République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : **EDP Et Analyse Numérique**

Par :

Mr. MOUALKIA Seyf Eddine

Intitulé

Existence, unicité et positivité de la solution d'un problème aux limites fractionnaire

Dirigé par : Prof. ELLAGGOUNE Fateh

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. F. AISSAOUI	MCB	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. F. ELLAGGOUNE	Prof	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. A. FRIOUI	MCA	Univ-Guelma

Session Juin 2018

Remerciements

« Je remercie en premier lieu Allah le plus puissant de m'avoir donné la santé,

la volonté et la patience

pour la réalisation

de ce travail »

Je voudrais tout d'abord exprimer ma plus profonde gratitude aux messieurs les membres du jury :

Je tiens à adresser mes vifs remerciements à monsieur F. Ellaggoune qui m'a guidée de ses précieux conseils et suggestions, et la confiance qu'il m'a témoignée tout au long de ce travail.

Je remercie spécialement et chaleureusement Mme F. Aissaoui qui m'a fait l'honneur de bien vouloir accepter la présidence du jury de cette mémoire.

Mes sincères remerciements vont également à Mme A. Frioui qu'elle veuille bien trouver ici l'expression de mon profond respect pour avoir eu l'amabilité de vouloir bien faire partie du jury de mon mémoire.

Enfin, je remercie très vivement toute ma famille, tous mes amis qui de prés ou de loin m'ont supporté, soutenu et encouragé tout au long de ce travail.

Moualkia Seyf eddine.

Dédicaces

***J**e dédie cette mémoire*

***A** mes chers parents ma mère et mon père.*

***C**eci est le fruit de tant d'années*

de leur éducation, leur attention et leur affection.

***A** mes frères.*

***A** ma famille et mes amies.*

***S**on oublier tout les professeurs que ce soit du*

primaire, du moyen, du secondaire ou de

l'enseignement supérieur.

Moualkia Seyf eddine.

Table des matières

ملخص

الهدف من هذه المذكرة يكمن في دراسة وجود ووحدانية وايجابية الحلول لمسألة ذات الشروط الحدية الكسرية.

أولا، نقوم بدراسة وجود حلول لمسألة ذات الشروط الحدية الكسرية وذلك باستخدام المتناوبة غير الخطية لشودير.

بعد ذلك، نعمل على إثبات وحدانية الحلول لمسألة ذات الشروط الحدية الكسرية وذلك

باستعمال مبدأ التقليص للنقطة الصامدة.

أخيرا، ندرس ايجابية الحلول لمسألة ذات الشروط الحدية الكسرية وذلك عن طريق نظرية النقطة الصامدة لجيوكراسنوسلسكي

<u>الكلمات المفتاحية:</u>

المشتقات الكسرية بمفهوم كابوتو، مبدأ التقليص لبناخ، المتناوبة غير الخطية لشودير، نظرية النقطة الصامدة لجيوكراسنوسلسكي.

Résumé

Le but de cette mémoire est l'étude de l'existence, l'unicité et la positivité de la solution d'un problème aux limites fractionnaire.

Premièrement, en s'intéresse à l'étude de l'existence de la solution d'un problème aux limites fractionnaire en utilisant l'alternative nonlinéaire de Leray-Schauder.

Puis dans un deuxième temps, en passe à la preuve de l'unicité de la solution d'un problème aux limites fractionnaire en utilisant le principe de la contraction du point fixe.

Finalement, on a établi l'existence de la solution positive d'un problème aux limites fractionnaire en utilisant le théorème de Guo-Krasnoselskii.

Mots clés : Dérivées fractionnaires aux sens de Caputo, Principe de la contraction de Banach, Alternative nonlinéaire Leray-Schauder, théorème de point fixe de Guo- Krasnoselskii.

Abstract

The objective of this memory is to study the existence, the uniqueness and the positiveness of solution of fractional boundary value problem.

Firstly, we study the existence of solution of fractional boundary value problem by using Leray-Schauder nonlinear alternative.

In a second time, we investigate the uniqueness of solution of fractional boundary value problem by using fixed point contraction principal.

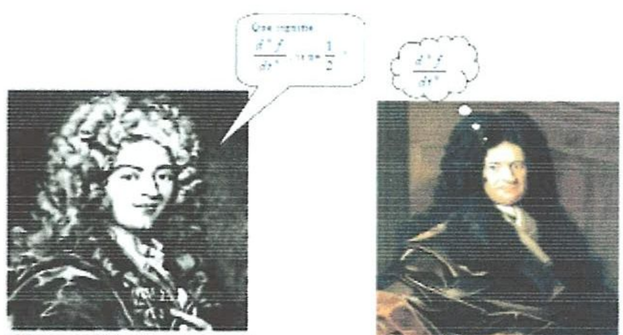
Finally, we established the existence of positive solution for a fractional boundary value problem by means of Guo-Krasnoselskii fixed point theorem.

Keywords : Fractional Caputo derivative, Banach contraction principal, Leray-Schauder nonlinear alternative, Guo-Krasnoselskii fixed point theorem.

Introduction générale

Quand on introduit la notion de dérivée, on se rend vite compte qu'on peut appliquer le concept de dérivée à la fonction dérivée elle-même et par la même introduire la dérivée seconde. Puis les dérivées successives d'ordre entier. L'intégration, opérateur inverse de la dérivée, peut éventuellement être comme une dérivée d'ordre "moins un". On peut aussi se demander si ces dérivées d'ordre successif ont un équivalent d'ordre fractionnaire.

La théorie de dérivation fractionnaire est un sujet presque aussi ancien que le calcul classique tel que nous le connaissons aujourd'hui, ces origines remontent à la fin du 17^{eme} siècle [31], l'époque où Newton et Leibniz ont développé les fondements de calcul différentiel et intégral. En particulier, Leibniz a présenté le symbole $\dfrac{d^n f}{dt^n}$ pour désigner la $n^{ème}$ dérivée d'une fonction f. Quand il a annoncé dans une lettre à l'Hôpital (apparemment avec l'hypothèse implicite que $n \in \mathbb{N}$), l'Hôpital a répondu :



Guillaume de L'Hospital
1661-02/02/1704

Gottfried Wilhelm von Leibniz
(01/07/1646-14/11/1716)

Que signifie $\dfrac{d^n f}{dt^n}$ si $n = \frac{1}{2}$?.

Cette lettre de l'Hôpital écrite en 1695, est aujourd'hui admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire, et le fait que l'Hôpital a demandé spécifiquement pour $n = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire une fraction (nombre rationnel) a en fait donné lieu au nom de cette partie des mathématiques.

On pourrait penser que cette recherche de dérivation fractionnaire est une question de mathématiques pures sans intérêt pour l'ingénieur, pourtant un exemple simple de mécanique des fluides montre comment la dérivée d'ordre un demi apparait tout naturellement quand on veut expliciter un flux de chaleur sortant latéralement d'un écoulement fluide en fonction de l'évolution temporelle de la source interne.

Un intérêt particulier pour la dérivation fractionnaire est lié à la modélisation mécanique des gommes et des cahoutchous, en bref toutes sortes de matériaux qui conservent la mémoire des déformations passées et dont le comportement est dit viscoélastique. En effet, la dérivation fractionnaire s'y introduit naturellement, autrement dit les dérivées non entières possèdent un effet de mémoire qu'elles partagent avec plusieurs matériaux tels que les matériaux viscoélastiques ou polymères. Ce fait est également une des raisons pour lesquelles le calcul fractionnaire a connu récemment un grand intérêt.

Différentes approches ont été utilisés pour cette notion de dérivation : Riemann-Liouville, Caputo, Grunwald-Letnikov...

L'étude des problèmes fractionnaires est d'actualité et plusieurs méthodes sont appliquées pour la résolution de ces problèmes. Néanmoins les méthodes basées sur le principe du point fixe jouent un grand rôle[3].

Les théorèmes du point fixe sont les outils mathématiques de base, montrant l'existence des solutions dans divers genres d'équations.

On peut noter ici que la plupart des travaux sur le calcul fractionnaire sont consacrés à la solvabilité des problèmes aux limites engendrés par des équations différentielles fractionnaires linéaires à la base des fonctions spéciales [17-28]. Récemment, d'autres résultat traitant l'existence, l'unicité et la multiplicité des solutions ou des solutions positives des problèmes fractionnaires non linéaire par l'utilisation des techniques d'analyse non linéaire comme les théorèmes de point fixe.

Citant sur ce sujet le travail de Zhoujin dans [7], qui a considéré l'équation différentielle fractionnaire

$$^{C}D^{\alpha}u(t) + f(t,\ u(t),^{C} D^{\beta}_{a+}u(t)) = 0 \quad 0 < t < 1,\ 3 < \alpha \leq 4, \tag{0.1}$$

$$u(0) = u'(0) = u''(0) = 0, \ u(1) = u(\xi) \ \ 0 < \xi < 1. \tag{0.2}$$

où ${}^{C}D^{\alpha}$ désigne la dérivée fractionnaire de Caputo, $\beta > 0$, $\alpha - \beta \geq 1$, les résultats d'existence sont obtenues au moyen de théorème du point fixe de Schauder.

Dans [23] Liang et Zhang ont démontré l'existence et l'unicité de la solution positive via les propriétés de la fonction de Green, le principe de méthode de la solution inférieure et supérieure ainsi que le théorème du point fixe pour le problème suivant :

$${}^{RL}D^{q}_{0+}u(t) + f(t, \ u(t)) = 0 \ \ 0 < t < 1, \tag{0.3}$$

$$u(0) = u'(0) = 0, u'(1) = \sum_{i=1}^{m-2} \beta_i u'(\zeta_i). \tag{0.4}$$

Où $2 < q \leq 3$ et ${}^{RL}D^{q}_{0+}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

[1] et [2] ont proposé l'étude d'une équation fractionnaire avec laquelle sont jointes des conditions non locales.

$${}^{C}D^{q}_{0+}u(t) = f(t, \ u(t)) \ \ 0 < t < 1, \tag{0.6}$$

$$x(0) = x'(0) = x''(0) = ... = x^{m-2}(0) = 0, \ x(1) = ax(\eta), \tag{0.7}$$

dont $q \in [m-1, \ m]$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Le résultat d'existence est basé sur l'application contractante et le théorème de Krasnoselskii.

Ainsi que dans [11] A. Guezane-Lakoud et R. Khaldi ont pu établir des conditions suffisantes pour l'existence et l'unicité des solutions d'un problème engendré par l'équation :

$${}^{C}D^{q}_{a+}u(t) \ = f(t, \ u(t), {}^{C}D^{\sigma}_{a+}u(t)) \ \ 0 < t \ < 1,$$

à la quelle la condition integrale fractionnaire suivante :

$$u(0) = 0, \ u'(1) = \alpha I^{\sigma}_{0+}(1), \tag{0.8}$$

est vérifie, où $f : [0,\ 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction donné, $1 < q < 2,\ 0 < \sigma < 1$, et ${}^{C}D^{q}_{a^+}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo.

Les mêmes auteurs dans [12] et [13] et à la base du principe de contraction de Banach, et l'alternative non linéaire de Leuray Shauder, ils ont étudié le problème :

$$ {}^{C}D^{q}_{a^+}u(t) = f(t,\ u(t))\ \ 0 < t < 1, \tag{0.9}$$

$$ u(0) = \alpha u'(0) = 0,\ u'(1) = \beta u''(\eta). \tag{0.10}$$

où $f : [0,\ 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction donné, $1 < q < 2,\ \alpha.\ \beta \in \mathbb{R}$ et ${}^{C}D^{q}_{a^+}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo.

Motivé par les travaux précédents, notre objectif est de démontrer l'existence et l'unicité de la solution positive du problème fractionnaire suivant :

$$ {}^{C}D^{q}_{a+}u(t) = f(t,\ u(t), {}^{C}D^{\sigma}_{a+}u(t))\ \ 0 < t < 1, \tag{0.11}$$

$$ u(0) = u''(0) = 0,\ u'(\eta) = \alpha u''(1), \tag{0.12}$$

où $f : [0,\ 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée, $2 < q < 3,\ 0 < \sigma < 1,\ 0 < \eta < 1$ et ${}^{C}D^{q}_{a^+}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo.

Ce travail est réparti principalement en plus d'une introduction de trois chapitres.

Le chapitre 1 est consacré à une étude succinte sur l'intégration et la dérivation fractionnaire.

Le chapitre 2 s'étend à rappeler quelques résultats fondamentaux sur le principe de l'application contractante ainsi que les théorèmes célèbres du point fixe.

Le chapitre 3 a pour objet l'étude de problème fractionnaire suivant :

$$ {}^{C}D^{q}_{a+}u(t) = f(t,\ u(t), {}^{C}D^{\sigma}_{a+}u(t))\ \ \ 0 < t < 1 \tag{0.13}$$

$$ u(0) = u''(0) = 0,\ u'(\eta) = \alpha u''(1). \tag{0.14}$$

On se penche, particulièrement, sur les résultats d'existence,l'unicité et la positivité de la solution à la base des théorèmes connus du point fixe.

Enfin, cette thèse est clôturée par une bibliographie.

Chapitre 1

Intégration et dérivation fractionnaire

Résumé

L'idée principale de l'intégration et la dérivation fractionnaire est la généralisation de l'intégration et la dérivation itérées. Le terme fractionnaire est un terme trompeur mais il est retenu pour suivre l'usage dominant.

Dans ce chapitre nous abordons un aperçu sur le calcul fractionnaire, on se restreindre à trois approches les plus populaires et les plus pratiques(l'approche de Caputo, de Riemann Liouville et celle de Weyl) ainsi que leurs propriétès, puis nous allons essayer de donner des interprétations physiques y compris ses applications dans la modélisation rhéologique.

1.1 Outils de base

Dans cette partie, nous introduisons les outils et les définitions nécessaires pour cette étude.

1.1.1 La fonction Gamma

La fonction Gamma prolonge le factoriel aux valeurs réelles ou complexes.

Définition 1. 1 *La fonction Gamma d'Euler, notée* $\Gamma(z)$ *est définie* *par :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{\,z-1} e^{-t} dt \ , \quad Re\ (z) > 0 \tag{1.1}$$

1.1.2 Quelques propriètés de la fonction Gamma

(i) Une propriété importante de la fonction Gamma est la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(z+1) = z\ \Gamma(z) \tag{1.2}$$

qu'on peut démontrer par une intégration par partie :

$$\Gamma(z+1) = [z\ t^{\,z-1} e^{-t}]_0^{+\infty} + z \int_0^{+\infty} t^{\,z-1} e^{-t}\ dt = z\ \Gamma(z)$$

(ii) La fonction Gamma d'Euler généralise le factoriel

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \forall n \in N^* \tag{1.3}$$

Exemple 1.1

$$\Gamma(2) = 1! = 1\ , \quad \Gamma(6) = 5! = 120\ , \quad \frac{\Gamma(5)}{\Gamma(4)} = \frac{4!}{3!} = 4.$$

1.1.3 La fonction Béta [29]

Définition 1. 2 *La fonction Béta est définie par :*

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{\,p-1}(1-t)^{\,q-1} dt = \frac{\Gamma(p)\ \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \ , \quad Re(p) > 0 \ et \ \ Re(q) > 0 \tag{1.4}$$

1.1.4 Lien entre la fonction Gamma et la fonction Béta

La relation entre la fonction Gamma et la fonction Béta est donnée par :

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \ \ \mathrm{Re}(p) > 0, \mathrm{Re}(q) > 0.$$

1.2 Intégration fractionnaire

Dans cette partie, nous introduisons les définitions et les résultats utilisés dans notre travail. On commence par donner les définitions d'intégrales fractionnaires les plus courantes.

1.2.1 Intégrale fractionnaire sur un intervalle $[a, b]$

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$. Une primitive de f est donnée par :

$$(I_a^1 f)(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

Pour une primitve seconde de f on aura :

$$(I_a^2 f)(x) = \int_a^x \left(\int_a^s f(t)\, dt \right) ds$$

Le théorème de Fubini ramène cette intégrale double à une intégrale simple :

$$(I_a^2 f)(x) = \int_a^x (x-t) f(t) dt$$

Par récurrence, on obtient :

$$(I_a^n f)(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\, dt \tag{1.5}$$

Définition 1. 3 *Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle intégrale de Riemann- Liouvile de f l'intégrale suivante :*

$$(I_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \tag{1.6}$$

oú α est un réel (ou même complexe) convenablement choisi.

Exemple 1. 2 Considérons la fonction $f(x) = (x-a)^{\beta}$. Alors :

$$I_a^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}(t-a)^{\beta} dt$$

pour évaluer cette intégrale on utilise la définition de la fonction Béta et on pose le changement de variable $t = a + (x-a)k$, d'où :

$$\begin{aligned}
I_a^{\alpha}(x-a)^{\beta} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 [(x-a)(1-k)]^{\alpha-1} [(x-a)k]^{\beta} (x-a)\, dk, \\
&= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-k)^{\alpha-1} k^{\beta} dk, \\
&= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}\, \Gamma(\alpha)\, \Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha)\, \Gamma(\alpha+\beta+1)}, \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (x-a)^{\alpha+\beta}.
\end{aligned}$$

Pour : $a = 0$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$,on obtient :

$$\begin{aligned}
I_0^{0.5}(x) &= \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2.5)}\, x^{1.5}, \\
&= \frac{\sqrt{x^3}}{\Gamma(2.5)}.
\end{aligned}$$

Pour : $\alpha = 1$, on obtient :

$$\begin{aligned}
I_a^1(x-a)^{\beta} &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+2)} (x-a)^{\beta+1}, \\
&= \frac{\beta\,!}{(\beta+1)!} (x-a)^{\beta+1}, \\
&= \frac{1}{\beta+1} (x-a)^{\beta+1}.
\end{aligned}$$

Théorème 1. 1 : *Soit* $f \in C^n([a,b])$. *pour* α *et* β *complexes tels que* $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ *et* $\mathrm{Re}(\beta) > 0$, *l'intégrale de Riemann-Liouville fractionnaire possède la propriété de semi groupe.*

$$I^{\alpha}(I^{\beta} f)(x) = (I^{\alpha+\beta} f)(x) \tag{1.7}$$

Démonstration : On applique la définition précédente :

$$\begin{aligned} I^{\alpha}(I^{\beta} f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} (I^{\beta} f)(s)\, ds, \qquad (1.8)\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} \int_a^s (s-t)^{\beta-1} f(t)\, dt\, ds, \end{aligned}$$

D'après le théorème de Fubini, on obtient :

$$I^{\alpha}(I^{\beta} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t) \left[\int_t^x (x-s)^{\alpha-1} (s-t)^{\beta-1} ds \right] dt \tag{1.9}$$

On pose le changement : $s = t + (x-t)k$, alors :

$$I^{\alpha}(I^{\beta} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t) \left[(x-t)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-k)^{\alpha-1} k^{\beta-1} dk \right] dt \tag{1.10}$$

Or :

$$\int_0^1 (1-k)^{\alpha-1} k^{\beta-1} dk = \Gamma(\alpha)(I^{\alpha} k^{\beta-1})(1), \tag{1.11}$$

Par récurrence, on obtient :

$$(I^{\alpha} k^{\beta-1})(1) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}. \tag{1.12}$$

Donc :

$$\int_0^1 (1-k)^{\alpha-1} k^{\beta-1} dk = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \tag{1.13}$$

On remplace dans (1.10), on obtient le resultat.

Définition 1.4 *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}_+$ *et* $t \in [a,b]$, *l'opérateur* I^{α} *définit sur* $L^1[a,b]$ *par :*

$$(I_{a^+}^{\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau. \tag{1.14}$$

est appelé opérateur d'intégration fractionnaire (à gauche) de Riemann-Liouville d'ordre α.

Définition 1.5 *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}_+$ *et* $t \in [a,b]$, *l'opérateur* I^{α} *définit sur* $L^1[a,b]$ *par*

$$(I_{b^-}^{\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau. \tag{1.15}$$

est appelé opérateur d'"intégration fractionnaire (à droite) de Riemann-Liouville d'ordre α.

Remarque 1.1 *Dans tout ce qui on va utiliser uniquement l'intégrale fractionnaire à gauche.*

Proposition 1.1 *Soit* $f \in C^n([a,b])$. *Pour* x *fixé, l'application* $\alpha \longrightarrow (I^{\alpha} f)(x)$ *définie pour* $\operatorname{Re}\alpha > 0$ *est holomorphe et se prolonge analytiquement au domaine* $\operatorname{Re}\alpha > -n$.

Démonstration : Montrons l'existence du prolongement analytique. Dans (1.6) procédons par une intégration par partie

$$\begin{aligned}
(I^{\alpha} f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(t)\, d\left[\frac{-(x-t)^{\alpha}}{\alpha}\right], \qquad (1.16)\\
&= \frac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} f(a) + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^x (x-t)^{\alpha} f'(t)\, dt,\\
&= \frac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} f(a) + (I^{\alpha+1} f')(x).
\end{aligned}$$

Il est clair que le membre de droite de l'égalité précédente est holomorphe dans le domaine $\operatorname{Re}\alpha > -1$. A présent le résultat finale découle d'une simple itération de (1.16) :

$$(I^{\alpha} f)(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{\alpha+j}}{\Gamma(\alpha+1+j)} f^{(j)}(a) + (I^{\alpha+n} f^{(n)})(x), \tag{1.17}$$

formule qui constitue l'expression du prolongement analytique.

1.3 Dérivation fractionnaire

Différentes approches ont été utilisées pour généraliser la notion de dérivation aux ordres non-entiers.

1.3.1 Approche de Riemann-Liouville

Définition 1.6 *Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$, alors la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre p avec $n-1 \leq p < n$ où $n \in \mathbb{N}^*$, est définie par :*

$$\begin{aligned} {}^{RL}D^p f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau, \forall t \in [a, b], \quad (1.18) \\ &= \frac{d^n}{dt^n} (I^{(n-p)} f(t)), \forall t \in [a, b]. \end{aligned}$$

Remarque 1.2 *Si f est de classe C^n alors en faisant des intégrations par parties et des différentiations répétées on obtient :*

$${}^{RL}D^p f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \quad (1.19)$$

Exemple 1. 3 (La dérivée d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville)

La dérivée d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville est ni nulle ni constante. A titre d'example si $p > 0$ non entier, on a :

$${}^{RL}D^p C = \frac{C}{\Gamma(1-p)} (t-a)^{-p} \quad (1.20)$$

Exemple 1.4 (La dérivée de $f(t) = (t-a)^\alpha$ au sens de Riemann-Liouville)

Soit p non entier et $0 \leq n-1 < p < n$ avec $\alpha > -1$ alors on a :

$${}^{RL}D^p (t-a)^\alpha = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} (t-a)^\alpha d\tau \quad (1.21)$$

En faisant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$ on aurra

$$\begin{aligned}
{}^{RL}D^{p}(t-a)^{\alpha} &= \frac{1}{\Gamma(n-p)}\frac{d^{n}}{dt^{n}}(t-a)^{n+\alpha-p}\int_{0}^{1}(1-s)^{n-p-1}s^{\alpha}ds \quad (1.22)\\
&= \frac{\Gamma(n+\alpha-p+1)\beta(n-p,\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p}\\
&= \frac{\Gamma(n+\alpha-p+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-p+1)\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p}\\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p}.
\end{aligned}$$

Exemple 1.5
$p = 0.\ 5,\ a = 0,\ \alpha = 0.\ 5$

$$ {}^{RL}D^{0.5}t^{0.5} = \frac{\Gamma(1.5)}{\Gamma(1)} = \Gamma(1.5). $$

Propriétés

Nous présentons maintenant quelques propriétés de l'opérateur de dérivation au sens de Riemann-Liouville.

1- Composition avec l'intégrale fractionnaire

Soit $p > 0$ et $f \in L^{1}([a,b])$, alors on a :

$$ {}^{RL}D^{p}I^{p}f(t) = f(t),\ \forall t \in [a,b]. \quad (1.23)$$

Ce qui signifie que l'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est l'inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire.

En générale, on a :

$$ {}^{RL}D^{p}I^{q}f(t) = {}^{RL}D^{p-q}f(t),\ \forall t \in [a,b], \quad (1.24)$$

Si $q - p < 0$ et

$$ {}^{RL}D^{p}I^{q}f(t) = {}^{RL}D^{q-p}f(t),\ \forall t \in [a,b], \quad (1.25)$$

Pour $q - p > 0$.

On déduit alors que la dérivation et l'intégration fractionnaire ne commutent pas en général.

2- Composition avec les dérivées d'ordre entier

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, si les dérivées fractionnaires $D^{\,p} f$ et $D^{\,p+n} f$ existent, alors :

$$\frac{d^n}{dt^n}({}^{RL}D^p f(t)) = {}^{RL}D^{n+p} f(t), \ \forall t \in [a, b], \tag{1.26}$$

mais, on a :

$${}^{RL}D^p(\frac{d^n}{dt^n} f(t)) = {}^{RL}D^{n+p} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p-n}}{\Gamma(k-p-n+1)}, \ \forall t \in [a, b], \tag{1.27}$$

On déduit alors que la différentiation fractionnaire et la différentiation conventionnelle ne commutent que si : $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k = 0, 1, 2, \ldots,$ $n-1$.

3- Composition avec les dérivées fractionnaires

Pour $f \in L^1([a, b])$ et $n-1 \leq p < n$ et $m-1 \leq q < m$ alors :

$${}^{RL}D^p({}^{RL}D^q f(t)) = {}^{RL}D^{p+q} f(t) - \sum_{k=1}^{m} [{}^{RL}D^{q-k} f(t)] \frac{(t-a)^{-p-k}}{\Gamma(1-p-k)}, \forall t \in [a, b], \tag{1.28}$$

et

$${}^{RL}D^q({}^{RL}D^p f(t)) = {}^{RL}D^{p+q} f(t) - \sum_{k=1}^{n} \left[{}^{RL}D^{p-k} f(t)\right] \frac{(t-a)^{-q-k}}{\Gamma(1-q-k)}, \forall t \in [a, b], \tag{1.29}$$

par suite les deux opérateurs de dérivations fractionnaires ${}^{RL}D^p$ et ${}^{RL}D^q$ ne commutent que si $p = q$, et $[{}^{RL}D^{p-k} f(t)] = 0$

pour tout $k = 1, 2, \ldots, n$ et $[{}^{RL}D^{q-k} f(t)] = 0$ pour tout $k = 1, 2, \ldots, m$.

1.3.2 Approche de Caputo

Les problèmes appliqués demandent des définitions des dérivées fractionnaires autorisant l'utilisation des conditions initiales interprétables physiquement, lesquelles contiennent $f(a), f'(a), \ldots$ etc. Malgré le fait que les problèmes aux valeurs initiales avec de telles conditions initiales peuvent être résolus mathématiquement(voir par example les solutions données dans[14]), la solution de ce problème a été proposée par M. Caputo (dans les années soixante) dans sa définition qu'il a adapté avec Mainardi dans la structure de la théorie de viscoélastiques [19]. Donc on introduit une dérivée fractionnaire qui est plus restrictive que celle de Riemann-Liouville.

Définition 1.7 *Soit f est une fonction telle que* $\frac{d^n}{dt^n} \in L^1([a,b])$ *et* $p \geq 0$ *avec* $(n-1 \leq p < n, \forall n \in \mathbb{N}^*)$. *La dérivée fractionnaire d'ordre p au sens de Caputo est définie par :*

$$\begin{aligned} {}^{C}D^{p}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-p)}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{n-p-1}f^{(n)}(\tau)d\tau, \forall t \in [a,b], \qquad (1.30) \\ &= I^{(n-p)}\left(\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right), \forall t \in [a,b]. \end{aligned}$$

Exemple 1.6 (La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo)
La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle :

$${}^{C}D^{p}C = 0$$

Exemple 1.7 (La dérivée de $f(t) = (t-a)^{\alpha}$ au sens de Caputo)
Soit p non entier et $0 \leq n-1 < p < n$ avec $\alpha > n-1$ alors on a :

$${}^{C}D^{p}(t-a)^{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n}d\tau \qquad (1.31)$$

En faisant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$ on aurra :

$$\begin{aligned} {}^{C}D^{p}(t-a)^{\alpha} &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n}d\tau \qquad (1.32) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p}\int_{0}^{1}(1-s)^{n-p-1}s^{\alpha-n}ds \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)\beta(n-p,\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p}. \end{aligned}$$

Exemple 1.8
$p = 0.\ 5$, $a = 0$, $\alpha = 0.\ 5$

$$^{C}D^{0.5}t^{0.5} = \frac{\Gamma(1.5)}{\Gamma(1)} = \Gamma(1.5).$$

Propriétés
Nous présentons maintenant quelques propriétés de l'opérateur de dérivation au sens de Caputo.

1- Relation avec la dérivée de Riemann- Liouville
Soit $p \geq 0$ avec $n-1 \leq p < n$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que f une fonction telle que $^{C}D^p$ et $^{RL}D^p$ existent, alors :

$$^{C}D^p f(t) = {}^{RL}D^P f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} \tag{1.33}$$

On déduit que si $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, on aurra

$$^{C}D^p f(t) = {}^{RL}D^P f(t) \tag{1.34}$$

2- Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire
Soit $p > 0$. Si $f \in C^n([a,b])$, alors, on a :

$$^{C}D^p I^p f(t) = f(t), \forall t \in [a,b] \tag{1.35}$$

et

$$I^{pC}D^p f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^k}{k!}, \forall t \in [a,b] \tag{1.36}$$

Alors l'opérateur de dérivation de Caputo est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire, mais il n'est pas un inverse droite.

Lemme 1.1 [17] *Soit $\alpha > 0$ et $g \in C([a,b])$, alors l'équation différentielle fractionnaire $^{C}D^\alpha g(t) = 0$, admet la solution suivante :*

$$g(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + \ldots + c_n t^{n-1}. \tag{1.37}$$

Où, $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Corollaire 1.1 *Si $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ avec $\alpha + \beta \leq 1$* et *f de classe C^1, alors :*

$$(^{C}D^\alpha \circ {}^{C}D^\beta) f = {}^{C}D^{\alpha+\beta} f = (^{C}D^\beta \circ {}^{C}D^\alpha) f \tag{1.38}$$

Démonstration : Il est facile de voir que

$$
\begin{aligned}
({}^C D^\alpha \circ {}^C D^\beta) f &= \left(I^{1-\alpha} \circ \frac{d}{dx} \circ I^{1-\beta} \circ \frac{d}{dx} \right) f, \qquad (1.39)\\
&= \left(I^{1-\alpha-\beta} \circ I^{\beta} \circ \frac{d}{dx} \circ I^{1-\beta} \circ \frac{d}{dx} \right) f,\\
&= \left(I^{1-\alpha-\beta} \circ {}^C D^{1-\beta} \circ I^{1-\beta} \circ \frac{d}{dx} \right) f,\\
&= \left(I^{1-\alpha-\beta} \circ \frac{d}{dx} \right) f,\\
&= {}^C D^{\alpha+\beta} f.
\end{aligned}
$$

La commutativité résulte de la commutativité de l'addition des réels.

1.3.3 Approche de Weyl

Définition 1.8 *La transformation de Weyl est définie par*

$$
(W^a f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{+\infty} (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt \qquad (1.40)
$$

Proposition 1.2 *L'application $\alpha \longrightarrow (W^\alpha f)(x)$ est définie pour* $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$*, holomorphe et se prolonge en une fonction analytique entière.*

Démonstration : Il suffit de reprendre la technique utilisée pour l'intégrale de Riemann-Liouville, à savoir :

$$
\begin{aligned}
(W^\alpha f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{+\infty} f(t) d\left(\frac{(t-x)^\alpha}{\alpha} \right) \qquad (1.41)\\
&= \frac{-1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_x^{+\infty} (t-x)^\alpha f'(t) dt\\
&= -(W^{\alpha+1} f')(x)
\end{aligned}
$$

Cette égalité définit le prolongement analytique.

Proposition 1.3 *La transformation de Weyl vérifie :*

$$
W^\alpha \circ W^\beta = W^{\alpha+\beta}
$$

Démonstration :
On a :

$$\begin{aligned}\left(W^{\alpha}\circ W^{\beta}\right)f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_{x}^{+\infty}(s-x)^{\alpha-1}\left(\int_{s}^{+\infty}(t-s)^{\beta-1}f(t)dt\right) \qquad (1.42)\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_{x}^{+\infty}f(t)\left(\int_{x}^{t}(s-x)^{\alpha-1}(t-s)^{\beta-1}ds\right)dt.\end{aligned}$$

On pose le changement de variable $s = x + (t-x)\tau$, alors :

$$\begin{aligned}\int_{x}^{t}(s-x)^{\alpha-1}(t-s)^{\beta-1}ds &= (t-x)^{\alpha+\beta-1}\int_{0}^{1}\tau^{\alpha-1}(1-\tau)^{\beta-1}d\tau, \qquad (1.43)\\ &= (t-x)^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.\end{aligned}$$

on remplace dans (1.42), on obtient le résultat.
Définition 1.9 *La dérivée fractionnaire au sens de Weyl est définie par*

$$({}^{W}D^{\alpha}f)(x) = \left(\frac{-d}{dx}\right)^{m}\left[W^{m-\alpha}f\right](x) \qquad (1.44)$$

où $\alpha \in]m-1, m[$ et $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.
Exemple 1.9 Soit $\lambda \in C$ *avec* $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ et soit $f(x) = e^{-\lambda x}$. Alors

$$\begin{aligned}[W^{m-\alpha}f](x) &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_{x}^{+\infty}(t-x)^{m-\alpha-1}e^{-\lambda t}dt, \qquad (1.45)\\ &= \frac{e^{-\lambda x}}{\Gamma(m-\alpha)}\int_{0}^{+\infty}\tau^{m-\alpha-1}e^{-\lambda\tau}d\tau,\\ &= e^{-\lambda x}\lambda^{\alpha-m}.\end{aligned}$$

Où on a posé $t = x + \tau$. On obtient ainsi :

$${}^{W}D^{\alpha}f(x) = {}^{W}D^{\alpha}e^{-\lambda x} = \lambda^{\alpha}e^{-\lambda x}. \qquad (1.46)$$

Exemple 1.10

On voit bien que la dérivée au sens de Weyl généralise la dérivation classique sur les exponentielles. Par contre l'action sur les fonctions puissances doit être calculée avec précaution. En effet, il faut considérer $x > 0$ et prendre $f(x) = x^{-\lambda}$ avec $\mathrm{Re}(\lambda) > m - \alpha$ pour assurer la convergence à l'infini. On a dabord

$$\begin{aligned} W^{m-\alpha}x^{-\lambda} &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_x^{+\infty}(t-x)^{m-\alpha-1}t^{-\lambda}dt, \\ &= \frac{x^{m-\alpha-\lambda}}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^{+\infty}\tau^{m-\alpha-1}(1+\tau)^{-\lambda}d\tau, \end{aligned} \tag{1.47}$$

où on a utilisé le changement $t = x(1+\tau)$. L'intégrale en τ se calcule comme suit :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty}\tau^{m-\alpha-1}(1+\tau)^{-\lambda}d\tau &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\tau^{m-\alpha-1}e^{-u(1+\tau)}u^{\lambda-1}du\, d\tau, \\ &= \frac{\Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(\lambda)}\int_0^{+\infty}e^{-u}u^{\lambda+\alpha-m-1}du, \\ &= \frac{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(\lambda+\alpha-m)}{\Gamma(\lambda)}, \end{aligned} \tag{1.48}$$

donc

$$W^{m-\alpha}x^{-\lambda} = \frac{\Gamma(\lambda+\alpha-m)}{\Gamma(\lambda)}x^{m-\alpha-\lambda}, \tag{1.49}$$

puis

$$\left(\frac{-d}{dx}\right)^m W^{m-\alpha}x^{-\lambda} = \frac{\Gamma(\lambda+\alpha)}{\Gamma(\lambda)}x^{-\alpha-\lambda}, \tag{1.50}$$

c'est-à-dire

$${}^{W}D^{\alpha}x^{-\lambda} = \frac{\Gamma(\lambda+\alpha)}{\Gamma(\lambda)}x^{-\lambda-\alpha}. \tag{1.51}$$

1.3.4 Comparaison entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle de Riemann-Liouville[5]

- L'avantage principal de l'approche de Caputo est que les conditions initiales des équations différentielles fractionnaires avec les dérivées de Caputo acceptent la même forme comme pour les équations différentielles d'ordre entier, c'est à dire, contient les valeurs limites des dérivées d'ordre entier des fonctions inconnues en borne inférieur $x = a$.

- Une autre différence entre la définition de Riemann-Liouville et celle de Caputo est que la dérivée d'une constante est nulle par Caputo par contre par Riemann-Liouville elle est :

$$\frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha} \tag{1.52}$$

Corollaire 1.2 *Si* $0 < \alpha < 1$ et f *une fonction de classe* C^1 *alors :*

$$\left(I^\alpha \circ {}^{RL}D^\alpha\right) f = f \text{ et } \left({}^{C}D^\alpha \circ I^\alpha\right) f = f \tag{1.53}$$

C'est-à-dire que les dérivations au sens de Riemann-Liouville et de Caputo respectivement constituent l'invese à droite et à gauche de l'opérateur de Riemann-Liouville (au moins sur les fonctions de classe C^1*).*

- On peut dire que pour arriver à la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est également l'inverse quand on suit l'autre sens (Riemann-Liouville), c'est-à-dire pour trouver la dérivée fractionnaire d'ordre α où $m-1 \leq \alpha \leq m$ par l'approche de Riemann-Liouville, on commence d'abord par l'intégration fractionnaire d'ordre $(m-\alpha)$ pour la fonction $f(x)$ et puis on dérive le résultat obtenu à l'ordre entier m, mais pour trouver la dérivée fractionnaire d'ordre α où $m-1 \leq \alpha \leq m$ par l'approche de Caputo on commence par la dérivée d'ordre entier m de la fonction $f(x)$ et puis on l'intègre d'ordre fractionnaire $(m-\alpha)$.

1.3.5 Propriétés générales des dérivées fractionnaires

1- **Linéarité** (Voir [29] p90)

La dérivation fractionnaire est une opération linéaire comme le cas de la dérivation usuelle, c'est-à-dire :

Soient f et g deux fonctions dont les dérivées fractionnaires D^p f et $D^p g$ existent. Alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $D^p(\lambda f + \mu g)$ existe, et l'on a :

$$D^p(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D^p f(t) + \mu D^p g(t) \tag{1.54}$$

où $D^{\,p}$ désigne n'importe quelle approche de dérivation fractionnaire considérée dans cette mémoire.

2- **La règle de Leibniz** (Voir [29] p91)

Pour n entier on a :

$$\frac{d^n}{dt^n}(f(t).g(t)) = \sum_{k=0k}^{np} \binom{n}{k} f^{(k)}(t)g^{(n-k)}(t) \tag{1.55}$$

La généralisation de cette formule nous donne :

$$D^p(f(t).g(t)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} f^{(k)}(t)D^{p-k}g(t) + R_n^p(t) \tag{1.56}$$

où $n \geq p+1$ et

$$R_n^p(t) = \frac{1}{n!\Gamma(-p)} \int_a^t (t-\tau)^{-p-1} g(\tau)d\tau \int_\tau^t f^{(n+1)}(\xi)(\tau-\xi)^n d\xi \tag{1.57}$$

on a $\lim_{n\to+\infty} R_n^p(t) = 0$.

Si f et g avec toutes ses dérivées sont continues sur $[a.\ b]$, alors la formule (1.56) devient :

$$D^p(f(t).g(t)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{p}{k} f^{(k)}(t)D^{p-k}g(t) \tag{1.58}$$

Où D^p est la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

1.4 Examples d'applications des systèmes fractionnaires

1.4.1 Champs d'application

Les applications de la dérivation fractionnaire dans les sciences physiques et les sciences de l'ingénieur relèvent des contributions scientifiques de ces dernières décennies, elle est utilisée comme outil de modélisation dans plusieurs domaines [25], en mécanique et en rhéologie. L'application des dérivées fractionnaires modélisant le comportement des matériaux, trouve une base théorique dans la théorie microstructurale de Rouse [15],[16] qui s'appuiek sur les lois de la thermodynamique Bagley et Torvik [4].

1.4.2 Interprétation physique de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

Pour donner l'interprétation physique de l'intégration non entière, nous considérons l'exemple d'un conducteur d'une voiture. Supposons que la voiture est équipée de deux appareils de mesure, le compteur de vitesse qui enregistre la vitesse du conducteur et l'horloge qui affiche le temps τ.

Cependant le temps τ affiché par l'horloge est incorrect.

Nous supposons que la relation entre le temps incorrect τ (affiché par l'horloge et dont le conducteur considère comme le temps exact) et le temps exact T est donnée par la fonction connue $g_t(\tau)$ telle que : $T = g_t(\tau)$ et

$$g_t(\tau) = \frac{1}{\Gamma(t)}[t^\alpha - (t - \tau)^\alpha] \tag{1.59}$$

Ceci signifie que si le conducteur mesure l'intervalle de temps $d\tau$, le vrai intervalle de temps est $dT = dg_t(\tau)$.

Le conducteur A représente le conducteur de la voiture, ignorant l'erreur del'horloge, calcule la distance parcourue au moyen d'une intégrale classique :

$$S_A(t) = \int_0^t v(\tau)d\tau \tag{1.60}$$

Un observateur O, lui en connaissance de la mauvaise mesure de l'horloge et de la fonction $g_t(\tau)$ reliant le temps incorrect τ au temps exact, calcule la distance réellement parcourue par la voiture :

$$S_O(t) = \int_0^t v(\tau)dg_t(\tau) = I^{\alpha}v(t) \tag{1.61}$$

avec

$$I^{\alpha}v(t) = \frac{1}{\Gamma(t)}\int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1}v(\tau)d\tau. \tag{1.62}$$

L'intégrale donnée par l'équation (1.60) peut être interprétée comme la distance parcourue par un mobile pour lequel nous avons effectué deux mesures :

Une mesure correcte de la vitesse et une mesure incorrecte du temps. L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville donnée par l'équation (1.61) peut être interprétée comme la véritable distance parcourue par l'objet mobile, pour lequel nous avons enregistré ses valeurs locales de la vitesse $v(\tau)$ (c'est sa vitesse individuelle) et la valeur local du temps τ(temps individuel), sachant que la relation entre le temps enregistré localement et le temps cosmique est donné par la fonction $g_t(\tau)$.

La fonction $g_t(\tau)$ décrit le temps échelle non homogène, qui dépend non seulement de τ, mais aussi du paramètre t qui représente la dernière valeur mesuré du temps individuel de l'objet mobile.

Quand t change, l'intervalle de temps cosmique change également.

La notion du temps cosmique est reliée au changement de la gravité dans l'espace temps d'un corps en déplacement. En effet un corps mobile change sa position dans l'espace-temps, le champ de la gravité dans l'espace-temps tout entier change également en raison de mouvement. Par conséquent, l'intervalle de temps cosmique, qui correspond à l'histoire du mouvement de l'objet mobile, change. Ceci affecte le calcul de la vraie distance $S_O(t)$ parcourue par cet objet mobile.

En résumé, l'intégrale fractionnaire de Riemann Liouville de la vitesse individuelle $v(\tau)$, d'un objet mobile, pour lequel la relation entre son temps individuel τ, et le temps cosmique T à chaque instant t est donnée par la fonction connue $T = g_t(\tau)$, décrite par l'équation (1.59) représente la véritable distance $S_O(t)$ parcourue par cet objet.

1.4.3 Interprétation physique de la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Dans la section précédente nous avons interprété l'intégrale fractionnaire de Riemann- Liouville comme étant la vraie distance $S_O(t)$ parcourue par un objet mobile, pour lequel le rapport entre son temps individuel τ et le temps cosmique T à chaque instant t est donnée par la fonction connue $T = g_t(\tau)$.

On utilisant les propriétés de la dérivation et de l'intégration fractionnaire, nous pouvons exprimer l'expression de la vitesse individuelle $v(t)$ à partir de la véritable distance parcourue $S_O(t)$.

La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville de la vraie distance $S_O(t)$ parcourue par le mobile permet de donner l'expression de la vitesse $v(t)$:

$v(t) = D^{\alpha} S_O(t)$ avec

$$D^{\alpha} S_O(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{S_O(t)}{(t-\tau)^{\alpha}} d\tau \tag{1.63}$$

et $0 \leq \alpha \leq 1$.

Nous pouvons aussi dériver la valeur de la véritable distance par rapport la variable de temps t qui donne la relation entre la vitesse $v_O(t) = S_o^{'}(t)$ du mouvement de point de vue de l'observateur indépendant O et la vitesse individuelle $v(t)$:

$$v_O(t) = \frac{d}{dt} I^{\alpha} v(t) = D^{1-\alpha} v(t). \tag{1.64}$$

Par conséquent, la dérivée au sens de Riemann-Liouville d'ordre $(1-\alpha)$, de la vitesse individuelle $v(t)$ est égale à la vitesse de vue de l'observateur indépendant $v_O(t)$, si le temps individuel τ et le temps cosmique T sont reliés par la fonction $T = g_t(\tau)$, décrite par l'équation

$$g_t(\tau) = \frac{1}{\Gamma(t)} \left(t^{\alpha} - (t-\tau)^{\alpha}\right) \tag{1.65}$$

Pour $\alpha = 1$, quand il n'y a aucune déformation dynamique del'échelle de temps, les deux vitesses coïncident : $v_O(t) = v(t)$.

Chapitre 2

Quelques résultats de la théorie du point fixe

Résumé

Le but de ce chapitre est l'étude de quelques théorèmes du point fixe. On commencera par le plus simple et le plus connu d'entre eux : le théorème du point fixe de Banach pour les applications contractantes. On verra ensuite le théorème du point fixe de Brouwer, puis le théorème du point fixe de Schauder. Enfin nous abordons le théorème du point fixe de Guo-Krasnoselskii.
.

2.1 Théorème du point fixe du type Banach

Le théorème du point fixe de Banach (connu aussi sous le nom le théorème de l'application contractante) est un théorème simple à prouver, qui garantit l'existence d'une unique point fixe pour toute application contractante, s'applique aux espaces complets et qui possède de nombreuses applications. Ces applications incluent les théorèmes d'existence de solution pour les équations différentielles ou les équations intégrales et l'étude de la convergence de certaines méthodes numériques.

2.1.1 Théorème de l'application contractante

Définition 2.1 *Soit* $(M,\ d)$ *un espace métrique complet. On dit que* $T : M \to M$ *est une application Lipschitzienne s'il existe une constante positive* $k \geq 0$ *telle que ,l'on ait, pour tout couple d'éléments* $x,\ y$ *de* M, *l'inégalité*

$$d(T(x),\ T(y)) \leq k(d(x,\ y)) \tag{2.1}$$

Si $k \leq 1$, *application* T *est appelée non expansive.*
Si $k < 1$, *l'application* T *est appelée contraction.*

Théorème 2.1 (*Théorème du point fixe de Banach* (*1922*)) [33]
Soit $(M,\ d)$ *un espace métrique complet et soit* $T : M \to M$ *une application contractante avec la constante de contraction* k, *alors* T *a un unique point* $x \in M$. *De plus on a*

$$\begin{aligned} Si\ x_0 &\in M\ et\ x_n = T(x_{n-1}), \qquad (2.2)\\ \lim_{n\to\infty} x_n &= x\ et\ d\ (x_n,\ x) \leq k^n(1-k)^{-1}d\ (x_1,\ x_0),\ n\ \geq 1, \end{aligned}$$

x étant le point fixe de T.

Remarque 2.1 *Si* T *est une application Lipschitzienne (pas nécessairement une contraction) mais l'une de ces itérées* T^p *est une contraction, alors* T *a une seul point fixe.*

En effet, soit x l'unique point fixe de T^p on a $T^p(T(x)) = T(T^p(x)) = T(x)$ ce qui convient à dire que $T(x)$ est aussi un point fixe de T^p et grâce à l'unicité $T(x) = x$.

Ce résultat est valable pour tous les types de contraction qui assurent l'unicité du point fixe.

Remarque 2.2 *Il se peut que* T *ne soit pas une contraction sur tout l'espace* M *mais juste dans le voisinage d'un point donné. Dans ce cas on a le résultat suivant :*

Soit $(M,\ d)$ un espace métrique complet et $T : B \to M$ telle que

$$d\ (T(x),\ T(y)) \leq kd\ (x,\ y) \forall x,\ y \in B\ et\ k < 1, \tag{2.3}$$

où

$$B = \{x \in M,\ d\ (x,\ z)\ < \varepsilon\} z \in M\ et\ \varepsilon > 0. \tag{2.4}$$

Si $d(z,\ T(z)) < \varepsilon(1-k)$, alors T possède un unique point fixe $x \in B$.

2.1.2 Extension du principe de l'application contractante

Extension de Boyd et Wong Cette extension consiste à remplacer la contraction par la φ-contraction dont nous donnons la définition :

Définition 2.2 *soit M un espace métrique et T une application de M dans M. On dit que T est une φ -contraction, s'il existe une application φ semi-continue supérieurement de $[0,\ \infty)$ dans $[0,\ \infty)$ avec $\varphi(r) < r$ pour $r > 0$ telle que :*

$$\forall x,\ y \in M,\ d\ (T(x),\ T(y)) \leq \varphi(d\ (x,\ y)) \tag{2.5}$$

Le résultat suivant va assurer l'existence d'un unique point fixe pour une telle application :

Théorème 2.2 [6]

Toute φ -contraction d'' un espace métrique complet dans lui-même admet un point fixe unique.

Remarque 2.3 *La contraction est un cas particulier de la φ-contraction (il suffit de prendre $\varphi(r) = kr$ pour tout $r \geq 0,\ 0 \leq k < 1$).*

Si on remplace l'hypothèse que soit une contraction par l'hypothèse plus faible qui est :

$$d\ (T(x),\ T(y)) < d\ (x,\ y). \tag{2.6}$$

T n'a pas de point fixe.

En compensant par d'autres hypothèses supplémentaires, Edelstein a obtenu le résultat suivant :

Extension d'Edelstein

Théorème 2.3 [9]

Soit $(M,\ d)$ un espace métriqne complet et $T : M \to M$ une application telle que

$$d\ (T(x),\ T(y)) < d\ (x,\ y)\ \ \forall x, y \in M,\ x \neq y. \tag{2.7}$$

Supposons qu'il existe $y \in M$ telle que la suite $\{x_n\}$ définie par

$$\begin{cases} x_0 = y \\ x_n = T(x_{n-1}),\ n\ \geq 1 \end{cases}$$

possèdent une sous suite $\{x_{n_j}\}$ avec $\lim_{j\to\infty} x_{n_j} = x \in M$. Alors x est l'unique point fixe de T.

-Le résultat précédent (d'Edelstein) a une importante conséquence qu'est :

Théorème 2.4 *soit* $(M,\ d)$ *un espace métrique complet et* $T : M \to M$ *une application telle que*

$$d\ (T(x),\ T(y)) < d\ (x,\ y), \forall x, y \in M,\ x \neq y. \tag{2.8}$$

En plus, supposons que $T : M \to K$ *où* K *est un sous ensemble compact de* M, *alors* T *possède une unique point dans* M.

2.2 Théorème du point fixe du type Brouwer-Schauder

2.2.1 Le théorème du point fixe de type Brouwer

Le théorème du point fixe de Brouwer est un résultat de topologie algébrique. Il fait partie de la grande famille des théorèmes du point fixe. Il existe plusieurs formes de ce théorème selon le contexte d'utilisation. La plus simple est parfois donnée sous la forme suivante :

Dans le plan : Toute application T continue du disque fermé dans lui-même admet au moins un point fixe. Il est possible de généraliser à toute dimension finie.

Dans un espace euclidien : Toute application T continue d'une boule fermée d'un espace euclidien dans elle -même admet un point fixe.

Il peut encore être un peu plus général :

Convexe compact : Toute application T continue d'un convexe compact K d'un espace euclidien à valeur dans K admet un point fixe.

a) Théorème de Brouwer en dimension un : On note $[a,b]$ le domaine de définition de T . L'application T est continue et à valeurs dans le même segment. Dire que cette application admet un point fixe, revient à dire que son graphe croise celui de l'application définie sur $[a, b]$, qui a x associe x.

Une démonstration n'est pas difficile à établir. Considérons l'application continue

$$F(x) = T(x) - x, \tag{2.9}$$

elle est positive en a, négative en b. Le théorème de Bolzano, qui est un cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires assure que l'application F possède un zéro dans $[a,\ b]$, ce zéro de F est un point fixe de T.

En dimension deux, un raisonnement intuitif permet de montrer que le résultat est probablement vrai. La démonstration est néanmoins plus délicate.

b) Théorème de Brouwer en dimension deux Si K le domaine de définition de T est d'intérieur vide, c'est un segment. Sinon, K est semblable à une boule unité fermée. Le terme semblable signifie qu'il existe un homéomorphisme ϕ de la boule unité vers K. L'équation définissant le point fixe peut encore s'écrire si $h = T \circ \phi$, $h(x) = x$. Autrement dit, on peut supposer que K est la boule unité fermée. On peut de plus choisir la norme de manière quelconque. Si on choisit celle qui associe la valeur absolue de la plus grande coordonnée, cela revient à dire que l'on peut choisir pour compact K, l'ensemble $[-1, 1] \times [-1, 1]$, sans perte de généralité.

Si l'on définit la fonction F comme suit :

$$\begin{aligned} F \quad &: \quad [-1,1] \times [-1,1] \to [-1,1] \times [-1,1], \\ x \quad &\mapsto \quad F(x) = h\ (x) - x. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Cela revient à montrer que la fonction atteint le vecteur nul sur $[-1, 1]$ $\times[-1, 1]$.

Si F_k, pour $k = 1, 2$, sont les deux fonctions cordonnées de F, cela revient à montrer l'existence d'un point x_0, telles que F_1 et F_2 admettent toutes deux pour zéro la valeur x_0.

La fonction F_1 est une fonction de $[-1, 1]$ $\times[-1, 1]$ dans $[-1, 1]$. Sur $\{-1\} \times [-1, 1]$, elle est positive, en revanche sur $\{1\}$ $\times[-1, 1]$, elle est négative. Ceci laisse penser que la courbe de niveau 0 est une ligne qui part d'un point $[-1, 1]$ $\times\{1\}$ pour finir sur un point de $[-1,\ 1] \times \{-1\}$.

Le même raisonnement appliqué à F_2 laisse penser que la courbe de niveauu 0 est cette fois-ci une ligne qui part d'un point $\{-1\} \times [-1,\ 1]$ pour terminer sur un point de $\{1\} \times [-1, 1]$.

Intuitivement, il semble évident que ces deux lignes de niveaux doivent nécessairement se croiser et ce point de croisement est un point fixe de $T \circ \phi$.

Remarque 2.4 *-Il est important de voir que l'unicité n'pas assurée par le théorème de Brouwer du fait que chaque point de K est un point fixe de l'application identité.*

-Nous allons donner un résultat de Brouwer qu'on aura besoin dans la démonstration du théorème de Schauder.

Définition 2.3 *On dit qu'un espace topologique a la proprétè du point fixe si toute application continue $T : E \to E$ possède un point fixe. On note par B_n la boule unité fermée de E^n.*

On a le résultat suivant :

Théorème 2.5 *La boule B_n a la propriété du point fixe pour tout $n \in N$.*

Schauder a généralisé le résultat de Brouwer en dimension infinie.

2.2.2 Théorème du point fixe de type Schauder

Ce théorème prolonge le résultat du théorème de Brouwer pour montrer l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach.

Le théorème du point fixe de Schauder est plus topologique et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique.

Et nous avons le résultat suivant :

Théorème 2.6 [35]

Soit K un sous ensemble non vide, compact, convexe dans un espace de Banach E et supposons $T : K \to K$ une application continue. Alors T admet un point fixe.

Démonstration : Soit $T : K \to K$ une application continue. Comme K est compact, T est uniformément continue, donc, si on fixe $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x,\ y \in K$,

on a

$$\|x - y\| \leq \delta \Rightarrow \|T(x) - T(y)\| \leq \varepsilon \tag{2.11}$$

de plus, il existe un ensemble fini de points $\{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_p\} \subset K$ tel que les boules ouvertes de rayon δ centrées aux x_i recouvrent K, i. e. $K \subset \bigcup_{1 \leq j \leq p} B\ (x_j,\ \delta)$.

Si on désigne $L := Vec\ (T(x_j))_{1 \leq j \leq p}$ alors L est de dimension finie, et $K^* := K \cap L$ est compact convexe de dimension finie. Pour $1 \leq j \leq p$, on définie la fonction continue $\psi_j : E \to \mathbb{R}$ par

$$\psi_j = \begin{cases} 0 & \text{si } \|x - x_j\| \geq \delta \\ 1 - \frac{\|x - x_j\|}{\delta} & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.12}$$

il est clair que ψ_j est strictement positive sur $B(x_j,\ \delta)$ et nulle en dehors.

On a donc, pour tout $x \in K$, $\sum_{j=1}^{p} \psi_j(x) > 0$, on peut définir sur K les fonctions continues positives φ_j par

$$\varphi_j = \frac{\psi_j}{\sum_{k=1}^{p} \psi_k (x)} \tag{2.13}$$

pour les quelles on a $\sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) = 1$ pour tout $x \in K$.

Posant, pour $x \in K$

$$g(x) = \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) T(x_j) \tag{2.14}$$

La fonction g est continue (car elle est la somme des fonctions continues) et prend ses valeurs dans K^* (car $g(x)$ est un barycentre des $T(x_j)$).

Si on prend la restriction $g_{/K^*} : K^* \longrightarrow K^*$,(d'après théorème de Brouwer) g possède un point fixe $y \in K^*$.

De plus :

$$\begin{aligned} T(y) - y &= T(y) - g(y), \\ &= \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) T(y) - \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) T(x_j), \\ &= \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) [T(y) - T(x_j)]. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Or si $\varphi_j(y) \neq 0$ alors $\|y - x_j\| < \delta$, et par suite $\|T(y) - T(x_j)\| < \varepsilon$.

On a pour tout j

$$\begin{aligned} \|f(y) - y\| &\leq \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) \left(T(y) - T(x_j)\right), \\ &\leq \sum_{j=1}^{p} \varepsilon \varphi_j(y) = \varepsilon. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Pour tout entier m, on peut trouver un point $y_m \in K$ tel que $\|T(y_m) - y_m\| \leq 2^{-m}$.

Et puisque K est compact, de la suite $(y_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ on peut extraire une sous suite (y_{m_k}) qui converge vers un point $y^* \in K$.

Alors T étant continue, la suite $(T(y_{m_k}))$ converge vers $T(y^*)$,et on conclut que $T(y^*) = y^*$, i,e y^* est un point fixe de T sur K.

Remarque 2.5 *De nombreux théorèmes d'' existence sont obtenus à partir des théorèmes précités, en réduisant le problème d'' existence à un problème de point fixe citons à titre d'' exemple le théorème de Peano (voir* [33],[35]).

Théorème 2.7 (*théorème de Peano*)

Soit $(a,\ b)$ un point de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, et $f\ (t,\ y)$ une fonction continue dans le voisinage de $(a,\ b)$, alors le problème suivant :

$$\begin{cases} y'(t) & = f(t,\ y(t)) \\ y(a) & = b \end{cases} \tag{2.17}$$

admet au moins une solution dans un voisinage de a.

Ici le problème revient à étudier l'existence d'un point fixe de l'opérateur $U : K \to K$ définit par :

$$Ux(t) = b + \int_a^t f\ (s,\ x(s))ds; \tag{2.18}$$

où $K \subset E$ compact et E l'espace des fonctions continues définies dans un certain voisinage de a.

Théorème 2.8 (*Théorème de Rothe*) [33]

Soit X un espace normé , K une partie convexe fermée de X. Alors toute application compacte et continue de K dans K telle que $T(\partial K) \subset K$ admet un point fixe.

Le résultat suivant est une autre conséquence du théorème de Schauder qui donne lieu à de nombreuses applications dans les équations aux dérivées partielles :

Théorème 2.9 *Soit T un opérateur compact de l'' espace de Banach X dans lui-même. Supposons qu'il existe un réel $r > 0$tel que l'égalité $u = \sigma Tu$ implique $\|u\| < r$, où $u \in X$, $\sigma \in [0,\ 1]$; alors T admet un point fixe dans $B(0,\ r)$.*

-Le théorème de Schauder reste vrai dans le cas des espaces localement convexes (e. l. c), nous allons le confirmer par les théorèmes suivants (voir [10], [32]) :

Théorème 2.10 (*Théorème de Tychonoff et Singball*)

Soit E un e. l. c, et K un compact convexe de E, alors l'application T continue de K dans K admet un point fixe.

Théorème 2.11 (*Schauder 1930*)

Soit K un convex, fermé , borné et non vide, $K \subset X$ tel que X est un espace de Banach. Soit $T : K \to K$ une application compacte. Alors, T admet un point fixe.

Théorème 2.12 [8] (*Théorème de l'' alternative non linéaire de Leray Schauder*)

Soit X un espace de Banach, Ω un sous ensemble ouvert borné de X, avec $0 \in \Omega$ et $T : \overline{\Omega} \to X$ une application compact. alors

1)T a un point fixe sur $\overline{\Omega}$ ou bien

2) il existe $\lambda \in (0,\ 1)$ et $u \in \partial\Omega$ tel que : $x = \lambda T(x)$

On a vu plus haut deux théorèmes principaux de la théorie du point fixe à savoir le théorème de Schauder et le principe de l'application contractante de Banach, Krasnoselskii a combiné ces deux théorème ([20], [32], [34])

2.3 Théorème du point fixe de Krasnoselskii

Théorème 2.13 *Soit X un espace de Banach et D un ensemble non vide de X fermé, borné et convexe. U et V sont deux applications de D dans X telles que : U est une contraction (de constante k) et V est compacte et continue. $Ux+Vy \in D, \forall x,\ y \in D$, Alors il existe $x \in D$ tel que $Ux+Vx = x$.*

Démonstration : *Soit y fixé dans D, comme U est une contraction, l'équation $x = Ux + Vy$ admet une solution unique x dans D.*

On définit l'application

$$\begin{aligned} L &: D \to D \\ Ly &= x \\ Ly &= ULy + Vy \ ,\ (y \in D). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Il est clair que $LD \subset D$. On va montrer que L est compacte et continue et d'' après le théorème de Schauder, on pourra conclure qu'il existe $y \in D$ tel que $Ly = y$, d'où : $Uy + Vy = y$.

Soit y_n un point arbitraire de D, alors d'après (2.19) :

$$\begin{aligned} Ly_n &= ULy_n + VLy_n, \\ Ly - Ly_n &= ULy - ULy_n + Vy - Vy_n, \\ \|Ly - Ly_n\| &\leq \|ULy - ULy_n\| + \|Vy - Vy_n\| \end{aligned} \tag{2.20}$$

et puisque U est une contraction on a

$$\begin{aligned} \|Ly - Ly_n\| &\leq k\|Ly - Ly_n\| + \|Vy - Vy_n\|, \\ \|Ly - Ly_n\| &\leq \frac{1}{1-k}\|Vy - Vy_n\|, \end{aligned} \tag{2.21}$$

d'' où la continuité de L. Reste à montrer que LD est relativement compacte, en effet, comme VD est relativement compacte

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists (1-k)\ \varepsilon\ réseau Vy_1 \ldots Vy_n \tag{2.22}$$

c'est à dire les boules

$$B(Vy_k,\ (1-k)\varepsilon), \quad 1 \leq k \leq n. \tag{2.23}$$

telle que

$$VD \subset \bigcup_{k=1}^{n} B\ (Vy_k,\ (1-k)\varepsilon). \tag{2.24}$$

Alors de (2.21) $Ly_1 \ldots Ly_n$ est un ε réseau de LD, ce qui achève la démonstration ■

Notons que si $U = 0$, le théorème se résume au théorème de Banach, si $V = 0$ alors le théorème n'est autre que le théorème de Schauder.

Théorème 2.14 [20]

Soit E un espace de Banach et $K \subset E$ un cône. Ω_1, Ω_2 sont deux ouverts de E avec $0 \in \Omega_1$ et $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$.

Soit $T : K \cap (\overline{\Omega_2} \backslash \Omega_1) \to K$ un opérateur complètement continu tel que :

a) $\|Tu\| \leq \|u\|$ pour tout $u \in K \cap \partial\Omega_1$, et $\|Tu\| \geq \|u\|$ pour tout $u \in K \cap \partial\Omega_2$. ou bien

b) $\|Tu\| \leq \|u\|$ pour tout $u \in K \cap \partial\Omega_2$, et $\|Tu\| \geq \|u\|$ pour tout $u \in K \cap \partial\Omega_1$.

Alors T possède un point fixe dans $K \cap (\overline{\Omega_2} \backslash \Omega_1)$.

Chapitre 3

Existence, unicité et positivité de la solution d'un problème aux limites fractionnaire

Résumé

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence et l'unicité de la solution positive d'un problème aux limites fractionnaire. Nous y abordons ces résultats en appliquant quelques théorèmes du point fixe.

3.1 Présentation du problème

Dans ce chapitre on considère le problème aux limites fractionnaire $(P\ 1)$ suivant :

$$(P\ 1) : \begin{cases} {}^{C}D^{q}u(t) = f(t, u(t), {}^{C}D^{\sigma}u(t)) \quad 0 < t < 1, \\ u(0) = u''(0) = 0, \quad u'(\eta) = \alpha u''(1). \end{cases} \tag{3.1}$$

où ${}^{C}D^{q}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo.

$f : [0, 1] * \mathbb{R} * \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donnée, $2 < q < 3$, $0 < \sigma < 1$, $0 < \eta < 1$.

Lemme 3.1 [17] *pour $\alpha > 0$ et $g(t) \in C[0, 1]$,l'équation fractionnaire homogène*

$${}^{C}D^{\alpha}g(t) = 0 \tag{3.2}$$

possède une solution

$$g(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + ... + c_n t^{n-1}, \tag{3.3}$$

où $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, \ldots, n$ *et* $n = [\alpha] + 1$,*(*$[\alpha]$ *est la partie entière de* α*).*

On note par $L^1([0,1], \mathbb{R})$ l'espace de Banach des fonctions Lebesgue intégrable de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$,muni de la norme $\|y\| = \int\limits_0^1 |y(t)|\, dt$.

Commençant d'abord par la résolution du problème auxiliaire

Lemme 3.2 *Soient* $2 < q < 3$, $0 < \sigma < 1$*et* $y \in C[a,b]$. *La solution unique du problème fractionnaire suivante*

$$\begin{cases} {}^C D^q u(t) = y(t), \ 0 < t < 1 \\ u(0) = u''(0) = 0, \ u'(\eta) = \alpha u''(1). \end{cases} \tag{3.4}$$

est donnée par

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(q-2)} \left[\int\limits_0^1 G(t,s) y(s) ds - \frac{t}{q-2} \int\limits_0^\eta (\eta - s)^{q-2} y(s) ds \right]. \tag{3.5}$$

Où

$$G(t,s) \begin{cases} \frac{(t-s)^{q-1}}{(q-2)(q-1)} + \frac{t\alpha}{(1-s)^{3-q}}, & s \leq t \\ \frac{t\alpha}{(1-s)^{3-q}}, & s > t \end{cases} \tag{3.6}$$

Démonstration : Appliquant le lemme 3.1, on trouve

$$u(t) = I^q y(t) + c_1 + c_2 t + c_3 t^2, \tag{3.7}$$

par une dérivation des deux membres de (3.7), on trouve

$$\begin{aligned} u'(t) &= I^{q-1} y(t) + c_2 + c_3 t \\ u''(t) &= I^{q-2} y(t) + c_3 \end{aligned} \tag{3.8}$$

or, le premièr condition dans (3.4) implique que $c_1 = c_3 = 0$, tandis que le second ramène à

$$c_2 = \alpha I^{q-2} y(1) - I^{q-1} y(\eta). \tag{3.9}$$

Substituant c_1, c_2 et c_3 dans (3.7), on obtient

$$u(t) = I^q y(t) + t(\alpha I^{q-2} y(1) - I^{q-1} y(\eta)), \tag{3.10}$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t \frac{y(s)}{(t-s)^{1-q}}ds + \frac{t\alpha}{\Gamma(q-2)}\int_0^1 \frac{y(s)}{(1-s)^{3-q}}ds \qquad (3.11) \\ &\quad -\frac{t}{\Gamma(q-1)}\int_0^\eta \frac{y(s)}{(\eta-s)^{2-q}}ds, \end{aligned}$$

i. e

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(q-2)}\left[\int_0^1 G(t,s)y(s)ds - \frac{t}{q-2}\int_0^\eta (\eta-s)^{q-2}y(s)ds\right], \qquad (3.12)$$

où G est définie par (3.6).

3.2 Résultat d'existence et d'unicité

Dans cette section on démontre l'existence et l'unicité de la solution dans l'espace de Banach E constitué pour les fonctions $u \in C[0,\ 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la norme

$$\|u\| = \max_{0\leq\ t\ \leq 1}|u| + \max_{0\leq\ t\ \leq 1}|{}^{c}D_{0+}^{\sigma}u|$$

On a ${}^{C}D_{0+}^{\sigma}u \in C[0,\ 1]$ si $0 < \sigma < 1$. On note par E^{+} l'ensemble défini par

$$E^{+} = \{u \in E,\ u(t)\ \geq 0, t\ \in [0,\ 1]\}$$

Tout le long de cette section, on supposera que $f \in C([0,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R},\ \mathbb{R})$ et on définit l'operateur intégral $T : E \to E$ par

$$\begin{aligned} Tu\ (t) &= \frac{1}{\Gamma(q-2)}\times\left[\int_0^1 G(t,\ s)f(s,\ u(s),{}^{C}D_{0+}^{\sigma}u(s))ds + \right. \qquad (3.13) \\ &\quad \left. -\frac{t}{q-2}\int_0^\eta (\eta-s)^{q-2}f\ (s,\ u(s),{}^{C}D_{0+}^{\sigma}u(s))ds\right] \end{aligned}$$

Alors, on a le lemme suivant

Lemme 3.3 *La fonction $u \in E$ est une solution du problème fractionnaire BVP (P 1) si et seullement si $Tu\ (t) = u(t)$, pour tout $t \in [0,\ 1]$.*

Théorème 3.1 *Supposant qu'il existe des fonctions non négatives $h,\ g \in L^1([0,1],\ \mathbb{R}_+)$ telles que pour tout $x,\ y \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,\ 1]$, on a*

$$|f(t,\ x,\overline{x}) - f(t,\ y,\overline{y})| \leq g(t)\ |x-y| + h(t)\ |\overline{x}-\overline{y}|, \tag{3.14}$$

$$C_g + C_h < 1 \text{et } A_g + A_h < (1-\sigma)\Gamma\ (1-\sigma)$$

où

$$\begin{aligned} C_g &= \|I_{0+}^{q-1}g\|_{L^1} + |\alpha| I_{0+}^{q-2}g(1) + I_{0+}^{q-1}g(\eta), \\ C_h &= \|I_{0+}^{q-1}h\|_{L^1} + |\alpha| I_{0+}^{q-2}h(1) + I_{0+}^{q-1}h(\eta) \end{aligned} \tag{3.15}$$

et

$$\begin{aligned} A_g &= I_{0+}^{q-1}(g(1)+g(\eta)) + |\alpha| I_{0+}^{q-2}g(1), \\ A_h &= I_{0+}^{q-1}(h(1)+h(\eta)) + |\alpha| I_{0+}^{q-2}h(1), \end{aligned} \tag{3.16}$$

alors, le problème fractionnaire BVP (P 1) admet une solution unique $u \in E$.

Pour la preuve du théorème 3. 1, on va utiliser la propriété de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville.

Lemme 3.4 *soit $q > 0$, $f \in L_1([a,\ b],\ \mathbb{R}_+)$. Alors, pour tout $t \in [a,\ b]$ on a*

$$I_{0+}^{q+1}f(t) \leq \|I_{0+}^{q}f\|_{L^1} \tag{3.17}$$

On va prouver maintenant le théorème 3.1.

Démonstration :. On va transformer le problème aux limites fractionnaire à un problème de point fixe. D'après le lemme 3.3, le problème fractionnaire $(P\ 1)$ possède une solution si et seulement si l'opérateur T admet un point fixe dans E.

Commençant à prouver que T est une contraction. Pour cela, soit $u,\ v \in$

E, alors

$$\begin{aligned} Tu(t)-Tv(t) &= \frac{1}{\Gamma(q-2)}\times\left[\int_0^1 G(t,\ s)(f(s,\ u(s),^C D_{0+}^{\sigma}u(s))-f(s,v(s),^C D_{0+}^{\sigma}v(s)))ds-\right.\\ &\left.\frac{t}{(q-2)}\int_0^{\eta}(\eta-s)^{q-2}(f(s,u(s),^C D_{0+}^{\sigma}u(s))-f(s,v(s),^C D_{0+}^{\sigma}v(s)))ds\right] \quad (3.18)\\ &= I_{0+}^{q}\left(f(t,\ u(t),^C D_{0+}^{\sigma}u(t))-f(t,\ v(t),^C D_{0+}^{\sigma}v(t))\right)+\\ &+t\alpha I_{0+}^{q-2}\left(f(1,\ u(1),^c D_{0+}^{\sigma}u(1))-f(1,\ v(1),^c D_{0+}^{\sigma}v(1))\right)+\\ &+t\alpha I_{0+}^{q-2}\left(f(1,\ u(1),^c D_{0+}^{\sigma}u(1))-f(1,\ v(1),^c D_{0+}^{\sigma}v(1))\right)+\\ &+tI_{0+}^{q-2}\left(f(\eta,\ u(\eta),^c D_{0+}^{\sigma}u(\eta))-f(\eta,\ v(\eta)^c D_{0+}^{\sigma}v(\eta))\right) \end{aligned}$$

A l'aide du (3.14), on peut avoir

$$\begin{aligned} |Tu(t)-Tv(t)| &\le \max_{0\le t\le 1}|u(t)-v(t)|[I_{0+}^{q}g(t)\ +|\alpha|I_{0+}^{q-2}g(1)+I_{0+}^{q-1}g(\eta)] \quad (3.19)\\ &+\max_{0\le t\le 1}|^c D_{0+}^{q}u(t)\ -CD_{0+}^{q}v(t)|[I_{0+}^{q}h(t)\ +|\alpha|I_{0+}^{q-2}h(1)+I_{0+}^{q-1}h(\eta)], \end{aligned}$$

De plus, lemme 3.4 permet d'obtenir

$$\begin{aligned} |Tu(t)-Tv(t)| &\le \|u-v\|[\|I_{0+}^{q-1}g\|+|\alpha|I_{0+}^{q-2}g(1)+I_{0+}^{q-1}g(\eta)] \quad (3.20)\\ &+\|I_{0+}^{q-1}h\|+|\alpha|I_{0+}^{q-2}h(1)+I_{0+}^{q-1}h(\eta)]\\ &\le \|u-v\|(C_g+C_h). \end{aligned}$$

Utilisant (3.14) on arrive à écrire

$$|Tu(t)-Tv(t)|<\frac{1}{2}\|u-v\|. \quad (3.21)$$

D'autre part, on a

$${}^C D_{0+}^{\sigma}Tu(t)-^C D_{0+}^{\sigma}Tv(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\sigma)}\int_0^t\frac{(T'u)(s)-(T'v)(s)}{(t-s)^{\sigma}}ds; \quad (3.22)$$

où

$$(T'u)(t) = \frac{1}{\Gamma(q-2)}\left[\int_0^1 G_1(t,\ s)f(s,\ u(s),{}^c D_{0+}^{\sigma}u(s))ds + \right. \quad (3.23)$$

$$\left. -\frac{1}{(q-2)}\int_0^{\eta}(\eta-s)^{q-2}f(s,\ u(s){}^c D_{0+}^{\sigma}u(s))ds\right]$$

et

$$G_1(t,\ s) = \frac{\partial G(t,s)}{\partial t} = \begin{cases} \frac{(t-s)^{q-2}}{(q-2)} + \frac{\alpha}{(1-s)^{3-q}} & s \leq t \\ \frac{\alpha}{(1-s)^{3-q}} & t \leq s \end{cases} \quad (3.24)$$

De plus

$${}^C D_{0+}^{\sigma}Tu(t) - {}^C D_{0+}^{\sigma}Tv(t) = \frac{1}{\Gamma(q-2)\Gamma(1-\sigma)}\times$$

$$\left[\int_0^t (t-s)^{-\sigma}\left(\int_0^1 G_1(s,\ r)(f(r,\ u(r),{}^c D_{0+}^{\sigma}u(r) - f(r,\ v(r),{}^c D_{0+}^{\sigma}v(r)))dr - \right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{1}{(q-2)}\int_0^{\eta}(\eta-r)^{q-2}(f(r,u(r),{}^c D_{0+}^{\sigma}u(r)) - f(r,v(r),{}^c D_{0+}^{\sigma}v(r)))dr\right) ds\right] \quad (3.25)$$

Tenant compte de (3.14), on a

$$|{}^C D_{0+}^{\sigma}Tu(t) - {}^C D_{0+}^{\sigma}Tv(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(q-2)\Gamma(1-\sigma)}\times$$

$$\left[(t-s)^{-\sigma}\int_0^t\left(\max_{0\leq t\leq 1}|u-v|\left(\int_0^1 G_1(s,\ r)g(r)dr - \int_0^{\eta}\frac{(\eta-r)^{q-2}}{(q-2)}g(r)dr\right)\right) + \right.$$

$$\left.\max_{0\leq t\leq 1}|{}^C D_{0+}^{\sigma}u - {}^C D_{0+}^{\sigma}v|\left(\left(\int_0^1 G_1(s,r)h(r)dr - \int_0^{\eta}\frac{(\eta-r)^{q-2}}{(q-2)}h(r)dr\right)\right)ds\right] \quad (3.26)$$

Estimant le terme

$$\left(\int_0^1 G_1(s,\ r)g(r)dr - \int_0^{\eta}\frac{(\eta-r)^{q-2}}{(q-2)}g(r)dr\right),$$

On a

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 G_1(s,\ r)g(r)dr - \int_0^\eta \frac{(\eta-r)^{q-2}}{(q-2)}g(r)dr\right| &= |\Gamma(q-2)[I_{0+}^{q-1}g(s) + \\ &\quad +\alpha I_{0+}^{q-2}g(1) - I_{0+}^{q-1}g(\eta)]|, \\ &\leq \Gamma(q-2)[I_{0+}^{q-1}g(s) + \alpha I_{0+}^{q-2}g(1) + I_{0+}^{q-1}g(\eta)], \\ &\leq \Gamma(q-2)A_g,\end{aligned} \tag{3.27}$$

Par conséquent (3.26) devient :

$$|^C D_{0+}^\sigma Tu(t) -^C D_{0+}^\sigma Tv(t)| \leq \frac{||u-v||}{(1-\sigma)\Gamma(1-\sigma)}(A_g + A_h), \tag{3.28}$$

Et en vertu de (3.14), il s'ensuit que

$$|^C D_{0+}^\sigma Tu(t) -^C D_{0+}^\sigma Tv(t)| < \frac{1}{2}||u-v||, \tag{3.29}$$

En se basant sur (3.21)-(3.29), on conclut que

$$||Tu - Tv|| < ||u-v|| \tag{3.30}$$

Finalement et grâce au principe de la contraction, l'unicité de la solution du problème fractionnaire $(P1)$ est assurée.

Donnons maintenant le résultat d'existence pour le problème fractionnaire $(P1)$.

Théorème 3.2 *Supposons que $f(t,\ 0,\ 0) \neq 0$ et qu'il existe trois fonctions non-négatives $k,\ h,\ g \in L^1([0,1],\ \mathbb{R}_+)$,*

$\phi,\ \psi \in C(\mathbb{R}_+,\ \mathbb{R}_+^*)$ croissantes sur $\mathbb{R}_+$ et $r > 0$ tels que

$$|f(t,\ x, \overline{x})| \leq k(t)\psi(|x|) + h(t)\phi(|x|) + g(t),\ i.\ e\ (t,\ x) \in [0,\ 1] \times \mathbb{R} \tag{3.31}$$

$$(\psi(r) + \phi(r) + 1)\left(C_1 + \frac{C_2}{(1-\sigma)\Gamma(1-\sigma)}\right) < r,$$

où

$$C_1 = \max_{0\leq t\leq 1}\{C_k,\ C_h,\ C_g\}\ et\ C_2 = \max_{0\leq t\leq 1}\{A_k,\ A_h,\ A_g\}$$

Les constants $C_h,\ C_g,\ A_h,\ A_g$ sont définis dans le théorème 3.1 et

$$\begin{aligned}A_k &= I_{0+}^{q-1}(k(1) + k(\eta)) + +|\alpha|I_{0+}^{q-2}k(1), \\ C_k &= ||I_{0+}^{q-1}k||_{L^1} + |\alpha|I_{0+}^{q-2}k(1) + I_{0+}^{q-1}k(\eta).\end{aligned} \tag{3.32}$$

Alors, le problème fractionnaire $(P1)$ admet au moins une solution non triviale u^* dans E.

Pour la démonstration, on va appliquer l'alternative non linéaire de Leray-Shauder (le théorème 2.12).

Démonstration : Premièrement on montre que T est complètement continu. Il est claire de voir que T est continu puisque f et G sont continus. Soit $B_r = \{u \in E, \ \|u\| \leq r\}$ un sous ensemble de E. on a $T(B_r)$ est relativement compact, en effet

(i) Pour $u \in B_r$, utilisant (3.31), on trouve

$$\begin{aligned} |Tu(t)| \ &\leq \ \frac{1}{\Gamma(q-2)}\left[\int_0^1 |G(t,\ s)|[k(s)\psi(|u(s)|) + h(s)\phi(|^cD^\sigma_{0+}u(s)|) + g(s)]ds + \right. \\ &\left. + \frac{t}{(q-2)}\int_0^\eta (\eta-s)^{q-2}\left[k(s)\psi(|u(s)|) + h(s)\phi(|^cD^\sigma_{0+}u(s)|)\right]\right] \qquad (3.33) \end{aligned}$$

Comme ϕ et ψ sont croissantes, alors (3. 33) implique que

$$\begin{aligned} |Tu(t)| \ &\leq \ \frac{1}{\Gamma(q-2)} \times \left[\int_0^1 |G(t,\ s)|[k(s)\psi(\|u\|) + h(s)\phi(\|u\|) + g(s)]ds + \right. \\ &\left. + \frac{t}{(q-2)}\int_0^\eta (\eta-s)^{q-2}[k(s)\psi(\|u\|) + h(s)\phi(\|u\|)]\right], \qquad (3.34) \\ &\leq \ \frac{1}{\Gamma(q-2)} \times \left[\int_0^1 |G(t,\ s)|[k(s)\psi(r) + h(s)\phi(r) + g(s)]ds + \right. \\ &\left. + \frac{t}{(q-2)}\int_0^\eta (\eta-s)^{q-2}[k(s)\psi(r) + h(s)\phi(r)]ds\right], \end{aligned}$$

par une technique sémilaire pour avoir (3.21), on obtient

$$\begin{aligned} |Tu(t)| \ &\leq \ \psi(r)[\|I^{q-1}_{0+}k\|_{L^1} + |\alpha|I^{q-2}_{0+}k(1) + I^{q-1}_{0+}k(\eta)] \qquad (3.35) \\ &\quad +\phi(r)[\|I^{q-1}_{0+}h\|_{L^1} + |\alpha|I^{q-2}_{0+}h(1) + I^{q-1}_{0+}h(\eta)] \\ &\quad +\|I^{q-1}_{0+}g\|_{L^1} + |\alpha|I^{q-2}_{0+}g(1) + I^{q-1}_{0+}g(\eta) \\ &\leq \ C_k\psi(r) + C_h\phi(r) + C_g \end{aligned}$$

donc

$$|Tu(t)| \leq C_1(\psi(r) + \phi(r) + 1) \tag{3.36}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}
|T'u(t)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(q-2)} \left[\int_0^1 G_1(t,\ s) f(s,\ u(s), {}^c D_{0+}^{\sigma} u(s)) ds + \right. \right. \\
&\left. \left. - \frac{1}{(q-2)} \int_0^{\eta} (\eta - s)^{q-2} f(s,\ u(s), {}^c D_{0+}^{\sigma} u(s)) ds \right] \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\Gamma(q-2)} \times \left| \int_0^1 G_1(t,\ s)[k(s)\psi(r) + h(s)\phi(r) + g(s)] ds + \right. \\
&\left. - \frac{1}{(q-2)} \int_0^{\eta} (\eta - s)^{q-2} [k(s)\psi(r) + h(s)\phi(r)] ds \right|
\end{aligned} \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned}
\leq \frac{1}{\Gamma(q-2)} &\left[\psi(r) \left| \int_0^1 G_1(t,\ s) k(s) ds - \frac{1}{(q-2)} \int_0^{\eta} (\eta - s)^{q-2} k(s) ds \right| + \right. \\
&+ \phi(r) \left| \int_0^1 G_1(t,\ s) h(s) ds - \frac{1}{(q-2)} \int_0^{\eta} (\eta - s)^{q-2} h(s) ds \right| + \\
&\left. + \left| \int_0^1 G_1(t,\ s) g(s) ds - \frac{1}{(q-2)} \int_0^{\eta} (\eta - s)^{q-2} g(s) ds \right| \right]
\end{aligned}$$

$$|Tu(t)'| \leq A_k \psi(r) + A_h \phi(r) + A_g, \tag{3.38}$$

$$|T'u(t)| \leq C_2(\psi(r) + \phi(r) + 1) \tag{3.39}$$

Utilisant ensuite (3.27), on voit que

$$\begin{aligned} |{}^C D^q_{0+} Tu(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)} \int\limits_0^t \frac{A_k\psi(r) + A_h\phi(r) + A_g}{(t-s)^\sigma} ds \qquad (3.40) \\ &\leq \frac{C_2}{\Gamma(1-\sigma)} \int\limits_0^t \frac{\psi(r) + \phi(r) + 1}{(t-s)^\sigma} ds \\ &\leq \frac{C_2}{(1-\sigma)\Gamma(1-\sigma)} (\psi(r) + \phi(r) + 1). \end{aligned}$$

En combinant (3.36) et (3.40) on obtient

$$\|Tu\| = ((\psi(r) + \phi(r) + 1)) \left(C_1 + \frac{C_2}{(1-\sigma)\Gamma(1-\sigma)} \right). \qquad (3.41)$$

Par la suite $T(B_r)$ est uniformément borné.

(ii) $T(B_r)$ est équicontinu pour tout $t_1,\ t_2 \in [0,\ 1],\ t_1 < t_2,\ u \in B_r$.

$$\begin{aligned} |Tu(t_1) - Tu(t_2)| &= \int\limits_{t_1}^{t_2} |T'u(t)| dt, \qquad (3.42) \\ &\leq \int\limits_{t_1}^{t_2} (A_k\psi(r) + A_h\phi(r) + A_g) dt, \\ &\leq (t_1 - t_2)(A_k\psi(r) + A_h\phi(r) + A_g). \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\left|{}^C D^{\sigma}_{0+}Tu(t_1) - {}^C D^{\sigma}_{0+}Tu(t_2)\right| &= \left| \int_0^{t_1} \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)} \frac{T'u(s)}{(t_1-s)^{\sigma}} ds + \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)} \int_0^{t_2} \frac{T'u(s)}{(t_2-s)^{\sigma}} ds \right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)} \int_0^{t_1} |(t_1-s)^{-\sigma} - (t_2-s)^{-\sigma}||T'u(s)|ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{-\sigma}|T'u(s)|ds,
\end{aligned} \tag{3.43}$$

d'aprés (3.39), il s'ensuit que :

$$|{}^C D^q_{0+}Tu(t_1) - {}^C D^q_{0+}Tu(t_2)| \leq \frac{C_2(\psi(r)+\phi(r)+1)}{(1-\sigma)\Gamma(1-\sigma)} (2(t_2-t_1)^{1-\sigma} + t_2^{1-\sigma} + t_1^{1-\sigma}) \tag{3.44}$$

passant à la limite lorsque $t_1 \to t_2$ dans (3.42) et (3.44), on trouve que $|Tu(t_1) - Tu(t_2)|$ et $|{}^C D^q_{0+}Tu(t_1) - {}^C D^q_{0+}Tu(t_2)|$ tendent vers 0. Par Conséquent $T(B_r)$ est équicontinu.

Une application du théorème d'Arzela-Ascoli mène à déduire que T est un opérateur complètement continu. Enfin, on applique le théorème de l'alternative nonlinéaire de Leray-Schauder pour prouver que T a au moins une solution non triviale dans E.

Soit $\Omega = \{u \in E : \|u\| < r\}$, et soit $u \in \partial\Omega$, telle que $u = \lambda Tu,\ 0 < \lambda < 1$, à l'aide de (3.36), on trouve que

$$|u(t)| = \lambda|Tu(t)| \leq |Tu(t)| \leq C_1(\psi(r) + \phi(r) + 1) \tag{3.45}$$

Tenant compte (3.40), on obtient

$$|{}^c D^q_{0+}u(t)| \leq \frac{C_2}{(1-\sigma)\Gamma(1-\sigma)}(\psi(r) + \phi(r) + 1), \tag{3.46}$$

en vertu de (3.45), (3.46) et (3.31), on peut déduire que

$$\|u\| \leq (\psi(r) + \phi(r) + 1)\left(C_1 + \frac{C_2}{(1-\sigma)\Gamma(1-\sigma)}\right) < r, \tag{3.47}$$

ce qui contredit le fait que $u \in \partial\Omega$. grâce le théorème 2.12 implique que l'operateur T a un point fixe $u^* \in \Omega$, et par suite le problème fractionnaire $(P1)$ a une solution non triviale $u^* \in E$. ce qui achève la démonstration.

3.3 Existence de la solution positive

Dans cette section on cherche la positivité de la solution du problème fractionnaire $(P1)$. On impose les hypothèses suivantes :

$(H1)$ $f(t,\ u,\ v) = a(t)f_1(u,\ v)$, où $a \in C([0,1],\ [0,\ \infty))$ et $f_1 \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R},\ \mathbb{R}_+)$

$(H2)$ $0 < \int_0^1 \Psi(s)\frac{a(s)}{(1-s)^{3-q}}ds < \infty$, où

$$\Psi(s) = \begin{cases} \alpha - \frac{(\eta-s)^{q-2}(1-s)^{3-q}}{(q-2)} & s \leq \eta \\ \alpha & s > \eta \end{cases}$$

On peut réécrire la fonction u sous la forme

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(q-2)}\int_0^1 \frac{H(t,s)}{(1-s)^{3-q}}\ a\ (s)f_1(u(s),{}^C D_{0+}^{\sigma}u(s))ds,$$

où

$$H(t,\ s) = \begin{cases} \frac{((t-s)^{q-1}(1-s)^{3-q})}{(q-2)(q-1)} + t\alpha\ - \frac{t(\eta-s)^{q-2}(1-s)^{3-q}}{(q-2)} & s \leq t,\ s \leq \eta \\ t\alpha\ - \frac{t(\eta-s)^{q-2}(1-s)^{3-q}}{(q-2)} & s > t,\ s \leq \eta \\ \frac{((t-s)^{q-1}(1-s)^{3-q})}{(q-2)(q-1)} + t\alpha & s \leq t,\ s > \eta \\ t\alpha & s > t,\ s > \eta \end{cases} \tag{3.48}$$

Donc

$${}^C D_{0+}^{\sigma}u(t) = \int_0^1 \frac{H_\sigma(t,s)}{(1-s)^{3-q}}\ a\ (s)f_1(u(s),{}^C\ D_{0+}^{\sigma}u(s))ds,$$

où

$$H_\sigma(t,\ s) = \begin{cases} \frac{((t-s)^{(q-\sigma)-1}(1-s)^{3-q})}{\Gamma^1(q-\sigma)} + \frac{\alpha t^{1-\sigma}}{\Gamma(\sigma)\Gamma(q-2)} - \frac{t^{1-\sigma}(\eta-s)^{q-2}(1-s)^{3-q}}{\Gamma(\sigma)\Gamma(q-1)}, & s \leq t,\ s \leq \eta \\ \frac{\alpha t^{1-\sigma}}{\Gamma(\sigma)\Gamma(q-2)} - \frac{t^{1-\sigma}(\eta-s)^{q-2}(1-s)^{3-q}}{\Gamma(\sigma)\Gamma(q-1)}, & s > t,\ s \leq \eta \\ \frac{((t-s)^{(q-\sigma)-1}(1-s)^{3-q})}{\Gamma^1(q-\sigma)} + \frac{\alpha t^{1-\sigma}}{\Gamma(\sigma)\Gamma(q-2)}, & s \leq t,\ s > \eta \\ \frac{\alpha t^{1-\sigma}}{\Gamma(\sigma)\Gamma(q-2)}, & s > t,\ s > \eta \end{cases} \tag{3.49}$$

On outre, pour la suite donnant les propriétés de la fonction de Green $H(t,\ s)$.

Lemme 3.5 *Si $\alpha > \underline{1}$ alors $H(t,\ s)$ a les propriétés suivantes :*

(i) $H(t,\ s),\ H_\sigma(t,\ s) \in C([0,1]\times[0,\ 1]),\ 0 < H(t,\ s),\ 0 < H_\sigma(t,\ s)$ pour tout $t,\ s \in [0,\ 1]$

(ii) $t \in [\tau,\ 1],\ \tau > 0$, alors, pour tout $s \in [0,\ 1]$ on a :

$$0 < \tau\Psi(s) \leq H(t,\ s) \leq 2\Psi(s) \tag{a.3.49}$$

et

$$0 < \frac{\tau}{\Gamma(\sigma)\Gamma(q-2)}\Psi(s) \leq H_\sigma(t,\ s) \leq \varsigma\Psi(s), \tag{3.50}$$

où

$$\varsigma\ = (\frac{(q-2)\Gamma(\sigma)+1}{\Gamma(\sigma)\Gamma(q-2)})$$

Démonstration : (*i*) Il est facile de voir que $H(t,\ s) \in C([0,1]\times[0,\ 1])$, de plus, on a

$$t\alpha - \frac{t(\eta-s)^{q-2}(1-s)^{3-q}}{(q-2)} = \frac{t[\alpha(q-2)-(1-s)^{3-q}(\eta-s)^{q-2}]}{(q-2)}, \tag{3.51}$$

qui est positif si $\alpha \geq \frac{1}{(q-2)}$. Donc $H(t,\ s)$, est positive pour tout $t,\ s \in [0,\ 1]$.

(*ii*) Soit $t \in [\tau,\ 1]$, comme $\Psi(s) \neq 0$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{H(t,s)}{\Psi(s)} &= \frac{\frac{((t-s)^{q-1}(1-s)^{3-q})}{(q-2)(q-1)} + t\alpha}{\alpha} \quad \text{pour } \eta < s \leq t, \\ &\leq \frac{(1-s)^2}{(q-1)} + t\ \leq 2 \end{aligned} \tag{3.52}$$

$$\begin{aligned}\frac{H(t,s)}{\Psi(s)} &= \frac{\frac{((t-s)^{q-1}(1-s)^{3-q})}{(q-2)(q-1)} + t\alpha - \frac{t(\eta-s)^{q-2}(1-s)^{3-q}}{(q-2)}}{\alpha - \frac{(\eta-s)^{q-2}(1-s)^{3-q}}{(q-2)}} \text{ pour } s \leq t,\ s \leq \eta, \\ &= \frac{(t-s)^{q-1}(1-s)^{3-q}}{(q-1)(\alpha(q-2)-(\eta-s)^{q-2}(1-s)^{3-q})} + t\ < 2\end{aligned} \tag{3.53}$$

$$\frac{H(t,s)}{\Psi(s)} = \frac{\left[\frac{t\alpha}{(1-s)^{3-q}} - \frac{t(\eta-s)^{q-2}}{(q-2)}\right]}{\left[\frac{\alpha}{(1-s)^{3-q}} - \frac{(\eta-s)^{q-2}}{(q-2)}\right]} = t \leq 2,\ t < s \leq \eta, \tag{3.54}$$

$$\frac{H(t,s)}{\Psi(s)} = t \leq 2, \quad t < s,\ \eta < s. \tag{3.55}$$

D'autre part, remarquant que

$$\begin{aligned}\frac{H(t,s)}{\Psi(s)} &\geq t \geq \tau, \eta \leq s \leq t, \\ s &\leq t,\ s < \eta, \\ t &\leq s,\ s < \eta, \\ t &\leq s,\ \eta < s\end{aligned} \tag{3.56}$$

comme $\Psi(s)$ est positive, on aboutit à :

$$0 < \tau\Psi(s) \leq H(t,\ s) \leq 2\Psi(s)$$

De la même façon on peut montrer les estimations pour $H_\sigma(t,\ s)$.

Faisant appel maintenant à la définition de la solution positive

Définition 3.1 *Une fonction $u(t)$ est dite solution positive du problème fractionnaire (3.1) si $u(t) \geq 0$, pour $t \in [0,\ 1]$.*

Lemme 3.6 *Si $u \in E^+$ et $\alpha \geq \frac{1}{(q-2)}$ alors, la solution du problème fractionnaire $(P1)$ est positive et vérifie*

$$\min_{t\in[\tau,1]}(u(t)\ +^c D^\sigma_{0+}u(t)) \geq \gamma\|u\|, \tag{3.57}$$

où

$$\gamma = \frac{2\tau}{\Gamma(\sigma)(2+\Gamma(q-2)\varsigma)}.$$

Démonstration : Premièrement, on peut remarquer que sous les conditions sur u et f, la fonction ${}^{C}D_{0+}^{\sigma}u$ est positive, d'après la relation (a.3.49), on peut obtenir

$$u(t) \leq \frac{2}{\Gamma(q-2)} \int_0^1 \Psi(s) \frac{a(s)}{(1-s)^{3-q}} f_1(u(s), {}^{c}D_{0+}^{\sigma}u(s))ds. \tag{3.58}$$

De plus, (3.50) donne

$$\begin{aligned} {}^{C}D_{0+}^{\sigma}u(t) &= \int_0^1 H_\sigma(t,\ s)\frac{a(s)}{(1-s)^{3-q}} f_1(u(s), {}^{c}D_{0+}^{\sigma}u(s))ds, \qquad (3.59) \\ &\leq \varsigma \int_0^1 \Psi(s) \frac{a(s)}{(1-s)^{3-q}} f_1(u(s), {}^{c}D_{0+}^{\sigma}u(s))ds. \end{aligned}$$

Combinant (3.58) et (3.59), on trouve

$$\|u\| \leq \int_0^1 \left(\frac{2}{\Gamma(q-2)} + \varsigma\right) \Psi(s) \frac{a(s)}{(1-s)^{3-q}} f_1(u(s), {}^{c}D_{0+}^{\sigma}u(s))ds,$$

Ce qui est equivalent à

$$\|u\| \leq \left(\frac{2}{\Gamma(q-2)} + \varsigma\right) \int_0^1 \Psi(s) \frac{a(s)}{(1-s)^{3-q}} f_1(u(s), {}^{c}D_{0+}^{\sigma}u(s))ds, \tag{3.60}$$

donc

$$\int_0^1 \Psi(s) \frac{a(s)}{(1-s)^{3-q}} f_1(u(s), {}^{c}D_{0+}^{\sigma}u(s))ds \geq \left(\frac{2}{\Gamma(q-2)} + \varsigma\right) \|u\| \tag{3.61}$$

Tenant compte de (a.3.49), on aura pour tout $t \in [\tau,\ 1]$

$$u(t) \geq \frac{\tau}{\Gamma(q-2)} \int_0^1 \Psi(s) \frac{a(s)}{(1-s)^{3-q}} f_1(u(s), {}^{c}D_{0+}^{\sigma}u(s))ds. \tag{3.62}$$

Or

$$^{C}D^{\sigma}_{0+}u(t) \geq \frac{\tau}{\Gamma(\sigma)\Gamma(q-2)}\int_{0}^{1}\Psi(s)\frac{a(s)}{(1-s)^{3-q}}f_1(u(s),^{C}D^{\sigma}_{0+}u(s))ds; \qquad (3.63)$$

en vertu de (3.62) et (3.63), on aboutit à

$$\begin{aligned}\min_{t\in[\tau,1]}(u(t) +^{C} D^{\sigma}_{0+}u(t)) \quad &\geq \quad \frac{2\tau}{\Gamma(\sigma)\Gamma(q-2)} \times \qquad (3.64)\\ &\times\int_{0}^{1}\Psi(s)\frac{a(s)}{(1-s)^{3-q}}f_1(u(s),^{c}D^{\sigma}_{0+}u(s))ds.\end{aligned}$$

Finalement, la relation (3.61) conduit à

$$\min_{t\in(\tau,1)}(u(t) \ +^{C} D^{\sigma}_{0+}u(t)) \geq \gamma\|u\| \qquad (3..65)$$

Ce qui achève la démonstration.
Introduisons maintenant les quantités A_0 et A_∞ :

$$A_0 = \lim_{(|u|+|v|)\to 0}\frac{f_1(u,v)}{|u|+|v|},\ A_\infty = \lim_{(|u|+|v|)\to\infty}\frac{f_1(u,v)}{|u|+|v|}. \qquad (3.66)$$

Le cas où $A_0 = 0$ et $A_\infty = \infty$ est appelé le cas super linéaire, tandis que le cas $A_0 = \infty$, $A_\infty = 0$ est appelé le cas sous linéaire.

Maintenant, on est à la mesure de donner un résultat important :

Théorème 3.3 *Sous les hypothèses du lemme 3.6, le problème fractionnaire (P1) admet au moins une solution positive dans le cas super linéaire ainsi que le cas sous linéaire.*

Démonstration : La démonstration est basée sur le théorème du point fixe de Guo-Krasnoselskii dans un cône (voir le théorème 2.14), pour cela on définit le cône K par

$$K = \{u \in E^+, \min_{t\in[\tau,1]}(u(t) \ +^{c} D^{\sigma}_{0+}u(t)) \geq \gamma\|u\|\} \qquad (3.67)$$

Il est facile de voir que K est un sous ensemble de E non vide, fermé et convexe. Utilisant le lemme 3.6 on peut voir aussi que $TK \subset K$.

D'autre part, d'après le théorème 3.2, l'opérateur T est complètement continu dans E. En premier temps considérant le cas super linéaire.

Comme $A_0 = 0$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $R_1 > 0$, telle que

$$f_1(u,\ v) \leq \varepsilon(|u| + |v|), \tag{3.68}$$

pour $0 < |u| + |v| \leq R_1$.
Soit $\Omega_1 = \{u \in E,\ \|u\| < R_1\}$, pour chaque $u \in K \cap \partial\Omega_1$, on a

$$\begin{aligned} |Tu(t)\ | &= \frac{1}{\Gamma(q-2)} \int_0^1 H(t,\ s) \frac{a(s)}{(1-s)^{3-q}} f_1(u(s),{}^c D_{0+}^{\sigma} u(s)) ds, \quad (3.69) \\ &\leq \frac{2\varepsilon||u||}{\Gamma(q-2)} \int_0^1 \Psi(s) \frac{a(s)}{(1-s)^{3-q}} ds, \end{aligned}$$

de plus

$$\begin{aligned} |{}^c D_{0+}^{\sigma} Tu(t)| &\leq \varsigma \int_0^1 \Psi(s) \frac{a(s)}{(1-s)^{3-q}} f_1(u(s),{}^c D_{0+}^{\sigma} u(s)) ds, \quad (3.70) \\ &\leq \varsigma\varepsilon\|u\| \int_0^1 \Psi(s) \frac{a(s)}{(1-s)^{3-q}} ds. \end{aligned}$$

Tenant compte de (3.69) et (3.70), on conclut que

$$\|Tu\| \leq \left(\frac{2}{\Gamma(q-2)} + \varsigma \right) \int_0^1 \varepsilon\|u\| \Psi(s) \frac{a(s)}{(1-s)^{3-q}} ds \tag{3.71}$$

donc

$$\|Tu\| \leq \left(\frac{2}{\Gamma(q-2)} + \varsigma \right) \varepsilon\|u\| \int_0^1 \Psi(s) \frac{a(s)}{(1-s)^{3-q}} ds, \tag{3.72}$$

et d'après la condition $(H2)$, on peut choisir ε tel que

$$\varepsilon \leq \frac{\Gamma(q-2)}{2 + \Gamma(q-2)\varsigma} \frac{1}{\int_0^1 \Psi(s) \frac{a(s)}{(1-s)^{3-q}} ds} \tag{3.73}$$

Enfin les relations (3.72) et (3.73) conduisent à $||Tu|| \leq ||u||$, pour tout $u \in K \cap \partial\Omega_1$.

Deuxièmement, de $A_\infty = \infty$, on déduit que pour tout $M > 0$, il existe $R_2 > 0$, telle que

$$f_1(u,\ v) \geq M(|u| + |v|) \text{ pour } |u| + |v| \geq R_2.$$

Posant

$$R = \max\{2R_1,\ R_2/\gamma\}$$

et notant par Ω_2 l'ensemble ouvert définit par

$$\Omega_2 = \{u \in E,\ ||u|| < R\}.$$

Si $u \in K \cap \partial\Omega_2$, alors

$$\min_{t\in[\tau,1]}(u(t)\ +^c D^\sigma_{0+}u(t)) \geq \gamma\|u\| = \gamma R \geq R_2. \tag{3.74}$$

Utilisant le relation (a.3.49) et le lemme 3.6, on obtient

$$\begin{aligned} |Tu(t)| &\geq \frac{\tau}{\Gamma(q-2)}\int_0^1 \Psi(s)\frac{a(s)}{(1-s)^{3-q}} f_1(u(s),^c D^\sigma_{0+}u(s))ds, \quad (3.75)\\ &\geq \frac{\tau M\|u\|}{\Gamma(q-2)}\int_0^1 \Psi(s)\frac{a(s)}{(1-s)^{3-q}}ds. \end{aligned}$$

Grâce à (3.63), on a

$$\begin{aligned} |^c D^\sigma_{0+}Tu\ (t)\ | &\geq \frac{\tau}{\Gamma(\sigma)\Gamma(q-2)}\int_0^1 \Psi(s)\frac{a(s)}{(1-s)^{3-q}} \times \quad (3.76)\\ &\quad \times f_1(u(s),^c D^\sigma_{0+}u(s))ds,\\ &\geq \frac{\tau}{\Gamma(\sigma)\Gamma(q-2)} M\|u\| \int_0^1 \Psi(s)\frac{a(s)}{(1-s)^{3-q}}ds, \end{aligned}$$

Or, les relations (3.75) et (3.76) permettent d'écrire

$$|Tu(t)| + |^c D^\sigma_{0+}Tu(t)| \geq \frac{\tau(1+\Gamma(\sigma))}{\Gamma(\sigma)\Gamma(q-2)} M\|u\| \int_0^1 \Psi(s)\frac{a(s)}{(1-s)^{3-q}}ds. \tag{3.77}$$

Choisissant M telle que

$$M \geq \frac{\Gamma(\sigma)\Gamma(q-2)}{\tau\ (1+\Gamma\ (\sigma)) \int\limits_0^1 \Psi(s) \frac{a(s)}{(1-s)^{3-q}} ds}, \tag{3.78}$$

Par conséquent

$$|Tu(t)| + |^c D_{0+}^{\sigma} Tu(t)| \geq \|u\|,$$

Enfin

$$\|Tu\| \geq \|u\|,\ \forall u \in K \cap \partial\Omega_2. \tag{3.79}$$

Le théorème 2.14 implique que T admet un point fixe dans $K \cap (\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1)$ telle que $R_2 \leq ||u|| \leq R$.

Pour prouver le cas sous linéaire on procède d'une façon similaire au cas précédant.

Donnant maintenant des exemples illustrant les résultats obtenus.

Exemple 3.1 *Le problème fractionnaire suivant :*

$$\begin{cases} {}^C D_{0+}^{5|2} u = \left(\frac{\sin(t)}{2}\right)^2 u + \left(\frac{1-t}{2}\right)^3 D_{0+}^{1|5} u + e^t, \\ u(0) = u'(0) = 0,\ u'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} u''(1). \end{cases} \tag{3.80}$$

admet une solution unique dans E.

Démonstration : Prenant $2 < q = \frac{5}{2} < 3,\ 0 < \sigma = \frac{1}{5} < 1,\ \alpha = \frac{1}{2}$. Soit la fonction

$$f(t,\ x,\ y) = x\left(\frac{\sin(t)}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-t}{2}\right)^3 y + e^t$$

Vérifiant la condition

$$|f(t,\ x, \overline{x}) - f(t,\ y, \overline{y})| \leq (\sin t)^2 |x-y| + (1-t)^3 |\overline{x} - \overline{y}|, \tag{3.81}$$

donc on peut considérer les fonctions g et h comme suit :

$$g(t) = \left(\frac{\sin(t)}{2}\right)^2,\ h(t) = \left(\frac{1-t}{2}\right)^3.$$

Un calcul simple nous donne

$$\begin{aligned} \|I_{0+}^{q-1} g\| &= 9.4158 \times 10^{-4}, \quad I_{0+}^{q-1} g(1) = 3.6581 \times 10^{-2} \\ I_{0+}^{q-1} g(\frac{1}{3}) &= 9.0283 \times 10^{-4}, \quad I_{0+}^{q-2} g(1) = 0.11626, \\ A_g &= 9.5614 \times 10^{-2}, \quad C_g = 5.9974 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|I_{0+}^{q-1}h\| &= 1.7097\times 10^{-2}, \quad I_{0+}^{q-1}h(1) = 3.1344\times 10^{-2}\\
I_{0+}^{q-1}h(\frac{1}{3}) &= 1.2134\times 10^{-2}, \quad I_{0+}^{q-2}h(1) = 2.0150\times 10^{-2},\\
A_h &= 6.1515\times 10^{-2}, \quad C_h = 3.9306\times 10^{-2}
\end{aligned}$$

$$C_g + C_h = 5.9974\times 10^{-2} + 3.9306\times 10^{-2} = 0.09928 < \frac{1}{2} \tag{3.82}$$

et

$$A_g + A_h = 9.5614\times 10^{-2} + 6.1515\times 10^{-2} = 0.15713 < \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{5}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{5}\right). \tag{3.83}$$

Le **théorème 3.1** assure que le problème fractionnaire (3.80) a une solution unique dans E.

Exemple 3.2 *Le problème fractionnaire suivant :*

$$\begin{cases} {}^{C}D_{0+}^{7|3}u = (1-t)^2\left(\frac{u^2+2}{(6+u^4)} + \ln\left(1+({}^{C}D_{0+}^{\frac{5}{6}}u)^2\right)+1\right), \\ u(0) = u''(0) = 0, \quad u'(\eta) = \frac{3}{2}u''(1). \end{cases} \tag{3.84}$$

admet au moins une solution non-triviale dans E.

Démonstration : Vérifions les conditions du **théorème 3.2**. On a $q = \frac{7}{3}$, $\sigma = \frac{2}{3}$, $\alpha = \frac{3}{2}$, $\eta = \frac{1}{4}$, et

$$\begin{aligned}
|f(t,\ x,\overline{x})| &= \left|\frac{(1-t)^2(x^2+2)}{(6+x^4)} + (1-t)^2\ln(1+\overline{x}^2) + (1-t)^2\right| \quad (3.85)\\
&\le (1-t)^2\frac{(x^2+2)}{(6+x^4)} + (1-t)^2\ln(1+\overline{x}^2) + (1-t)^2,\\
&\le k(t)\ \psi(|x|) + h(t)\ \phi(|\overline{x}|) + g(t).
\end{aligned}$$

Où

$$k(t) = h(t) = g(t) = (1-t)^2,\ \psi(x) = \frac{(x^2+2)}{(6+x^4)},\ \phi(\overline{x}) = \ln(1+\overline{x}^2) \ \textit{et} \ \ f(t,\ 0,\ 0) \neq 0$$

Par un choix convenable de $r (r = 6)$ telle que

$$\left(\left(\frac{r^2+2}{r^4+6}\right) + \ln(1+r^2) + 1\right)(1.1664) - r$$

est négatif, on a

$$\|I_{0+}^{q-1}g\| = 0.25843, \qquad I_{0+}^{q-1}g(1) = 0.33595$$

$$I_{0+}^{q-1}g(\frac{1}{3}) = 0.14420, \quad I_{0+}^{q-2}g(1) = 0.15998$$

$$C_g = C_1 = 0.50928, \quad A_g = C_2 = 0.5868$$

Ce qui montre que le problème fractionnaire (3.84) a au moins une solution non triviale.

Exemple 3.3 *Le problème fractionnaire suivant :*

$$\begin{cases} {}^CD_{0+}^q u = \frac{1-t^2}{1+t^2}\left[\frac{4\pi}{u+{}^CD_{0+}^\sigma u+6\pi} + e^{-\pi(u+|{}^CD_{0+}^\sigma u|)}\right], \\ u(0) = u''(0) = 0, \ u'(\eta) = \alpha u''(1). \end{cases} \tag{3.86}$$

a au moins une solution positive si $q = \frac{7}{3}$, $\sigma = \frac{5}{6}$, $\alpha = \frac{7}{2}$ *et* $\eta = \frac{1}{4}$.

Démonstration : On a

$$f((t,\ u,{}^C D_{0+}^\sigma u) = \frac{1-t^2}{1+t^2}\left[\frac{4\pi}{u+|{}^CD_{0+}^\sigma u|+6\pi} + e^{-\pi(u+|{}^CD_{0+}^\sigma u|)}\right] \tag{3.87}$$

Vérifions les conditions $(H1)$ et $(H2)$.

Pour $(H1)$ on a :

$$f(t,u,\ v) = f(t,u,v) = a(t)\ f_1(u,\ v),$$

où

$$f(t,u,v) = \frac{1-t^2}{1+t^2}\left[\frac{4\pi}{u+|v|+6\pi} + e^{-\pi(u+|v|)}\right]$$

$$a(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$f_1(u,\ v) = \frac{4\pi}{u+|v|+6\pi} + e^{-\pi(u+|v|)}$$

$a \in C([0,1],\ (0,\ \infty))$ et $f_1 \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$.

Pour $(H2)$ on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \Psi(s)\frac{a(s)}{(1-s)^{3-q}}ds &= \int_0^{\eta}\left(\alpha-\frac{(\eta-s)^{q-2}(1-s)^{3-q}}{(q-2)}\right)\left(\frac{\frac{1-s^2}{1+s^2}}{(1-s)^{3-q}}\right)ds,\\
&+\int_{\eta}^{1}\alpha\left(\frac{\frac{1-s^2}{1+s^2}}{(1-s)^{3-q}}\right)ds,\\
&= \int_0^{1/4}\left(\frac{7}{2}-\frac{(\frac{1}{4}-s)^{\frac{7}{3}-2}(1-s)^{3-\frac{7}{3}}}{(\frac{7}{3}-2)}\right)\left(\frac{\frac{1-s^2}{1+s^2}}{(1-s)^{3-\frac{7}{3}}}\right)ds,\\
&+\int_{1/4}^{1}\frac{7}{2}\left(\frac{\frac{1-s^2}{1+s^2}}{(1-s)^{3-\frac{7}{3}}}\right)ds,\\
&= 2.6481<\infty.
\end{aligned}$$

De plus on a :

$$\begin{aligned}
A_0 &= \lim_{(|u|+|v|)\to 0}\frac{f_1(u,\ v)}{|u|+|v|},\\
&= \lim_{(|u|+|v|)\to 0}\frac{\frac{4\pi}{u+|v|+6\pi}+e^{-\pi(u+|v|)}}{|u|+|v|},\\
&= \lim_{(|u|+|v|)\to 0}\frac{\frac{4\pi}{u+|v|+6\pi}}{|u|+|v|}+\lim_{(|u|+|v|)\to 0}\frac{e^{-\pi(u+|v|)}}{|u|+|v|},\\
&= 0+(+\infty)=+\infty.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_\infty &= \lim_{(|u|+|v|)\to\infty}\frac{f_1(u,v)}{|u|+|v|},\\
&= \lim_{(|u|+|v|)\to\infty}\frac{\frac{4\pi}{u+|v|+6\pi}+e^{-\pi(u+|v|)}}{|u|+|v|},\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc on est dans le cas sous linéaire d'après le **théorème 3.3**, on déduit que le problème (3.86) admet au moins une solution positive.

Bibliographie

[1] B. Ahmad, J. J. Nieto, *Existence results for a coupled system of non linear fractional differential equations with three point boundary conditions*, Comput. Math. Appl. 58 (2009), 1838-1843.

[2] B. Ahmad, J. J. Nieto, *Existence of solutions for nonlocal boundary value problems of higher order non linear fractional differential equations*, Abstract and Applied Analysis,Volume 2009 Article ID 494720, doi :10. 1155/2009/494720.

[3] R. P Agarwal, D. O'Regan, D. R. Sahu, *Fixed point theory for Lipschitzian type mappings with applications*, Springer.

[4] R. L. BAGLEY and PJ. TORVIK *"On The Fractional Calculus Model of Viscoelastic Behavior"* Journal of Rheology.

[5] M. Benchohra, S. Hammani, S. K. Ntouyas, Boundary value problems for differential equations with fractional order and nonlocal conditions, Nonlinear Anal. 71(2009), 2391-2396.

[6] D. W Boyd and J. S. W Wong, *On non linear contractions*, Proc. Amer. Math. Soc. 20 (1969) 458-464.

[7] Zhoujin Cui, Pinneng Yu and Zisen Mao, *Existence of Solutions for Non local Boundary Value Problems of Non linear Fractional Differential Equations*, Advances in Dynamical Systems and Applications ISSN 0973-5321, Volume 7, Number 1, pp. 31-40 (2012).

[8] K. Deimling, *Non linear Functional Analysis*, Springer, Berlin, Germany, 1985.

[9] M. Edelstein, *An extension of Banach's contraction principle*, Proc. Amer. Math. Soc. 12 (1961) 7-10.

[10] L. CV Evans, *Partial differential equations*, American Math. Soc. Providence, 1988.

[11] A. Guezane-Lakoud, R Khaldi, *Solvability of a fractional boundary value problem with fractional integral condition*, Non linear Analysis 75 (2012) pp. 2692-2700.

[12] A. Guezane-Lakoud, R. *Khaldi, Positive solution to a higher order fractional boundary value problem with fractional integral condition*, Romanian Journal of Mathematics and Computer Sciences, 2 (2012), 28-40.

[13] A. Guezane-Lakoud, R. Khaldi, *Solvability of a three-point fractional nonlinear boundary value problem*, Differ Equ Dyn Syst 20(4) (2012) 395-403

[14] M. C. Ho,YC. Hung,C. H. Chou, Phys. Lett. A 296 (1) (2002) 43.

[15] M. Ichise, Y Nagayanagi, T Kojima, *An analog simulation of non integer order transfer functions for analysis of electrode process*, J. Electroanal. Chem. 33 (1971) 253–265.

[16] M.A Eloueheb,*Les systémes Chaotiques à dérivée Fractionnaires*,mémoire de Magister, Numéro d'ordre : 042/Mag/2009,2009.

[17] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, vol. 204 of North-Holland Mathematics Elsevier Science, Amsterdam, The Netherlands, 2006.

[18] D. Kinderlehrer and G. Stampacchia, *An introduction to variational inequalities*, Acad. Press, New York 1980.

[19] WA. Kirk, *Mappings of generalized contractive type*, J. Math. Anal. Appl. 32 (1970) 567-572.

[20] M. A. Krasnoselskii, *Positive solutions of operator equations*, Noordhoff, Groningen 1964.

[21] M. A. Krasnoselskii and V J. Stetsenko, *About the theory of equations with concave operators*, Sib. Mat. Zh. 10 (1969), 565-572.

[22] S. Liang and J. Zhang, *Existence and uniqueness of positive solutions to m-point boundary value problem for non linear fractional differential equation*, Journal of Applied Mathematics and Computing. In press.

[23] S. Leader, Two convergence *principals with applications to fixed points in metric spaces*, Non linear Analysis 6 (1982) 531-538.

[24] D. Mozyrska, D. FM. Torres, *Modified optimal energy and initial memory of fractional continuons-time linear systems*, Signal Process. 91 (2011), 379-385.

[25] A. Le Méhauté, G. Crepy, *Introduction to transfer and motion in fractal media : geometry of kinetics*, Solid State Ionics 9& 10 (1983) 17–30.

[26] A. Meir and E. Keeler, *A theorem on contractive mappings*, J. Math. Anal. Appl. 28 (1969) 326-329.

[27] WR. Melvin, *Some extensions of Krasnoselskii fixed point theorem*, J. Diff. Eq. 11 (1972) 335-348

[28] K. B. Oldham, *Fractional differential equations in electrochemistry*, Advances in Enginee- ring Software,vol. 41,no. 1,pp. 9-12,2010.

[29] I. Podlubny, Fractional Differential Equations : *An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional differential equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*, vol. 198 of Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, San Diego, Calif,USA, 1993.

[30] M. E. Picard, *Leçons sur quelques problèmes anx limites de la théorie des équations différentielles*, Gauthiers-Villars, Paris, 1930.

[31] B. Ross (1977) *The Development of Fractional Calculus* 1695-1900. Historia Math 4 :75-89.

[32] VM. Sehgal and S. P Singh, *On a ffixed point theorem of Krasnoselskii for locally convex- spaces*, Pacific J. Math. 62 (1976) 561-567.

[33] D. R. Smart, Fixed point theory, Combridge Uni. Press, Combridge 1974.

[34] YP Sun, *Positive solutions for singular semi positive Neumann boundary value problems*, Electronic journal of differential equations (2004) 133.

[35] E. Zeidler, *Non linear functional analysis and its applications Fixed point theorem*, Springer Verlag, New York Berlin Heiderberg, Tokyo 1985.