[\}$.

Lemme 2.1 ***(Euler).*** *La fonction hypergéométrique satisfait*

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = (1-z)^{-\alpha} F(\alpha, \gamma - \beta, \gamma, \frac{z}{z-1}) \tag{2.12}$$

Preuve. Selon la représentation intégrale de Théorème 2.2, on a (**Re** $\gamma >$**Re** $\beta > 0$ et $z \in \mathbb{C} - [1, \infty))$

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \beta)} \int_0^1 \mu^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-uz)^{-\alpha} du$$

on trouve que

$$
\begin{aligned}
zF'_\gamma &= -(\gamma-1)(\frac{-z}{\gamma-1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\gamma)nz^{n-1}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\gamma)nz^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(\gamma)\,(n+1)\,z^{n+1}
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

On remarque aussi

$$\frac{a_{n+1}(\gamma)\,(n+1)}{a_n(\gamma)} = \frac{(n+\alpha)\,(n+\beta)}{(n+\gamma)} = n+\alpha+\beta-\gamma+\frac{(\alpha-\gamma)\,(\beta-\gamma)}{n+\gamma}$$

et

$$\frac{a_n(\gamma)}{n+\gamma} = \frac{(\alpha,n)\,(\beta,n)}{(1,n)\,(\gamma,n)\,(n+\gamma)} = \frac{(\alpha,n)\,(\beta,n)}{(1,n)(\gamma+1,n)\gamma} = \frac{a_n(\gamma+1)}{\gamma}$$

Remplaçant $\gamma \to \gamma-1$ on trouve que

$$a_n(\gamma)\,(n+\gamma-1) = (\gamma-1)\,a_n\,(\gamma-1)$$

On remarque aussi que

$$
\begin{aligned}
a_{n+1}(\gamma)\,(n+1) &= a_n(\gamma)(n+\alpha+\beta-\gamma)+a_n(\gamma)\frac{(\alpha-\gamma)\,(\beta-\gamma)}{n+\gamma} \\
&= a_n(\gamma)(n+\alpha+\beta+\gamma-2\gamma-1+1) \\
&\quad +\frac{(n+\gamma)\,a_n(\gamma+1)}{\gamma}\frac{(\alpha-\gamma)\,(\beta-\gamma)}{(n+\gamma)} \\
&= a_n(\gamma)\,(n+\gamma-1)+a_n(\gamma)\,(\alpha+\beta-2\gamma+1) \\
&\quad +a_n\,(\gamma+1)\,\frac{(\alpha-\gamma)\,(\beta-\gamma)}{\gamma} \\
&= a_n(\gamma-1)\,(\gamma-1)+a_n(\gamma)\,(\alpha+\beta-2\gamma+1) \\
&\quad +a_n\,(\gamma+1)\,\frac{(\alpha-\gamma)\,(\beta-\gamma)}{\gamma}
\end{aligned}
$$

de (2.14) on obtient

$$\begin{aligned}
zF'_\gamma &= z(\sum_{n=0}^{\infty}(a_n(\gamma-1)(\gamma-1)z^{n+1}+a_n(\gamma)\left(\alpha+\beta-2\gamma+1\right)z^{n+1} \\
&\quad +a_n(\gamma+1)\frac{(\alpha-\gamma)\left(\beta-\gamma\right)}{\gamma})) \\
&= z((\gamma-1)\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\gamma-1)z^{n+1}+(\alpha+\beta-2\gamma+1)\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\gamma)z^{n+1} \\
&\quad +\frac{(\alpha-\gamma)\left(\beta-\gamma\right)}{\gamma}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\gamma+1)z^{n+1}) \\
&= z((\gamma-1)F_{\gamma-1}+(\alpha+\beta-2\gamma+1)\,F_\gamma+\frac{(\alpha-\gamma)\left(\beta-\gamma\right)}{\gamma}F_{\gamma+1})
\end{aligned}$$

et de (2.11) , nous obtenons

$$\begin{aligned}
-(\gamma-1)\left(F_\gamma-F_{\gamma-1}\right) &= z((\gamma-1)F_{\gamma-1}+(\alpha+\beta-2\gamma+1)\,F_\gamma \\
&\quad +\frac{(\alpha-\gamma)\left(\beta-\gamma\right)}{\gamma}F_{\gamma+1})
\end{aligned}$$

où

$$(1-z)\,F_{\gamma-1}=\left(1+z\frac{\alpha+\beta-2\gamma+1}{\gamma-1}\right)F_\gamma+\frac{(\alpha-\gamma)\left(\beta-\gamma\right)}{\gamma\left(\gamma-1\right)}F_{\gamma+1}$$

Nous résumons ce résultat dans le lemme suivant

Lemme 2.2 *La fonction hypergémetrique satisfait*

$$\begin{aligned}
(1-z)\,F\left(\alpha,\beta,\gamma-1,z\right) &= (1+z\frac{\alpha+\beta-2\gamma+1}{\gamma-1})F\left(\alpha,\beta,\gamma,z\right) \\
&\quad +\frac{(\alpha-\gamma)\left(\beta-\gamma\right)}{\gamma\left(\gamma-1\right)}F\left(\alpha,\beta,\gamma+1,z\right)
\end{aligned}$$

2.5 Polynôme hypergéométrique (Polynôme de Jacobi)

La série hypergéométrique $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ est un polynôme de dégrée n lorsque α où β n'est pas un entier positive $-n, n \in \mathbb{N}$, dans cette partie du travail nous exploitons plus de détail les caractéristiques de ces polynômes.

2.5.1 Définition et construction

La construction des polynômes de Jacobi est commence par l'étude des dérives d'ordre n de

$$f_n(z) = z^{\alpha+n}(1-z)^{\beta+n} \tag{2.15}$$

avec $\alpha > -1$ et $\beta > -1$ sont des constantes réelles. Remarquons que les racines de $f_n(z)$ sont $z = 0, z = 1$.

L'objectif est que nous voulons identifier le résultat ci-dessous avec les points singuliers réguliers de la fonction hypergéométrique donc

$$\begin{aligned}
f_n'(z) &= \frac{z^{\alpha+n}(\alpha+n)(1-z)^{\beta+n}}{z} - \frac{z^{\alpha+n}(\beta+n)(1-z)^{\beta+n}}{1-z} \\
&= \frac{\alpha+n}{z} f_n(z) \quad \frac{\beta+n}{1-z} f_n(z) \\
&\Rightarrow z(1-z)\, f_n'(z) = (\alpha+n)(1-z)f_n(z) - (\beta+n)zf_n(z) \\
&= [\alpha+n-(2n+\alpha+\beta)z]f_n(z)
\end{aligned}$$

La différenciation successive en utilisant la règle de Leibniz pour les dérives plus élevés du produit donne

$$z(z-1)f_n^{(m+1)}(z) + \begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix}(1-2z)f_n^{(m)}(z) \tag{2.16}$$
$$+ \begin{pmatrix} m \\ 2 \end{pmatrix}(-2)f_n^{(m-1)}(z)$$
$$= [\alpha + n - (2n+\alpha+\beta)z]f_n^{(m)}(z)$$
$$- \begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix}(2n+\alpha+\beta)f_n^{(m-1)}(z)$$

Soit $m = n+1$ et possons $g_n(z) = f_n^{(n)}(z)$, on trouve

$$z(z-1)g_n''(z) + (n+1)(1-2z)g_n'(z) - n(n+1)g_n(z) \tag{2.17}$$
$$= [\alpha + n - (2n+\alpha+\beta)z]g_n'(z) - (n+1)(2n+\alpha+\beta)g_n(z)$$

où encore

$$z(z-1)g_n''(z) + [(2-\alpha-\beta)z + \alpha - 1]g_n'(z) - (n+1)(n+\alpha+\beta)g_n(z) = 0 \tag{2.18}$$

C'est l'équation différentielle hypergéométrique

$$z(z-1)u''(z) + [(a+b+1)z - c]u'(z) + abu(z) = 0$$

avec

$$\left\{\begin{array}{c} a+b = 1-\alpha-\beta \\ abn = -(n+1)(n+\alpha+\beta) \\ c = 1-\alpha \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} a = n+1 \\ b = -n-\alpha-\beta \\ c = 1-\alpha \end{array}\right.$$

donc

$$g_n(z) \in P \begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & a & z \\ 1-c & c-a-b & b & \end{Bmatrix} = P \begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & n+1 & z \\ \alpha & \beta & -n-\alpha-\beta & \end{Bmatrix}$$

donc

$$g_n(z) = \frac{d^n}{dz^n}(z^{\alpha+n}(1-z)^{\beta+n}) \tag{2.19}$$

et

$$g_n(z) \in z^{\alpha}(1-z)^{\beta} P \begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & n+\alpha+\beta+1 & z \\ -\alpha & -\beta & -n & \end{Bmatrix}$$

cela signifie que

$$z^{\alpha}(1-z)^{\beta}\frac{d^n}{dz^n}(z^{\alpha+n}(1-z)^{\beta+n})$$

est un polynôme de degré n en z.

Nous savons que la définition de polynôme de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ en terme de fonction hypergéométrique est

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \begin{pmatrix} n+\alpha \\ n \end{pmatrix} F(-n, n+\alpha+\beta+1, \alpha+1, \frac{1-x}{2}) \tag{2.20}$$

2.5.2 Polynômes de Jacobi en $x = 1$

Apartir de (2.20) une expression explicite de la valeur des polynômes de Jacobi à $x = -1$ est donne par

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \begin{pmatrix} n+\alpha \\ n \end{pmatrix} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\Gamma(\alpha+1)} = \frac{(\alpha+1,n)}{n!} \tag{2.21}$$

La série hypergéométrique du théorème 2.1 fournit une forme explicite des polynômes de Jacobi, c'est-à-dire

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \begin{pmatrix} n+\alpha \\ n \end{pmatrix} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n,k)\,(n+\alpha+\beta+1,k)}{(\alpha+1,k)\,k!} \left(\frac{1-x}{2}\right)^k$$

où

$$\begin{aligned} (-n,k) &= \prod_{j=0}^{k-1}(-n,k) \\ &= (-n) \times \cdots \times (-n+k-1) \\ &= (-1)^k\, n \times \cdots \times (n+1-k) \\ &= (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) &= \begin{pmatrix} n+\alpha \\ n \end{pmatrix} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!k!} \frac{(n+\alpha+\beta+1,k)}{(\alpha+1,k)} \left(\frac{1-x}{2}\right)^k \qquad (2.22) \\ &= \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\Gamma(\alpha+1)} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!k!} \frac{(n+\alpha+\beta+1,k)}{(\alpha+1,k)} \left(\frac{1-x}{2}\right)^k \\ &= \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \frac{(n+\alpha+\beta+1,k)}{\Gamma(\alpha+1)\,(\alpha+1,k)} \left(\frac{1-x}{2}\right)^k \end{aligned}$$

mais

$$\begin{aligned} (\alpha+1,k) &= \prod_{v=0}^{k}(v+n+1) = (\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3) \times \cdots \times (\alpha+1+k) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1+k)}{\Gamma(\alpha+1)} \end{aligned}$$

d'où

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \frac{(n+\alpha+\beta+1,k)}{\Gamma(\alpha+1+k)} \left(\frac{1-x}{2}\right)^k \qquad (2.23)$$

De plus, les polynômes de Jacobi satisfont

$$\left(1-x^2\right)u''(x)+[\beta-\alpha(\alpha+\beta-2)x]u'(x)+n(n+\alpha+\beta+1)u(x)=0 \tag{2.24}$$

2.5.3 Polynômes de Jacobi en $x=-1$

Nous avons également une expression explicite de la valeur des polynômes de Jacobi à $x=-1$, par l'utilisation de formule de Gauss (corollaire 2.1) et la relation A_4

$$\begin{aligned}
F(-n,n+\alpha+\beta,\alpha+1,1) &= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma\left(\alpha+1-(-n)-(n+\alpha+\beta+1)\right)}{\Gamma(\alpha+1-(-n))\Gamma\left(\alpha+1-(n+\alpha+\beta+1)\right)} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1+n-n-\alpha-\beta-1)}{\Gamma(\alpha+1+n)\Gamma(\alpha+1-n-\alpha-\beta-1)} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(-\beta)}{\Gamma(\alpha+1+n)\Gamma(-n-\beta)}
\end{aligned}$$

d'où

$$F(-n,n+\alpha+\beta,\alpha+1,1)=\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(-\beta)}{\Gamma(\alpha+1+n)\Gamma(-n-\beta)} \tag{2.25}$$

Nous savons que $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}$.

pour $z=-\beta$

$$\Gamma(-\beta)\Gamma(1+\beta)=\frac{\pi}{\sin\pi\beta}\Rightarrow\Gamma(-\beta)=\frac{\pi}{\sin\pi\beta\ \Gamma(1+\beta)} \tag{2.26}$$

pour $z=-n-\beta$

$$\begin{aligned}
\Gamma(-n-\beta)\Gamma(1+n+\beta) &= \frac{\pi}{\sin(\pi(n+\beta))} \\
&\Rightarrow\ \Gamma(-n-\beta)=\frac{\pi}{\sin\left(\pi\left(n+\beta\right)\right)\Gamma(1+n+\beta)}
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Par la substitution de (2.26) et (2.27) dans (2.25) on trouve

$$\begin{aligned}
F(-n, n+\alpha+\beta, \alpha+1, 1) &= \frac{\Gamma\left(\alpha+1\right)\pi\sin\left(\pi\left(n+\beta\right)\right)\Gamma(1+n+\beta)}{\sin\pi\beta\ \Gamma(1+\beta)\ \Gamma\left(\alpha+1+n\right)\pi} \\
&= \frac{\Gamma\left(\alpha+1\right)\Gamma(1+n+\beta)\sin\left(n\pi+\pi\beta\right)}{\Gamma(\alpha+n+\beta)\Gamma(1+\beta)\sin(\pi\beta)} \\
&= (-1)^n\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+1+n)\Gamma(\beta+1)}
\end{aligned}$$

Aprés la substitusions de $F(-n, n+\alpha+\beta, \alpha+1, 1)$ dans (2.20) on obtient

$$\begin{aligned}
P_n^{(\alpha,\beta)}(-1) &= \begin{pmatrix} n+\alpha \\ n \end{pmatrix} F(-n, n+\alpha+\beta+1, \alpha+1, 1) \\
&= \begin{pmatrix} n+\alpha \\ n \end{pmatrix} (-1)^n\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+1+n)\Gamma(\beta+1)} \\
&= (-1)^n\frac{\Gamma(n+1+\alpha)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+n+1)}{n!\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1+n)\Gamma(\beta+1)} \\
&= (-1)^n\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\beta+1)n!} \\
&= (-1)^n\frac{\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\beta+1)n!}
\end{aligned}$$

2.5.4 Autre présentation de Polynôme de Jacobi

Utilisons le lemme 2.3, le polynôme de Jacobi c'écrit en fonction de la fonction hypergéométrique sous la forme

$$\begin{aligned}
P_n^{(\alpha,\beta)}(x) &= \begin{pmatrix} n+\alpha \\ n \end{pmatrix} [1-\left(\frac{1-x}{2}\right)]^n F(-n, \alpha+1-(n+\alpha+\beta+1), \alpha+1, \frac{\frac{1-x}{2}}{-1+\frac{1-x}{2}}) \\
&= \begin{pmatrix} n+\alpha \\ n \end{pmatrix} [\frac{2-1+x}{2}]^n F(-n, \alpha+1-n-\alpha-\beta-1, \alpha+1, \frac{\frac{1-x}{2}}{\frac{1-x-2}{2}}) \\
&= \begin{pmatrix} n+\alpha \\ n \end{pmatrix} \left(\frac{x+1}{2}\right)^n F(-n, -n-\beta, \alpha+1, \frac{\frac{1-x}{2}}{\frac{-x-1}{2}}) \\
&= \begin{pmatrix} n+\alpha \\ n \end{pmatrix} \left(\frac{x+1}{2}\right)^n F(-n, -n-\beta, \alpha+1, \frac{1-x}{2}\frac{2}{-(x+1)}) \\
&= \begin{pmatrix} n+\alpha \\ n \end{pmatrix} \left(\frac{x+1}{2}\right)^n F(-n, -n-\beta, \alpha+1, \frac{x-1}{x+1})
\end{aligned}$$

Chapitre 3

Annexe

3.1 La fonction gamma et les fonctions associées

La fonction gamma joue un rôle central dans la représentation des fonctions spéciales. Cette fonction et d'autres fonctions dérivées de la fonction gamma sont rassemblées dans cette annexe avec certaines de leurs propriétés de base.

3.1.1 La fonction gamma $\Gamma(z)$

La fonction gamma n'est pas une fonction spéciale en ce sens qu'elle est une solution à une équation différentielle ordinaire du second ordre du genre que nous avons analysé dans ce travail, c'est-à-dire une équation différentielle de type fuchsienne avec un nombre fini de points singuliers réguliers. C'est ce que l'on peut déduire du fait que la fonction gamma a une infinité de pôles - une propriété qu'aucune solution à une équation différentielle ordinaire de second ordre avec un nombre fini de points singuliers réguliers ne peut avoir. Au lieu de cela, la fonction gamma doit être définie par d'autres moyens. En fait, il vérifie une équation différentielle plutôt qu'une équation différentielle, voir ci-dessous $(A.2)$. Il y a plusieurs façons de définir la fonction gamma $\Gamma(z)$. Nous préférons la définir par une représentation intégrale, due à Euler, à savoir,

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty \exp(-t)\, t^{z-1} dt, \operatorname{Re} z > 0 \qquad (A.1)$$

Une valeur explicite est

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty \exp(-t)\, dt = 1$$

Nous voyons facilement par intégration par parties que

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z), \operatorname{Re} z > -1 \text{ et } z \neq 0 \qquad (A.2)$$

Evalué aux entiers non négatifs, $\Gamma(z+1)$ coïncide avec les factorielles, c'est-à-dire,

$$\Gamma(z+1) = n! \quad n \in \mathbb{N}$$

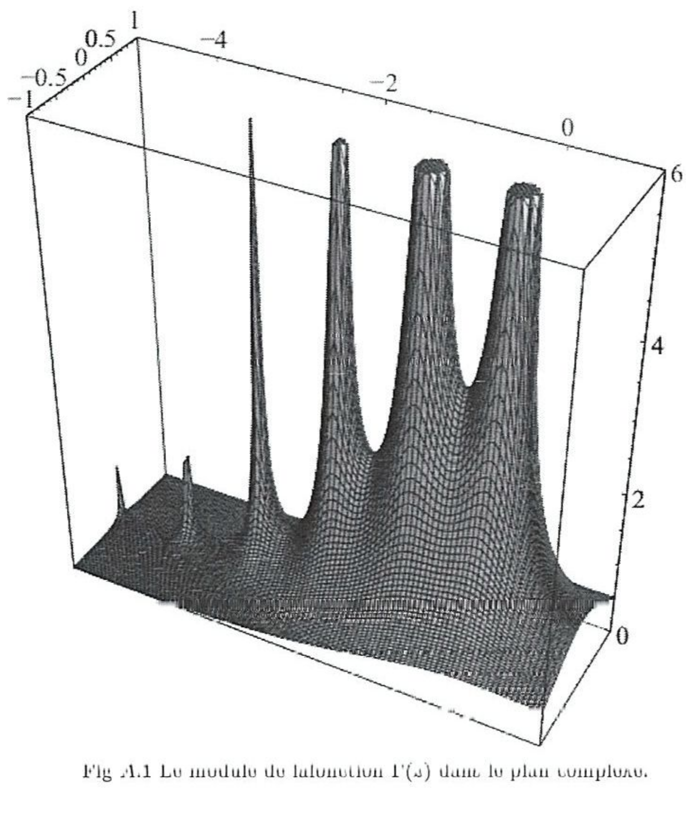

Fig A.1 Le module de lafonction $\Gamma(s)$ dans le plan complexe.

qui est facile à vérifier par induction sur n. Ce résultat montre que la fonction gamma est une généralisation des factorielles des entiers non négatifs au plan complexe. La fonction gamma a des pôles simples à $z = 0, -1, -2, -3, ...$, qui est vu par l'utilisation répétée de $(A.2)$, voir la figure $A.1$,

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = ... = \frac{\Gamma(n+1+z)}{(n+z)(n-a+z)...z} = \frac{\Gamma(n+1+z)}{(n+z)(z,n)}$$

où nous avons introduit le symbole Appell, (a, n), défini dans la section (3.1.2).

Le résidu de $\Gamma(z)$ aux pôles $z = 0; -1; -2; -3, ...$: est déterminé par

$$\underset{z \to -n}{\mathrm{Res}}\, \Gamma(z) = \lim_{z \to -n} (z+n)\Gamma(z) = \frac{\Gamma(1)}{(-n,n)} = \frac{(-1)^n}{n!}, n \in \mathbb{N} \qquad (A.3)$$

nous avons utiliser $(A.8)$ et $\Gamma(1) = 1$.

Une autre définition de la fonction gamma consiste à utiliser la représentation intégrale,

$$\Gamma(z) = \frac{i}{2\sin\pi z} \int_C \exp(-t)(-1)^{z-1} dt, \forall z \in \mathbb{C}$$

où le contour C est représenté sur la Figure $A.2$.

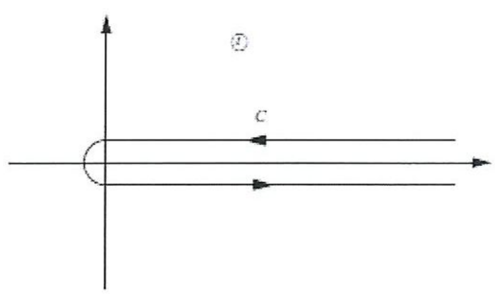

Fig.A.2 Définition du contour C,qui encercle l'origine dans le sens anti-horaire.

L'inverse de la fonction gamma $\frac{1}{\Gamma(n)}$ est une fonction entière avec des racines à $z = 0; -1; -2; -3, ...,$ Le théorème de factorisation de Weierstrass stipule que toute fonction entière peut être écrite comme un produit infini. La fonction gamma a la formule du produit

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z \exp\left(\gamma z\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) \exp\left(\frac{-z}{n}\right); \forall z \in \mathbb{C}$$

où γ est la constante d'Euler-Mascheroni1 définie en (3.1.5).

Nous utilisons aussi fréquemment

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \tag{A.4}$$

3.1.2 Le symbole Appell

La factorielle ascendante, également appelée symbole Appell ou symbole Pochhammer, (a, n), définie pour les entiers non négatifs comme

$$(\alpha, n) = \prod_{v=0}^{n-1} (v + \alpha) = \alpha\left(\alpha+1\right)\left(\alpha+2\right) \times \cdots \times \left(\alpha+n-1\right) = \frac{\Gamma(\alpha+z)}{\Gamma(\alpha)}$$

Notons que $(\alpha, n) = 1$.

En conséquence de cette définition, nous dérivons facilement les relations de récursivité simples suivantes

$$\begin{cases} (\alpha, n) = \alpha\left(\alpha+1, n-1\right) \\ (\alpha, n)\left(\alpha+n\right) = \left(\alpha, n+1\right) = \alpha\left(\alpha+1, n\right) \end{cases} \tag{A.5}$$

Le symbole Appell pour les entiers négatifs n peut être défini par l'utilisation répétée de $(A.4)$. Nous avons pour les valeurs non entières α

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha - n) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha+n)} \frac{\pi}{\sin \pi\left(\alpha-n\right)} \\ &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(1-\alpha+n)} \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \\ &= \frac{(-1)^n \, \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha+n)} \\ &= \frac{(-1)^n \, \Gamma(\alpha)}{(1-\alpha, n)} \end{aligned} \tag{A.6}$$

à partir de laquelle nous définissons

$$(\alpha, -n) = \frac{\Gamma(\alpha - n)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{(-1)^n}{(1-\alpha, n)} \qquad (A.7)$$

De même,

$$(n, -n) = (-n)(-n+1)(-n+2) \times \cdots \times (-1) = (-1)^n n! \qquad (A.8)$$

3.1.3 Coefficient binomial

Relatif à la fonction gamma est le coefficient binomial. Pour les entiers non négatifs n et k, le coefficient binomial est défini comme

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

que nous étendons à toutes les valeurs entières k par

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = 0 \text{ si } k < 0 \text{ où } k > n.$$

Le coefficient binomial pour une valeur non entière a peut être exprimé dans la fonction gamma, à savoir,

$$\begin{pmatrix} n \\ \alpha \end{pmatrix} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - n)n!} \qquad (A.9)$$

et, en utilisant $(A.4)$ et $z\,\Gamma(z)=\Gamma(z+1)$,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} -n \\ \alpha \end{pmatrix} &= \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha-n)n!} = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha-n)n!} \qquad (A.10)\\
&= (-1)^{n-1}\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}\frac{(1+\alpha)\times\cdots\times(n-1+\alpha)}{\Gamma(\alpha)\,(-1-\alpha)\times\cdots\times(1-n-\alpha)\,\Gamma(1-\alpha-n)n!}\\
&= (-1)^{n-1}\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}\frac{(1+\alpha)\,(2+\alpha)\times\cdots\times(n-1+\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(-\alpha)n!}\\
&= (-1)^{n}\frac{(1+\alpha)\,(2+\alpha)\times\cdots\times(n-1+\alpha)\,\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(\alpha)n!}\\
&= (-1)^{n}\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha)n!} = (-1)^{n}\frac{(\alpha,n)}{n!}
\end{aligned}$$

3.1.4 La fonction bêta $B(x,y)$

La fonction bêta $B(x;y)$ est définie comme

$$B\,(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,dt,\ \ \mathrm{Re}\,x,\mathrm{Re}\,y>0 \qquad (A.11)$$

On peut prouver que cette intégrale est un quotient des fonctions gamma. Nous avons

$$B\,(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

3.1.5 La constante d'Euler Mascheroni

La constante d'Euler Mascheroni γ est définie comme

$$\begin{aligned}
\gamma &= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right) \qquad (A.12)\\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)\approx 0,5772156649...
\end{aligned}$$

Cette définition est équivalente à

$$\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right\}$$

En fait, la somme partielle de l'expression peut facilement être réécrite

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right\} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \ln(n) + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Conclusion générale

Les travaux du $XIXe$ siècle comprennent ceux de Ernst Kummer et la caractérisation fondamentale par Bernhard Riemann de la fonction F par le biais de l'équation différentielle qu'elle vérifie. Riemann a démontré que l'équation différentielle du second ordre (en la variable Gre) pour F, considérée dans le plan complexe, pouvait être caractérisée(sur la sphère de Riemann) par ses trois singularités régulières : que toute la partie algorithmique de la théorie était une conséquence de résultats de base et de l'usage des transformations de Mobius comme groupe de symétrie.

Par la suite, les séries hypergéométriques ont été généralisées au cas de plusieurs variables complexes, par exemple par Paul Appell, mais une théorie générale comparable a mis du temps à apparaître. De nombreuses identités ont été découvertes, dont quelques unes remarquables. Des analogues avec un paramètre q'ont été trouvées. Durant le XXe siècle, les fonctions hypergéométriques ont formé une partie active des mathématiques combinatoires, avec de nombreuses interactions avec les autres domaines. Il y a plusieurs définitions nouvelles de généralisations des fonctions hypergéométriques, notamment par Aomoto Il y a des applicationsà la combinatoire des arrangements d'hyperplans.

On peut définir des séries hypergéométriques sur des espaces symétriques riemanniens et sur des groupes de Lie semi simples.

Leur importance transparait dans l'exemple suivant : la série hypergéométrique est très prochedes polynômes de Legendre et exprime, vue comme harmonique sphérique, les propriétés de symétrie de la sphère de Riemann.

L'étude du développement de la théorie de la fonction hypergéométrique est attachante parce qu'elle a puissamment agi sur l'évolution de plusieurs chapitres de l'Analyse, devenus très importants, par exemple : la représentation conforme, les équations linéaires à coefficients rationnels, les fonctions Fuchsiennes.

Bibliographie

[1] Gerhard Kristensson : Second order Differential Equations : Special Funtions and Their Classification. Springer Science + Business Media, LLC (2010).

[2] Greene, R. E, Krantz, S. G : Function Theory of once complexe varriable, thierd edn, American Mathematical Society, Providence, R. I (2006).

[3] Slavyanov, S. Y., Lay, W : Special Functions : A Unified Theory Based on Singularities. Oxford University Press, Oxford (2000).