

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université 8 Mai 1945 Guelma



Faculté de Mathématiques, Informatique et sciences de la matière  
Département de Mathématiques  
Laboratoire de domiciliation de mathématiques appliquées et de modélisation

**THÈSE**  
**EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME DE**  
**DOCTORAT EN 3<sup>ème</sup> CYCLE**

Domaine: Mathématiques et informatique Filière : Mathématiques  
Spécialité : Analyse non linéaire et modélisation

Présentée par

**KHELLAF Ammar**

*Intitulée*

**Théorie spectrale avec une approche numérique**

Soutenue le : 12/10/2019

Devant le Jury composé de :

**Nom et Prénom**

**Grade**

<b>Mr. KECHKAR Nasserline</b>	Prof	Univ de Constantine	Président
<b>Mr. AISSAOUI Mohamed-Zine</b>	Prof	Univ de Guelma	Encadreur
<b>Mr. GUEBBAI Hamza</b>	MCA	Univ de Guelma	Co- Encadreur
<b>Mr. ELLAGGOUNE Fateh</b>	Prof	Univ de Guelma	Examineur
<b>Mr. HAIOUR Mohamed</b>	Prof	U. B. M de Annaba	Examineur

**Année Universitaire :2018/2019**

Théorie spectrale avec une approche  
numérique:  
Etude analytique et numérique du spectre  
généralisé

**Ammar KHELLAF**

Thèse de Doctorat en Mathématiques

Sous la direction: Prof. **Mohamed Zine AISSAOUI**

Université de 8 Mai 1945 Guelma

2018/2019

---

## REMERCIEMENT

---

*Je tiens à exprimer bien sur ma gratitude à mes directeurs de thèse, Docteur Hamza GUEBBAI et Professeur Mohamed Zine AISSAOUI . Je les remercie de m'avoir encadré, orienté et conseillé.*

*J'adresse mes sincères remerciements à tous les membres du laboratoire des Mathématiques Appliquées et de la Modélisation (LMAM).*

*Enfin, je voudrais dédier ce travail à mes chers parents qui m'ont toujours encouragés, à ma famille, à mes amis.*

---

## RÉSUMÉ

---

Nous nous intéressons dans cette thèse à la résolution de la pollution spectrale. Ce phénomène est apparu dans l'approximation spectrale comme la non convergence du spectre approché vers le spectre exact. Autrement dit, les valeurs trouvées sur machines n'ont aucune relation avec les valeurs justes. Ainsi, nous allons définir une méthode alternative qui résout ce problème lié à l'approximation spectrale. Notre méthode est basé sur le spectre généralisé qui fournit un plan d'approximation numérique stable.

---

**Les mots clés :** Pollution spectrale, Spectre généralisé, Propriété U, Propriété L, Opérateur de Schrödinger.

---

**Classification Mathématique des Sujets (2010) :** 35P15, 47A75, 35J10.

---

## ABSTRACT

---

We are interested in this thesis in the resolution of spectral pollution. This phenomenon appeared in the spectral approximation as the non-convergence of the approximated spectrum toward the sought spectrum. In other words, the values found on machines have no relation to the sought or desired values. Thus, we will define an alternative method that solves this problem related to the spectral approximation. Our method is based on the generalized spectrum that provides a stable numerical approximation scheme.

---

**Key words** : Spectral pollution, Generalized spectrum, Propriety U, Propriety L, Schrödinger operator.

---

**Mathematical Subject Classification (2010)** : 35P15, 47A75, 35J10.

## ملخص

نحن مهتمون في هذه الأطروحة إلى حل للتلوث الطيفية، ظهرت هذه الظاهرة في التقريب الطيفي كتقارب في الطيف التقريبي نحو الطيف الدقيق بمعنى آخر، لا توجد علاقة بين القيم الموجودة على الأجهزة والقيم الصحيحة وبالتالي، سنحدد طريقة بديلة تحل هذه المشكلة المتعلقة بالتقريب الطيفي. تعتمد طريقة عملنا على الطيف المعمم الذي يوفر مخطط تقريب رقمي ثابت.

الكلمات المفتاحية: التلوث الطيفي ، الطيف المعمم ، خاصية ف ، خاصية ت، مشغل شروندجر.

---

# Table des matières

---

<b>1 Introduction</b>	<b>3</b>
1.1 Position du problème . . . . .	4
1.2 Plan de la thèse . . . . .	8
<b>2 Spectre généralisé</b>	<b>9</b>
2.1 Introduction . . . . .	10
2.2 Opérateur non borné et spectre généralisé . . . . .	12
2.3 Fondements théoriques de la méthode spectrale généralisée . . . . .	15
2.4 Propriétés qualitatives du spectre généralisé . . . . .	21
2.5 Conclusions et commentaires . . . . .	22
<b>3 L'approximation du spectre généralisé</b>	<b>24</b>
3.1 Introduction . . . . .	25
3.2 Propriété $U$ . . . . .	27
3.3 Propriété $L$ . . . . .	31
3.4 Commentaires . . . . .	36

<b>4 Pseudo-spectre généralisé</b>	<b>38</b>
4.1 Introduction	39
4.2 Pseudo-spectre généralisé	40
4.3 Pseudo-spectre généralisé et pseudo-spectre pour opérateur non borné	49
<b>5 Application sur l'opérateur de Schrödinger</b>	<b>53</b>
5.1 Introduction	54
5.2 Pseudo-spectre et spectre de l'opérateur de Schrödinger	55
5.3 Problème spectral généralisé de l'opérateur de Schrödinger	59
5.4 Application numérique	64
5.4.1 La méthode de Nyström	66
5.4.2 La méthode de Sloan	67
5.4.3 La méthode de Kantorovich	68
<b>6 Conclusion et perspectives</b>	<b>75</b>

---

CHAPITRE 1

---

# INTRODUCTION

---

## 1.1 Position du problème

Depuis une dizaine d'années, il y a dans le domaine des mathématiques numériques un vif intérêt porté à l'étude de la pollution spectrale. Ce problème est issu de la discrétisation numérique des problèmes spectraux. Autrement dit, pour trouver les valeurs spectrales d'un opérateur non borné, noté  $A$ , défini sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ , numériquement la machine donne des valeurs spectrales qui n'ont aucune relation avec celles du problème d'origine. Ces valeurs spectrales obtenues numériquement sont considérées comme une pollution du spectre, d'où l'appellation du phénomène comme la pollution spectrale. Pour plus de détails et d'exemples concrets sur ce concept, nous nous référons aux travaux [30], [9], [19], [5], [35], [14], [15], [7] et [8].

Précisément, si  $A$  est un opérateur différentiel, nous considérons une famille de projections  $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$  définie sur  $\mathcal{H}$ ,  $P_k : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{L}_k$  où  $\mathcal{L}_k$  sont des sous-espaces fermés de  $\mathcal{H}$ . Les méthodes conventionnelles, différences finies et éléments finis (voir [13]) utilisées pour discrétiser les problèmes spectraux cherchent à satisfaire l'égalité :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{sp}(P_k A P_k) = \text{sp}(A), \quad (1.1)$$

où  $\text{sp}(A)$  désigne le spectre de  $A$ , donné par,

$$\text{sp}(A) = \mathbb{C} \setminus \text{re}(A), \quad (1.2)$$

et

$$\text{re}(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda I : D(A) \rightarrow \mathcal{H} \text{ est bejectif et } (A - \lambda I)^{-1} \text{ est borné} \}. \quad (1.3)$$

Malheureusement, le phénomène de la pollution spectrale intervient pour rendre cette convergence pratiquement impossible. Ce phénomène est défini comme la non convergence du spectre approché  $\text{sp}(P_k A P_k)$  vers le spectre exact  $\text{sp}(A)$ . C'est-à-dire, il existe une suite  $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$  telle que  $\lambda_k \in \text{sp}(P_k A P_k)$  et que  $\lambda_k \rightarrow \lambda$ , mais  $\lambda \notin \text{sp}(A)$ . Sinon, nous trouvons une valeur  $\lambda \in \text{sp}(A)$  telle que nous ne pouvons pas trouver une suite  $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$  telle que  $\lambda_k \in \text{sp}(P_k A P_k)$  et que  $\lambda_k \rightarrow \lambda$ .

Dans le cas où  $A$  est un opérateur borné sur  $\mathcal{H}$ , et si nous notons  $A_k = P_k A P_k$ , alors la question principale dans la théorie de l'approximation spectrale revient à chercher le mode de convergence propre de  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  vers  $A$  pour résoudre cette pollution spectrale et établir un plan numérique stable. Par exemple, si la suite d'opérateurs  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge en norme vers  $A$ , alors la pollution spectrale n'a pas lieu dans l'approximation spectrale (voir [1]). Pour plus de détails sur ce cas nous nous référons aux travaux [2], [3], [10] et [37].

Dans cette thèse, nous allons construire une méthode alternative pour résoudre la pollution spectrale dans le cadre des opérateurs non bornés. Pour préparer ce passage nous commençons par définir les notions et les concepts utilisés autour de cette méthode, et qui expriment aussi harmonieusement le sujet central de cette thèse.

Soient  $T$  et  $S$  deux opérateurs bornés sur  $\mathcal{H}$ , nous définissons le spectre généralisé par,

$$\text{sp}(T, S) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda S \text{ n'est pas inversible } \}, \quad (1.4)$$

l'ensemble résolvant généralisé s'écrit

$$\text{re}(T, S) = \mathbb{C} \setminus \text{sp}(T, S). \quad (1.5)$$

Ensuite, le spectre ponctuel généralisé est donné par

$$\text{sp}_p(T, S) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists u \in \mathcal{H} \setminus \{0\}, Tu = \lambda Su\}. \quad (1.6)$$

Nous disons que  $\lambda$  est une valeur propre généralisée associée aux opérateurs  $T$  et  $S$ , si  $\lambda \in \text{sp}_p(T, S)$ . Ainsi, nous disons qu'un vecteur  $u \in \mathcal{H}$  est un vecteur propre généralisé associé à la valeur propre généralisée  $\lambda$ , si  $u \in \text{Ker}(T - \lambda S)$ , où celui-ci est donné par,

$$\text{Ker}(T - \lambda S) = \{u \in \mathcal{H} : Tu = \lambda Su\}. \quad (1.7)$$

Notre méthode est fondée sur l'idée qui consiste à perturber un opérateur non borné par un opérateur borné, en attendant que les propriétés spectrales deviennent plus contrôlables, alors le spectre généralisé prend sa place comme le cas souhaité.

En d'autres termes, considérons de nouveau un opérateur non borné défini sur un espace de Banach  $\mathcal{X}$ , noté  $A$ . Nous allons démontrer que chaque problème spectral associé à  $A$ , admet un problème spectral généralisé équivalent, c'est-à-dire il existe deux opérateurs bornés  $(T, S)$  définis sur  $\mathcal{X}$ , satisfaisants

$$\text{sp}(T, S) = \text{sp}(A). \quad (1.8)$$

Dans le même contexte, nous allons montrer que si  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$ , alors  $\lambda$  est aussi une valeur propre généralisée du couple  $(T, S)$  telle

que

$$\text{Ker}(A - \lambda I) = \text{Ker}(T - \lambda S). \quad (1.9)$$

Ainsi, grâce à l'approximation numérique du couple  $(T, S)$  par des suites d'opérateurs  $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$  qui convergent dans un sens propre, nous allons démontrer que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{sp}(T_k, S_k) = \text{sp}(T, S), \quad (1.10)$$

où la limite est définie par la combinaison de la Propriété U et de la Propriété L, qui sont proprement étendues du cas classique  $S = I$  (voir [1]), de la manière suivante,

Propriété U : Si  $\lambda_k \in \text{sp}(T_k, S_k)$  et  $\lambda_k \rightarrow \lambda$ , alors  $\lambda \in \text{sp}(T, S)$ .

Propriété L : Si  $\lambda \in \text{sp}(T, S)$ , alors il existe  $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$  telle que  $\lambda_k \rightarrow \lambda$  et que  $\lambda_k \in \text{sp}(T_k, S_k)$ .

Ensuite, nous allons démontrer que si  $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge en norme vers  $T$  et si  $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $S$  en collectivement compact convergence, les deux Propriétés U et L sont obtenues et par conséquent, le phénomène de la pollution spectrale est résolu.

Pour l'application numérique, nous allons envisager l'opérateur de Schrödinger défini sur l'espace de Hilbert  $\mathcal{H} = L^2(0, +\infty)$ .

Nous notons que la méthode proposée dans cette thèse est appelée **la méthode spectrale généralisée**.

Finalement, la plupart des lecteurs que la curiosité aura poussé jusqu'à ces pages, nous leur demandons de se familiariser avec les concepts avancés

de la théorie spectrale qui sont présentés d'une façon très breve dans ce manuscrit. Les résultats de ce modeste travail constituent les bases des cinq publications.

## 1.2 Plan de la thèse

Cette thèse est organisée de la façon suivante : Dans le chapitre II, nous nous intéressons à démontrer que chaque problème spectral classique associé à un opérateur non borné  $A$ , a un problème spectral généralisé équivalent, de plus nous allons construire les fondements théoriques de la méthode spectrale généralisée.

Dans le chapitre III, nous allons démontrer la Propriété  $U$  et la Propriété  $L$  en envisageant le cas où  $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $T$  en norme et  $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$  vers  $S$  en collectivement compact convergence.

Dans le chapitre IV, nous allons aborder la notion du pseudo-spectre généralisé, où nous allons introduire une nouvelle définition du pseudo-spectre généralisé associée aux opérateurs bornés défini sur un espace de Hilbert. Ensuite, nous démontrons comment relier ce nouveau concept à la définition équivalente du pseudo-spectre d'un opérateur non borné défini sur un espace de Hilbert.

Dans le chapitre V, nous allons appliquer la méthode spectrale généralisée à l'opérateur de Schrodinger, puis nous allons fournir un problème spectral où des résultats numériques sont disponibles pour d'autre approche que les nôtres.

---

CHAPITRE 2

---

# SPECTRE GÉNÉRALISÉ

---

## 2.1 Introduction

Soit  $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$  un espace de Banach. L'espace  $\text{BL}(\mathcal{X})$  est l'ensemble des opérateurs linéaires bornés de  $\mathcal{X}$  dans  $\mathcal{X}$ . Cet espace est muni de la norme subordonnée, pour  $T \in \text{BL}(\mathcal{X})$  :

$$\|T\|_{\text{BL}(\mathcal{X})} = \sup\{\|Tx\| : x \in \mathcal{X}, \|x\| = 1\}. \quad (2.1)$$

Dans la suite, s'il n'y aura pas d'ambiguïté, nous écrivons simplement  $\|\cdot\|$  au lieu de  $\|\cdot\|_{\text{BL}(\mathcal{X})}$  pour désigner la norme subordonnée de  $\text{BL}(\mathcal{X})$ . Soient  $T$  et  $S$  deux opérateurs dans  $\text{BL}(\mathcal{X})$ , nous rappelons que le spectre généralisé  $\text{sp}(T, S)$  est défini par,

$$\text{sp}(T, S) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda S \text{ n'est pas inversible}\}. \quad (2.2)$$

Ainsi, l'ensemble résolvant généralisé  $\text{re}(T, S)$  est défini par,

$$\text{re}(T, S) = \mathbb{C} \setminus \text{sp}(T, S). \quad (2.3)$$

Ensuite, le spectre ponctuel généralisé  $\text{sp}_p(T, S)$  est défini par,

$$\text{sp}_p(T, S) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists u \in \mathcal{H} \setminus \{0\}, Tu = \lambda Su\}. \quad (2.4)$$

Pour tout  $z \in \text{re}(T, S)$ , nous appelons l'opérateur

$$R(z, T, S) = (T - zS)^{-1}, \quad (2.5)$$

l'opérateur résolvant généralisé. Rappelons aussi que l'opérateur  $I$  désigne l'opérateur identité de  $\mathcal{X}$ .

Soit  $\lambda \in \text{sp}(T, S)$  une valeur propre généralisée. Nous disons que  $\lambda$  a une multiplicité algébrique finie, s'il existe un entier strictement positif  $l$  tel que

$$\dim \text{Ker}(T - \lambda S)^l < \infty. \quad (2.6)$$

Dans ce cas,  $\lambda$  est appelé une valeur propre généralisée de type fini.

Nous signalons que si l'opérateur  $S$  est inversible, alors

$$\text{sp}(T, S) = \text{sp}(S^{-1}T). \quad (2.7)$$

Mais, dans le cas où,  $S^{-1}$  n'existe pas, c'est-à-dire  $S^{-1}$  n'est pas un opérateur borné sur  $\mathcal{X}$ , le spectre généralisé  $\text{sp}(T, S)$ , peut être borné ou égale à  $\mathbb{C}$  ou même l'ensemble vide.

Soit  $A$  un opérateur non borné (pas nécessairement fermé, voir [11]) de  $\mathcal{X}$  dans  $\mathcal{X}$ . Nous organisons ce chapitre comme suit, nous commençons par démontrer que chaque problème spectral associé à  $A$ , a un problème spectral généralisé équivalent, ce qui signifie qu'il existe deux opérateurs bornés  $(T, S)$  définis sur  $\mathcal{X}$ , qui satisfont

$$\text{sp}(T, S) = \text{sp}(A). \quad (2.8)$$

De plus, nous allons montrer que si  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$ , alors  $\lambda$  est aussi une valeur propre généralisée du couple  $(T, S)$ , telle que

$$\text{Ker}(A - \lambda I) = \text{Ker}(T - \lambda S). \quad (2.9)$$

Ensuite, nous construisons les fondements théoriques de la méthode spectrale généralisée, où cette théorie est la généralisation du cas standard  $S = I$

(voir [1]). Précisément, nous allons généraliser partiellement la théorie de décomposition spectrale établie pour un opérateur linéaire borné (voir [20] et [1]). Finalement, nous terminerons ce chapitre par quelques résultats sur le plan qualitatif du spectre généralisé.

## 2.2 Opérateur non borné et spectre généralisé

Considérons un opérateur non borné  $A$  avec un domaine  $D(A) \subseteq \mathcal{X}$ . Le théorème suivant montre que tout opérateur non borné contient une décomposition de deux opérateurs bornés dans  $BL(\mathcal{X})$  qui l'expriment dans la théorie du spectre généralisé.

**Théorème 2.2.1** *Si  $re(A) \neq \emptyset$ , alors il existe deux opérateurs  $T, S \in BL(\mathcal{X})$  tels que*

$$\text{sp}(A) = \text{sp}(T, S). \quad (2.10)$$

*En particulier,  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$  si, et seulement si  $\lambda$  est une valeur propre généralisée du couple  $(T, S)$ . de plus, nous avons*

$$\text{Ker}(A - \lambda I) = \text{Ker}(T - \lambda S). \quad (2.11)$$

**Démonstration** Soit  $\alpha \in re(A)$ , nous définissons,

$$\begin{cases} S = (A - \alpha I)^{-1}, \\ T = A(A - \alpha I)^{-1}. \end{cases} \quad (2.12)$$

Il est clair que  $T, S \in \text{BL}(\mathcal{X})$ . Nous avons

$$\begin{aligned}
\lambda \in \text{re}(A) &\Rightarrow (A - \lambda I)^{-1} \in \text{BL}(\mathcal{X}) \\
&\Rightarrow (A - \lambda I)(A - \alpha I)^{-1} \in \text{BL}(\mathcal{X}) \\
&\Rightarrow [(A - \lambda I)(A - \alpha I)^{-1}]^{-1} \in \text{BL}(\mathcal{X}) \\
&\Rightarrow [A(A - \alpha I)^{-1} - \lambda(A - \alpha I)^{-1}]^{-1} \in \text{BL}(\mathcal{X}) \\
&\Rightarrow (T - \lambda S)^{-1} \in \text{BL}(\mathcal{X}) \\
&\Rightarrow \lambda \in \text{re}(T, S).
\end{aligned}$$

Soit maintenant  $\lambda \in \text{re}(T, S)$ . Pour montrer que  $(A - \lambda I)^{-1}$  est dans  $\text{BL}(\mathcal{X})$ , nous prouvons que  $(A - \lambda I)$  est bejectif. En effet, premièrement soit  $u \in D(A)$  tel que

$$\begin{aligned}
(A - \lambda I)u = 0 &\Rightarrow (A - \alpha I)^{-1}(A - \lambda I)u = 0 \\
&\Rightarrow (A - \lambda I)(A - \alpha I)^{-1}u = 0 \\
&\Rightarrow [A(A - \alpha I)^{-1} - \lambda(A - \alpha I)^{-1}]u = 0 \\
&\Rightarrow (T - \lambda S)u = 0 \\
&\Rightarrow u = 0.
\end{aligned}$$

Deuxièmement, pour tout  $y \in \mathcal{X}$  nous allons montrer que l'équation  $(A - \lambda I)x = y$  admet une solution  $x \in D(A)$ . Si nous posons  $x = (A - \alpha I)^{-1}(T - \lambda S)^{-1}y$ , alors il est clair que  $x \in D(A)$  (le fait que  $(A - \alpha I)^{-1} : X \rightarrow D(A)$ ),

de plus nous avons

$$\begin{aligned}
 (A - \lambda I)(A - \alpha I)^{-1}(T - \lambda S)^{-1}y &= [A(A - \alpha I)^{-1} - \lambda(A - \alpha I)^{-1}](T - \lambda S)^{-1}y \\
 &= (T - \lambda S)(T - \lambda S)^{-1}y \\
 &= y.
 \end{aligned}$$

D'où  $(A - \lambda I)$  est bejectif, ce qui implique directement  $\lambda \in \text{re}(A)$ .

Supposons maintenant que  $\lambda$  est une valeur propre généralisée du couple  $(T, S)$ , alors il existe  $u \in \mathcal{X} \setminus \{0\}$  tel que  $Tu = \lambda Su$ , ainsi

$$\begin{aligned}
 Tu = \lambda Su &\Rightarrow A(A - \alpha I)^{-1}u = \lambda(A - \alpha I)^{-1}u \\
 &\Rightarrow u = (\lambda - \alpha)(A - \alpha I)^{-1}u \\
 &\Rightarrow u \in D(A).
 \end{aligned}$$

Or, l'opérateur  $(A - \alpha I)^{-1}$  est un opérateur borné de  $X$  vers  $D(A)$ , alors  $u \in D(A)$ . Ensuite, en appliquant  $(A - \alpha I)$  sur  $Tu = \lambda Su$ , nous trouvons que  $Au = \lambda u$ . Ainsi, en prenant en considération la construction du couple  $(T, S)$ , nous pouvons voir que

$$\text{Ker}(A - \lambda I) = \text{Ker}(T - \lambda S).$$

□

Notons que le choix de prendre le couple  $(T, S)$  en fonction de l'opérateur résolvant de  $A$ , n'est pas seulement le choix disponible (voir chapitre V). Nous ajoutons aussi que si  $A$  est un opérateur borné, alors le couple  $(A, I)$  l'exprime dans la théorie du spectre généralisé.

Signalons aussi que la majorité des opérateurs non bornés en analyse fonctionnelle ou en mathématiques appliquées sont des opérateurs différentiels (voir, [21] et [18]). Toutefois, le couple  $(T, S)$ , en appliquant la théorie du spectre généralisé sera, un dual des opérateurs intégraux (voir chapitre V et [6]).

## 2.3 Fondements théoriques de la méthode spectrale généralisée

Nous commençons cette partie par établir quelques résultats généralisés du cas standard  $S = I$ . Considérons deux opérateurs  $T, S \in \text{BL}(\mathcal{X})$ .

**Théorème 2.3.1** *Si  $z \in \text{re}(T, S)$  et  $\mu \in \mathbb{C}$ , tels que*

$$|z - \mu| < \|R(z, T, S)S\|^{-1}, \quad (2.13)$$

*alors,  $\mu \in \text{re}(T, S)$ .*

**Démonstration** Soit  $z \in \text{re}(T, S)$ , pour tout  $\mu \in \mathbb{C}$ , nous avons

$$T - \mu S = (T - zS) [I - (\mu - z)R(z, T, S)S]. \quad (2.14)$$

Si  $|z - \mu| \|R(z, T, S)S\| < 1$ , alors d'après le lemme de Neumann (voir [1]), nous obtenons

$$[I - (\mu - z)R(z, T, S)S]^{-1} \in \text{BL}(\mathcal{X}), \quad (2.15)$$

ce qui implique que

$$R(\mu, T, S) = [I - (\mu - z)R(z, T, S)S]^{-1} R(z, T, S). \quad (2.16)$$

□

**Corollaire 2.3.1** *L'ensemble  $\text{sp}(T, S)$  est fermé dans  $\mathbb{C}$ .*

La preuve est une consequence directe du théorème précédent.

**Théorème 2.3.2** *La fonction  $R(\cdot, T, S) : \text{re}(T, S) \rightarrow \text{BL}(\mathcal{X})$  est analytique telle que*

$$\frac{d}{dz}R(z, T, S) = R(z, T, S) S R(z, T, S). \quad (2.17)$$

**Démonstration** Soit  $z \in \text{re}(T, S)$ , nous prenons  $\mu$  dans le disque ouvert du centre  $z$  et du rayon  $r = \|R(z, T, S)S\|^{-1}$ , alors d'après ce qui précède (voir le théorème [2.3.1](#)), nous avons

$$\begin{aligned} R(\mu, T, S) &= [I - (\mu - z)R(z, T, S)S]^{-1} R(z, T, S) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (\mu - z)^k (R(z, T, S)S)^k R(z, T, S). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Or,

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{R(\mu, T, S) - R(z, T, S)}{\mu - z} - R(z, T, S)S R(\mu, T, S) \right\| \\ &= \left\| \sum_{k=2}^{+\infty} (\mu - z)^k (R(z, T, S)S)^k R(z, T, S) \right\| \\ &\leq \frac{|\mu - z| \|R(z, T, S)S\|^2 \|R(z, T, S)\|}{1 - |\mu - z| \|R(z, T, S)S\|}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Ce qui implique que

$$\lim_{\mu \rightarrow z} \frac{R(\mu, T, S) - R(z, T, S)}{\mu - z} = R(z, T, S)S R(z, T, S). \quad (2.20)$$

□

Soit  $\lambda \in \text{sp}(T, S)$ , nous disons que  $\lambda$  est un élément spectral généralisé, isolé dans  $\text{sp}(T, S)$ , s'il existe un contour de Cauchy  $\Gamma$ , tel que

$$\lambda \in \text{int}(\Gamma), \quad (2.21)$$

et

$$\text{int}(\Gamma) \cap \text{sp}(T, S) = \emptyset. \quad (2.22)$$

L'ensemble  $\text{int}(\Gamma)$  désigne l'intérieur du contour de Cauchy  $\Gamma$ .

Les résultats suivants représentent les fondements théoriques de la méthode spectrale généralisée.

**Théorème 2.3.3** *Soit  $\lambda$  une valeur propre généralisée de type fini isolée dans  $\text{sp}(T, S)$ . Si  $\Gamma$  désigne le contour de Cauchy qui sépare  $\lambda$  de  $\text{sp}(T, S)$ , alors l'opérateur*

$$P = \frac{-1}{2i\pi} \int_{\Gamma} (T - zS)^{-1} S dz, \quad (2.23)$$

définit une projection.

**Démonstration** Notons que l'opérateur  $P$  est bien défini sur  $\mathcal{X}$  tel que  $P \in \text{BL}(\mathcal{X})$  et ne dépend pas du choix de  $\Gamma$  (voir le théorème [2.3.2](#)). Considérons maintenant un autre contour de Cauchy, noté  $\Gamma'$ , tel que

$$\Gamma' \subset \text{int}(\Gamma). \quad (2.24)$$

Alors, pour tout  $u \in \mathcal{X}$ , nous avons

$$\begin{aligned}
P^2u &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\Gamma} (T - zS)^{-1} S dz \int_{\Gamma'} (T - z'S)^{-1} Su dz' \\
&= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\Gamma} \int_{\Gamma'} (T - zS)^{-1} S (T - z'S)^{-1} Su dz' dz \\
&= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\Gamma} \int_{\Gamma'} \frac{(T - zS)^{-1} - (T - z'S)^{-1}}{(z - z')} Su dz' dz \\
&= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\Gamma} (T - zS)^{-1} \left( \int_{\Gamma'} \frac{1}{z - z'} dz' \right) dz Su \\
&\quad + \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\Gamma'} (T - z'S)^{-1} \left( \int_{\Gamma} \frac{1}{z' - z} Su dz \right) dz' \\
&= \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (T - zS)^{-1} Su dz \\
&= Pu.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Nous avons utilisé,

$$(T - zS)^{-1} - (T - z'S)^{-1} = (z - z')(T - zS)^{-1} S (T - z'S)^{-1}, \tag{2.26}$$

et

$$\int_{\Gamma'} \frac{dz'}{z - z'} = 0, \quad \int_{\Gamma} \frac{dz}{z - z'} = 2\pi i. \tag{2.27}$$

□

**Théorème 2.3.4** *Soit  $\lambda \in \text{sp}(T, S)$ , une valeur propre généralisée isolée. Si  $T$  commute avec  $S$ , alors*

$$P\mathcal{X} = \text{Ker}(T - \lambda S)^l. \tag{2.28}$$

**Démonstration** Premièrement, nous fixons  $\alpha \in \text{re}(T, S)$  tel que pour tout contour de Cauchy  $\Gamma$  associé à  $\lambda$ , nous avons  $\alpha \notin \Gamma$ .

Pour  $\mu \in \Gamma$ , nous trouvons

$$\mu S - T = (\alpha S - T)[(\alpha - \mu)^{-1}I - (\alpha S - T)^{-1}S](\alpha - \mu), \quad (2.29)$$

ce qui donne

$$(\mu S - T)^{-1} = [(\alpha - \mu)^{-1}I - (\alpha S - T)^{-1}S]^{-1}(\alpha - \mu)^{-1}(\alpha S - T)^{-1}. \quad (2.30)$$

Ainsi, nous pouvons voir que  $(\alpha - \lambda)^{-1}$  est une valeur propre de l'opérateur  $(\alpha S - T)^{-1}S$ . En effet,

$$\begin{aligned} u \in \text{Ker}(T - \lambda S) &\Rightarrow (T - \lambda S)u = 0 \\ &\Rightarrow (\alpha S - T)^{-1}(\alpha S - T + T - \lambda S)u = u \\ &\Rightarrow (\alpha S - T)^{-1}Su = (\alpha - \lambda)^{-1}u \\ &\Rightarrow u \in \text{Ker}((\alpha S - T)^{-1}S - (\alpha - \lambda)^{-1}I), \end{aligned}$$

en inversant la dernière étape, il s'en suit que

$$\text{Ker}(T - \lambda S) = \text{Ker}((\alpha S - T)^{-1}S - (\alpha - \lambda)^{-1}I). \quad (2.31)$$

Pour cela, si en se référant à la commutativité de  $T$  avec  $S$ , nous obtenons

$$\text{Ker}(T - \lambda S)^l = \text{Ker}((\alpha S - T)^{-1}S - (\alpha - \lambda)^{-1}I)^l. \quad (2.32)$$

Maintenant, sous le choix de  $\alpha$ , nous pouvons voir que pour tout contour de Cauchy  $\Gamma$ ,  $\eta(\Gamma)$  est aussi un contour de Cauchy associé à la valeur propre  $(\alpha - \lambda)^{-1}$  de l'opérateur  $(\alpha S - T)^{-1}S$ , où

$$\eta(\mu) = (\alpha - \mu)^{-1}. \quad (2.33)$$

Pour tout  $\mu \in \Gamma$ , nous mettons  $B = (\alpha S - T)^{-1}S$ ,  $z = (\alpha - \mu)^{-1}$ . Alors, en utilisant cette notation, nous avons

$$(\mu S - T)^{-1}S = z[-I + z(zI - B)^{-1}]. \quad (2.34)$$

Ainsi, en passant à l'intégrale sur  $\Gamma$ , nous trouvons

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\mu S - T)^{-1}S d\mu &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\eta(\Gamma)} z[-I + z(zI - B)^{-1}] \frac{dz}{z^2} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\eta(\Gamma)} [-z^{-1}I + (zI - B)^{-1}] dz \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\eta(\Gamma)} \frac{1}{z} dz I + \frac{1}{2\pi i} \int_{\eta(\Gamma)} (zI - B)^{-1} dz \\ &= -P_{\{(\alpha-\lambda)^{-1}\}}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Alors que  $P_{\{(\alpha-\lambda)^{-1}\}}$  est la projection spectrale associée à l'opérateur  $(\alpha S - T)^{-1}S$  autour de  $(\alpha - \lambda)^{-1}$ . Donc, d'après la théorie de la décomposition spectrale (voir [1] et [20]),

$$P\mathcal{X} = P_{\{(\alpha-\lambda)^{-1}\}}\mathcal{X} = \text{Ker}((\alpha S - T)^{-1}S - (\alpha - \lambda)^{-1}I)^l = \text{Ker}(T - \lambda S)^l. \quad (2.36)$$

□

**Remarque 2.3.1** *Notons que  $T$  commute avec  $S$ , est une condition seulement suffisante pour avoir*

$$P\mathcal{X} = \text{Ker}(T - \lambda S)^l, \quad (2.37)$$

où  $\lambda$  est une valeur propre généralisée de type fini isolée dans  $\text{sp}(T, S)$ . Toutefois, dans l'application numérique (voir chapitre V) nous n'aurons pas besoin que  $T$  commute avec  $S$ .

## 2.4 Propriétés qualitatives du spectre généralisé

Dans cette partie, nous montrons quelques résultats qualitatifs concernant la théorie du spectre généralisé.

Désignons par  $B(0, k)$  la boule de centre 0 et de rayon  $k > 0$ .

**Théorème 2.4.1** *Soient  $T, S \in BL(\mathcal{X})$ , alors  $\text{sp}(T, S) \subset B(0, k)$  si et seulement si  $0 \notin \text{sp}(S)$ .*

**Démonstration** Supposons que  $\text{sp}(T, S) \subset B(0, k)$ , alors pour tout  $\alpha \in \text{re}(T, S)$ , nous avons

$$\lambda S - T = (\alpha S - T)[(\alpha S - T)^{-1}S - (\alpha - \lambda)^{-1}](\lambda - \alpha). \quad (2.38)$$

Comme  $\alpha \in \text{re}(T, S)$ , nous obtenons

$$\lambda \in \text{sp}(T, S) \iff (\alpha - \lambda)^{-1} \in \text{sp}((\alpha S - T)^{-1}S). \quad (2.39)$$

Donc, le fait que  $\text{sp}(T, S) \subset B(0, k)$  implique que  $0 \notin \text{sp}((\alpha S - T)^{-1}S)$ ; sinon  $0 \in \text{sp}((\alpha S - T)^{-1}S)$  implique que  $\infty \in \text{sp}(T, S)$ . Pour cela,  $0 \notin \text{sp}((\alpha S - T)^{-1}S)$ , et ceci nous donne  $0 \notin \text{sp}(S)$ .

□

Lorsque  $\mathcal{X}$  est un espace de Banach de dimension finie, il est clair que le spectre généralisé ne contient que des valeurs propres généralisées, sauf  $\{\infty\}$ .

**Théorème 2.4.2** *Soient  $T, S \in BL(\mathcal{X})$ , si  $S$  est compact, alors*

$$\text{sp}(T, S) = \text{sp}_p(T, S) \cup \{\infty\}. \quad (2.40)$$

**Démonstration** Nous utilisons l'expression (2.38). Puisque l'opérateur  $(\alpha S - T)^{-1}S$  est compact,  $\text{sp}(T, S)$  est un ensemble constitué seulement des points isolés.

Soit  $\lambda \in \text{sp}(T, S)$ , alors il existe  $\beta \in \text{sp}((\alpha S - T)^{-1}S)$  tel que

$$\beta = (\alpha - \lambda)^{-1}. \quad (2.41)$$

Par conséquent, il existe  $u \in \mathcal{X} \setminus \{0\}$  tel que

$$\begin{aligned} (\alpha S - T)^{-1}Su = \beta u &\implies (\alpha S - T)^{-1}(\alpha S - \lambda S)u = u \\ &\implies u + (\alpha S - T)^{-1}(T - \lambda S)u = u \\ &\implies Tu = \lambda Su. \end{aligned}$$

□

## 2.5 Conclusions et commentaires

Dans ce chapitre, nous avons développé les fondements théoriques de la méthode spectrale généralisée, où le résultat annoncé dans le théorème (2.3.3) est un résultat classique établi dans [20], chapitre V. Le reste des résultats de ce chapitre sont partiellement le fruit des travaux [23], [28] et [27].

Notons que dans la littérature mathématiques, il y a une théorie abondante sur le spectre généralisé, cette théorie est aussi connue comme le pencil des opérateurs (voir [38], [32] et [34]).

La troisième partie de ce chapitre traite le cas où l'opérateur  $S$  est compact. Cette situation est familière quand nous passerons aux opérateurs différentiels (voir chapitre V, où l'opérateur de Schrödinger est envisagé).

---

CHAPITRE 3

---

L'APPROXIMATION DU SPECTRE  
GÉNÉRALISÉ

---

### 3.1 Introduction

Notons que dans le chapitre II, théorème [2.2.1](#), nous avons illustré l'idée de perturber un opérateur non borné par un autre borné en prouvant que les propriétés spectrales associées à cet opérateur non borné deviennent les mêmes que celles associées au spectre généralisé. Cependant, le calcul ou ce que nous appelons la détermination du spectre généralisé analytiquement, est une question difficile si nous ne disons pas impossible. Pour cela, dans ce chapitre nous allons focaliser seulement sur l'approximation numérique du spectre généralisé.

Soit  $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$  un espace de Banach. Soient  $T, S \in \text{BL}(\mathcal{X})$  deux opérateurs, où  $\text{BL}(\mathcal{X})$  désigne l'espace des opérateurs bornés de  $\mathcal{X}$  vers  $\mathcal{X}$ . Nous rappelons que l'espace  $\text{BL}(\mathcal{X})$  est muni de la norme subordonnée (défini dans le chapitre I).

Supposons qu'il existe deux suites d'opérateurs  $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$  dans  $\text{BL}(\mathcal{X})$  convergeant vers  $T$  et  $S$  respectivement dans un sens précis. Alors, pour déterminer la relation entre  $\text{sp}(T, S)$  et  $\text{sp}(T_k, S_k)$ , pour  $k$  assez grand, nous considérons le schéma d'approximation spectrale adopté dans la suite, comme :

**Propriété U** : Si  $\lambda_k \in \text{sp}(T_k, S_k)$  et  $\lambda_k \rightarrow \lambda$ , alors  $\lambda \in \text{sp}(T, S)$ .

**Propriété L** : Si  $\lambda \in \text{sp}(T, S)$ , alors il existe une suite  $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$  telle que  $\lambda_k \rightarrow \lambda$  et  $\lambda_k \in \text{sp}(T_k, S_k)$ .

Notons également que la Propriété U et la Propriété L, sont les extensions naturelles du cas standard  $S = I$  (voir [II](#)).

Nous disons que la suite d'opérateurs  $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $T$  en norme si,

$$\|T_k - T\|_{\text{BL}(\mathcal{X})} \rightarrow 0. \quad (3.1)$$

Dans la suite, ce type de convergence est désigné par  $T_k \xrightarrow{n} T$ .

Nous disons que la suites d'opérateurs  $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $S$  en collectivement compact convergence, s'il existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tel que l'ensemble

$$\bigcup_{k \geq k_0} \{S_k x - Sx : x \in X, \|x\| = 1\}, \quad (3.2)$$

est relativement compact dans  $\mathcal{X}$ , et que la suite  $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge ponctuellement vers  $S$ . Ce type de convergence est désigné par  $T_k \xrightarrow{cc} T$ .

Nous rappelons que une suite d'opérateurs  $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge ponctuellement vers  $S$  si,

$$\forall x \in \mathcal{X}, \quad \|S_k x - Sx\| \rightarrow 0. \quad (3.3)$$

Ce type de convergence est désigné par  $S_k \xrightarrow{p} S$ .

Si  $\mathcal{X}$  est une espace de Banach de dimension infinie, alors ni la convergence en norme ni le collectivement compact convergence est plus fort (dominant) que l'autre. Toutefois, Sous des hypothèses supplémentaires, la convergence en norme peut impliquer le collectivement compact convergence ou inversement.

Mentionnons avant de continuer qu'il y a sur la notion de collectivement compact convergence, une littérature très abondante, (voir [17] chapitre XII, [6] chapitre IV).

Indiquons aussi qu'il y a plusieurs autres notions de convergence : la convergence stable et la convergence fortement stable ([12]), ainsi que la

convergence en résolvante (voir [31]), la convergence spectrale (voir [2]) et la convergence de  $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$  vers  $T$  dans le sens où le rayon spectral  $\rho(T_k - T)$  de  $T_k - T$  tend vers zero et  $\|(T_k - T)T_k\|_{\text{BL}(\mathcal{X})}$  tend aussi vers zero (voir [4]).

Notre raison d'envisager seulement la convergence en norme avec le collectivement compact convergence est que, premièrement ces conditions sont suffisamment générales pour englober une grande variété des méthodes d'approximation numérique, deuxièmement elles sont assez simples pour être utilisées dans la pratique.

Dans ce chapitre, nous allons démontrer la Propriété  $U$  et la Propriété  $L$  en envisageant le cas où  $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $T$  en norme et  $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$  vers  $S$  en collectivement compact convergence.

## 3.2 Propriété $U$

Commençons cette partie par des résultats qui seront utilisés dans la suite pour démontrer nos résultats principaux. Notons que la norme  $\|\cdot\|_{\text{BL}(\mathcal{X})}$  de  $\text{BL}(\mathcal{X})$  sera désigné par  $\|\cdot\|$ , s'il n'aura pas d'ambiguïté.

**Lemme 3.2.1** *Si  $T_k \xrightarrow{p} T$  et  $S_k \xrightarrow{cc} S$  alors, pour tout  $H \in \text{BL}(\mathcal{X})$ ,*

$$\|(T_k - T)H(S_k - S)\| \rightarrow 0. \quad (3.4)$$

**Démonstration** Comme  $T_k \xrightarrow{p} T$  et que l'ensemble

$$H(\cup_{k \geq k_0} \{Sx - S_k x : \|x\| = 1\}), \quad (3.5)$$

est relativement compact, alors nous obtenons  $\|(T_k - T)H(S_k - S)\| \rightarrow 0$ .

□

**Proposition 3.2.1** Soient  $T, \tilde{T}, S$  et  $\tilde{S} \in \text{BL}(\mathcal{X})$ . Soit  $z \in \text{re}(T, S)$ , si

$$\left\| \left[ \left( (T - \tilde{T}) - z(S - \tilde{S}) \right) R(z, T, S) \right]^2 \right\| < 1, \quad (3.6)$$

alors  $z \in \text{re}(\tilde{T}, \tilde{S})$ , en plus

$$\|(\tilde{T} - z\tilde{S})^{-1}\| \leq \frac{\|R(z, T, S)\| \left[ 1 + \left\| \left( (T - \tilde{T}) - z(S - \tilde{S}) \right) R(z, T, S) \right\| \right]}{1 - \left\| \left[ \left( (T - \tilde{T}) - z(S - \tilde{S}) \right) R(z, T, S) \right]^2 \right\|}. \quad (3.7)$$

**Démonstration** Soit  $z \in \text{re}(T, S)$ . Nous définissons,

$$\begin{cases} \tilde{E} = (T - \tilde{T})R(z, T, S), \\ \tilde{F} = (S - \tilde{S})R(z, T, S), \end{cases} \quad (3.8)$$

alors, nous avons

$$\tilde{T} - z\tilde{S} = [I - (\tilde{E} - z\tilde{F})](T - zS). \quad (3.9)$$

Donc, en utilisant la seconde expansion de Neumann (voir [1], chapitre II) nous obtenons

$$\begin{aligned} (\tilde{T} - z\tilde{S})^{-1} &= R(z, T, S) \sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{E} - z\tilde{F})^{2k} \\ &\quad + R(z, T, S) \sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{E} - z\tilde{F})^{2k+1} \\ &= R(z, T, S) \left[ I + (\tilde{E} - z\tilde{F}) \right] \sum_{k=0}^{\infty} \left[ (\tilde{E} - z\tilde{F})^2 \right]^k. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\|(\tilde{T} - z\tilde{S})^{-1}\| \leq \frac{\|R(z, T, S)\| \left( 1 + \|\tilde{E} - z\tilde{F}\| \right)}{1 - \|(\tilde{E} - z\tilde{F})^2\|}. \quad (3.10)$$

□

Supposons maintenant que

$$(H1) \quad T_k \xrightarrow{n} T,$$

$$(H2) \quad S_k \xrightarrow{cc} S.$$

Le théorème suivant montre que la Propriété  $U$  est satisfaite sous les conditions (H1) et (H2).

**Théorème 3.2.1** *Sous (H1) et (H2), pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , si  $\lambda_k \in \text{sp}(T_k, S_k)$  et  $\lambda_k \rightarrow \lambda$ , alors  $\lambda \in \text{sp}(T, S)$ .*

**Démonstration** Supposons que  $\lambda \in \text{re}(T, S)$ . Comme l'ensemble  $\text{re}(T, S)$  est ouvert dans  $\mathbb{C}$  (voir corollaire [2.3.1](#)), alors il existe  $r > 0$  tel que

$$B = \{z \in \mathbb{C} : |\lambda - z| \leq r\} \subset \text{re}(T, S). \quad (3.11)$$

De plus,  $R(T, S, \cdot)$  est analytique sur  $\text{re}(T, S)$  (voir théorème [2.3.2](#)), nous avons

$$\alpha = \sup \{\|R(T, S, z)\| : z \in B\} < +\infty. \quad (3.12)$$

D'après le lemme [3.2.1](#), pour tout  $z \in B$ , il existe  $k_1, k_2, k_3$  et  $k_4$  tels que

$$\|(T - T_k)R(T, S, z)(T - T_k)\| \leq \frac{1}{8\alpha} \text{ pour } k \geq k_1, \quad (3.13)$$

$$\|(S - S_k)R(T, S, z)(S - S_k)\| \leq \frac{1}{8(r + |z|^2)\alpha} \text{ pour } k \geq k_2, \quad (3.14)$$

$$\|(T - T_k)R(T, S, z)(S - S_k)\| \leq \frac{1}{8(r + |z|)\alpha} \text{ pour } k \geq k_3, \quad (3.15)$$

$$\|(S - S_k)R(T, S, z)(T - T_k)\| \leq \frac{1}{8(r + |z|)\alpha} \text{ pour } k \geq k_4. \quad (3.16)$$

Par conséquent, pour  $k \geq \max\{k_1, k_2, k_3, k_4\}$ ,

$$\begin{aligned} \left\| \left[ ((T - T_k) - z(S - S_k))R(T, S, z) \right]^2 \right\| &\leq \left[ \|(T - T_k)R(T, S, z)(T - T_k)\| \right. \\ &+ |z|^2 \|(S - S_k)R(T, S, z)(S - S_k)\| + |z| \|(T - T_k)R(T, S, z)(S - S_k)\| \\ &\left. + |z| \|(S - S_k)R(T, S, z)(T - T_k)\| \right] \|R(T, S, z)\| \\ &\leq \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

En utilisant la proposition [3.2.1](#),  $(T_k - zS_k)^{-1}$  existé et borné. Alors,  $B \subset \text{re}(T_k, S_k)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  assez grand, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse  $\lambda_k \in \text{sp}(T_k, S_k)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , d'où,  $\lambda \in \text{sp}(T, S)$ .

□

Supposons maintenant que

$$(H3) \quad T_k \xrightarrow{cc} T,$$

$$(H4) \quad S_s \xrightarrow{n} S.$$

**Remarque 3.2.1** *Sous les conditions (H1) et (H4) (respectivement (H3) et (H2)), la Propriété U est également obtenue. La démonstration est similaire au cas traité sous les conditions (H1) et (H2)*

Dans les tests numériques, nous calculons la quantité

$$\sup\{\text{dist}(\mu, \text{sp}(T, S)) : \mu \in \text{sp}(T_k, S_k)\} \quad (3.18)$$

parce que si elle tend vers 0, alors la Propriété U est obtenue. En effet, supposons que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda_k \in \text{sp}(T_k, S_k)$  et que  $\lambda_k \rightarrow \lambda$ , alors

$$\text{dist}(\lambda, \text{sp}(T, S)) \leq |\lambda - \lambda_k| + \text{dist}(\lambda_k, \text{sp}(T, S)). \quad (3.19)$$

Or, le second terme de la dernière inégalité tend vers zero, pour  $k$  assez grand, et que l'ensemble  $\text{sp}(T, S)$  est fermé dans  $\mathbb{C}$  (voir lemme [2.3.1](#)), alors nous obtenons  $\lambda \in \text{sp}(T, S)$ .

### 3.3 Propriété $L$

Soit  $\lambda$  un point isolé de  $\text{sp}(T, S)$ . Nous disons que  $\lambda$  a une multiplicité algébrique finie, s'il existe  $\ell \in \mathbb{N}$  tel que

$$\alpha = \dim \text{Ker}(T - \lambda S)^\ell < \infty. \quad (3.20)$$

$\alpha$  est la multiplicité géométrique généralisée. Si  $\alpha = 1$ ,  $\lambda$  est appelé une valeur propre généralisée simple de type fini.

Dans la suite, pour une valeur spectrale isolée de type fini, nous allons démontrer que la Propriété  $L$  est également obtenue sous les conditions  $(H1)$  et  $(H2)$ . Pour commencer nous aurons besoin des lemmes suivants.

**Lemme 3.3.1** *Soient  $P_1$  et  $P_2$  deux projections de rang fini dans  $\text{BL}(\mathcal{X})$ . Si*

$$\|(P_1 - P_2)P_1\| < 1, \quad (3.21)$$

*alors  $\dim P_1\mathcal{X} \leq \dim P_2\mathcal{X}$ .*

**Démonstration** Considérons l'opérateur  $Q : P_1\mathcal{X} \rightarrow P_2\mathcal{X}$  défini par  $Qx = P_2x$ , pour  $x \in P_1\mathcal{X}$ . Alors, il nous suffit de montrer que  $Q$  est injectif. Soit  $x \in P_1\mathcal{X}$

$$Qx = P_2P_1x = P_1x - (P_1 - P_2)P_1x = x - (P_1 - P_2)P_1x. \quad (3.22)$$

Donc, si  $Qx = 0$  et  $x \neq 0$  nous avons

$$\|x\| = \|(P_1 - P_2)P_1x\| \leq \|(P_2 - P_1)P_1\| \|x\| < \|x\|. \quad (3.23)$$

Ce qui représente une contradiction.

□

**Lemme 3.3.2** *Pour tout  $k \in \mathbb{N}$  assez grand et pour  $z \in \text{re}(T, S) \cap \text{re}(T_k, S_k)$ .*

*Sous les conditions (H1) et (H2), nous obtenons,*

- (1)  $(T_k - zS_k)^{-1} - (T - zS)^{-1} \xrightarrow{p} 0$ ,
- (2)  $[((T_k - zS_k)^{-1} - (T - zS)^{-1})S]^2 \xrightarrow{n} 0$ ,
- (3)  $[(T_k - zS_k)^{-1}S_k - (T - zS)^{-1}S]^2 \xrightarrow{n} 0$ .

**Démonstration** L'assertion (1) résulte de l'égalité, en effet

$$(T_k - zS_k)^{-1} - (T - zS)^{-1} = (T_k - zS_k)^{-1}[(T - T_k) - z(S - S_k)](T - zS)^{-1}. \quad (3.24)$$

Pour l'assertion (2), si nous prenons  $\tilde{E}_k = (T - T_k)(T - zS)^{-1}$  et  $\tilde{F}_k = (S - S_k)(T - zS)^{-1}$ , alors

$$\begin{aligned} (T - zS)^{-1}S - (T_k - zS_k)^{-1}S &= [(T_k - zS_k)^{-1} - (T - zS)^{-1}](\tilde{E}_k - z\tilde{F}_k)S \\ &\quad + (T - zS)^{-1}(\tilde{E}_k - z\tilde{F}_k)S. \end{aligned}$$

D'après le lemme [3.2.1](#), nous obtenons le résultat souhaité.

L'assertion (3) résulte de ce qui suit,

$$\begin{aligned}
(T_k - zS_k)^{-1}S_k - (T - zS)^{-1}S &= [(T_k - zS_k)^{-1} - (T - zS)^{-1}](S_k - S) \\
&\quad + [(T_k - zS_k)^{-1} - (T - zS)^{-1}]S \\
&\quad + (T - zS)^{-1}(S_k - S) \\
&= G_k + H_k + M_k.
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après le lemme [3.2.1](#),  $H_k^2, M_k^2, H_kM_k$  et  $M_kH_k$  tendent vers zero.

□

**Théorème 3.3.1** *Si  $\lambda$  est une valeur propre généralisée de type fini isolée dans  $\text{sp}(T, S)$ . Sous les conditions (H1) et (H2), il existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $k \geq k_0$*

$$\dim P\mathcal{X} = \dim P_k\mathcal{X}, \quad (3.25)$$

où

$$P = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (T - zS)^{-1}S dz, \quad (3.26)$$

et

$$P_k = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (T_k - zS_k)^{-1}S_k dz. \quad (3.27)$$

**Démonstration** Soit  $z \in \Gamma$ , où  $\Gamma$  c'est le contour de Cauchy qui sépare  $\lambda$  de  $\text{sp}(T, S)$ . D'après la proposition [3.2.1](#) et l'inégalité [\(3.17\)](#), nous avons  $(T_k - zS_k)^{-1} \in \text{BL}(\mathcal{X})$  où ceci est uniformément borné pour  $k \in \mathbb{N}$  et pour  $z \in \Gamma$ , par conséquent, l'opérateur  $P_k$  est bien défini.

D'après le théorème [2.3.2](#), il existe  $z_0 \in \text{re}(T, S)$  et  $c > 0$  tels que

$$\|(P_k - P)^2\| \leq c \|[ (T_k - z_0S_k)^{-1}S_k - (T - z_0S)^{-1}S ]^2\|. \quad (3.28)$$

D'après le lemme [3.3.2](#), nous obtenons

$$(P_k - P)^2 \xrightarrow{n} 0. \quad (3.29)$$

De plus, pour tout  $x \in \mathcal{X}$  (voir le lemme [3.3.2](#)),

$$(T_k - zS_k)^{-1}S_k x \xrightarrow{p} (T - zS)^{-1}Sx. \quad (3.30)$$

Pour cela,  $P_k \xrightarrow{p} P$ . De autre part, nous avons  $\dim P \mathcal{X} < \infty$ , donc

$$(P_k - P)P \xrightarrow{n} 0. \quad (3.31)$$

Finalement, d'après le lemme [3.3.1](#), nous avons  $\dim P \mathcal{X} = \dim P_k \mathcal{X}$ .

□

**Théorème 3.3.2** *Soit  $\lambda \in \text{sp}(T, S)$  une valeur propre généralisée isolée de type fini. Sous les conditions (H1) et (H2), il existe une suite  $\lambda_k \in \text{sp}(T_k, S_k)$  telle que  $\lambda_k \rightarrow \lambda$ .*

**Démonstration** Soit  $\Gamma$  un contour de Cauchy qui sépare  $\lambda$  de  $\text{sp}(T, S)$ .

Nous mettons,

$$\lambda_k = \text{int}(\Gamma) \cap \text{sp}(T_k, S_k). \quad (3.32)$$

Comme,  $\text{re}(T, S) \ni z \mapsto (T - zS)^{-1}S$  et  $\text{re}(T_k, S_k) \ni z \mapsto (T_k - zS_k)^{-1}S_k$  sont des fonctions analytiques (voir théorème [2.3.2](#)), et que  $P_k \xrightarrow{p} P$ , il s'ensuit que,

$$\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\} = \emptyset \iff \text{int}(\Gamma) \cap \text{sp}(T, S) = \emptyset. \quad (3.33)$$

Fixons maintenant  $\epsilon > 0$  tel que la suite  $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est dans l'ensemble

$$E := \{z \in \mathbb{C} : |z - \lambda| \leq \epsilon\}. \quad (3.34)$$

Pour prouver  $\lambda_k \rightarrow \lambda$ , il suffit de montrer que toute sous-suite convergente de  $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\lambda$ . En effet, soit  $(\lambda_{k'})_{k' \in \mathbb{N}}$  une sous-suite qui converge vers  $\tilde{\lambda} \neq \lambda$ . D'après la Propriété  $U$  (voir théorème 3.2.1),  $\tilde{\lambda} \in \text{sp}(T, S)$ , mais  $\tilde{\lambda} \in E$  et  $\text{sp}(T, S) \cap E := \{\lambda\}$ , donc  $\lambda = \tilde{\lambda}$ , et par suite  $\lambda_k \rightarrow \lambda$ .

□

Le résultat suivant montre que le vecteur propre généralisé associé à  $\lambda_k$  converge vers le vecteur propre généralisé associé à  $\lambda$ . Pour achever ce résultat, nous définissons la notion d'écart entre deux sous-espaces fermés  $Z$  et  $Y$  de  $\mathcal{X}$  (voir [24]) par,

$$\text{gap}(Z, Y) = \max\{\gamma(Z, Y), \gamma(Y, Z)\}, \quad (3.35)$$

où

$$\gamma(Z, Y) = \sup\{\text{dist}(z, Y) : z \in Z, \|z\| = 1\}. \quad (3.36)$$

**Théorème 3.3.3** *Soient  $M = P\mathcal{X}$  et  $M_k = P_k\mathcal{X}$ , où  $k \in \mathbb{N}$ . Nous avons*

$$\text{gap}(M, M_k) \rightarrow 0. \quad (3.37)$$

**Démonstration** Soit  $u \in M = P\mathcal{X}$  tel que  $\|u\| = 1$ . Pour  $k \in \mathbb{N}$  assez grand, nous avons

$$\text{dist}(u, M_k) \leq \|u - P_k u\| = \|(P - P_k)Pu\| \leq \|(P - P_k)P\|. \quad (3.38)$$

Soit maintenant  $u \in M = P_k \mathcal{X}$  tel que  $\|u\| = 1$ , où  $k \in \mathbb{N}$  est assez grand,

$$\text{dist}(u, M) \leq \|u - Pu\| = \|(P_k - P)P_k u\| \leq \|(P - P_k)P_k\|, \quad (3.39)$$

ce qui implique que

$$\text{gap}(M, M_k) \leq \|(P_k - P)P\| + \|(P_k - P)P_k\|. \quad (3.40)$$

Alors, d'après les résultats partiels montrés dans les expressions (3.29) et (3.31), nous obtenons le résultat souhaité.

□

### 3.4 Commentaires

Dans ce chapitre, nous avons étudié la Propriété  $U$  et la Propriété  $L$  sous les conditions (H1) et (H2). Sous une démarche similaire, nous pouvons également démontrer que les mêmes résultats sont obtenus si les conditions (H1) et (H4) (respectivement (H3) et (H2)) sont satisfaites.

Les résultats fournis dans ce chapitre sont issues de trois travaux [27], [25] et [28].

Mentionnons que nous avons envisagé ces résultats, Propriété  $U$  et Propriété  $L$ , sous différentes conditions dans des différents travaux. Nous citons par exemple, [26] :

(H'1)  $S$  un opérateur compact dans  $BL(\mathcal{X})$ ,

(H'2)  $\|(T_k - T)x\| \rightarrow 0, \|(S_k - S)x\| \rightarrow 0$  pour tout  $x \in \mathcal{X}$ ,

(H'3)  $\|(T_k - T)T\| \rightarrow 0$ ,

$$(\mathbf{H}'4) \quad \|(S_k - S)T\| \rightarrow 0.$$

Nous terminons les commentaires à propos de ce chapitre par rappeler que notre raison d'envisager seulement la convergence en norme, et le collectivement compact convergence est que ces conditions sont suffisamment générales pour englober une grande variété des méthodes d'approximation numérique, en plus elles sont assez simples pour être construites dans la pratique.

---

CHAPITRE 4

---

# PSEUDO-SPECTRE GÉNÉRALISÉ

---

## 4.1 Introduction

Soit  $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$  un espace de Hilbert. Considérons deux opérateurs  $T, S \in \text{BL}(\mathcal{H})$ . Rappelons que le problème spectral généralisé est défini comme suit ; Trouver le couple  $(\lambda, u) \in \mathbb{C} \times \mathcal{H}$  tels que

$$Tu = \lambda Su. \quad (4.1)$$

Ainsi, l'ensemble résolvant généralisé est défini par,

$$\text{re}(T, S) = \{z \in \mathbb{C} : (T - zS)^{-1} \in \text{BL}(H)\}, \quad (4.2)$$

et le spectre généralisé s'écrit,

$$\text{sp}(T, S) = \mathbb{C} \setminus \text{re}(T, S), \quad (4.3)$$

ensuite le spectre ponctuel généralisé est donné par

$$\text{sp}_p(T, S) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists u \in \mathcal{H} \setminus \{0\}, Tu = \lambda Su\}. \quad (4.4)$$

Nous disons que le couple  $(T, S)$  est régulier, si  $\text{re}(T, S) \neq \emptyset$ . Dans la suite, nous supposons que le couple  $(T, S)$  est régulier.

Pour un opérateur non borné  $A$  défini sur  $\mathcal{H}$  et pour  $\varepsilon > 0$  donné, le pseudo-spectre de  $A$  est l'ensemble  $\sigma_\varepsilon(A)$  de  $\mathbb{C}$  (voir [39], [16]) défini par,

$$\sigma_\varepsilon(A) = \{z \in \mathbb{C} : \|(A - zI)^{-1}\| > \varepsilon^{-1}\}, \quad (4.5)$$

avec la convention que  $\|(A - zI)^{-1}\| = \infty$  quand  $z$  est dans le spectre de  $A$ , i.e.  $z \in \text{sp}(A)$ .

Si  $A$  est un opérateur fermé, à domaine dense dans  $\mathcal{H}$ , le résultat de Roch-Silbermann (voir [36]) montre que

$$\sigma_\varepsilon(A) = \bigcup_{D \in \text{BL}(\mathcal{H}), \|D\| < \varepsilon} \text{sp}(A + D). \quad (4.6)$$

Il est bien connu que si  $A$  est un opérateur normal, alors le pseudo-spectre de  $A$  est égal au  $\varepsilon$ -voisinage de son spectre  $\text{sp}(A)$  (voir [39], chapitre I), où le  $\varepsilon$ -voisinage d'une partie  $M$  de  $\mathbb{C}$ , est défini par,

$$N_\varepsilon(M) = \{s + z : s \in M, |z| < \varepsilon\}. \quad (4.7)$$

Dans ce chapitre, nous allons introduire une nouvelle définition du pseudo-spectre généralisé associée aux opérateurs  $(T, S)$ . Ensuite, nous démontrons comment relier ce nouveau concept pour donner une définition équivalente au pseudo-spectre d'un opérateur non borné défini sur  $\mathcal{H}$ .

## 4.2 Pseudo-spectre généralisé

Soient  $T, S \in \text{BL}(\mathcal{H})$ , nous introduisons notre définition du pseudo-spectre généralisé associées au couple  $(T, S)$  (voir [29]), comme suit,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \Lambda_\varepsilon(T, S) = \{z \in \mathbb{C} : \|(T - zS)^{-1}S\| > \varepsilon^{-1}\} \bigcup \text{sp}(T, S). \quad (4.8)$$

Notre définition doit être comparée à celle introduite dans [40] et dans [?], comme suit,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \Sigma_\varepsilon(T, S) = \{z \in \mathbb{C} : \|(T - zS)^{-1}\| > \varepsilon^{-1}\} \bigcup \text{sp}(T, S). \quad (4.9)$$

Ainsi, il est clair que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \Lambda_\varepsilon(T, S) \subset \Sigma_{\frac{\varepsilon}{\|S\|}}(T, S). \quad (4.10)$$

En outre, nous allons montrer que l'ensemble  $\Sigma_{\frac{\varepsilon}{\|S\|}}(T, S)$  est plus large que  $\Lambda_\varepsilon(T, S)$ , même quand  $\|S\| = 1$ , (voir l'exemple ci-dessous).

En principe si  $T$  et  $S$  sont multipliés par un opérateur inversible  $C$  de  $\text{BL}(\mathcal{H})$ , alors le pseudo-spectre généralisé ne devrait pas changer. C'est-à-dire, le pseudo-spectre généralisé doit être un ensemble invariant sous l'opération de multiplication par un opérateur inversible. Cette propriété est bien établie par notre définition, contrairement aux autres définitions,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \Lambda_\varepsilon(CT, CS) = \Lambda_\varepsilon(T, S). \quad (4.11)$$

Notons que si  $S$  est égal à l'opérateur identité  $I$ , nous avons le cas standard

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \Lambda_\varepsilon(T, I) = \sigma_\varepsilon(T), \quad (4.12)$$

et quand  $S$  est un opérateur inversible dans  $\text{BL}(\mathcal{H})$ , la relation

$$\text{sp}(T, S) = \text{sp}(S^{-1}T), \quad (4.13)$$

est obtenue. Ainsi, si nous cherchons une relation similaire entre  $\Lambda_\varepsilon(T, S)$  et  $\sigma_\varepsilon(S^{-1}T)$ , nous trouvons facilement l'égalité,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \Lambda_\varepsilon(T, S) = \sigma_\varepsilon(S^{-1}T). \quad (4.14)$$

Une autre propriété importante est que les ensembles  $\Lambda_\varepsilon(T, S)$  sont des ensembles emboîtés, i.e.

$$\Lambda_\varepsilon(T, S) \subset \Lambda_{\varepsilon'}(T, S) \text{ quand } 0 < \varepsilon \leq \varepsilon', \quad (4.15)$$

et

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} \Lambda_\varepsilon(T, S) = \text{sp}(T, S). \quad (4.16)$$

Le prochain théorème explique tous les points envisagés dans (4.11)-(4.14).

**Théorème 4.2.1** *Soient  $T, S$  et  $C$  trois opérateurs dans  $\text{BL}(\mathcal{H})$ , tel que  $C$  est inversible, nous avons alors*

1. *Pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\Lambda_\varepsilon(T, S) = \Lambda_\varepsilon(CT, CS)$ .*
2. *Si  $S$  est inversible,  $\Lambda_\varepsilon(T, S) = \sigma_\varepsilon(S^{-1}T)$ .*
3. *En particulier, si  $S = I$  alors  $\Lambda_\varepsilon(T, I) = \sigma_\varepsilon(T)$ .*

**Démonstration** Soit  $z \in \text{re}(T, S)$ , commençons par démontrer le point (1), nous avons

$$(T - zS)^{-1}C^{-1} = (CT - zCS)^{-1}, \quad (4.17)$$

alors,  $\text{sp}(T, S) = \text{sp}(CT, CS)$ , de plus, il est clair que

$$\|(CT - CS)^{-1}CS\| = \|(T - zS)^{-1}S\|. \quad (4.18)$$

Pour le point (2), si  $S$  est inversible, nous avons

$$(T - zS)^{-1}S = (S^{-1}T - zI)^{-1}, \quad (4.19)$$

ce qui implique le résultat souhaité.

□

Soit  $T \in \text{BL}(\mathcal{H})$ , nous notons que  $\rho(T)$  désigne le rayon spectral associé à  $T$ . Nous rappelons aussi que pour  $z \in \text{sp}(T)$ , nous avons la relation,

$$\rho((T - zI)^{-1}) = \frac{1}{\text{dist}(z, \text{sp}(T))} \quad (4.20)$$

Le théorème suivant est l'un des principaux résultats de ce chapitre.

**Théorème 4.2.2** Soient  $T, S \in \text{BL}(\mathcal{H})$ , nous avons

$$\rho(R(T, S, z)S) = \frac{1}{\text{dist}(z, \text{sp}(T, S))}. \quad (4.21)$$

pour  $z \in \text{re}(T, S)$ .

**Démonstration** Soit  $z \in \text{re}(T, S)$ . Supposons que  $T$  et  $S$  ne sont pas inversibles, alors nous pouvons voir que  $z_0 = 0 \in \text{sp}(R(T, S, z)S)$ , sinon  $S$  est un opérateur inversible.

Pour tout  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , nous avons

$$R(T, S, z)S - z_0 I = -z_0 R(T, S, z) \left[ T - \left( z + \frac{1}{z_0} \right) S \right], \quad (4.22)$$

alors,  $z_0 \in \text{re}(R(T, S, z)S)$  si et seulement si  $z + \frac{1}{z_0} \in \text{re}(T, S)$ . Ainsi, pour tout  $z \in \text{re}(T, S)$ ,

$$\lambda \in \text{sp}(T, S) \setminus \{0\} \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda - z} \in \text{sp}(R(T, S, z)S) \setminus \{0\}. \quad (4.23)$$

De plus,  $-\frac{1}{z} \in \text{sp}(R(T, S, z)S)$ ; sinon nous pouvons voir que

$$R(T, S, z)S + \frac{1}{z} I = \frac{1}{z} R(T, S, z)T, \quad (4.24)$$

alors nous trouvons  $R(T, S, z)T$  est inversible, ce qui contredit le fait que  $T$  n'est pas inversible.

Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned} \rho(R(T, S, z)S) &= \sup \left\{ \frac{1}{|\lambda - z|} : \lambda \in \text{sp}(T, S) \right\} \\ &= \frac{1}{\text{dist}(z, \text{sp}(T, S))}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

D'autre part, si  $S$  est inversible, nous pouvons voir que

$$\text{sp}(S^{-1}T) = \text{sp}(T, S), \quad (4.26)$$

et

$$R(T, S, z)S = (S^{-1}T - zI)^{-1}, \quad (4.27)$$

donc,

$$\begin{aligned} \rho(R(T, S, z)S) &= \rho((S^{-1}T - zI)^{-1}) \\ &= \frac{1}{\text{dist}(z, \text{sp}(S^{-1}T))} \\ &= \frac{1}{\text{dist}(z, \text{sp}(T, S))}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Avant de traiter le cas où  $T$  est inversible et  $S$  n'est pas inversible, nous mentionnons que  $\text{sp}(T, S) \neq \emptyset$ .

Nous commençons par voir que  $0 \in \text{sp}(R(T, S, z)S)$ , alors d'après l'expression (4.22), nous avons

$$\text{sp}(R(T, S, z)S) = \left\{ 0, \frac{1}{\lambda - z} : \lambda \in \text{sp}(T, S) \right\}. \quad (4.29)$$

Or,  $0 \in \text{re}(T, S)$  et  $\frac{-1}{z} \in \text{re}(R(T, S, z)S)$ , (voir expression (4.24)).

Par conséquent, il suffit de montrer que  $\text{sp}(R(T, S, z)S)$  n'est pas égal au singleton zéro. Pour cela nous supposons que  $\text{sp}(R(T, S, z)S) = \{0\}$ , alors pour tout  $w \in \mathbb{C} \setminus \{z\}$ ; si nous mettons  $z_0 = \frac{1}{w - z}$ , alors  $z_0 \in \text{re}(R(T, S, z)S)$ , donc d'après l'expression (4.22) nous avons  $w \in \text{re}(T, S)$ , donc  $\text{re}(T, S) = \mathbb{C}$ , ce qui contredit le fait que  $\text{sp}(T, S) \neq \emptyset$ .

□

**Corollaire 4.2.1** Soient  $T, S \in \text{BL}(\mathcal{H})$ . Pour  $z \in \text{re}(T, S)$ , nous avons

$$\text{re}(R(T, S, z)S) = \text{re}(SR(T, S, z)), \quad (4.30)$$

et que

$$\rho(SR(T, S, z)) = \frac{1}{\text{dist}(z, \text{sp}(T, S))}. \quad (4.31)$$

**Démonstration** Pour tout  $z \in \text{re}(T, S)$ , et pour  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,

$$SR(T, S, z) - z_0 I = -z_0 \left[ T - \left( z + \frac{1}{z_0} \right) S \right] R(T, S, z), \quad (4.32)$$

en utilisant cette égalité et l'égalité (4.22), nous avons :

$$\text{re}(R(T, S, z)S) = \text{re}(SR(T, S, z)), \quad (4.33)$$

d'où le résultat souhaité.

□

**Définition 4.2.1** Pour tout  $T, S \in \text{BL}(\mathcal{H})$ , nous disons que le couple  $(T, S)$  est normal si

$$\begin{cases} (H1) : TT^* = T^*T, & S^*S = SS^*. \\ (H2) : & T^*S = ST^*. \end{cases} \quad (4.34)$$

Notons que la condition (H2) est équivalente à :

$$TS^* = S^*T. \quad (4.35)$$

Dans la suite, nous allons démontrer que  $\Lambda_\varepsilon(T, S)$  est égal au  $\varepsilon$ -voisinage de  $\text{sp}(T, S)$  si le couple  $(T, S)$  est normal, i.e.

$$\Lambda_\varepsilon(T, S) = N_\varepsilon(\text{sp}(T, S)). \quad (4.36)$$

Mais, premièrement nous aurons besoin du lemme suivant.

**Lemme 4.2.1** *Pour  $z \in \text{re}(T, S)$ , sous (H1) et (H2), nous avons  $R(T, S, z)$  est un opérateur normal, et*

$$S^*R(T, S, z) = R(T, S, z)S^*, \quad SR(T, S, z)^* = R(T, S, z)^*S. \quad (4.37)$$

**Démonstration** Pour  $z \in \text{re}(T, S)$ , sous les hypothèses ci-dessus, nous pouvons voir

$$(T - zS)(T - zS)^* = (T - zS)^*(T - zS), \quad (4.38)$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} R(T, S, z)R(T, S, z)^* &= [(T - zS)^*(T - zS)]^{-1} \\ &= [(T - zS)(T - zS)^*]^{-1} \\ &= R(T, S, z)^*R(T, S, z). \end{aligned} \quad (4.39)$$

D'autre part, nous pouvons voir que,

$$S^*(T - zS) = (T - zS)S^*, \quad (4.40)$$

et

$$S(T - zS)^* = (T - zS)^*S. \quad (4.41)$$

Alors, en appliquant l'opérateur  $R(T, S, z)$  et  $R(T, S, z)^*$  respectivement aux dernières équations (4.40) et (4.41), nous obtenons les résultats souhaités.

□

**Théorème 4.2.3** *Sous les hypothèses (H1) et (H2),*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \Lambda_\epsilon(T, S) = N_\epsilon(\text{sp}(T, S)). \quad (4.42)$$

**Démonstration** Pour  $z \in \text{re}(T, S)$ , d'après le lemme [4.2.1](#), nous avons

$$\begin{aligned}
 R(T, S, z)S [R(T, S, z)S]^* &= R(T, S, z)S S^* R(T, S, z)^* \\
 &= R(T, S, z)S^* S R(T, S, z)^* \\
 &= S^* R(T, S, z) R(T, S, z)^* S \\
 &= S^* R(T, S, z)^* R(T, S, z)S \\
 &= [R(T, S, z)S]^* R(T, S, z)S, \quad (4.43)
 \end{aligned}$$

ce qui implique que  $R(T, S, z)S$  est un opérateur normal. Ensuite, d'après le théorème [4.2.2](#), nous avons

$$\|(T - zS)^{-1}S\| = \rho(R(T, S, z)S) = \frac{1}{\text{dist}(z, \text{sp}(T, S))}, \quad (4.44)$$

d'où le résultat souhaité.

□

Avant de discuter d'autres propriétés, nous présentons l'exemple suivant.

Considérons les matrices

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{C}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.45)$$

D'après un calcul élémentaire, nous pouvons voir que

$$\forall \epsilon > 0, \quad \Lambda_\epsilon(T, S) = N_\epsilon(\text{sp}(T, S)) = B(0, \epsilon), \quad (4.46)$$

où  $B(0, \epsilon)$  est la boule de center 0 et de rayon  $\epsilon$ .

D'autre part, nous avons seulement  $\|(T - zS)^{-1}\| = \max \left\{ \frac{1}{|\alpha|}, \frac{1}{|z|} \right\}$ .

**Proposition 4.2.1** *Sous (H1) et (H2), pour tout  $z \in \text{re}(T, S)$  et pour  $u \in \mathcal{H}$ , nous avons*

$$\text{dist}(z, \text{sp}(T, S)) \|Su\| \leq \|(T - zS)u\|. \quad (4.47)$$

**Démonstration** Soient  $z \in \text{re}(T, S)$  et  $u \in \mathcal{H}$ . Nous pouvons montrer que  $SR(T, S, z)$  est un opérateur normal sous (H1) et (H2) en suivant les mêmes techniques que le lemme 4.2.1 et le théorème 4.2.3. Alors

$$\begin{aligned} \|Su\| &= \|SR(T, S, z)(T - zS)u\| \\ &\leq \|SR(T, S, z)\| \|(T - zS)u\| \\ &= \rho(SR(T, S, z)) \|(T - zS)u\| \\ &= \rho(R(T, S, z)S) \|(T - zS)u\| \\ &= \frac{1}{\text{dist}(z, \text{sp}(T, S))} \|(T - zS)u\|. \end{aligned}$$

□

Maintenant, nous utilisons la dernière proposition pour définir le quasi-mod  $\lambda^{app} \in \mathbb{C}$ . Soit  $u^{app} \in \mathcal{H} \setminus \text{Ker}(S)$  telle que

$$\|(T - \lambda^{app}S)u^{app}\| \leq \varepsilon \|u^{app}\|, \quad (4.48)$$

où  $\varepsilon = \varepsilon(h) \rightarrow 0$ . Alors, l'inégalité (4.47) assure l'existence d'un certain élément  $\lambda \in \text{sp}(T, S)$  situé à une distance inférieure à  $\varepsilon$  de la valeur approximative  $\lambda^{app}$ .

Notons que dans les applications, nous avons généralement  $\text{Ker}(S) = \{0\}$  (voir la section suivante).

### 4.3 Pseudo-spectre généralisé et pseudo-spectre pour opérateur non borné

Dans cette section, nous allons donner une autre définition du pseudo-spectre pour un opérateur non borné  $A$  défini sur  $\mathcal{H}$ .

Nous commençons notre étude avec une catégorie d'opérateurs donnée par la relation,

$$A = S^{-1}T, \quad (4.49)$$

où  $S, T \in \text{BL}(\mathcal{H})$  et que  $S^{-1}$  un est opérateur non borné, à domaine  $D(S^{-1}) \subset \mathcal{H}$ .

Supposons que

$$(H') : \begin{cases} D(A) \text{ dense dans } H, \\ D(A) = D(A^*), \\ D(A) \subset D(S^{-1}) \subset D((S^{-1})^*). \end{cases}$$

**Théorème 4.3.1** *Si  $A = S^{-1}T$  et  $(H')$  est obtenue, alors nous avons*

$$\Lambda_\varepsilon(T, S) = \sigma_\varepsilon(A). \quad (4.50)$$

Avant de donner la démonstration du théorème précédent, nous avons besoin des lemmes suivants.

**Lemme 4.3.1** *Sous  $(H')$ , nous avons,*

$$\text{sp}_p(A) = \text{sp}_p(T, S). \quad (4.51)$$

**Démonstration** Soit  $\lambda \in \text{sp}_p(A)$ , alors il existe  $u \in D(A) \setminus \{0\}$  tel que

$$Au = \lambda u. \quad (4.52)$$

En appliquant  $S$ , nous trouvons que  $Tu = \lambda Su$ , cela prouve que  $\lambda \in \text{sp}_p(T, S)$ .

Inversement, soit  $\lambda \in \text{sp}_p(T, S)$ , alors il existe  $u \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$  tel que

$$Tu = \lambda Su. \quad (4.53)$$

En appliquant  $S^{-1}$ , nous trouvons que  $Au = \lambda u$ , d'où,  $\lambda \in \text{sp}_p(A)$ .

□

**Lemme 4.3.2** *Sous  $(H')$ , nous avons,*

$$\text{sp}(A) = \text{sp}(T, S). \quad (4.54)$$

**Démonstration** Soit  $\lambda \in \text{re}(T, S)$ , i.e.  $(T - \lambda S)^{-1} \in \text{BL}(\mathcal{H})$ . Comme

$$A - \lambda I = S^{-1}(T - \lambda S), \quad (4.55)$$

alors  $(A - \lambda I)^{-1} = (T - \lambda S)^{-1}S$ , d'où  $\lambda \in \text{re}(A)$  et  $\text{sp}(A) \subseteq \text{sp}(T, S)$ .

Inversement, soit  $\lambda \in \text{re}(A)$ , en utilisant le dernier lemme [4.3.1](#),  $\lambda$  ne peut pas être une valeur propre généralisée de  $(T, S)$ , i.e.  $\lambda \notin \text{sp}_p(T, S)$ , alors

$(T - \lambda S)$  est injective. Donc il reste à démontrer que  $T - \lambda S$  est surjectif.

Comme  $D(S^{-1})$  est dense dans  $\mathcal{H}$ , alors pour tout  $f \in \mathcal{H}$ , il existe une suite

$\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D(S^{-1})$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\| = 0. \quad (4.56)$$

Or,  $S^{-1}f_n \in \mathcal{H}$  et que  $A - \lambda I$  est inversible, alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $u_n \in D(A)$  tel que

$$(A - \lambda I)u_n = S^{-1}f_n. \quad (4.57)$$

En appliquant  $S$  à cette équation, nous obtenons

$$(T - \lambda S)u_n = f_n. \quad (4.58)$$

Pour tout  $n, m \in N$  et pour  $w \in D(A)$ ,

$$\begin{aligned} \langle u_n - u_m, w \rangle &= \langle (A - \lambda I)^{-1} S^{-1}(f_n - f_m), w \rangle \\ &= \langle f_n - f_m, [(A - \lambda I)^{-1} S^{-1}]^* w \rangle. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Cependant d'après  $(H')$ ,

$$\langle f_n - f_m, (S^{-1})^*(A^* - \bar{\lambda}I)^{-1}w \rangle \rightarrow 0, \text{ pour } n, m \rightarrow +\infty. \quad (4.60)$$

Alors, en mettant  $w = u_n - u_m$ , nous obtenons

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|u_n - u_m\| = 0. \quad (4.61)$$

Ainsi, il existe  $u \in \mathcal{H}$  tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u. \quad (4.62)$$

Mais comme  $(T - \lambda S)$  est un opérateur borné, alors pour tout  $f \in \mathcal{H}$ , il existe  $u \in \mathcal{H}$  tel que

$$(T - \lambda S)u = f. \quad (4.63)$$

Ce qui montre que  $\text{sp}(T, S) \subseteq \text{sp}(A)$ .

□

La prochaine preuve est pour le théorème [4.3.1](#).

**Démonstration** [4.3.1](#) Soit  $z \in \text{re}(T, S)$ , d'après le lemme [4.3.2](#) et le fait que

$$\|(A - zI)^{-1}\| = \|(T - zS)^{-1}S\|, \quad (4.64)$$

nous avons, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\sigma_\varepsilon(A) = \Lambda_\varepsilon(T, S)$ .

□

Notons que, si  $A = S^{-1}T$  est un opérateur normal, nous avons

$$\Lambda_\varepsilon(T, S) = N_\varepsilon(\text{sp}(A)) = N_\varepsilon(\text{sp}(T, S)). \quad (4.65)$$

Considérons maintenant un opérateur non borné  $A$  de domaine  $D(A) \subset \mathcal{H}$ . Dans le chapitre I, nous avons montré que tout opérateur non borné admet une décomposition en deux opérateurs bornés  $(T, S)$  qui l'expriment dans la théorie du spectre généralisé. Le prochain résultat détermine la relation entre le pseudo-spectre d'un opérateur non borné  $A$ , et le pseudo-spectre généralisé associé aux opérateurs  $(T, S)$ .

**Théorème 4.3.2** *Pour  $\varepsilon > 0$ , nous avons*

$$\Lambda_\varepsilon(T, S) = \sigma_\varepsilon(A). \quad (4.66)$$

**Démonstration** D'après  $\text{re}(A) = \text{re}(T, S)$  où  $S = (A - \alpha I)^{-1}$  et  $T = A(A - \alpha I)^{-1}$ , nous obtenons

$$\forall z \in \text{re}(T, S), \quad \|(A - zI)^{-1}\| = \|(T - zS)^{-1}S\|. \quad (4.67)$$

□

Le résultat donné dans le théorème [4.3.2](#) est très important, il permet de traiter et de calculer le pseudo-spectre d'un opérateur non borné à partir du concept de pseudo-spectre généralisé associé aux opérateurs bornés.

---

CHAPITRE 5

---

APPLICATION SUR L'OPÉRATEUR  
DE SCHRÖDINGER

---

## 5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons appliquer la méthode spectrale généralisée à l'opérateur de Schrödinger. Cet opérateur est désigné par  $B^\vartheta$ , où il est défini sur  $L^2(0, +\infty)$  avec une condition aux limite mixte de type Dirichlet-Neumann, donné par les équations différentielles suivantes :

$$-u'' + qu = \lambda u, \quad (5.1)$$

$$\cos \vartheta u(0) - \sin \vartheta u'(0) = 0, \quad (5.2)$$

où  $q$  est une fonction mesurable et  $\vartheta$  est un nombre fixé dans  $[0, \pi)$ .

Mentionnons que la méthode spectrale généralisée peut être généralisé à tout opérateur différentiel défini sur  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  pour  $n \geq 2$ .

Commençons d'abord par décrire la méthode spectrale généralisée dans un cadre général. En premier lieu, nous avons comme résultat la relation suivante,

$$\forall a > 0, \quad \text{sp}(B_a^\vartheta) \subset \text{sp}(B^\vartheta), \quad (5.3)$$

où l'ensemble  $\text{sp}(B^\vartheta)$  est le spectre de  $B^\vartheta$ , tandis que  $B_a^\vartheta$  est l'opérateur de Schrödinger qui a la même formule que  $B^\vartheta$  mais sur l'espace  $L^2(0, a)$ , avec une condition de Dirichlet au point  $a$ . Notons que si  $B^\vartheta$  est un opérateur auto-adjoint, alors en utilisant les mêmes technique que dans [22], nous aurons

$$\text{sp}(B^\vartheta) = \bigcup_{a>0} \text{sp}(B_a^\vartheta). \quad (5.4)$$

En second lieu, nous construisons une approximation numérique de  $B_a^\vartheta$  par la méthode spectrale généralisée. C'est-à-dire, nous allons montrer que

le spectre de l'opérateur non borné  $B_a^\vartheta$  est égal au spectre généralisé d'un couple d'opérateurs bornés  $(T, S)$ , i.e.

$$\text{sp}(B_a^\vartheta) = \text{sp}(T, S). \quad (5.5)$$

Finalement, à partir du spectre généralisé, nous allons construire des suites d'opérateurs  $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , où nous approcherons l'ensemble  $\text{sp}(T, S)$  par l'ensemble  $\text{sp}(T_k, S_k)$ . Cette approximation est fondée sur l'obtention de la Propriété  $U$  et de la Propriété  $L$  qui sont démontrées dans un sens de convergence précis (voir chapitre III).

## 5.2 Pseudo-spectre et spectre de l'opérateur de Schrödinger

Soit  $A$  un opérateur non borné défini sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Pour tout  $\varepsilon$ , nous redéfinissons le pseudo-spectre de  $A$  comme,

$$\text{sp}_\varepsilon(A) = \{z \in \mathbb{C} : \|(zI - A)^{-1}\| > \varepsilon^{-1}\} \cup \text{sp}(A). \quad (5.6)$$

Nous redéfinissons également le  $\varepsilon$ -voisinage de toute partie  $M \subset \mathbb{C}$  (voir [39]) par,

$$N_\varepsilon(M) = \{s + z : s \in M, |z| < \varepsilon\}. \quad (5.7)$$

Rappelons que si  $A$  est un opérateur normal, alors son pseudo-spectre est égal au  $\varepsilon$ -voisinage de son spectre  $\text{sp}(A)$ .

Soit  $q \in L_{loc}^1(0, +\infty)$  une fonction donnée, et soit  $\vartheta$  un nombre fixé dans  $[0, \pi)$ . Désignons par  $B^\vartheta$  l'opérateur sectoriel (voir [24]) défini par l'expres-

sion,

$$B^\vartheta u = -u'' + qu, \quad (5.8)$$

où,

$$D(B^\vartheta) = \{u \in H^2(0, +\infty) : \cos \vartheta u(0) - \sin \vartheta u'(0) = 0\} \cap Y, \quad (5.9)$$

$$Y = \{u \in L^2(0, +\infty) : \int_0^{+\infty} q(x)|u(x)|^2 dx < \infty\}. \quad (5.10)$$

De même, pour tout  $a > 0$ , nous définissons l'opérateur  $B_a^\vartheta$  par,

$$B_a^\vartheta u = -u'' + qu, \quad (5.11)$$

où,

$$D(B_a^\vartheta) = \{u \in H^2(0, a) : \cos \vartheta u(0) - \sin \vartheta u'(0) = 0, u(a) = 0\} \cap Y_a, \quad (5.12)$$

et

$$Y_a = \{u \in L^2(0, a) : \int_0^a q(x)|u(x)|^2 dx < \infty\}. \quad (5.13)$$

Considérons  $C_a$  l'opérateur symétrique défini par,

$$\forall u \in D(C_a) = H_0^2(0, a), \quad C_a u = -u'' + qu. \quad (5.14)$$

Notons que pour  $0 < a \leq a'$ , l'extension de chaque fonction  $u$  de  $D(C_a)$  par zero sur le côté droite de l'intervalle  $]0, a[$ , appartient à  $D(C_{a'})$ . Ainsi, nous avons  $D^0(C_a) \subset D(C_{a'})$ , où  $D^0(C_a)$  est l'ensemble des fonctions de  $D(C_a)$  prolongées par zero à droite.

Notre objectif dans cette section est de déterminer la relation entre le spectre de  $B_a^\vartheta$  et celui de  $B^\vartheta$ . Pour cela, nous commençons par déterminer la relation entre le pseudo-spectre, le spectre de  $B_a^\vartheta$  et  $C_a$ .

**Lemme 5.2.1** *Pour tout  $\epsilon > 0$  et pour  $a > 0$ , nous avons*

$$\text{sp}_\epsilon(C_a) = \text{sp}_\epsilon(B_a^\vartheta). \quad (5.15)$$

**Démonstration** Pour  $\lambda \in \text{sp}_\epsilon(C_a)$ , il existe  $u \in D(C_a)$  tel que

$$\frac{\|C_a u - \lambda u\|_{L^2(0,a)}}{\|u\|_{L^2(0,a)}} < \epsilon. \quad (5.16)$$

Comme  $u \in D(B_a^\vartheta)$ , alors

$$\frac{\|B_a^\vartheta u - \lambda u\|_{L^2(0,a)}}{\|u\|_{L^2(0,a)}} < \epsilon, \quad (5.17)$$

ce qui implique que  $\lambda \in \text{sp}_\epsilon(B_a^\vartheta)$ .

Inversement, soit  $\lambda \in \text{sp}_\epsilon(B_a^\vartheta)$ , alors il existe  $u \in D(B_a^\vartheta)$  et une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $C_c^\infty(0, a)$  tels que, pour tout  $\theta > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  vérifiant,

$$\forall n \geq N, \quad \left| \frac{\|B_a^\vartheta u_n - \lambda u_n\|_{L^2(0,a)}}{\|u_n\|_{L^2(0,a)}} - \frac{\|B_a^\vartheta u - \lambda u\|_{L^2(0,a)}}{\|u\|_{L^2(0,a)}} \right| < \theta. \quad (5.18)$$

Mettons,

$$\theta = \epsilon - \frac{\|B_a^\vartheta u - \lambda u\|_{L^2(0,a)}}{\|u\|_{L^2(0,a)}}. \quad (5.19)$$

Alors, il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que

$$\frac{\|B_a^\vartheta u_{n_0} - \lambda u_{n_0}\|_{L^2(0,a)}}{\|u_{n_0}\|_{L^2(0,a)}} < \epsilon. \quad (5.20)$$

Comme  $u_{n_0} \in D(C_a)$ , alors nous trouvons  $\lambda \in \text{sp}_\epsilon(C_a)$ .

□

**Corollaire 5.2.1** *Si  $0 < a \leq a'$ , alors  $\text{sp}(B_a^\vartheta) \subseteq \text{sp}(B_{a'}^\vartheta)$ .*

**Démonstration** Comme  $D(C_a) \subset D(C_{a'})$ , alors  $\text{sp}_\epsilon(C_a) \subset \text{sp}_\epsilon(C_{a'})$ . Ainsi,

$$\text{sp}(B_a^\vartheta) \subset \text{sp}_\epsilon(B_a^\vartheta) = \text{sp}_\epsilon(C_a) \subset \text{sp}_\epsilon(C_{a'}) = \text{sp}_\epsilon(B_{a'}^\vartheta). \quad (5.21)$$

□

**Théorème 5.2.1** *Pour tout  $\epsilon > 0$ , nous avons*

$$\text{sp}_\epsilon(B^\vartheta) = \bigcup_{a>0} \text{sp}_\epsilon(B_a^\vartheta). \quad (5.22)$$

**Démonstration** Soit  $\lambda \in \bigcup_{a>0} \text{sp}_\epsilon(C_a)$ . Il existe  $a_1 > 0$  et  $u \in D(C_{a_1})$  tels que

$$\frac{\|C_{a_1}u - \lambda u\|_{L^2(0,a_1)}}{\|u\|_{L^2(0,a_1)}} < \epsilon. \quad (5.23)$$

En prolongeant  $u$  par 0 à droit de  $]0, a_1[$ , alors

$$\frac{\|B^\vartheta u - \lambda u\|_{L^2(0,+\infty)}}{\|u\|_{L^2(0,+\infty)}} < \epsilon. \quad (5.24)$$

Ce qui montre que  $\lambda$  appartient à  $\text{sp}_\epsilon(B^\vartheta)$  et  $\bigcup_{a>0} \text{sp}_\epsilon(C_a) \subset \text{sp}_\epsilon(B^\vartheta)$ .

Inversement, soit  $\lambda \in \text{sp}_\epsilon(B^\vartheta)$ , il existe  $u \in D(B^\vartheta)$  tel que

$$\frac{\|B^\vartheta u - \lambda u\|_{L^2(0,+\infty)}}{\|u\|_{L^2(0,+\infty)}} < \epsilon. \quad (5.25)$$

Comme  $C_c^\infty(0, +\infty)$  est dense dans  $D(B^\vartheta)$ . Alors, pour tout  $u \in D(B^\vartheta)$  il existe une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $C_c^\infty(0, +\infty)$  tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|B^\vartheta u_n - \lambda u_n\|_{L^2(0,+\infty)}}{\|u_n\|_{L^2(0,+\infty)}} = \frac{\|B^\vartheta u - \lambda u\|_{L^2(0,+\infty)}}{\|u\|_{L^2(0,+\infty)}}. \quad (5.26)$$

En suivant la même technique que dans la preuve du lemme [5.2.1](#), nous choisissons  $n_0$  tel que

$$\frac{\|B^\vartheta u_{n_0} - \lambda u_{n_0}\|_{L^2(0,+\infty)}}{\|u_{n_0}\|_{L^2(0,+\infty)}} < \epsilon. \quad (5.27)$$

Mais, il existe  $a$  assez grand tel que le support de  $u_{n_0}$  est inclus dans  $]0, a[$ .

Ce qui donne  $\lambda$  appartient à  $\text{sp}_\epsilon(B_a^\vartheta)$ . Ainsi

$$\text{sp}_\epsilon(B^\vartheta) \subset \bigcup_{a>0} \text{sp}_\epsilon(B_a^\vartheta). \quad (5.28)$$

□

**Corollaire 5.2.2** *Si  $B^\vartheta$  est un opérateur auto-adjoint, alors*

$$\text{sp}(B^\vartheta) = \bigcup_{a>0} \text{sp}(B_a^\vartheta). \quad (5.29)$$

**Démonstration** Pour tout  $\epsilon > 0$ ,

$$N_\epsilon(\text{sp}(B^\vartheta)) = N_\epsilon\left(\bigcup_{a>0} \text{sp}(B_a^\vartheta)\right). \quad (5.30)$$

En prenant la limite pour  $\epsilon$  tendant vers 0, nous obtenons le résultat souhaité.

□

### 5.3 Problème spectral généralisé de l'opérateur de Schrödinger

Soit  $q$  une fonction sectorielle appartenant à  $L^2(0, a)$  (voir [24]), i.e.

$$\exists \beta > 0, \quad \forall x \in [0, a], \quad |Im(q(x))| \leq \beta Re(q(x)). \quad (5.31)$$

Pour tout  $u \in D(B_a^\vartheta)$ , nous redéfinissons l'opérateur  $B_a^\vartheta$  par,

$$B_a^\vartheta u = -u'' + qu, \quad (5.32)$$

où,

$$D(B_a^\vartheta) = \{u \in H^2(0, a) : \cos \vartheta u(0) - \sin \vartheta u'(0) = 0, \quad u(a) = 0\} \cap Y_a, \quad (5.33)$$

$$Y_a = \{u \in L^2(0, a) : \int_0^a \operatorname{Re}(q)|u|^2 dx < \infty\}. \quad (5.34)$$

Désignons par  $L^\vartheta$  l'opérateur laplacien, donné par,

$$L^\vartheta u = -u'', \quad (5.35)$$

où  $D(L^\vartheta) = \{u \in H^2(0, a) : \cos \vartheta u(0) - \sin \vartheta u'(0) = 0, \quad u(a) = 0\}$ .

Soit  $G_{0,a}$  la fonction de Green, donnée par,

$$G_{0,a}(x, y) = \begin{cases} \frac{(\cos \vartheta x - \sin \vartheta)(a - y)}{a \cos \vartheta + \sin \vartheta} & \text{for } 0 \leq x \leq y \leq a, \\ \frac{(\cos \vartheta y - \sin \vartheta)(a - x)}{a \cos \vartheta + \sin \vartheta} & \text{for } 0 \leq y \leq x \leq a. \end{cases} \quad (5.36)$$

**Proposition 5.3.1**  $L^\vartheta$  est inversible et son inverse est l'opérateur  $S$  défini sur  $L^2(0, a)$  par,

$$Su(x) = \int_0^a G_{0,a}(x, y)u(y)dy. \quad (5.37)$$

**Démonstration** Il est clair que  $L^\vartheta S = I_{C(0,a)}$ , parce que nous pouvons voir que

$$L^\vartheta G_{0,a}(x, y) = \delta(x - y). \quad (5.38)$$

Alors  $L^\vartheta S$  peut être prolongé à l'identité de  $L^2(0, a)$ .

Inversement, pour avoir  $SL^\vartheta = I_{D(L^\vartheta)}$ , il suffit de montrer que

$$\operatorname{Im}(S) = D(L^\vartheta). \quad (5.39)$$

Soit  $u \in L^2(0, a)$ , nous mettons  $v = Su$ , alors il est clair que  $v(a) = 0$ ,  $\cos \vartheta u(0) - \sin \vartheta u'(0) = 0$  et que pour tout  $w \in C_c^\infty(0, a)$

$$- \langle v, w'' \rangle = \langle Su, -w'' \rangle = \langle LSU, w \rangle = \langle u, w \rangle. \quad (5.40)$$

Alors,  $v \in D(L^\vartheta)$  et  $Lv = u$ , ce qui implique que  $\text{Im}(S) \subset D(L^\vartheta)$ . Maintenant, il est clair que  $L$  est injectif, alors pour tout  $f \in D(L^\vartheta)$ , il existe  $u = Lf$  appartient à  $L^2(0, a)$  tel que

$$LSu = u = Lf \Rightarrow Su = f, \quad (5.41)$$

d'où  $D(L^\vartheta) \subset \text{Im}(S)$ .

□

Soit  $T$  l'opérateur borné défini sur  $L^2(0, a)$  vers lui-même par,

$$Tu(x) = u(x) + \int_0^a G_{0,a}(x, y)q(y)u(y)dy. \quad (5.42)$$

**Lemme 5.3.1**  $\lambda$  est une valeur propre de  $B_a^\vartheta$  et  $u \in D(B_a^\vartheta)$  son vecteur propre associé, si et seulement si,  $\lambda$  est une valeur propre généralisée du couple  $(T, S)$  et  $u$  son vecteur propre généralisé.

**Démonstration** Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $B_a^\vartheta$  et  $u \in D(B_a^\vartheta)$  son vecteur propre associé, alors  $B_a^\vartheta u = \lambda u$ . En appliquant  $S$  à cette dernière équation, nous obtenons

$$S(B_a^\vartheta u) = S(\lambda u) \Rightarrow Tu = \lambda Su. \quad (5.43)$$

Cela prouve que  $\lambda$  est une valeur propre généralisée de  $(T, S)$  avec le vecteur propre généralisé  $u$ .

Inversement, soit  $\lambda$  une valeur propre généralisée de  $(T, S)$  et  $u \in L^2(0, a)$  son vecteur propre généralisé. Alors  $Tu = \lambda Su$ , par conséquent

$$u = \lambda Su - S(qu) \Rightarrow u = S(\lambda u - qu). \quad (5.44)$$

Comme  $u \in D(L^\vartheta)$ , nous avons  $(\lambda u - qu) \in L^2(0, a)$ , ce qui implique que

$$S(qu) = u - \lambda Su \Rightarrow qu = \lambda u - L^\vartheta u, \quad (5.45)$$

et

$$\int_0^a \operatorname{Re}(q)|u|^2 dx \leq \|u\|_{L^2(0,a)} + \|L^\vartheta u\|_{L^2(0,a)}. \quad (5.46)$$

Ainsi,  $u \in D(B_a^\vartheta)$ , en plus

$$Tu = \lambda Su \Rightarrow L^\vartheta(Tu) = L^\vartheta(\lambda Su) \Rightarrow B_a^\vartheta u = \lambda u. \quad (5.47)$$

□

**Théorème 5.3.1**  $\operatorname{sp}(B_a^\vartheta) = \operatorname{sp}(T, S)$ .

**Démonstration** Soit  $\lambda \in \operatorname{re}(T, S)$ , i.e.  $(T - \lambda S)^{-1}$  existé et borné. Comme

$$B_a^\vartheta - \lambda I = L^\vartheta(T - \lambda S), \quad (5.48)$$

alors

$$(B_a^\vartheta - \lambda I)^{-1} = (T - \lambda S)^{-1} S, \quad (5.49)$$

et que

$$\|(B_a^\vartheta - \lambda I)^{-1}\| \leq \|(T - \lambda S)^{-1}\| \|S\| < \infty. \quad (5.50)$$

Ainsi,  $\lambda \in \operatorname{re}(B_a)$  et  $\operatorname{sp}(B_a^\vartheta) \subseteq \operatorname{sp}(T, S)$ .

Inversement, soit  $\lambda \in \operatorname{re}(B_a^\vartheta)$ , en utilisant le dernier lemme,  $\lambda$  ne peut pas être

une valeur propre généralisé de  $(T, S)$ . Ainsi  $(T - \lambda S)$  est injectif. Maintenant, montrons que  $T - \lambda S$  est surjectif. Comme  $D(L^\vartheta)$  est dense dans  $L^2(0, a)$ , pour tout  $f \in L^2(0, a)$ , il existe une suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(L^\vartheta)$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_{L^2(0, a)} = 0. \quad (5.51)$$

Or,  $L^\vartheta f_n \in L^2(0, a)$  et  $B_a^\vartheta - \lambda I$  est inversible, nous avons pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $u_n \in D(B_a^\vartheta)$  telle que

$$(B_a^\vartheta - \lambda I)u_n = L^\vartheta f_n. \quad (5.52)$$

En appliquant  $S$ ,

$$(T - \lambda S)u_n = f_n. \quad (5.53)$$

De plus, pour tout  $n, m \in \mathbb{N}$  et pour  $w \in D(B_a^\vartheta)$ ,

$$\begin{aligned} \langle u_n - u_m, w \rangle &= \langle (B_a^\vartheta - \lambda I)^{-1} L(f_n - f_m), w \rangle \\ &= \langle f_n - f_m, [(B_a^\vartheta - \lambda I)^{-1} L]^* w \rangle. \end{aligned}$$

Comme  $D(B_a^\vartheta) = D((B_a^\vartheta)^*) \subset D(L) = D(L^*)$ , nous obtenons

$$\langle f_n - f_m, L((B_a^\vartheta)^* - \bar{\lambda}I)^{-1} w \rangle \rightarrow 0, \text{ for } n, m \rightarrow +\infty. \quad (5.54)$$

Mettons  $w = u_n - u_m$ , nous avons

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|u_n - u_m\|_{L^2(0, a)} = 0, \quad (5.55)$$

alors il existe  $u \in L^2(0, a)$  tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u. \quad (5.56)$$

Mais comme  $(T - \lambda S)$  est inversible, alors nous avons pour tout  $f \in L^2(0, a)$  il existe  $u \in L^2(0, a)$  tel que

$$(T - \lambda S)u = f. \quad (5.57)$$

Donc,  $\lambda \in \text{re}(T, S)$ , et  $\text{sp}(T, S) \subseteq \text{sp}(B_a^0)$ .

□

Ce dernier théorème est très important car il permet de résoudre le problème de la pollution spectrale. Nous pouvons traiter numériquement le problème spectral généralisé en utilisant des suites d'opérateurs,  $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$  qui convergent dans un sens approprié vers  $T$  et  $S$  respectivement.

## 5.4 Application numérique

Dans cette section, nous fournissons un problème spectral où des résultats numériques sont disponibles par d'autres approches que les nôtres. Ce problème est envisagé dans [33] et dans [5];

Trouver  $(u, \lambda) \in L^2(0, \infty) \times \mathbb{C}$  tels que  $B^0 u = \lambda u$ , i.e.

$$-u'' + x^2 u = \lambda u, \quad u(0) = 0, \quad (5.58)$$

c'est l'oscillateur harmonique tel que ses valeurs propres sont bien connues, qui sont  $4k - 1$  où  $k \in \mathbb{N}$ .

Nous montrerons l'efficacité de la méthode spectrale généralisée appliquée à cet opérateur de Schrödinger. Tout d'abord, d'après le corollaire 5.2.2, nous avons,

$$\text{sp}(B^0) = \bigcup_{a>0} \text{sp}(B_a^0), \quad (5.59)$$

où l'opérateur  $B_a^0$  est défini par,

$$B_a^0 = -u'' + x^2u, \quad u(0) = 0, \quad u(a) = 0. \quad (5.60)$$

Alors, d'après le lemme [5.3.1](#), nous obtenons l'équation spectrale généralisée équivalente,

$$Tu = \lambda Su, \quad (5.61)$$

où

$$Tu(x) = u(x) + \int_0^a G_{0,a}(x, y)y^2u(y)dy, \quad (5.62)$$

$$Su(x) = \int_0^a G_{0,a}(x, y)u(y)dy, \quad (5.63)$$

et

$$G_{0,a}(x, y) = \begin{cases} \frac{x(a-y)}{a} & \text{for } 0 \leq x \leq y \leq a, \\ \frac{y(a-x)}{a} & \text{for } 0 \leq y \leq x \leq a. \end{cases}$$

Il est clair que  $T$  ne commute pas avec  $S$ , cependant nous pouvons voir que

$$B_a = S^{-1}T, \quad (5.64)$$

où  $S^{-1} = L^0$  est l'opérateur Laplacien défini dans la proposition [5.3.1](#) pour  $\vartheta = 0$ . Par conséquent, Si  $\lambda$  est une valeur propre généralisée isolée de type fini du couple  $(T, S)$ , nous avons,

$$\begin{aligned} P &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (T - \mu S)^{-1} S d\mu = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (S^{-1}T - \mu S^{-1}S)^{-1} d\mu = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (B_a^0 - \mu I)^{-1} d\mu = P(B_a^0, \lambda), \end{aligned}$$

où  $P(B_a^0, \lambda)$  est la projection spectrale associée à  $B_a^0$  pour la valeur propre  $\lambda$ .

De plus,  $B_a^0$  est un opérateur auto-adjoint avec une résolvante compacte (voir [24]), alors d'après le lemme [5.3.1], nous obtenons

$$P\mathcal{H} = \text{Ker}(T - \lambda S), \quad (5.65)$$

où  $\mathcal{H} = L^2(0, +\infty)$ .

Trois méthodes numériques seront utilisées pour approcher les opérateurs  $T$  et  $S$  : Nyström, Sloan et Kantorovich.

### 5.4.1 La méthode de Nyström

Nous définissons une subdivision sur  $[0, a]$  de la manière suivante, pour  $n \geq 2$ ,

$$h_n = \frac{a}{n-1}, \quad x_i = (i-1)h_n, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (5.66)$$

Soient  $T_n$  et  $S_n$  des approximations de  $T$  et  $S$  respectivement, construites en utilisant la méthode de Nyström (voir [6]), définies par,

$$T_n u_n(x) = u_n(x) + \sum_{i=1}^n w_i G_{0,a}(x, x_i) x_i^2 u_n(x_i), \quad (5.67)$$

$$S_n u_n(x) = \sum_{i=1}^n w_i G_{0,a}(x, x_i) u_n(x_i), \quad (5.68)$$

où, les  $\{w_i\}_{i=1}^n$  sont des poids réels tels que,

$$\sup_{n \geq 2} \sum_{i=1}^n |w_i| < \infty. \quad (5.69)$$

Le problème spectral matriciel généralisé issu de la décritisation de  $T$  et  $S$  en utilisant la méthode de Nyström est désigné par  $A - \lambda_n B$ , avec

$$A(i, j) = I(i, j) + w_i G_{0,a}(x_j, x_i) x_i^2, \quad B(i, j) = w_i G_{0,a}(x_j, x_i), \quad (5.70)$$

et  $I$  désigne la matrice identité de dimension  $n$ .

Nous utilisons la commande "eig" en Matlab afin de calculer le problème spectral matriciel généralisé associé au couple  $(A, B)$ .

Notons que le collectivement compact convergence est assuré par la méthode de Nyström (voir [6]).

### 5.4.2 La méthode de Sloan

Avec la même subdivision précédente, nous définissons l'opérateurs  $\tilde{T}_n$  et  $\tilde{S}_n$  en utilisant la méthode de Sloan (voir [1]) définis par,

$$\tilde{T}_n u_n(x) = \sum_{i=1}^n u_n(x_i) e_i(x) + \sum_{i=1}^n w_{1,i}(x) u_n(x_i), \quad (5.71)$$

$$\tilde{S}_n u_n(x) = \sum_{i=1}^n w_{2,i}(x) u_n(x_i), \quad (5.72)$$

où,

$$w_{1,i}(x) = \int_0^a G_{0,a}(x, y) y^2 e_i(y) dy, \quad w_{2,i}(x) = \int_0^a G_{0,a}(x, y) e_i(y) dy, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (5.73)$$

et que, pour  $2 \leq i \leq n-1$ ,

$$e_i(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x - x_i|}{h_n} & \text{pour } x_{i-1} \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.74)$$

$$e_1(x) = \begin{cases} \frac{x_2 - x}{h_n} & \text{pour } x_1 \leq x \leq x_2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.75)$$

$$e_n(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{n-1}}{h_n} & \text{pour } x_{n-1} \leq x \leq x_n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.76)$$

Le problème spectral matriciel généralisé issu de la décritisation de  $T$  et  $S$  en utilisant la méthode de Sloan est désigné par  $\tilde{A} - \lambda_n \tilde{B}$ , où

$$\tilde{A}(i, j) = I(i, j) + w_{1,i}(x_j), \quad \tilde{B}(i, j) = w_{2,i}(x_j). \quad (5.77)$$

Nous utilisons la fonction "eig" en Matlab pour calculer les valeurs propres généralisée du couple  $(\tilde{A}, \tilde{B})$ .

Notons que le collectivement compact convergence est assuré aussi par la méthode de Sloan (voir [1]).

### 5.4.3 La méthode de Kantorovich

Avec la même subdivision précédente, nous appliquons la méthode de Kantorovich aux opérateurs  $T$  et  $S$  (voir [6]), nous trouvons pour tout  $x \in [0, a]$ ,

$$u_n(x) + \sum_{i=1}^n \left( \int_0^a G_{0,a}(x_i, y) y^2 u_n(y) dy \right) e_i(x) \quad (5.78)$$

$$= \lambda_n \sum_{i=1}^n \left( \int_0^a G_{0,a}(x_i, y) u_n(y) dy \right) e_i(x). \quad (5.79)$$

En multipliant d'abord cette équation par  $G_{0,a}(x_j, x)x^2$  ensuite par  $G_{0,a}(x_j, x)$ , et en intégrant sur  $[0, a]$ , nous trouvons le problème spectral matriciel généralisé comme suit,

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} + I_{n \times n} & O_{n \times n} \\ \tilde{B} & I_{n \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \lambda_{2n} \begin{bmatrix} O_{n \times n} & \tilde{A} \\ O_{n \times n} & \tilde{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}, \quad (5.80)$$

où, pour  $1 \leq j \leq n$

$$\beta_1(j) = \int_0^a G_{0,a}(x_j, y) y^2 u_n(y) dy, \quad \beta_2(j) = \int_0^a G_{0,a}(x_j, y) u_n(y) dy. \quad (5.81)$$

TABLE 5.1 – Les résultats numériques pour  $a = 5$ 

Valeur propre exacte	Nyström pour $T$ et $S$	Sloan pour $T$ et $S$	Kantorovich pour $T$ et $S$
3	2.9998027	3.0001972	2.9621125
7	6.9990159	7.0009887	6.8083144
11	10.9977898	11.0026039	10.5272610
15	15.0013776	15.0103317	14.1401140
19	19.0656824	19.0806050	17.8348945

Notons que les matrices  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  sont les mêmes matrices construites par la méthode de Sloan.

De manière similaire, nous utilisons la fonction "eig" en Matlab pour calculer les valeurs propres généralisée du couple :

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} + I_{n \times n} & O_{n \times n} \\ \tilde{B} & I_{n \times n} \end{bmatrix} - \lambda_n \begin{bmatrix} O_{n \times n} & \tilde{A} \\ O_{n \times n} & \tilde{B} \end{bmatrix}. \quad (5.82)$$

La méthode de Kantorovich donne une convergence en norme (voir [1]).

Nous avons choisi  $n = 200$  pour montrer les résultats numériques obtenus par chacune de ces trois approximations. Les résultats sont comparés à ceux de [33] dans les tableaux suivants.

Maintenant, nous fixons  $n = 100$  et  $a = 5$  pour approcher  $T$  et  $S$  en utilisant les méthodes précédentes. Ensuite, nous fixons une grille  $M = [-50, 50] \times [-50, 50]$  dans le plan complexe  $\mathbb{C}$  avec un pas  $h = \frac{1}{10}$ .

Nous calculons numériquement  $\|(T_n - zS_n)^{-1}S_n\|$  pour tout  $z \in M$ , où  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , sont des suites d'opérateurs construites par les méthodes de Nyström, Sloan et Kantorovich.

TABLE 5.2 – Les résultats numériques pour  $a = 5$ 

Valeur propre exacte	Nyström pour $T$ Sloan pour $S$	Sloan pour $T$ Nyström pour $S$	<span style="border: 1px solid green; padding: 2px;">33</span>
3	3.0002761	2.9997238	2.9621125
7	7.0015938	6.9984110	6.8083144
11	11.0041582	10.9962364	10.5272610
15	15.0132972	14.9984149	14.1401140
19	19.0857154	19.0605807	17.8348945

Mais nous remarquons que les calculs numériques sont massifs. Alors, nous avons choisi de faire une approximation en calculant  $\|(T_n - zS_n)^{-1}\| \|S_n\|$ . Les quatre graphiques au-dessous montrent nos résultats numériques.

#### Commentaires sur les graphes :

Dans les quatre graphes, les valeurs propres sont localisées par les cercles. La couleur bleue explique que la résolvante généralisée en norme va exploser, autrement dit, autour des valeurs propres, la valeur numérique de la résolvante généralisée est assez grande. Ainsi, ce résultat numérique vient de prouver les définitions et les résultats théoriques déjà exploités dans ce chapitre.

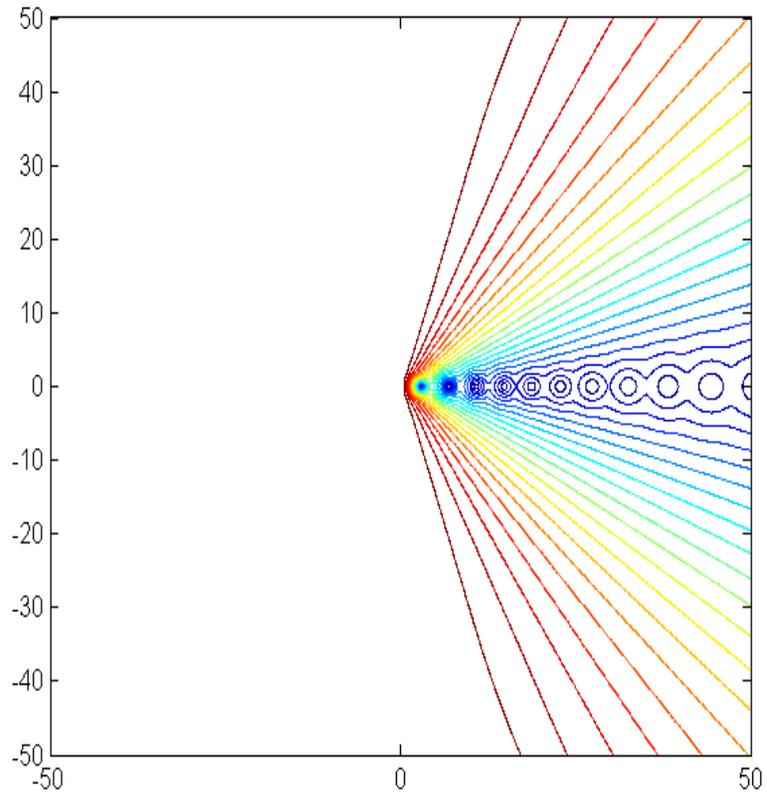


FIGURE 5.1 –  $T$  et  $S$  sont discrétisés avec Nyström.

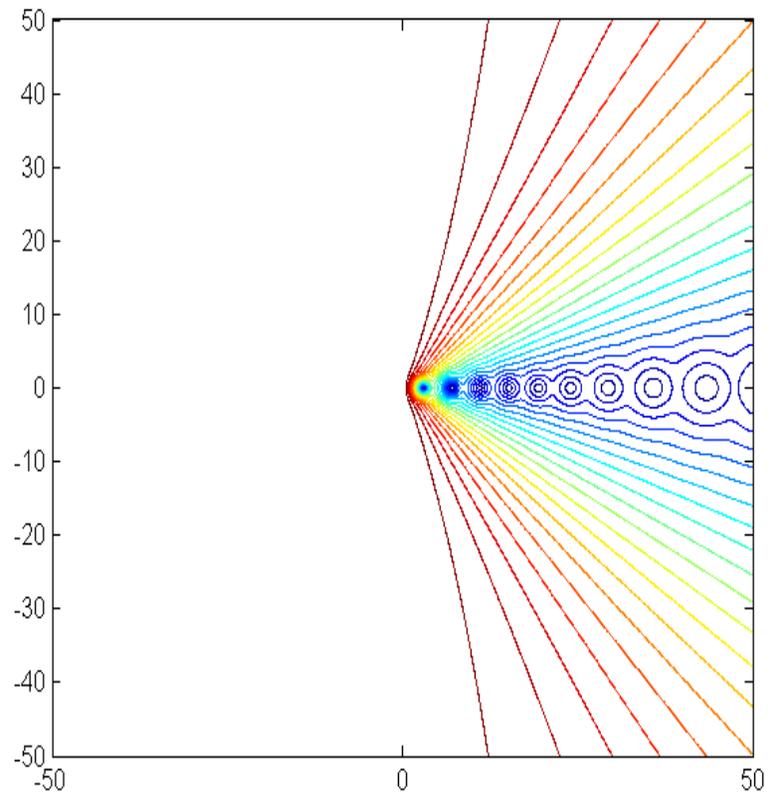


FIGURE 5.2 –  $T$  et  $S$  sont discrétisés avec Sloan.

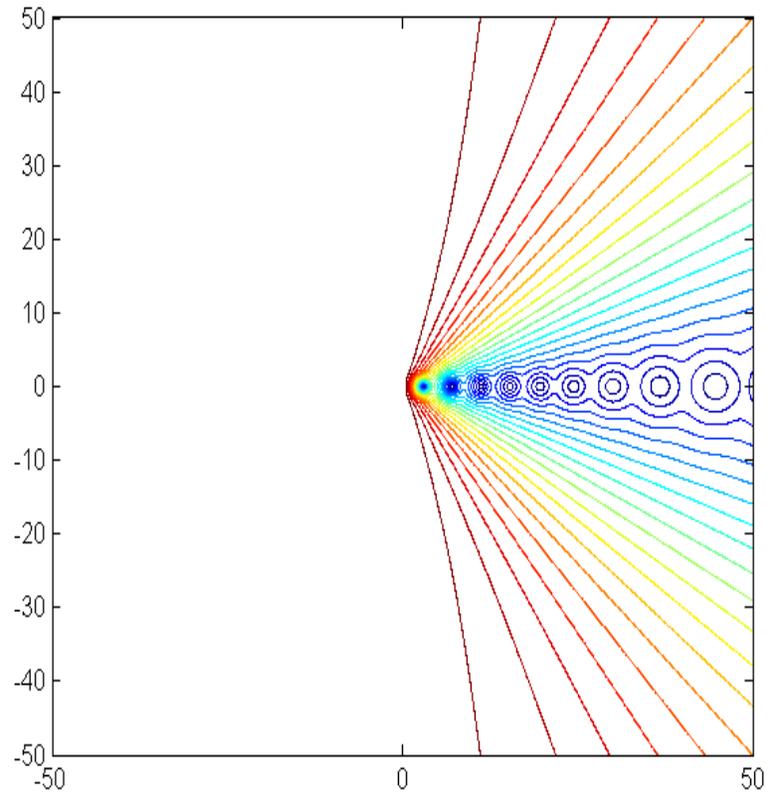


FIGURE 5.3 –  $T$  est discrétisé avec Nyström et  $S$  est discrétisé avec Sloan.

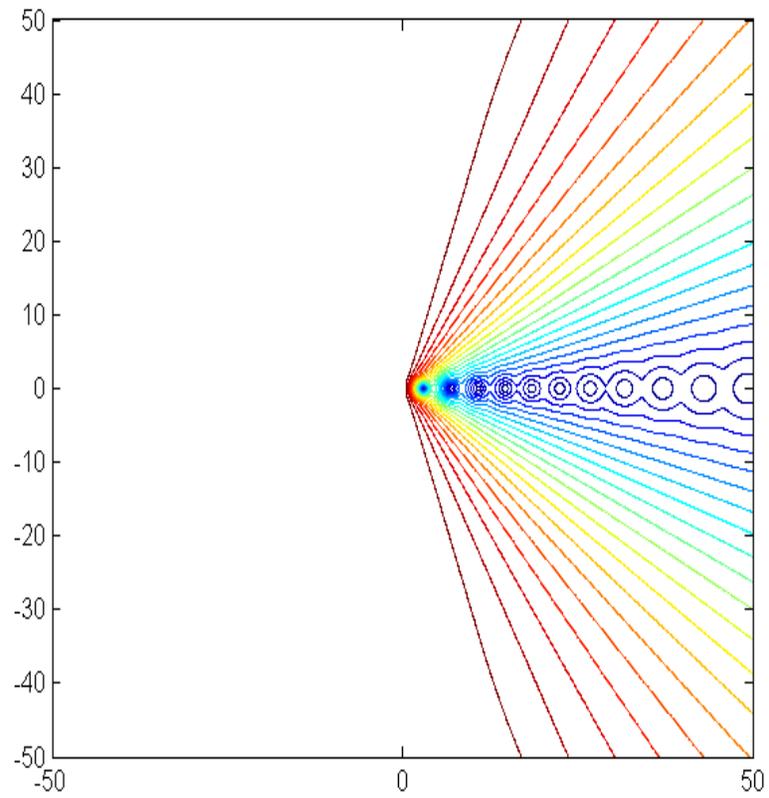


FIGURE 5.4 –  $T$  est discrétisé avec Sloan et  $S$  est discrétisé avec Nyström.

# CONCLUSION ET PERSPECTIVES

---

Le travail présenté dans cette thèse s'est porté à la résolution de la pollution spectrale qui est apparu dans l'approximation spectrale comme la non convergence du spectre approché vers le spectre exact.

Dans ce travail, nous avons construit une nouvelle méthode d'approximation du spectre d'un opérateur non borné en utilisant l'application du spectre généralisé de deux opérateurs bornés. Puis comme application nous avons étudié l'opérateur de Schrodinger dans un contexte spatial en une dimension.

Les résultats présentés dans ce modeste manuscrit constituent les bases des cinq publications.

Ainsi, les perspectives futures dans un premier temps sont de traiter le même problème, mais pour des opérateurs non bornés plus généraux et aussi dans un contexte spatial en deux dimensions ou en trois dimensions.

Enfin, à travers ce travail, nous espérons avoir posé la première pierre dans le domaine de l'approximation spectrale pour la résolution du phénomène de la pollution spectrale.

---

---

# Bibliographie

---

- [1] Ahues. M et al, *Spectral Computations for Bounded Operators*, Chapman and Hall/CRC, New York, 2001.
- [2] Ahues. M et Hocine. F, *A note on spectral approximation of linear operations*, Appl. Math. Lett., 7, 63-66, 1994.
- [3] Ahues. M, *A class of strongly stable operator approximation*, J. Austr. Math. Soc. Ser. B88, 435-442, 1987.
- [4] Alam. R, *On spectral approximation of linear operators*, J. Math. Anal. Appl., 226, 229-244, 1998.
- [5] Aslanyan. A et Davies E. B, *Spectral instability for some Schrödinger operators*, arXiv :math/9810063v1 [math.SP] 9 Oct 1998.
- [6] Atkinson. K. E, *The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind*, Cambridge University Press, 1997.
- [7] Boffi. D et al, *On the problem of spurious eigenvalues in the approximation of linear elliptic problems in mixed form*, Math. of Comp. 69, 121-140, 1999.
- [8] Boffi. D et al, *A remark on spurious eigenvalues in a square*, Appl. Math. Lett. 12, 107-114, 1999.
- [9] Bogli. S, *Convergence of sequences of linear operators and their spectra*, Integral Equation Operator Theory 88, pp. 559-599, 2017.
- [10] Bouldin. R, *Operator Approximations with stable eigenvalues*, J. Austr. Math. Soc. Ser. A 49, 250-260, 1990.
- [11] Brezis. H, *Analyse fonctionnelle :Théorie et applications*, Massons, Paris 1987.

- [12] Chatelin. F, *Spectral Approximation of Linear Operators*, Academic Press, New York, 1983.
- [13] Ciarlet. P. G, *The finite element method for elliptic problems*, SIAM, 2002.
- [14] Davies. E. B, *Spectral enclosures and complex resonances for general self-adjoint operators*, LMS J. Comput. Math. 1, 42-74, 1998.
- [15] Davies. E. B et Plum. M, *Spectral pollution*, IMA journal of Numerical Analysis. 24, 417-438, 2004.
- [16] Davies. E. B, *Linear operators and their spectra*, Cambridge studies advanced mathematics, 2000.
- [17] Diestel. J, *Sequences and Series in Banach spaces*, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [18] Evans. L. C, *Partial differential equations, graduate studies in mathematics*, volume 19, American mathematical society, 1997.
- [19] Hinchcliffe. J et Strauss. M, *Spectral enclosure and superconvergence for eigenvalues in gaps*, Integral Equ. Oper. Theory 84 (1), 1-32, 2016.
- [20] Gohberg. I et al, *Classes of Linear Operators*, Vol I, Springer Basel AG, 1990.
- [21] Grubb. G, *Distribution and operators, Graduate texts in mathematics*, Springer, 2009.
- [22] Guebbai. H et Largillier. A, *Spectra and pseudospectra of convection-diffusion operator*, Lobachevskii Journal of Mathematics, 2012.

- [23] Guebbai. H, *Generalized Spectrum Approximation and Numerical Computation of Eigenvalues for Schrödinger's Operators*, Lobachevskii Journal of Mathematics. 34, 45-60, 2013.
- [24] Kato. T, *Perturbation theory of linear operators*, Second edition, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1980.
- [25] Khellaf. A, *New sufficient conditions in the generalized spectrum approach to deal with spectral pollution*, Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya : estestvennye i tekhnicheskie nauki -Tambov University Reprints. Series : Natural and Technical Sciences, 2018.
- [26] Khellaf. A et al, *A class of strongly stable approximation for unbounded operators*, Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya : estestvennye i tekhnicheskie nauki -Tambov University Reprints. Series : Natural and Technical Sciences, 2019.
- [27] Khellaf. A et al, *Eigenvalues computation by the generalized spectrum method of Schrödinger's operator*, Computational and Applied Mathematics, 2018.
- [28] Khellaf. A et Guebbai. H, *A Note on generalized spectreum approximation*, Lobachevskii Journal of Mathematics, 2018.
- [29] Khellaf. A et al, *On the Pseudo-spectrum of Operator Pencils*, Asian-European Journal of Mathematics, 2019.
- [30] Levitin. M et Shargorodsky. E, *Spectral pollution and second-order relative spectra for self-adjoint operators*, IMA J. Numer. Anal. 24 (3), 393-416, 2004.

- [31] Limaye. B. V, *Spectral Perturbation and Approximation with Numerical Experiments, Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis*, Vol. 13, Austral. Nat. Univ., Canberra, 1987.
- [32] Markus. A. S, *Introduction to the Spectral Theory of Polynomial Operator Pencils*, in Translations of Mathematical Monographs, vol. 71, American Mathematical Society, Providence, RI, 1988.
- [33] Marletta. M et Scheichl. R, *Eigenvalues in spectral gaps of differential operators*, Bath Institute for Complex Systems, Preprint 9/10, 2010.
- [34] Müller. M et Pivovarchik. V, *Spectral Theory of Operator Pencils, Hermite-Biehler Functions, and their Applications*, Birkhäuser, 2015.
- [35] Rappaz. J et al, *On spectral pollution on the finite element approximation of thin elastic membrane shells*, Numer. Math. 75, 473-500, 1997.
- [36] Roch. S et Silbermann. B,  *$C^*$ -algebra techniques in numerical analysis*, J. Oper. Theory 35, 241-280, 1996.
- [37] Thambar. N. M, *On strongly stable approximation*, J. Austr. Math. Soc. Ser. A 52, 251-260, 1992.
- [38] Tisseur. F et Meerbergen. K, *The quadratic eigenvalue problem*, SIAM Rev. 43, no. 2, 235-286, 2001.
- [39] Trefethen. L. N et Embree. M, *Spectra and Pseudospectra : The Behavior of Nonnormal Matrices and Operators*, Princeton University Press, 2005.
- [40] Van Dorsselaer. J. L. M, *Pseudospectra for matrix pencils and stability of equilibria*, BIT Numerical Mathematics, 37 :4, 833-845. 1997.