République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

<u>Mémoire</u>

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : **EDP et Analyse numérique**

Par :

Bouguerne Wafa

Intitulé

Sur un problème intégro-différentiel parabolique non linéaire avec une condition au limite de Dirichlet inconnue

<u>Dirigé par</u> : Pr. Chaoui Abderrazek

Devant le jury

RESIDENT	Dr:	Boulares Hamid	MCB	Univ-Guelma
APPORTEUR	Dr:	Chaoui Abderrazek	Prof	Univ-Guelma
XAMINATEUR	Dr:	Hitta Amara	Prof	Univ-Guelma

Session Juin 2018

Remerciement

On remercie dieu le tout puissant de nous avoir donné la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce mémoire.

*Tout d'abord, ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de **Pr. Chaoui Abderrazek**, on le remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience, sa disponibilité durant notre préparation de ce mémoire.*

Je remercie messieurs les membres de jury pour avoir accepter d'évaluer ce travail et pour toutes remarques et critiques.

Nos remerciement s'adresse également à tout nos professeurs pour leurs générosités et le grand patience dont ils ont su faire preuve malgré leurs charges académéques et professionnelles.

Dédicaces

A mon source de joie et de bonheur, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir, à toi mon père.

A la lumière de mes jours, la flamme de mon cœur, ma vie et mon Bonheur, à toi ma mère.

A mes très chères sœurs : Sonia, Soumia, Hayette , Nawel.

A tout ma famille.

A mes amies :Salwa, Loubna, Sara, Ahlem, Amina, et surtout Wahida pour leurs conseils, aides, et encouragements.

Aux personnes qui m'ont toujours encouragé, qui étaient toujours à mes côtés.

Table des Matières

Introduction

L'exploitation humaine de l'énergie nucléaire a conduit à l'apparition du problème du stockage des déchets, l'agence internationale de l'énergie atomique (AIEA) a montré en 2007 que l'enfouissement profond ne peut empêcher les déchets radioactifs d'atteindre le sol, les sources d'eau, et menacer la présence d'organismes vivants à la surface de la planète. Cela montre que la modélisation des écoulement et du transport en milieu poreux est trés important.
Dans ce mémoire nous sommes intéressés par l'application de la méthode de Rothe sur un problème dégénéré parabolique intégro-différentiel non linéaire (voir[5]) avec un condition au bord de dirichlet inconnue, ce genre de problème on peut le rencontrer dans la modélisation des flux des fluides dans des mélieux poreux.

Elle est composé par trois chapitres essentiels:

① Dans le premier chapitre on rappelle quelques notions d'analyse fonctionnelle nécessaire pour l'étude des problèmes parabolique.

② Le deuxième chapitre consiste à resoudre une équation dégénéré parabolique intégro-différentielle non linéaire $\partial_t g(u) - \Delta u = F + \int_0^t f(s, u(s))ds$ avec une condition de Dirichlet inconnue $\alpha(t)$ qu'on va essayer de la reconstruire à travers une nouvelle condition intégrale $E(t) = \int_\Omega g(u(t,x))dx$, de cela on va montrer l'existence et l'unicité de la solution approchée ainsi que quelques estimations à priori.

③ Dans la troisième chapitre on va étudier la convergence de la solution approchée vers la solution du problème posé, l'existence et l'unicité de la solution faible dans des espaces fonctionnel appropriés.

Chapitre 1

Rappels d'analyse fonctionnelle

1.1 Espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$

<u>**Définition**</u> **1.1.1** *Soit p un élément de $[1, +\infty]$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on appel espace de Lepesgue, on le note $L^p(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions numériques u de Ω dans $\mathbb{C}$, Lebesgue mesurables vérifiant :*

1. *Si $1 \leq p < +\infty$,*
$$\int_\Omega |u(x)|^p \, dx < +\infty,$$
2. *Si $p = +\infty$,*
$$\underset{x\in\Omega}{supess}\, |u(x)| < +\infty,$$

où
$$\underset{x\in\Omega}{supess}\, |u(x)| = \inf\{M \backslash\, |u(x)| \leq M \; p.p\,\}.$$

<u>**Définition**</u> **1.1.2** *Tout espace vectoriel normé complet est appelé de Banach.*

1.1.1 Quelques propriétés

a) L'application de $L^p(\Omega)$ dans $\mathbb{R}_+$:

$$u \to \begin{cases} \|u\|_p &= \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}, \ 1 \leq p < +\infty, \\ \|u\|_\infty &= \underset{x\in\Omega}{supess} \ |u(x)|, \quad p = +\infty, \end{cases}$$

définit une norme sur $L^p(\Omega)$, norme pour laquelle $L^p\,(\Omega)$ est un espace de Banach .

b) Pour tout réel p dans $[1, +\infty[$, le dual de $L^p(\Omega)$ est isomorphe algébriquement et topologiquement à $L^q(\Omega)$, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, l'application de dualité est définit par:

$$\begin{aligned} L^p(\Omega) \times L^q(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{C}^n, \\ (u, v) &\longrightarrow \int_\Omega u(x)v(x)dx, \end{aligned}$$

pour tout réel p dans $[1, +\infty[$, le bidual de $L^p\,(\Omega)$, s'identifie algébriquement et topologiquement à $L^p(\Omega)$ (pour plus d'information voir[9]).

On dit que l'espace $L^p(\Omega)$ est réflexif.

Lemme 1.1.1 (De Densité)
L'espace $C_c(\Omega)$ des fonctions continues à support compact est dense dans $L^p\,(\Omega)$ pour tout $1 \leq p < +\infty$.

1.2 Espace de Hilbert

Soit $\langle H, \langle ., . \rangle \rangle$ un espace préhilbertien. On définit une norme sur H par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

On appelle espace de Hilbert espace préhilbertien dont la norme associée en fait un espace complet.

Définition 1.2.1 *(L'espace $L^2\,(\Omega)$)*
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, muni de la mesure de Lebesgue, on définit l'espace $L^2(\Omega)$ des fonctions mesurables de carré sommable dans Ω. Muni du produit scalaire:

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f(x)g(x)dx,$$

$L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert. On note

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

la norme correspondante.

1.2.1 Espaces de Sobolev

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, on définit les espaces de Sobolev suivants:

1- $H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \text{ t.q } D_i u(\Omega) \in L^2(\Omega), \text{ pour tout } i = 1, \ldots, N\}$.

Dans cette définition, lorsqu'on dit $D_i u(\Omega) \in L^2(\Omega)$, on sous entend, il existe une fonction $g \in L^2(\Omega)$ telle que

$$\langle D_i f(\Omega), \varphi\rangle_{D'(\Omega), C_c^\infty(\Omega)} = -\int_\Omega g.\varphi\, dx \quad \text{pour tout } \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Notation 1.2.1 $(D'(\Omega))$
L'ensemble des formes linéaires sur $C_c^\infty(\Omega)$: on dit que $D'(\Omega)$ est le dual de $C_c^\infty(\Omega)$.

2- Pour $m \in \mathbb{N}$,

$$H^m(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega) \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^N \text{ tq } |\alpha| \leq m\right\}.$$

3- Pour $1 \leq p \leq +\infty$ et $m \in \mathbb{N}$, on a:

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^N \text{ tq } |\alpha| \leq m\right\}.$$

Noter que pour $m = 0$, *l'espace* $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$.

Les espaces $H^m(\Omega)$ sont des espaces de Hilbert lorqu'on les munit du produit scalaire:

$$\boxed{\langle u, v\rangle_{H^m} = \sum_{|\alpha|\leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle_{L^2(\Omega)}.}$$

d'où

$$\langle u, v\rangle_{H^1} = \int_\Omega \left(u.v + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i}.\frac{\partial v}{\partial x_i}\right).$$

Notons aussi que $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$.

Une norme naturelle sur $W^{m,p}(\Omega)$ est définie par:

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p} \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{Si } 1 \leq p < +\infty; \\ \max\limits_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty}, & \text{Si } \quad p = +\infty; \end{cases}$$

où $\|.\|_{L^p}$ désigne la norme dans $L^p(\Omega)$.
L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ muni de la norme précédent est un espace de Banach.

1.3 Espaces de Boschner

1- $C([0,T], L^2(\Omega)) = \{ f : [0,T] \to L^2(\Omega) \text{ continue}\}$ muni de la norme:

$$\boxed{\|f\|_{C([0,T],L^2(\Omega))} = \max_{t\in[0,T]} \| f\|_{L^2(\Omega)}.}$$

2- $L^\infty([0,T], H^1(\Omega)) = \{ f : [0,T] \to H^1(\Omega) \text{ essenstiellement bornés}\}$ muni de la norme:

$$\boxed{\|f\|_{L^\infty([0,T],H^1(\Omega))} = \sup_{t\in[0,T]} \| f\|_{H^1(\Omega)}. \qquad \text{p.p.}}$$

3- $L^2((0,T),\ L^2(\Omega)) = \{ f : [0,T] \to L^2(\Omega) \text{ à carré intégrable}\}$ muni de la norme:

$$\boxed{\|f\|_{L^2((0,T),L^2(\Omega))} = \int_{(0,T)} \|f\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt < +\infty.}$$

1.4 Convergence faible

Soit E un espace de Banach.

Définition **1.4.1** *(x_n) converge faiblement dans E vers x (voir[ ]) si l'on a :*

$$\lim_{n\to+\infty}\langle x',x_n\rangle=\langle x',x\rangle\Leftrightarrow\lim_{n\to+\infty}\langle x',x_n-x\rangle=0,\forall x'\in E'.$$

avec E' l'espace dual de E.

Notation 1.4.1

1. *On note par $x_n\rightharpoonup x$ la convergence faible dans E.*
2. *On note par $x_n\to x$ la convergence forte dans E (c'est-à-dire la convergence en norme).*

Remarque 1.4.1

- *Si $x_n\to x$ fortement $(\|x_n-x\|_E\to 0)\Rightarrow x_n\rightharpoonup x$ car :*

$$\forall x'\in E':\langle x',x_n-x\rangle\leq\|x'\|\,\|x_n-x\|\to 0.$$

Définition **1.4.2** *Soit E et F deux espaces de Banach. et T une application linéaire continue de E dans F et soit $\{x_n\}$ une suite de E telle que $x_n\overset{E}{\rightharpoonup}x$ alors $T(x_n)\overset{F}{\rightharpoonup}T(x)$.*

Remarque 1.4.2 *La convergence faible n'implique pas la convergence forte. On pourra considérer une suite orthonormée dans un espace de Hilbert de dimension infinie puis montrer qu'elle converge faiblement vers 0, mais que l'on ne peut en extraire aucune sous-suite fortement convergente.*

1.5 Les inégalités utilisées

1.5.1 Inégalité de trace

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, on a

$$\|Z\|_{\Gamma}^2 \leq \varepsilon \|\nabla Z\|^2 + C_\varepsilon \|Z\|^2, \forall Z \in H^1(\Omega), 0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0.$$

(pour plus de détails voir[6]).

1.5.2 Inégalité de cauchy-schwarz

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}$, $\forall f, g \in L^2(\Omega)$:

$$\left|\int_\Omega f.g dx\right| \leq \left(\int_\Omega |f|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |g|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Où

$$\left|\sum_{i=1}^n f_i.g_i dx\right| \leq \left(\sum_{i=1}^n f_i^2 dx\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n g_i^2 dx\right)^{1/2}.$$

1.5.3 Inégalité de young

Soient a , $b > 0$, et $p, q \in]1, +\infty[$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors

$$a.b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

1.5.4 ε-Inégalité

$$|x.y| \leq \frac{\varepsilon}{2}x^2 + \frac{1}{2\varepsilon}y^2, \qquad \forall\, \varepsilon \geq 0,\ \forall\, x, y$$

1.6 Quelques théorèmes utilisés

1.6.1 Lemme de Gronwall

•**Cas continu:** Soit α, β, et γ des fonctions réelles à valeur dans $I = [1, \infty[$, suppossons que β et γ sont deux fonctions continues. Si β est non-négatif, α est non-décroissant et si γ satisfait l'inégalité intégrale suivante:

$$\gamma(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\gamma(s)ds, \qquad \forall t \in I,$$

alors

$$\gamma(t) \leq \alpha(t) \exp\left(\int_a^t \beta(s)ds\right).$$

• **Cas discret:** Si $\gamma_n \geq 0$, $\alpha_n \geq \alpha_{n-1}$, $\beta_j \geq 0$ et

$$\gamma_n \leq \alpha_n + \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j \gamma_j \ , n \geq 0,$$

alors

$$\gamma_n \leq \alpha_n \exp\left(\sum_{j=0}^{n-1} \beta_j\right).$$

1.6.2 Le Schéma de discrétisation de la méthode de Rothe

On divise l'intervalle du temps en n sous intervalles (t_{i-1}, t_i), $i = 1, ..., n$ où $t_i = ih$ et $h = \frac{T}{n}$.

On note par $u_i = u_i(x, ih)$ les approximations de u.

On remplace la dérivée de la fonction u, $\frac{\partial u}{\partial t}$ par $\delta u_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{h}$ pour tout $t = t_i$.

On obtient un système formé de n équations en x où $u_i(x)$ est l'inconnu, donc on approxime le problème posé à tout point $t = t_i, i = 1, ..., n$. Par un nouveau problème discret.

On détermine les fonctions u^n solutions de système obtenu.

On construit les fonctions de Rothe (voir[4]) comme suit:

$$u^n = u_{i-1} + (t - t_{i-1})\delta u_i, \ t \in [t_{i-1}, t_i] \ i = 1, ..., n$$

c-à-d : on vas approximer la solution u par une suite de polynome de degré 1, u^n par morceau sur chaque sous intervalle $[t_{i-1}, t_i]$.

Les fonctions test correspondantes:

$$\bar{u}_n(t) = \begin{cases} u_i & t \in [t_{i-1}, t_i] \\ u_0 & t = 0 \end{cases} \quad i = 1, ..., n.$$

Après avoir démontré quelques estimations pour la solution approchée, nous établissons la convergence de la solution approchée $u^n(\mathrm{t})$ vers la solution du problème posé.

1.6.3 Lemme d'Abel

$$\sum_{i=1}^{j} z_i(w_i - w_{i-1}) = z_j w_j - z_0 w_0 - \sum_{i=1}^{j}(z_i - z_{i-1})w_{i-1}, \quad \forall z_i, w_i \in \mathbb{R}.$$

(voir [9]).

1.6.4 Formule de Green

On suppose que Ω est un ouvert borné de frontière $\Gamma = \partial\Omega$ régulière, alors:

$\forall u, v \in H^1(\Omega)$

On a:

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}.vdx = -\int_\Omega u.\frac{\partial v}{\partial x_i}dx + \int_\Gamma u.v.\gamma_i d\sigma.$$

Où γ_i est la ième composante du vecteur unitaire normale extèrieure.

En remarquant que $\Delta u = div(\nabla u)$ alors on a:

$$\boxed{\int_\Omega \Delta u.vdx = -\int_\Omega \nabla u.\nabla vdx + \int_\Gamma(\nabla u.\eta)vd\sigma.}$$

1.6.5 opérateur demicontinue et hémicontinue

<u>Définition</u> **1.6.1** *On dit que $A : V \to V^*$ un opérateur demicontinue dans V.*

Si $v_n \in V, n = 1, 2, \ldots$ et $v_n \to v$ lorsque $n \to +\infty$ alors $A(v_n) \rightharpoonup A(v)$ dans V^* (voir [10]).

<u>Définition</u> **1.6.2** *On dit que $A : V \to V^*$ un opérateur hémicontinue dans V.*

Si $u \in V, t_n \to 0, n = 1, 2, ..$ et $v + t_n u \in V$ alors $A(v + t_n u) \rightharpoonup A(v)$ dans V^* (voir [10]).

Chapitre 2

Position du problème et estimations à priori

2.1 Position du problème

Ce travail est consacré à la reconstruction des données de Dirichlet manquante sur une partie de la frontière à partir d'une mesure intégrale supplémentaire

$$E(t) = \int_\Omega g(u(t,x))dx. \tag{2.1}$$

où g est une fonction non linéaire. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \in \mathbb{N}$, un domaine borné avec une frontière Lipschitzienne continue $\Gamma = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$ tq $|\Gamma_2| > 0$, on note v le vecteur unitaire orienté à l'extèrieure sur Γ, le problème déterminant est représenté par une équation intégro-différentielle parabolique non linéaire avec un terme de mémoire et des données initiales, plus précisément

$$\left\{\begin{array}{ll} \partial_t g(u) - \Delta u = F + \int_0^t f(s,u(s))ds & \text{dans } (0,T)\times\Omega; \\ -\nabla u.v = h & \text{sur } (0,T)\times\Gamma_1; \\ u = \alpha & \text{sur } (0,T)\times\Gamma_2; \\ u(0) = u_0 & \text{dans } \Omega. \end{array}\right. \qquad (p)$$

Ce genre de problème modélise l'écoulement dans des milieux poreux et le transport des contaminants réactifs (pour plus de détail voir [2] et [7]).

L'opérateur de Volterra modélise alors les effets de mémoire (absorption / désorption). La condition au limite de Neumann sur Γ_1 décrit le flux à travers Γ_1 et la mesure intégrale (2.1) représente la masse stockée à l'intérieur de Ω à l'instant t . Nous cherchons la concentration des contaminants $u(t,x)$ dans tout le domaine et sur le bord Γ_2, où $u(t,x)=\alpha(t)$ (dépend uniquement de t), par exemple, d'un contact avec un milieu à diffusion rapide.

On définit l'espace de Sobolev $V=\left\{\varphi\in H^1(\Omega);\ \varphi_{\backslash\Gamma_2}\ \textit{est constant}\right\}$ tq

$$\|u\|_1^2=\|u\|^2+\|\nabla u\|^2.$$

2.2 Hypothèses

Pour resoudre le problème (p), on suppose que:

$H_1)$ $g\in C^1(\mathbb{R})$ vérifiée:

g est une fonction continue croissante monotone telle que

$$g(0)=0,\quad 0<\delta\leq g'(s),\quad |g(s)|\leq C(1+|s|),\ \forall s\in\mathbb{R}.$$

$H_2)$ f est une fonction globalement lipschitzienne continue c-à-d

$$\left|f(t,v)-f(t',v')\right|\leq C\left(\left|t-t'\right|+\left|t-t'\right|\left|v'\right|+\left|v-v'\right|\right).$$

$H_3)$ $F:[0,T]\to L^2(\Omega)$, $h:[0,T]\to L^2(\Gamma_1)$.

$H_4)$ $E':[0,T]\to\mathbb{R}$, et $u_0\in L^2(\Omega)$.

$H_5)$ $\partial_t F\in L^2((0,T),L^2(\Omega))$, $\partial_t h\in L^2((0,T),L^2(\Gamma_1))$.

Remarque 2.2.1

1- On note par $\|.\|$ *la norme de l'espace* $L^2(\Omega)$.

2- Le produit scalaire dans $L^2(\Gamma)$ *est définie par* $\langle u,v\rangle_\Gamma=\int_\Gamma u(x)v(x)d\Gamma$.

3- V^* *est le dual de l'espace* V.

Définition 2.2.1 *Une solution faible du problème (p) est une fonction satisfaisant :*

1) $\partial_t g(u) \in L^2((0,T),V^*), u(0,x) = u_0(x)$.

2) Pour tout φ *nous avons*

$$\begin{aligned}\langle \partial_t g(u), \varphi \rangle + \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle &= \langle F, \varphi \rangle - \langle h, \varphi \rangle_{\Gamma_1} + \varphi_{\backslash \Gamma_2} \langle \nabla u.v, 1 \rangle_{\Gamma_2} \\ &+ \left(\int_0^t f(s, u(s))ds, \varphi \right), \forall \varphi \in V.\end{aligned} \tag{2.2}$$

Où

$$\langle \nabla u.v, 1 \rangle_{\Gamma_2} = E' - \langle F, 1 \rangle + \langle h, 1 \rangle_{\Gamma_1} - \left(\int_0^t f(s, u(s))ds, 1 \right).$$

2.3 La discrétisation temporelle

La discrétisation temporelle est basée sur le schéma d'Euler implicite. On divise l'intervalle $[0,T]$ en n sous intervalles $[t_{i-1}, t_i]$, avec $t_i = i\tau$, nous introduisons les notations

$$\boxed{z_i = z(t_i), \quad \delta z_i = \frac{z_i - z_{i-1}}{\tau},}$$

pour toute fonction z.

Après la discrétisation, le schéma d'approximation récurrent pour $i = 1, \ldots\ldots, n$ devient

$$\begin{aligned}\langle \delta g(u_i), \varphi \rangle + \langle \nabla u_i, \nabla \varphi \rangle &= \langle F_i, \varphi \rangle - \langle h_i, \varphi \rangle_{\Gamma_1} + \left(\sum_{j=0}^{i-1} f(t_j, u_j)\tau, \varphi \right) \\ &+ \varphi_{\backslash \Gamma_2} \left[E_i' - \langle F_i, 1 \rangle + \langle h_i, 1 \rangle_{\Gamma_1} - \left(\sum_{j=0}^{i-1} f(t_j, u_j)\tau, 1 \right) \right],\end{aligned} \tag{2.3}$$

pour toute fonction φ de l'espace V. Notons que u_i désigne l'approximation de la solution à l'instant $t_i, i = 1, ..., n$, i.e, $u_i \approx (t_i)$.

Le lemme suivant montre l'existence et l'unicité d'une solution faible à chaque pas du temps.

Lemme 2.3.1 *Supposons que les hypothèses* (H_1), (H_2), (H_3)*et* (H_4) *sont satisfaites. Alors, pour tout* τ *et pour tout* $i = 1, ..., n$. *Il existe un* $u_i \in V$*unique qui résout le problème variationnel (2.3).*

Preuve 2.3.1 *Nous appliquons la théorie des opérateurs monotones (voir [11]). Nous définissons l'opérateur* $A : V \to V^*$ *comme*

$$\langle A(u), \varphi\rangle = \langle g(u), \varphi\rangle + \langle \nabla u, \nabla \varphi\rangle \tau.$$

Nous voulons montrer l'hémicontinuité, la coercivité et la monotonie de A. *Ceci est suffisant pour montrons l'existence et l'unicité de* u_i.

Premièrement, nous prouvons que l'opérateur A *est demicontinue. De cela, il s'ensuit que* A *est hémicontinue. Par conséquent, nous montrons que si* $v_n \to v$ *dans* V, *alors* $A(v_n) \rightharpoonup A(v)$ *dans* V^*.*Un calcul simple donne*

$$\begin{aligned}
|< A(v_n) - A(v), \varphi >| &= |\langle g(v_n) - g(v), \varphi\rangle + \langle \nabla(v_n - v), \nabla\varphi\rangle \tau|, && \forall \varphi \in V.\\
&\leq |\langle g(v_n) - g(v), \varphi\rangle| + |\langle \nabla(v_n - v), \nabla\varphi\rangle \tau|, && \forall \varphi \in V.\\
&\leq \|g(v_n) - g(v)\| \|\varphi\| + \|\nabla(v_n - v)\| \|\nabla\varphi\| \tau, && \forall \varphi \in V.\\
&\leq \|g(v_n) - g(v)\| \|\varphi\|_1 + \|v_n - v\|_1 \|\varphi\|_1 \tau, && \forall \varphi \in V.
\end{aligned}$$

De la continuité de g *et* $v_n \to v$ *dans* V, *il s'ensuit que*

$$|< A(v_n) - A(v), \varphi >| \to 0 \quad \forall \varphi \in V$$

donc A *est demicontinue.*

Ensuite, en utilisant le théorème de la valeur moyenne et la monotonie de g, *nous obtenons*

$$\begin{aligned}
< A(u) - A(v), u - v > &= \langle g(u) - g(v), u - v\rangle + \langle \nabla(u - v), \nabla(u - v)\rangle \tau\\
&= g'(\varepsilon) \|u - v\|^2 + \|\nabla(u - v)\|^2 \tau\\
&\geq \delta \|u - v\|^2 + \|\nabla(u - v)\|^2 \tau\\
&\geq C(\tau) \|u - v\|_1^2.
\end{aligned}$$

Cela montre la monotonie de A. De la même manière, en utilisant $g(0) = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} < A(u), u > &= \langle g(u) - g(0), u - 0 \rangle + \langle \nabla(u), \nabla(u) \rangle \tau \\ &\geq g'(\varepsilon) \|u\|^2 + \|\nabla(u)\|^2 \tau \\ &\geq C(\tau) \|u\|_1^2, \end{aligned}$$

à partir de laquelle nous concluons la coercivité de A.

Finalement, nous montrons que $y_i \in V^*$, avec

$$\begin{aligned} \langle y_i, \varphi \rangle &= \langle F_i, \varphi \rangle \tau - \langle h_i, \varphi \rangle_{\Gamma 1} \tau + \left(\sum_{j=0}^{i-1} f(t_j, u_j)\tau, \varphi \right) \tau + (g(u_{i-1}), \varphi) \\ &+ \varphi_{\backslash \Gamma 2} \left[E_i' - \langle F_i, 1 \rangle + \langle h_i, 1 \rangle_{\Gamma 1} - \left(\sum_{j=0}^{i-1} f(t_j, u_j)\tau, 1 \right) \right] \tau. \end{aligned}$$

De plus, il est facile de voir que

$$\begin{aligned} |< y_i, \varphi >| &\leq \|F_i\| \|\varphi\| \tau + \|h_i\|_{\Gamma_1} \|\varphi\|_{\Gamma 1} \tau + \sum_{j=0}^{i-1} \|f(t_j, u_j)\| \|\varphi\| \tau^2 + \|g(u_{i-1})\| \|\varphi\| \\ &+ \left|\varphi_{\backslash \Gamma 2}\right| \tau \left(\left|E_i'\right| + \|F_i\| \|1\| + \|h_i\|_{\Gamma_1} \|1\|_{\Gamma 1} + \sum_{j=0}^{i-1} \|f(t_j, u_j)\| \|1\| \tau \right). \end{aligned}$$

A partir de là, en utilisant la condition de croissance de g, et la continuité lipschitzienne de f, l'inégalité de trace et le fait $u_0 \in L^2(\Omega)$, nous obtenons

$$\langle y_i, \varphi \rangle \leq C(i) \|\varphi\|_1$$

et donc y_i est borné. Ceci conclut la preuve.

Dans cette section on va démontrer quelques estimations à priori:

2.4 Estimations à priori

Pour tout fonction β, nous introduisons la notation suivante:

$$\phi_\beta(z) = \int_0^z \beta(s) ds, \qquad \forall z \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

Si β est une fonction monotone croissante, alors ϕ_β est convexe, on vérifie facilement que

$$\beta(z_1)(z_2 - z_1) \leq \phi_\beta(z_2) - \phi_\beta(z_1) \leq \beta(z_2)(z_2 - z_1), \tag{2.5}$$

pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$.

Si β est lipschitzienne continue avec le coefficient L_β et $\beta(0) = 0$, alors

$$\frac{\beta^2(z)}{2L_\beta} \leq \phi_\beta(z) \leq \frac{L_\beta z^2}{2}. \tag{2.6}$$

Notons que (H_2) assure que cette considération peut être appliquée à $\beta = g^{-1}$ (voir [8]).

Notre prochaine étape est d'effectuer l'analyse de stabilité et de trouver une estimation pour la fonction u_i et $\delta g(u_i)$.

Lemme 2.4.1 *Supposons que les hypothèses (H_1), (H_2), (H_3) et (H_4) sont satisfaites. Alors, il existe une constante positive C, telle que:*

$$\max_{1\leq i\leq n} \|u_i\|^2 + \sum_{i=1}^{n} \|\nabla u_i\|^2 \tau \leq C.$$

Preuve 2.4.1 *On pose $\varphi = u_i\tau$ dans (2.3) et faisons la somme sur $i = 1, ..., k$ en gardant $1 \leq k \leq n$, nous obtenons*

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} \langle g(u_i) - g(u_{i-1}), u_i\rangle &+ \sum_{i=1}^{k} \|\nabla u_i\|^2 \tau = \sum_{i=1}^{k} \langle F_i, u_i\rangle \tau - \sum_{i=1}^{k} \langle h_i, u_i\rangle_{\Gamma 1} \tau \\ &+ \sum_{i=1}^{k} u_{i\backslash\Gamma 2} \left[E_i' - \langle F_i, 1\rangle + \langle h_i, 1\rangle_{\Gamma 1} - \left(\sum_{j=0}^{i\ 1} f(t_j, u_j)\tau, 1\right)\right] \tau \\ &+ \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=0}^{i-1} f(t_j, u_j)\tau, u_i\right) \tau.\end{aligned}$$

On applique la formule(2.5). On trouve

$$g^{-1}(g(u_i))(g(u_i) - g(u_{i-1})) \geq \phi_{g^{-1}}(g(u_i)) - \phi_{g^{-1}}(g(u_{i-1})),$$

ensuite par la formule (2.6) *et l'hypothèse* (H_2), *on déduit que*

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} \langle g(u_i) - g(u_{i-1}), u_i \rangle &\geq \sum_{i=1}^{k} \int_{\Omega} [\phi_{g^{-1}}(g(u_i)) - \phi_{g^{-1}}(g(u_{i-1}))] \\
&= \int_{\Omega} [\phi_{g^{-1}}(g(u_k)) - \phi_{g^{-1}}(g(u_0))] \\
&\geq \frac{\delta}{2} \int_{\Omega} (g^{-1}(g(u_k)))^2 - \frac{\delta}{2} \int_{\Omega} (g(u_0))^2 \\
&= \frac{\delta \left\| u_k \right\|^2}{2} - \frac{\delta}{2} \left\| g(u_0) \right\|^2 \\
&\geq \frac{\delta \left\| u_k \right\|^2}{2} - C \left\| u_0 \right\|^2 - C.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy et de Young et la continuité lipschitzienne de f, *nous obtenons facilement*

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{i=1}^{k} \langle F_i, u_i \rangle \tau + \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=0}^{i-1} f(t_j, u_j)\tau, u_i \right) \tau \right| \\
\leq\ & \left| \sum_{i=1}^{k} \langle F_i, u_i \rangle \tau \right| + \left| \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=0}^{i-1} f(t_j, u_j)\tau, u_i \right) \tau \right| \\
\leq\ & \sum_{i=1}^{k} \left\| F_i \right\| \left\| u_i \right\| \tau + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{i-1} \left\| f(t_j, u_j)\tau \right\| \left\| u_i \right\| \tau \\
\leq\ & \sum_{i=1}^{k} 2C \left\| u_i \right\| \tau \\
\leq\ & C \sum_{i=1}^{k} (1 + \left\| u_i \right\|^2) \tau \\
\leq\ & C + \sum_{i=1}^{k} \left\| u_i \right\|^2 \tau.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de trace, nous déduissons de la même manière que

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{i=1}^{k} u_{i\backslash\Gamma 2}\left[E_i' - \langle F_i, 1\rangle + \langle h_i, 1\rangle_{\Gamma 1} - \left(\sum_{j=0}^{i-1} f(t_j, u_j)\tau, 1\right)\right]\tau - \sum_{i=1}^{k}\langle h_i, u_i\rangle_{\Gamma 1}\tau\right| \\
\leq &\left|\sum_{i=1}^{k} u_{i\backslash\Gamma 2}\left[E_i' - \langle F_i, 1\rangle + \langle h_i, 1\rangle_{\Gamma 1} - \left(\sum_{j=0}^{i-1} f(t_j, u_j)\tau, 1\right)\right]\tau\right| \\
+ &\left|\sum_{i=1}^{k}\langle h_i, u_i\rangle_{\Gamma 1}\tau\right| \\
\leq &\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{|\Gamma_2|}}\left\|u_i\right\|_{\Gamma_2}\left[\left|E_i'\right| + \left\|F_i\right\|\left\|1\right\| + \left\|h_i\right\|_{\Gamma_1}\left\|1\right\|_{\Gamma_1}\tau + \sum_{j=0}^{i-1}\left\|f(t_j, u_j)\tau\right\|\left\|1\right\|\right]\tau \\
+ &\sum_{i=1}^{k}\left\|h_i\right\|_{\Gamma_1}\left\|u_i\right\|_{\Gamma_1}\tau \\
\leq &\sum_{i=1}^{k} C_\varepsilon\left\|u_i\right\|_{\Gamma_2}\tau + \sum_{i=1}^{k} C_\varepsilon\left\|u_i\right\|_{\Gamma_1}\tau \\
\leq &\sum_{i=1}^{k}\left\|u_i\right\|_{\Gamma_2}^2\tau + C_\varepsilon + \sum_{i=1}^{k}\left\|u_i\right\|_{\Gamma_1}^2\tau \\
\leq &\ \varepsilon\sum_{i=1}^{k}\left\|\nabla u_i\right\|^2\tau + C_\varepsilon + C_\varepsilon\sum_{i=1}^{k}\left\|u_i\right\|^2\tau.
\end{aligned}$$

Nous rassemblons toutes les inégalités obtenu, on trouve

$$\frac{\delta}{2}\left\|u_k\right\|^2 + \sum_{i=1}^{k}\left\|\nabla u_i\right\|^2\tau \leq \varepsilon\sum_{i=1}^{k}\left\|\nabla u_i\right\|^2\tau + C_\varepsilon + C_\varepsilon\sum_{i=1}^{k}\left\|u_i\right\|^2\tau.$$

Pour ε peut choisi arbitrairement petit, on déduit

$$\left\|u_k\right\|^2 + \sum_{i=1}^{k}\left\|\nabla u_i\right\|^2\tau \leq C + C\sum_{i=1}^{k}\left\|u_i\right\|^2\tau.$$

Une application du Lemme discret de Gronwall implique que

$$\left\|u_k\right\|^2 + \sum_{i=1}^{k}\left\|\nabla u_i\right\|^2\tau \leq C,$$

ce qui est valable pour tout $1 \leq k \leq n$. Ce qui achève la preuve.

Lemme 2.4.2 *Supposons que tout les hypothèses sont satisfaites. Alors, il existe une constante positive C, telle que*

$$\max_{1\leq k\leq n} \left\|\nabla u_k\right\|^2 + \sum_{i=1}^{n} \left\|\delta u_i\right\|^2 \tau + \sum_{i=1}^{n} \left\|\nabla u_i - \nabla u_{i-1}\right\|^2 \leq C.$$

Preuve 2.4.2 *On pose $\varphi = \delta u_i \tau$ dans (2.3) et faisons la somme sur $i = 1, ..., k$ en gardant $1 \leq k \leq n$. On obtient*

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} \langle \delta g(u_i), \delta u_i\rangle \tau \; + \; \sum_{i=1}^{k} \langle \nabla u_i, \nabla u_i - \nabla u_{i-1}\rangle &= \sum_{i=1}^{k} \langle F_i, \delta u_i\rangle \tau - \sum_{i=1}^{k} \langle h_i, \delta u_i\rangle_{\Gamma 1} \tau \\ &+ \sum_{i=1}^{k} \delta u_{i\backslash\Gamma 2} \left[E_i^{'} - \langle F_i, 1\rangle + \langle h_i, 1\rangle_{\Gamma 1} - \left(\sum_{j=0}^{i-1} f(t_j, u_j)\tau, 1\right)\right] \tau \\ &+ \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=0}^{i-1} f(t_j, u_j)\tau, \delta u_i\right) \tau.\end{aligned}$$

On applique le Lemme d'Abel, on aura

$$\frac{1}{2}\left[\left\|\nabla u_k\right\|^2 - \left\|\nabla u_0\right\|^2 + \sum_{i=1}^{k} \left\|\nabla u_i - \nabla u_{i-1}\right\|^2\right] = \sum_{i=1}^{k} \langle \nabla u_i, \nabla u_i - \nabla u_{i-1}\rangle .$$

En utilisant le théorème de la valeur moyenne sachant que $g^{'} \geq \delta$, on obtient

$$\begin{aligned}\delta \sum_{i=1}^{k} \left\|\delta u_i\right\|^2 \tau \; + \; \frac{1}{2}\left[\left\|\nabla u_k\right\|^2 - \left\|\nabla u_0\right\|^2 + \sum_{i=1}^{k} \left\|\nabla u_i - \nabla u_{i-1}\right\|^2\right] \\ \leq \sum_{i=1}^{k} \langle \delta g(u_i), \delta u_i\rangle \tau + \sum_{i=1}^{k} \langle \nabla u_i, \nabla u_i - \nabla u_{i-1}\rangle .\end{aligned}$$

D'autre part, les inégalités de Cauchy et de Young, le Lemme 2-4-1 et la continuité lipschitzienne de f, impliquent

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_{i=1}^{k}\langle F_i,\delta u_i\rangle\tau+\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=0}^{i-1}f(t_j,u_j)\tau,\delta u_i\right)\tau\right|\\
\leq\ &\left|\sum_{i=1}^{k}\langle F_i,\delta u_i\rangle\tau\right|+\left|\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=0}^{i-1}f(t_j,u_j)\tau,\delta u_i\right)\tau\right|\\
\leq\ &\sum_{i=1}^{k}\|F_i\|\,\|\delta u_i\|\,\tau+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{i-1}\|f(t_j,u_j)\tau\|\,\|\delta u_i\|\,\tau\\
\leq\ &\sum_{i=1}^{k}2C_\varepsilon\,\|\delta u_i\|\,\tau\\
\leq\ &C_\varepsilon+\varepsilon\sum_{i=1}^{k}\|\delta u_i\|^2\,\tau.
\end{aligned}
$$

En utilisant le Lemme d'Abel, les inégalités de Cauchy, Young et de trace, aussi le Lemme 2-4-1, nous déduisons que

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{k}\langle h_i,\delta u_i\rangle_{\Gamma 1}\tau\right| &= \left|\langle h_k,u_k\rangle_{\Gamma 1}-\langle h_0,u_0\rangle_{\Gamma 1}+\sum_{i=1}^{k}\langle\delta h_i,u_{i-1}\rangle_{\Gamma 1}\tau\right|\\
&\leq \|h_k\|_{\Gamma 1}\|u_k\|_{\Gamma 1}+C+\sum_{i=1}^{k}\|\delta h_i\|_{\Gamma 1}\|u_{i-1}\|_{\Gamma 1}\tau\\
&\leq C\|u_k\|_{\Gamma 1}+C+\sum_{i=1}^{k}C\|u_{i-1}\|_{\Gamma 1}\tau\\
&\leq \|u_k\|_{\Gamma 1}^2+C+\sum_{i=1}^{k}\|u_{i-1}\|_{\Gamma 1}^2\tau\\
&\leq \varepsilon\|\nabla u_k\|^2+C_\varepsilon.
\end{aligned}
$$

De la même manière, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{i=1}^{k}\delta u_{i\backslash\Gamma 2}\left[E_i^{'}-\langle F_i,1\rangle+\langle h_i,1\rangle_{\Gamma 1}-\left(\sum_{j=0}^{i-1}f(t_j,u_j)\tau,1\right)\right]\tau\right|\\
=&\ \left|u_{k\backslash\Gamma 2}\left[E_k^{'}-\langle F_k,1\rangle+\langle h_k,1\rangle_{\Gamma 1}-\left(\sum_{j=0}^{k-1}f(t_j,u_j)\tau,1\right)\right]\right.\\
-&\ \sum_{i=1}^{k}u_{i-1\backslash\Gamma 2}\left[\delta E_i^{'}-\langle\delta F_i,1\rangle+\langle\delta h_i,1\rangle_{\Gamma 1}-\left(f(t_{i-1},u_{i-1}),1\right)\right]\tau\\
-&\ \left.u_{0\backslash\Gamma 2}\left[E_0^{'}-\langle F_0,1\rangle+\langle h_0,1\rangle_{\Gamma 1}\right]\right|\\
\leq&\ \frac{1}{\sqrt{|\Gamma_2|}}\|u_k\|_{\Gamma_2}\left(\left|E_k^{'}\right|+\|F_k\|\,\|1\|+\|h_k\|_{\Gamma_1}\|1\|_{\Gamma_1}+\sum_{j=0}^{k-1}\|f(t_j,u_j)\tau\|\,\|1\|\right)+C\\
+&\ \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{|\Gamma_2|}}\|u_{i-1}\|_{\Gamma_2}\left(\left|\delta E_i^{'}\right|+\|\delta F_i\|\,\|1\|+\|\delta h_i\|_{\Gamma_1}\|1\|_{\Gamma_1}+\|f(t_{i-1},u_{i-1})\|\,\|1\|\right)\tau\\
\leq&\ C\|u_k\|_{\Gamma 2}+C+\sum_{i=1}^{k}C\|u_{i-1}\|_{\Gamma 2}\tau\\
\leq&\ \|u_k\|_{\Gamma 2}^2+C+\sum_{i=1}^{k}\|u_{i-1}\|_{\Gamma 2}^2\tau\\
\leq&\ \varepsilon\|\nabla u_k\|^2+C_\varepsilon.
\end{aligned}$$

Nous rassemblons toutes les inégalité obtenu, on trouve

$$\begin{aligned}
\delta\sum_{i=1}^{k}\|\delta u_i\|^2\tau \quad + \quad &\frac{1}{2}\left[\|\nabla u_k\|^2-\|\nabla u_0\|^2+\sum_{i=1}^{k}\|\nabla u_i-\nabla u_{i-1}\|^2\right]\\
&\leq\ \varepsilon\|\nabla u_k\|^2+C_\varepsilon+\varepsilon\sum_{i=1}^{k}\|\delta u_i\|^2\tau.
\end{aligned}$$

Pour un ε fixé suffisamment petit mais positif, le Lemme démontré.

Puisque les lemmes précédents ne fournissent aucune estimation pour $\delta g(u_i)$, nous choisissons un autre moyen d'obtenir des informations à ce sujet.

Lemme 2.4.3 *Supposons que tout les hypothèses sont satisfaites. Alors, il existe une constante positive C, telle que*

$$\|\delta g(u_i)\|_{V^*} \leq C,$$

pour tout $i = 1, ..., n$.

Preuve 2.4.3 *La relation (2.3) donne*

$$\begin{aligned}\langle \delta g(u_i), \varphi \rangle &= \langle F_i, \varphi \rangle - \langle \nabla u_i, \nabla \varphi \rangle - \langle h_i, \varphi \rangle_{\Gamma 1} + \left(\sum_{j=0}^{i-1} f(t_j, u_j)\tau, \varphi \right) \\ &+ \varphi_{\backslash \Gamma 2} \left[E_i' - \langle F_i, 1 \rangle + \langle h_i, 1 \rangle_{\Gamma 1} - \left(\sum_{j=0}^{i-1} f(t_j, u_j)\tau, 1 \right) \right].\end{aligned}$$

En appliquant les estimations standard et en utilisant le Lemme 2-4-2, nous obtenons

$$|\langle \delta g(u_i), \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_1$$

ce qui implique

$$\|\delta g(u_i)\|_{V^*} = \sup_{\|\varphi\|_V \leq 1} |\langle \delta g(u_i), \varphi \rangle| \leq C.$$

Chapitre 3

Existence et unicité de la solution faible

3.1 Existence

Maintenant, nous sommes en mesure de montrer l'existence d'une solution au problème variationnel (2.2). D'abord, nous introduisons la fonction linéaire par morceaux, définie par

$$u_n(t) = \begin{cases} u_{i-1} + (t - t_{i-1})\delta u_i & t \in [t_{i-1}, t_i] \\ u_0 & t = 0 \end{cases} \qquad i = 1, \ldots\ldots, n.$$

et la fonction escalier $\bar{u}_n$:

$$\bar{u}_n(t) = \begin{cases} u_i & t \in [t_{i-1}, t_i] \\ u_0 & t = 0 \end{cases} \qquad i = 1, \ldots\ldots, n.$$

de plus, nous définissons la fonction $\bar{E}_n'$comme suit

$$\bar{E}_n'(t) = \begin{cases} E'(t_i) & t \in [t_{i-1}, t_i] \\ E'(0) & t = 0 \end{cases} \qquad i = 1, \ldots\ldots, n.$$

Ensuite, nous définissons g_n,$\bar{h}_n$,$\bar{F}_n$et $\bar{f}_n$ d'une manière similaire

$$\bar{h}_n(t) = \begin{cases} h_i & t \in [t_{i-1}, t_i] \\ h_0 & t = 0 \end{cases} \qquad i = 1, \ldots\ldots, n.$$

$$\bar{f}_n(t) = \begin{cases} f_i & t \in [t_{i-1}, t_i] \\ f_0 & t = 0 \end{cases} \quad i = 1, ..., n.$$

$$\bar{F}_n(t) = \begin{cases} F_i & t \in [t_{i-1}, t_i] \\ F_0 & t = 0 \end{cases} \quad i = 1, ..., n.$$

$$\bar{g}_n(t) = \begin{cases} g_i & t \in [t_{i-1}, t_i] \\ g_0 & t = 0 \end{cases} \quad i = 1, ..., n.$$

$$g_n(t) = \begin{cases} g(u_{i-1}) + (t - t_{i-1})\delta g(u_i) & t \in [t_{i-1}, t_i] \\ g(u_0) & t = 0 \end{cases} \quad i = 1, ..., n.$$

La formulation variationnelle (2.3) peut être réécrite

$$\begin{aligned} \langle \partial_t g_n(t), \varphi\rangle + \langle \nabla \bar{u}_n, \nabla\varphi\rangle &= \langle \bar{F}_n, \varphi\rangle - \langle \bar{h}_n, \varphi\rangle_{\Gamma 1} + (\int_0^{ti} \bar{f}_n(s, \bar{u}_n(s))ds, \varphi) \\ + \quad \varphi_{\setminus\Gamma 2}&\left[\bar{E}_n'(t) - \langle \bar{F}_n, 1\rangle + \langle \bar{h}_n(t), 1\rangle_{\Gamma 1} - (\int_0^{ti} \bar{f}_n(s, \bar{u}_n(s))ds, 1)\right]. \qquad (3.1)\end{aligned}$$

Cette relation est valable pour tout $\varphi \in V$ et pour tout $t \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, ..., n$.

$$\boxed{\max_{t\in[0,T]} \|\bar{u}_n(t)\|^2 + \int_0^T \|\nabla \bar{u}_n(s)\|^2 ds \leq C,}$$

respectivement

$$\boxed{\int_0^T \|\partial_t u_n(s)\|^2 ds + \sum_{i=1}^{n} \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \partial_t \nabla u_n(t)dt \right\|^2 + \max_{t\in[0,T]} \|\nabla \bar{u}_n(t)\|^2 \leq C.}$$

Finalement, nous voulons passer à la limite quand $\tau \to 0$ dans (3.1) pour arriver à (2.2). Notons que la convergence dans le théorème est valable pour les sous-suite. L'unicité de la solution (Théorème 3-2-1) implique que la convergence est vérifié pour la suite mère.

Théorème 3.1.1 *(Existence) Supposons que tout les hypothèses sont satisfaites. Alors,*

i) il existe une solution u de la formulation variationnelle (2.2) telle que $u \in C([0,T], L^2(\Omega)) \cap L^\infty((0,T), H^1(\Omega))$, avec $\partial_t u \in L^2((0,T), L^2(\Omega))$,

ii) il existe une fonction $\alpha \in L^2(0,T)$ telle que $\{u, \alpha\}$ résout (2.1) − (p).

Preuve 3.1.1 *i) L'analyse de stabilité effectuée dans le Lemme 2-4-3 montre que toutes les conditions de [[4], Lemme 1.3.13] sont satisfaites, ceci implique directement l'existence d'une fonction $u \in C([0,T], L^2(\Omega)) \cap L^\infty((0,T), H^1(\Omega))$ tel que $\partial_t u \in L^2((0,T), L^2(\Omega))$ et l'existence d'une sous-suite de $\{u_n\}$(pour na pas alourdir l'écriture, on utilise le même symbole), pour laquelle*

$$\begin{aligned} u_n &\to u \text{ dans } C([0,T], L^2(\Omega)), \\ \partial_t u_n &\rightharpoonup \partial_t u \text{ dans } L^2((0,T), L^2(\Omega)), \\ \bar{u}_n(t) &\rightharpoonup u(t) \text{ dans } H^1(\Omega) \text{ pour tout } t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{3.2}$$

De plus, pour tout $t \in [t_{i-1}, t_i]$, on a

$$\left\| u_n(t) - \bar{u}_n(t) \right\| = \|(t - t_i)\delta u_i\| \leq \left\| \int_{t_i}^t \partial_s u_n \right\| \leq \sqrt{t - t_i} \sqrt{\int_{t_i}^t \|\partial_s u_n\|^2} \leq \tau C. \tag{3.3}$$

De (3.2) et (3.3), nous concluons que $\{u_n\}$ et $\{\bar{u}_n\}$ ont la même limite dans $C([0,T], L^2(\Omega))$, c-à-d

$$\bar{u}_n \to u \text{ dans } C([0,T], L^2(\Omega)). \tag{3.4}$$

La continuité de g, la condition de croissance de g et le TCD, avec (3.2) et (3.4) donnent

$$g(u_n) \to g(u), \quad g(\bar{u}_n) \to g(u) \text{ dans } C([0,T], L^2(\Omega)). \tag{3.5}$$

De plus $\lim_{n\to\infty} \bar{F}_n = F$, $\lim_{n\to\infty} \bar{f}_n = f$, $\lim_{n\to\infty} \bar{E}'_n(t) = E'$ (dans $C([0,T], L^2(\Omega))$) et $\lim_{n\to\infty} \bar{h}_n = h$ dans $(C([0,T], L^2(\Gamma_1)))$.

Maintenant, nous intégrons (3.1) *sur* $[0,T]$ *nous obtenous*

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \langle \partial_t g_n(t), \varphi\rangle + \int_0^t \langle \nabla \bar{u}_n, \nabla \varphi\rangle = \int_0^t \langle \bar{F}_n, \varphi\rangle - \int_0^t \langle \bar{h}_n, \varphi\rangle_{\Gamma 1} \\
+ &\int_0^t \varphi_{\setminus \Gamma 2}\left[\bar{E}_n'(t) - \langle \bar{F}_n, 1\rangle + \langle \bar{h}_n(t), 1\rangle_{\Gamma 1} - \left(\int_0^{ti} \bar{f}_n(s, \bar{u}_n(s))ds, 1\right)\right] \\
+ &\int_0^t \left(\int_0^{ti} \bar{f}_n(s, \bar{u}_n(s))ds, \varphi\right). \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Pour tout $t \in [t_{i-1}, t_i]$, *et* $\forall \varphi \in V$. *Nous voulons passer à la limite quand* $n \to \infty$ *dans* (3.6). *En utilisant le résultat de stabilité* (3.2), *nous avons*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \langle \nabla \bar{u}_n(t), \nabla \varphi\rangle = \int_0^t \langle \nabla u(t), \nabla \varphi\rangle \qquad \forall \varphi \in V, \qquad (3.7)$$

A partir des considérations précédentes, il est facile de voir que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \langle \bar{F}_n(t), \varphi\rangle = \int_0^t \langle F, \varphi\rangle \qquad \forall \varphi \in V. \qquad (3.8)$$

avec

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \langle \bar{h}_n(t), \varphi\rangle_{\Gamma_1} = \int_0^t \langle h, \varphi\rangle \qquad \forall \varphi \in V, \qquad (3.9)$$

de plus

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t (\int_0^{ti} \bar{f}_n(s, \bar{u}_n(s))ds, \varphi) = \int_0^t (\int_0^{ti} f(s, u(s))ds, \varphi) \qquad \forall \varphi \in V, \quad (3.10)$$

et

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \int_0^t \varphi_{\setminus \Gamma 2}\left[\bar{E}_n'(t) - \langle \bar{F}_n, 1\rangle + \langle \bar{h}_n(t), 1\rangle_{\Gamma 1} - (\int_0^{ti} \bar{f}_n(s, \bar{u}_n(s))ds, 1)\right] \\
= &\int_0^t \varphi_{\setminus \Gamma 2}\left[E'(t) - \langle F, 1\rangle + \langle h(t), 1\rangle_{\Gamma 1} - (\int_0^{ti} f(s, u(s))ds, 1)\right] \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

nous n'oublions pas le terme non linéaire

$$\begin{aligned}
\int_0^t \langle \partial_s g_n, \varphi\rangle &= \int_0^{tj} \langle \partial_s g_n, \varphi\rangle - \int_t^{t_j} \langle \partial_s g_n, \varphi\rangle \\
&= \langle g(\bar{u}_n(t)) - g(u_0), \varphi\rangle - \int_t^{t_i} \langle \partial_s g_n, \varphi\rangle. \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

Selon le Lemme 2-4-3, nous avons

$$\left| \int_t^{t_j} \langle \partial_s g_n, \varphi \rangle \right| \leq \int_t^{t_j} \|\partial_s g_n\|_{V^*} \|\varphi\|_V \leq C\tau.$$

Ainsi, en passant à la limite quand $n \to \infty$ *dans* (3.12), *on obtient*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \langle \partial_s g_n, \varphi \rangle = \langle g(u\,(t)) - g(u_0), \varphi \rangle\,. \tag{3.13}$$

D'après les résultats précédents, on trouve

$$\begin{aligned} \langle g(u\,(t)) - g(u_0), \varphi \rangle + \int_0^t \langle \nabla u(t), \nabla\varphi \rangle &= \int_0^t \langle F, \varphi \rangle - \int_0^t \langle h, \varphi \rangle_{\Gamma 1} \\ + \quad \int_0^t \varphi_{\backslash \Gamma 2} \left[E'(t) - \langle F, 1 \rangle + \langle h(t), 1 \rangle_{\Gamma 1} - (\int_0^{ti} f(s, u(s))ds, 1) \right] \\ + \quad \int_0^t (\int_0^{ti} f(s, u(s))ds, \varphi), \end{aligned} \tag{3.14}$$

nous dérivons le résultat précedent par rapport à la variable t, nous obtenons l'existence d'une solution faible du problème (2.2).

ii) Nous définissons $\alpha_n = u_{n\backslash\Gamma_2}$ *et* $\alpha = u_{\backslash\Gamma_2}$. *Ensuite, il suffit de montrer que* α_n *converge vers* α. *En utilisant les résultats de stabilité et l'inégalité de trace, nous déduisons que*

$$\begin{aligned} \int_0^T \|u_n - u\|_\Gamma^2 &\leq \varepsilon \int_0^T \|\nabla u_n - \nabla u\|^2 + C_\varepsilon \int_0^T \|u_n - u\|^2 \\ &\leq C\varepsilon + C_\varepsilon \int_0^T \|u_n - u\|^2 . \end{aligned}$$

Notons que cette estimation est vrai aussi pour $\bar{u}_n$. *Par passage à la limite quand* $n \to \infty$ *et en utilisant* (3.2) ((3.4)*dans le cas* $\bar{u}_n$) . *On obtient*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \|u_n - u\|_\Gamma^2 \leq C\varepsilon,$$

faisons tendre ε *vers 0, on aura*

$$u_n, \bar{u}_n \to u \text{ dans } L^2([0,T]\,, L^2(\Gamma))$$

Par suite

$$|\alpha_n - \alpha| = \left| \frac{1}{|\Gamma_2|} \int_{\Gamma_2} u_n - u \right| \leq \frac{1}{\sqrt{|\Gamma_2|}} \|u_n - u\|_{\Gamma_2}$$

et ainsi

$$\int_0^T |\alpha_n - \alpha|^2 \leq \frac{1}{|\Gamma_2|} \int_0^T \|u_n - u\|_{\Gamma_2}^2 \to 0.$$

3.2 Unicité

<u>Théorème</u> **3.2.1** *(Unicité) Supposons que les hypothèses (H_1) et (H_2) sont satisfaites. Alors, le problème variationnel (2.2) admet au plus une solution $u \in C([0,T], L^2(\Omega)) \cap L^\infty((0,T), H^1(\Omega))$ pour laquelle $\partial_t g(u) \in L^2((0,T), V^*)$.*

Preuve 3.2.1 *Supposons qu'il y ait deux solutions u_1 et u_2 au problème (2.2). Nous soustrayons la formulation variationnelle pour u_2 de celui pour u_1 et nous intégrons par rapport au temps de 0 à ε pour $\varepsilon \in [0,T]$. On obtient*

$$\begin{aligned} & (g(u_1(\varepsilon)) - g(u_2(\varepsilon)), \varphi) + \left(\int_0^\varepsilon \nabla(u_1 - u_2)(t)dt, \nabla\varphi \right) \\ = \; & \varphi_{\backslash\Gamma_2} \left(\int_0^\varepsilon \int_0^t f(s, u_2(s)) - f(s, u_1(s))dsdt, 1 \right) \\ + \; & \left(\int_0^\varepsilon \int_0^t f(s, u_1(s)) - f(s, u_2(s))dsdt, \varphi \right). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Ensuite, nous substituons φ pour u_1–u_2 et nous intégrons par rapport à t pour $\eta \in [0,T]$. Puis, après l'intégration partielle du premier terme du côté droit de (3.15) devient

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^\eta \int_0^t f(s, u_2(s)) - f(s, u_1(s))dsdt, 1 \right) \int_0^\eta (u_1 - u_2)_{\backslash\Gamma_2}(\varepsilon)d\varepsilon \qquad (3.16) \\ & - \int_0^\eta \left[\left(\int_0^\varepsilon f(s, u_2(s)) - f(s, u_1(s))ds, 1 \right) \int_0^\varepsilon (u_1 - u_2)_{\backslash\Gamma_2}(s)ds \right] d\varepsilon \\ \leq \; & \left| \left(\int_0^\eta \int_0^t f(s, u_2(s)) - f(s, u_1(s))dsdt, 1 \right) \int_0^\eta (u_1 - u_2)_{\backslash\Gamma_2}(\varepsilon)d\varepsilon \right| \\ & + \left| \int_0^\eta \left[\left(\int_0^\varepsilon f(s, u_1(s)) - f(s, u_2(s))ds, 1 \right) \int_0^\varepsilon (u_2 - u_1)_{\backslash\Gamma_2}(s)ds \right] d\varepsilon \right|. \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités de Schwarz et de trace, la continuité lipschitzienne de f et l'inégalité de Young, nous déduisons successivement pour le premier terme de droit de (3.16)

$$
\begin{aligned}
&\left|\left(\int_0^\eta\int_0^t f(s,u_2(s)) - f(s,u_1(s))dsdt, 1\right)\int_0^\eta (u_1-u_2)_{\setminus\Gamma_2}(\varepsilon)d\varepsilon\right| \\
\leq\ & C\left\|\int_0^\eta\int_0^t f(s,u_2(s)) - f(s,u_1(s))dsdt\right\|\frac{1}{|\Gamma_2|}\int_{\Gamma_2}\left|\int_0^\eta (u_1-u_2)(\varepsilon)d\varepsilon\right| \\
\leq\ & C\left\|\int_0^\eta\int_0^t f(s,u_2(s)) - f(s,u_1(s))dsdt\right\|\frac{1}{\sqrt{|\Gamma_2|}}\left\|\int_0^\eta (u_1(\varepsilon)-u_2(\varepsilon))d\varepsilon\right\|_{\Gamma_2} \\
\leq\ & C\left\|\int_0^\eta\int_0^t u_2(s) - u_1(s)dsdt\right\|\left\|\nabla\int_0^\eta (u_1(\varepsilon)-u_2(\varepsilon))d\varepsilon\right\| \\
+\ & C\left\|\int_0^\eta\int_0^t u_2(s) - u_1(s)dsdt\right\|\left\|\int_0^\eta (u_1(\varepsilon)-u_2(\varepsilon))d\varepsilon\right\| \\
\leq\ & C\int_0^\eta\int_0^t \|u_2(s) - u_1(s)\|\, dsdt\left\|\nabla\int_0^\eta (u_1(\varepsilon)-u_2(\varepsilon))d\varepsilon\right\| \\
+\ & C\int_0^\eta\int_0^t \|u_2(s) - u_1(s)\|\, dsdt\left\|\int_0^\eta (u_1(\varepsilon)-u_2(\varepsilon))d\varepsilon\right\| \\
\leq\ & \frac{C}{2\varepsilon}\int_0^\eta\int_0^t \|u_2(s) - u_1(s)\|^2\, dsdt + \frac{\varepsilon}{2}\left\|\nabla\int_0^\eta (u_1(\varepsilon)-u_2(\varepsilon))d\varepsilon\right\|^2 \\
+\ & \frac{\varepsilon}{2}\left\|\int_0^\eta (u_1(\varepsilon)-u_2(\varepsilon))d\varepsilon\right\|^2 \\
\leq\ & C_\varepsilon\int_0^\eta\int_0^t \|u_2(s) - u_1(s)\|^2\, dsdt + \varepsilon\left\|\nabla\int_0^\eta (u_1(\varepsilon)-u_2(\varepsilon))d\varepsilon\right\|^2 \\
+\ & \varepsilon\int_0^\eta \|u_1(\varepsilon)-u_2(\varepsilon)\|^2\, d\varepsilon\ .
\end{aligned}
$$

Pour le second terme du coté droit de (3.16), *nous déduisons que*

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_0^\eta \left[\left(\int_0^\varepsilon f(s,u_2(s)) - f(s,u_1(s))ds, 1\right)\int_0^\varepsilon (u_1-u_2)_{\backslash\Gamma_2}(s)ds\right]d\varepsilon\right| \quad (3.17)\\
\leq\ & \int_0^\eta \left|\left(\int_0^\varepsilon f(s,u_2(s)) - f(s,u_1(s))ds, 1\right)\right|\left|\int_0^\varepsilon (u_1-u_2)_{\backslash\Gamma_2}(s)ds\right|d\varepsilon\\
\leq\ & \int_0^\eta \left\|\int_0^\varepsilon f(s,u_2(s)) - f(s,u_1(s))ds\right\| \|1\| \frac{1}{\sqrt{\Gamma_2}}\left\|\int_0^\varepsilon (u_1(s)-u_2(s))ds\right\|_{\Gamma_2} d\varepsilon\\
\leq\ & C\int_0^\eta \int_0^t \|u_2(s)-u_1(s)\|\, ds \left\|\int_0^\varepsilon (u_1(s)-u_2(s))ds\right\|_{\Gamma_2} d\varepsilon\\
\leq\ & C\int_0^\eta \int_0^t \|u_2(s)-u_1(s)\|^2 dsdt + C\int_0^\eta \left\|\int_0^\varepsilon (u_1(s)-u_2(s))ds\right\|_{\Gamma_2}^2 d\varepsilon\\
\leq\ & C\int_0^\eta \int_0^t \|u_2(s)-u_1(s)\|^2 dsdt + C\int_0^\eta \left\|\nabla\int_0^\varepsilon (u_1(s)-u_2(s))ds\right\|^2 d\varepsilon\\
+\ & C\int_0^\eta \left\|\int_0^\varepsilon (u_1(s)-u_2(s))ds\right\|^2 d\varepsilon\\
\leq\ & C\int_0^\eta \int_0^t \|u_2(s)-u_1(s)\|^2 dsdt + C\int_0^\eta \left\|\nabla\int_0^\varepsilon (u_1(s)-u_2(s))ds\right\|^2 d\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Les inégalités de Cauchy Schwarz et de Young et la continuité lipschitzienne de f donnent pour le deuxieme terme intégré de (3.15)

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\eta \left(\int_0^\varepsilon \int_0^t f(s,u_1(s)) - f(s,u_2(s))dsdt, u_1(\varepsilon)-u_2(\varepsilon)\right)d\varepsilon\\
\leq\ & \left\|\int_0^\varepsilon \int_0^t f(s,u_1(s)) - f(s,u_2(s))dsdt\right\| \int_0^\eta \|u_1(\varepsilon)-u_2(\varepsilon)\|\, d\varepsilon\\
\leq\ & C_\varepsilon \int_0^\eta \int_0^t \|u_1(s)-u_2(s)\|^2 dsdt + \varepsilon\int_0^\eta \|u_1(\varepsilon)-u_2(\varepsilon)\|^2 d\varepsilon.
\end{aligned}
$$

L'application de la théorème de la moyenne sahant que $g' \geq \delta$ Pour le terme intégré du côté gauche de (3.15), *on obtient*

$$
\begin{aligned}
& \int_0^\eta (g(u_1(\varepsilon)) - g(u_2(\varepsilon)), u_1(\varepsilon) - u_2(\varepsilon))\, d\varepsilon \\
+ & \int_0^\eta \left(\int_0^\varepsilon \nabla(u_1 - u_2)(t)dt, \nabla(u_1 - u_2)(\varepsilon) \right) d\varepsilon \\
= & \int_0^\eta \left\langle g'(\varepsilon)(u_1(\varepsilon) - u_2(\varepsilon)), u_1(\varepsilon) - u_2(\varepsilon) \right\rangle d\varepsilon + \frac{1}{2} \left\| \nabla \int_0^\eta (u_1(\varepsilon) - u_2(\varepsilon)) d\varepsilon \right\|^2 \\
\geq & \ \delta \int_0^\eta \|u_1(\varepsilon) - u_2(\varepsilon)\|^2 d\varepsilon + \frac{1}{2} \left\| \nabla \int_0^\eta (u_1(\varepsilon) - u_2(\varepsilon)) d\varepsilon \right\|^2 .
\end{aligned}
$$

Nous rassemblons toutes les inégalités obtenu, on trouve

$$
\begin{aligned}
& \delta \int_0^\eta \|u_1(\varepsilon) - u_2(\varepsilon)\|^2 d\varepsilon + \frac{1}{2} \left\| \nabla \int_0^\eta (u_1(\varepsilon) - u_2(\varepsilon)) d\varepsilon \right\|^2 \\
\leq & \ C_\varepsilon \int_0^\eta \int_0^t \|u_1(\varepsilon) - u_2(\varepsilon)\|^2 d\varepsilon dt + \varepsilon \left\| \nabla \int_0^\eta (u_1(\varepsilon) - u_2(\varepsilon)) d\varepsilon \right\|^2 \\
+ & \ \varepsilon \int_0^\eta \|u_1(\varepsilon) - u_2(\varepsilon)\|^2 d\varepsilon + C \int_0^\eta \left\| \nabla \int_0^\varepsilon (u_1(s) - u_2(s)) ds \right\|^2 d\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Pour ε choisi arbitrairement petit mais positif, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
& \int_0^\eta \|u_1(\varepsilon) - u_2(\varepsilon)\|^2 d\varepsilon + \left\| \nabla \int_0^\eta (u_1(\varepsilon) - u_2(\varepsilon)) d\varepsilon \right\|^2 \\
\leq & \ C \int_0^\eta \left(\int_0^t \|u_2(s) - u_1(s)\|^2 ds + \left\| \nabla \int_0^t (u_1(s) - u_2(s)) ds \right\|^2 \right) dt,
\end{aligned}
$$

ce qui est valable pour tout $\eta \in [0, T]$. on applique le Lemme de gronwall, on trouve

$$
\int_0^T \|u_1(\varepsilon) - u_2(\varepsilon)\|^2 d\varepsilon + \left\| \nabla \int_0^T (u_1(\varepsilon) - u_2(\varepsilon)) d\varepsilon \right\|^2 = 0. \tag{3.18}
$$

Enfin, la positivité de tous les termes du côté gauche de (3.18) donne $u_1 = u_2$ p.p dans $(0, T) \times \Omega$.

Remarque 3.2.1 *L'unicité de u a été montrée dans le théorème 3-2-1. De là, nous pouvons facilement conclure l'unicité de $\alpha(t)$, qui est la trace de u sur Γ_2.*

Bibliography

[1] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, théorie et applications. Masson 1987.

[2] J. W. Delleur. The handbook of groundwater engineering. CRC press, 2010.

[3] R. B. Guenther, L. W. Lee, Partial Differential Equations of Mathematical Physics and Integral Equations, Dover Publications, 1988.

[4] J. Kačur, Method of Rothe in Evolution Equations, in: Teubner Texte zur Mathematik, vol. 80. Teubner, Leipzig,1985.

[5] M. Grimmonprez, and M. Slodička. "A nonlinear parabolic integro-differential problem with an unknown Dirichlet boundary condition." Journal of Computational and Applied Mathematics 275 (2015): 421-432

[6] J. Nečas. Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques, Academia, Prague, 1967.

[7] A. I. Prilepko, D. G. Orlovsky,I. A. Vasin, Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics, in:Monographs and Textbooks in pure and applied Mathematics, vol. 222, Marcel Dekker, Inc, New York-Basel, 2000.

[8] M. Slodička, S. Dehilis,A nonlinear parabolic equation with a nonlocal boundary term, J. comput. Appl. Math. 233 (2010) 3130- 3138.

[9] M. Thérèse, L. Sonrier,Distrutions et Espace de Sobolev et Applications, ellipses/éditions marketing S. A, 1998.

[10] R. Kannan, Random Nonlinear Equations and Monotonic Nonlinearities,Journal of Mathématical Analysis and Applications 57, 234-256 (1977).

[11] M. M. Vajnberg, Variational Method and Method of Monotone Operators in the Theory of Nonlinear Equations, John Wiley & Sons, Chichester, 1973.