

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche  
Scientifique  
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
et des Sciences de la Matière  
Département de Mathématiques



### Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : Analyse mathématique appliquée

Par :

Selwa Boudra

### Intitulé

Régularisation d'un problème bi-harmonique fortement mal posé par  
la méthode des conditions aux limites auxiliaires

Dirigé par : Dr. Benrabah Abderafik

Devant le jury

PRESIDENT  
RAPORTEUR  
EXAMINATEUR

Dr.Boussetila Nadjib  
Dr.Benrabah Abderafik  
Dr.Fernane Khairddine

Univ Guelma  
Univ-Guelma  
Univ-Guelma

Session Juin 2018

## REMERCIEMENTS

أحمد الله الذي أنار لي درب العلم و المعرفة، و أعانني على أداء هذا الواجب ووفقتني إلى انجاز هذا العمل

...

اللهم لك الحمد

*La réalisation de ce mémoire a été possible grâce au concours de plusieurs personnes à qui je voudrais témoigner toute ma reconnaissance.*

*Je voudrais tout d'abord adresser ma gratitude à Dr.BENRABAH ABEDERAFIK d'avoir accepté d'encadrer ce travail, je le remercie pour ses conseils judicieux, qui ont contribué à alimenter ma réflexion.*

*Mes remerciements vont également aux membres du jury, qui ont accepté d'évaluer, discuter et examiner mon modeste travail.*

*Dernier grâce, surtout, aller à ma mère et mon père qui m'a apporté beaucoup d'amour et d'encouragement et sans eux, je ne pouvais pas aller à la fin de ce travail et mon chers frère Houssem et à ma fiancé Houcine qui et m'ont toujours apporté leur support moral, ainsi que toute ma famille,*

*à mes chères amies : wafa ; loubna ;Souhila;  
loubna ;Insef;Iman ;Inesse ;Nesrine ;Ahlem et Amina qui m'ont accompagné,  
poussé, encouragé tout au long de l'élaboration de ce travail.*

*J'exprime également, ma profonde reconnaissance Aux Amis qui n'ont pas  
hésité à aucun moment à nos apporter leur soutien, leur encouragement et  
surtout leur compréhension.*

## *Dédicaces*

*Je dédie ce modeste travail:*

*À ma grand-mère « Nous lui souhaitons la  
longévité »*

*À mes parents*

*A ma très chère Mère ; et à mon très cher  
Père ; pour ses sacrifices*

*De tous les instants.*

*À mon frère*

*À Ma fiancé Houcine et toutes sa  
famille*

*À Toute ma famille*

*A tous Mes enseignants sans Exception et*

*À mes tendres amies et*

*ous ceux qui ont toujours cru en moi,  
m'ont accompagné et soutenu ...*

*Trouvez ici ma profonde reconnaissance...*

*Bondra Selwa*

# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>iii</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>v</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>vii</b>
<b>1 Rappels et motivation</b>	<b>1</b>
1.1 Introduction générale . . . . .	2
1.2 Organisation du manuscrit . . . . .	3
1.3 Plaques minces . . . . .	4
1.4 Problème direct et Problème inverse . . . . .	6
<b>2 Méthode de régularisation par des conditions auxiliaires</b>	<b>11</b>
2.1 Détermination de la solution . . . . .	12
2.2 Présentaion de la méthode de régularisation . . . . .	14
2.3 Estimation d'erreur sous des données bruitées . . . . .	20
<b>3 Illustrations numérique</b>	<b>27</b>
3.1 Choix de la méthode d'approximation . . . . .	28
3.2 Problème semi-discrétisé . . . . .	29
3.3 Tableaux annexes . . . . .	36
3.4 Conclusion . . . . .	36
3.5 Bibliographie . . . . .	37

# Liste des figures

1.1	Forces agissant sur l'élément de plaque . . . . .	4
1.2	Domaine $\Omega$ . . . . .	6
1.3	Thorax . . . . .	8
1.4	Pipeline . . . . .	8
1.5	Inclusion . . . . .	9
3.1	Solution exacte, solution régularisée avec des données exactes, $\varepsilon = 0$ et l'erreur absolue	31
3.2	Solution exacte, solution régularisée avec des données bruitées, $\varepsilon = 0.1$ et l'erreur absolue . . . . .	31
3.3	Solution exacte, solution régularisée avec des données bruitées, $\varepsilon = 0.01$ et l'erreur absolue . . . . .	32
3.4	Solution exacte, solution régularisée avec des données bruitées, $\varepsilon = 0.001$ et l'erreur absolue . . . . .	32
3.5	Solution exacte, solution régularisée avec des données bruitées, $\varepsilon = 0.0001$ et l'erreur absolue . . . . .	33
3.6	Solution $\Delta u$ , solution régularisée $\Delta u_\alpha$ avec des données exactes, $\varepsilon = 0$ et l'erreur absolue . . . . .	33
3.7	Solution $\Delta u$ , solution régularisée $\Delta u_\alpha$ avec des données exactes, $\varepsilon = 0.1$ et l'erreur absolue . . . . .	34
3.8	Solution $\Delta u$ , solution régularisée $\Delta u_\alpha$ avec des données exactes, $\varepsilon = 0$ et l'erreur absolue . . . . .	34
3.9	Solution $\Delta u$ , solution régularisée $\Delta u_\alpha$ avec des données exactes, $\varepsilon = 0.1$ et l'erreur absolue . . . . .	35
3.10	Solution $\Delta u$ , solution régularisée $\Delta u_\alpha$ avec des données exactes, $\varepsilon = 0$ et l'erreur absolue . . . . .	35

# Chapitre 1

## Rappels et motivation

*« Tout segment matériel  
orthogonal au feuillet moyen avant  
déformation, reste orthogonal au  
feuillet moyen après déformation  
et cela sans se déformer. »*

---

Hypothèse de Kirchhoff et de Love

### Sommaire

---

<b>1.1 Introduction générale</b> .....	<b>2</b>
<b>1.2 Organisation du manuscrit</b> .....	<b>3</b>
<b>1.3 Plaques minces</b> .....	<b>4</b>
1.3.1 Différents types de plaques .....	4
1.3.2 Équation de la plaque .....	5
1.3.3 Position du problème .....	5
<b>1.4 Problème direct et Problème inverse</b> .....	<b>6</b>
1.4.1 Problème direct .....	7
1.4.2 Problème inverse .....	7
1.4.3 Problèmes mal-posés .....	7
1.4.4 Exemples de problèmes inverses liés au Laplacien .....	8
1.4.5 Exemples de problèmes inverses liés au bi-Laplacien .....	9

---

## 1.1 Introduction générale

L'utilisation des plaques comme élément de résistance au choc et vibration est courante dans toutes les filières d'ingénieur en structure : mécanique, aéronautique, aérospatiale, civile, navale, matériel de sport et militaire. Devant ce vaste et important éventail de domaine d'applications, il est aisé de comprendre l'intérêt et la demande urgente de s'impliquer dans l'analyse du comportement dynamique des plaques.

Celles-ci interviennent pour la plus part des cas comme éléments de résistance déterminantes. Leur rôle essentiel est de parer à l'action dynamique des sollicitations extérieures et assurer ainsi les performances mécaniques souhaitées et désirable en faveur de la structure porteuse.

La première impulsion ayant un énoncé mathématique de problèmes de plaque a été probablement faite par Euler, qui en 1776, a effectué une analyse des problèmes des vibrations libres de plaque. Chladni, physicien allemand a découvert les différents modes de vibrations libres. Dans les expériences sur les plaques horizontales, il a utilisé une poudre uniformément répartie, qui faisait régulièrement des schémas après induction d'une vibration. La poudre accumulée le long des lignes nodales, où il n'y a pas eu lieu des déplacements verticaux. J. Bernoulli a tenté de justifier en théorie, les résultats de ces expérimentations acoustiques. La solution de Bernoulli est basée sur les précédents travaux aboutissant à la théorie de la flexion de faisceau d'Euler-D. Bernoulli a présenté la plaque en tant que système de bandes droites perpendiculaires l'une à l'autre, chaque bande considérée fonctionnant comme un faisceau. Mais l'équation différentielle régissant, à distinguer des approches actuelles, ne contient pas le moyen terme.

Le mathématicien français Germain a développé une équation différentielle de plaque, dans laquelle le phénomène de voilement est négligé, il a reçu un prix par l'Académie de Paris en 1816 pour ce travail. Le chercheur Lagrange, a été l'un des commentateurs de ce travail, il a corrigé les résultats de Germain en ajoutant le terme manquant, donc, il fut la première personne qui à présenter correctement l'équation de plaque.

Cauchy et Poisson étaient les premiers à formuler le problème de plaque en flexion sur la base des équations générales de la théorie de l'élasticité. Expansion toutes les grandeurs caractéristiques en série, ils ont conservé seulement les termes du premier ordre de petitesse. De cette manière, ils ont obtenu l'équation différentielle régissant pour la flexion qui coïncide entièrement avec la célèbre équation de Germain-Lagrange. En 1829, Poisson élargi avec succès l'équation de plaque de Germain-Lagrange à la solution d'une plaque sous charge statique. Dans cette solution, cependant, la rigidité de la plaque en flexion est définie comme étant égale à un terme constant.

En 1850, Kirchhoff a présenté une thèse sur la théorie des plaques minces. Dans cette thèse, Kirchhoff a énoncé deux hypothèses de bases indépendantes, qui sont désormais largement reconnues dans la théorie de la flexion des Plaques et sont connues sous le nom (**hypothèses de Kirchhoff**). En utilisant ces hypothèses, Kirchhoff a simplifié, l'énergie fonctionnelle 3D de la théorie d'élasticité des plaques pliées en exigeant qu'elle soit stationnaire, il a obtenu l'équation de Lagrange-Germain comme l'équation d'Euler. Il a également fait observer qu'il existe seulement deux conditions aux limites sur le bord d'une plaque. D'autres contributions importantes de Kirchhoff sont la découverte de l'équation de la fréquence des plaques et de l'introduction de la méthode des déplacements virtuels dans la solution des problèmes de plaque. Kirchhoff a contribué à la théorie physique clarifiée de la théorie de flexion de plaque et a promu son utilisation très répandue dans la

pratique.

## 1.2 Organisation du manuscrit

Le présent mémoire est composé de trois chapitres essentiels.

□ Dans le premier chapitre on présente un état d'art sur les plaques minces (élasticité linéaire), la position de notre problème, les problèmes inverses, les problèmes bien et mal posés et on rappelle quelques outils mathématiques nécessaires pour l'étude des problèmes mal posés.

□ Le deuxième chapitre, est consacré à la présentation de la méthode de régularisation par des conditions non locales, la démonstration de la stabilité de la solution, de la convergence de la méthode proposée ainsi que quelques estimations d'erreurs sous des données exactes et bruitées.

□ Quant au troisième chapitre, il est consacré à l'implémentation numérique où on donne un exemple pour justifier l'efficacité de la méthode de régularisation proposée.



### 1.3 Plaques minces

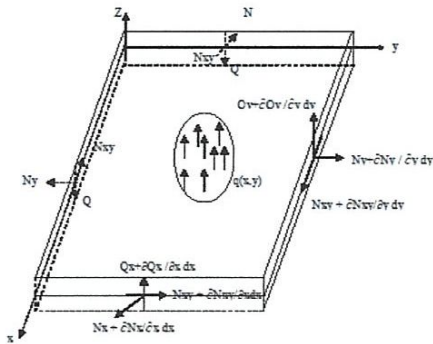


FIGURE 1.1 – Forces agissant sur l'élément de plaque

Deux stratégies sont possibles pour construire le modèle usuel des plaques minces élastiques. La plus ancienne consiste à passer du tridimensionnel au bidimensionnel en imposant à la cinématique de satisfaire l'hypothèse de **Kirchhoff et de Love** : TOUT SEGMENT MATÉRIEL ORTHOGONAL AU FEUILLET MOYEN AVANT DÉFORMATION, RESTE ORTHOGONAL AU FEUILLET MOYEN APRÈS DÉFORMATION ET CELA SANS SE DÉFORMER. La cinématique du feuillet moyen gouvernant la cinématique dans l'épaisseur de la plaque, on réussit à réduire le problème tridimensionnel initial au problème bidimensionnel.

L'autre stratégie possible est d'étudier le comportement asymptotique des solutions du problème d'élasticité linéaire tridimensionnel lorsque l'épaisseur de la plaque tend vers zéro. On montre alors que la limite asymptotique vérifie l'hypothèse de **Kirchhoff et de Love** et que le problème limite obtenu est le problème bidimensionnel usuel des plaques minces élastiques en petits déplacements (cf. [3], [4], [5] et [10] à titre d'exemples).

**Définition 1.3.1** Une plaque est un solide bidimensionnel, défini par une surface de référence plane (plan) et par une petite épaisseur (notée  $h$ ) par rapport aux autres dimensions (longueur et largeur), elle peut être constituée d'un matériau homogène ou peut être obtenue par l'empilement de différentes couches de matériaux orthotropes.

Une analyse élastique des plaques consiste à une étude d'un modèle mathématique bidimensionnel ce qui nous conduit à une analyse d'un problème en élasticité plane.  $Q_x, Q_y$  :

les intensités des efforts tranchants

$N_x, N_y$  : les intensités des efforts normaux

$N_{xy} = N_{yx}$  : les intensités de l'effort de cisaillement

$q = q(x, y)$  : l'effort extérieure transversal appliqué à la plaque par unité de surface

#### 1.3.1 Différents types de plaques

En fonction de la nature des matériaux qui les constituent et de la géométrie de leur section transversale, les plaques peuvent être classées en trois catégories ;

- (a) Les plaques isotropes : elles sont constituées d'un matériau isotrope (acier, béton) et leur section transversale est homogène. Elles sont définies par deux paramètres élastiques ( : respectivement le module d'élasticité et le coefficient de Poisson). on les retrouve dans les constructions civiles courantes (bâtiments, ouvrages d'art,...).
- (b) Les plaques orthotropes : leurs propriétés élastiques sont différentes dans deux directions perpendiculaires. L'orthotropie peut être naturelle (bois) ou techniques (dalles rédiées). Le comportement de ces dalles est défini par quatre paramètres élastiques et on les retrouve dans les constructions navales, aéronavales, de réservoirs de l'industrie chimique, des bâtiments et d'ouvrages d'art.
- (c) Les plaques anisotropes : leurs propriétés élastiques sont différentes dans toutes les directions. Le comportement de ces plaques est définies par neuf paramètres élastiques . Elles sont souvent constituées de matériaux composites et sont surtout utilisées dans l'industrie aéronavale.

### 1.3.2 Équation de la plaque

Considérons un élément de plaque rectangulaire d'épaisseur  $h$  constante, de longueur  $dx$  et de largeur  $dy$ , les axes  $Ox$  et  $Oy$  sont choisis pour contenir la surface moyenne supposée initialement horizontale.

Les hypothèses cinématiques adoptées pour les plaques minces par **Kirchhoff** généralisent à deux dimensions celles adoptées pour les poutres sans déformations à l'effort tranchant :

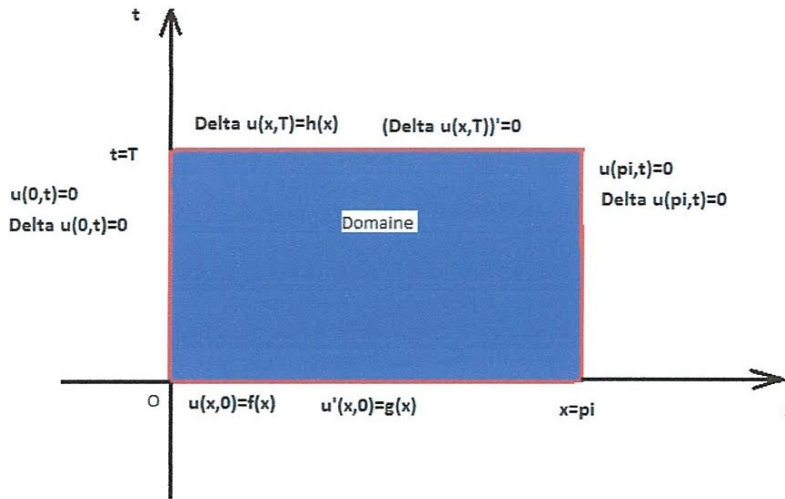
1. la plaque est mince d'épaisseur  $h$  et possède un plan moyen. les faces extérieures de la plaque sont les plans  $Z = \pm \frac{h}{2}$ .
2. seul le déplacement transversal  $w$  est considéré.
3. Les sections droites, initialement normales au plan moyen en restent planes et normales à celui-ci, ce qui implique que la déformation en cisaillement transverse est négligé.
4. La contrainte  $sz$  dans la direction transversale est nulle. Elle doit en effet s'annuler sur les faces extérieures et du fait que la plaque est mince, il est naturel d'admettre qu'elle est nulle en tout  $z$ .
5. Les déplacements  $u$  et  $v$  dans le plan  $Oxy$ , résultent de deux effets :
  - un champ de déplacement initial et uniforme selon l'épaisseur résultant d'un chargement de la plaque dans son plan (comportement en extension, ou membranaire),
  - le champ de déplacement dû à la rotation de la section droite.
6. Les termes non linéaires du déplacement sont négligés, en particulier, l'inertie de rotation est négligé.

Elles conduisent aux hypothèses sur les déplacements

$$u = u_0(x, y) - Z \frac{\partial w}{\partial x}$$

### 1.3.3 Position du problème

Soit  $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < \pi, 0 < t < T\}$  et  $L = \Delta^2$  est l'opérateur de bi-Laplace.


 FIGURE 1.2 – Domaine  $\Omega$ 

Pour  $T > 0$ ,  $f, g \in L^2(0, \pi)$ , considérons le problème biharmonique suivant [7]

$$Lu \equiv \Delta^2 u = u_{tttt}(x, t) + 2u_{ttxx}(x, t) + u_{xxxx}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega, \quad (1.1)$$

vérifiant les conditions initiales par rapport à  $x$  suivantes

$$u|_{x=0} = 0, \quad \Delta u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = 0, \quad \Delta u|_{x=\pi} = 0, \quad (1.2)$$

et les conditions aux limites suivantes

$$u|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = g(x), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (1.3)$$

$$\Delta u|_{t=T} = h(x), \quad \frac{\partial \Delta u}{\partial t}|_{t=T} = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi. \quad (1.4)$$

On note les équations (2.1)-(2.4) par (BHP).

#### 1.4 Problème direct et Problème inverse

Certains problèmes inverses nécessitent la connaissance des quantités ou propriétés physiques (déplacements, forces, température, flux, pression,...) sur toute la frontière d'un domaine, alors que ces quantités ne sont accessibles que sur une partie de celle-ci, cela entraîne la résolution d'un problème dit de complétion de données qui est un problème inverse de type Cauchy, il consiste à déterminer et compléter les conditions aux limites sur la partie inaccessible de la frontière.

Le problème de Cauchy considéré dans ce mémoire consiste à résoudre une équation aux dérivées partielles sur un domaine pour lequel les conditions aux limites sont données uniquement sur une partie de la frontière, cela nécessite la reconstruction des conditions aux limites manquantes sur l'autre partie en résolvant un problème avec des conditions non locales.

### 1.4.1 Problème direct

Le système (par exemple la structure mécanique analysée) dépend habituellement de paramètres, symboliquement notés  $p$  : géométrie (la région de l'espace occupée), caractéristiques des matériaux constitutifs, liaisons cinématiques.

Le problème direct consiste à calculer la réponse  $d$  à partir de la donnée des sollicitations  $X$  et des paramètres  $p$ . Les équations de la physique donnent en général la réponse  $d$  comme fonction implicite de  $X$  et

$$p : G(X; d; p) = 0$$

La notation  $G$  symbolise les équations de la physique du problème considéré, on parle parfois du modèle physique.

Dans la plupart des cas, le problème direct est bien posé et dans certains cas (problèmes linéaires ou linéarisés) l'équation de la physique est explicite ( $G(X; p) = d$ ). En mécanique ou en thermique, on est toutefois et plus souvent confrontés à des modèles physiques implicites.

### 1.4.2 Problème inverse

Il s'agit généralement de situations où on est dans l'ignorance au moins partielle du système (certaines informations concernant la géométrie, les matériaux, les conditions initiales...) ne sont pas connues. En compensation, il faut disposer (en plus des entrées) d'informations, éventuellement partielle, sur la sortie  $d$  afin de reconstruire au mieux l'information manquante. Le terme inverse rappelle qu'on utilise l'information concernant le modèle physique (**à l'envers**) connaissant (partiellement) les sorties.

L'analyse des nombreux problèmes de type inverse met en évidence leur caractère mal posé, en effet en raison d'incertitude expérimentale, des données  $d$  pourront être incompatibles avec les entrées  $X$  (c'est à dire qu'aucun système ne parvient à produire  $d$  à partir de  $X$ ), d'où l'absence de solution pour les données disponibles. De nombreux cas présentent également des possibilités de solutions multiples. Enfin une caractéristique très répondeuse est la très grande sensibilité d'une solution par rapport à une perturbation des données.

### 1.4.3 Problèmes mal-posés

En étudiant la résolution des équations aux dérivées partielles, le mathématicien Jacques Hadamard [1] a exprimé le concept de problème bien-posé. Nous allons voir une définition précise cidessous sous la forme de trois conditions. Ces conditions reflètent les contraintes pour qu'un modèle en physique mathématique ait un sens et conduise à une résolution raisonnable du problème en question [1].

Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces métriques,  $A : X \rightarrow Y$  un opérateur. Considérons l'équation :

$$Ax = y. \tag{1.5}$$

Notons que plusieurs problèmes physiques se ramènent à une telle équation. On dit que le problème (1.5) est bien posé si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

1. La solution  $x$  existe c'est à dire pour tout  $y$  dans  $Y$ , il existe au moins un  $x$  dans  $X$  tel que  $Ax = y$  (Surjectivité de  $A$ ).
2. La solution  $x$  est unique c'est à dire pour tout  $y$  dans  $Y$  il existe au plus un  $x$  dans  $X$  tel que  $Ax = y$  (Injectivité de  $A$ ).
3. La solution  $x$  est stable dépend continûment de la donnée  $y$  c'est à dire toute petite perturbation des données  $y$  implique une petite variation de la solution  $x$ .

#### 1.4.4 Exemples de problèmes inverses liés au Laplacien

- (a) L'électrocardiogramme mesure à la surface du thorax les potentiels électriques générés par l'activité cardiaque. Cependant, cet outil ne permet pas de connaître les valeurs de ces potentiels à la surface du coeur. Si l'on considère le domaine délimité par le thorax et illustré par la figure (1.3), sa frontière est constituée d'une frontière externe, la surface du thorax, et d'une frontière interne, la surface du coeur. Les mesures fournies par l'électrocardiogramme donnent les conditions limites sur la frontière externe. La résolution numérique du problème de Cauchy permet d'identifier les potentiels électriques à la surface du coeur.

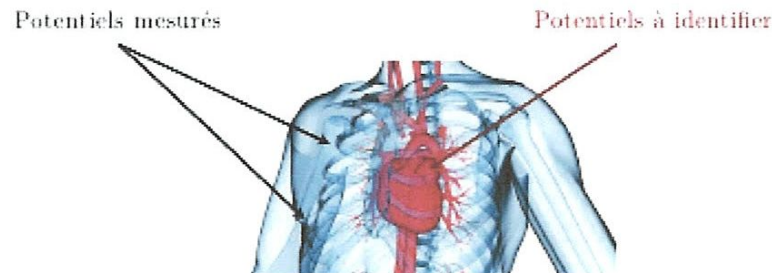


FIGURE 1.3 – Thorax

- (b) En thermique, considérons l'exemple de la reconstruction de la température et du flux dans un pipeline représenté par la figure (1.4) à partir de mesures sur sa frontière externe. Cette application intervient dans de nombreux processus industriels. La stratification thermique d'un fluide parcourant un pipeline génère des contraintes mécaniques pouvant provoquer des dégradations du matériel telles que des fissures. La connaissance de la température sur le mur intérieur d'un pipeline est donc essentielle pour contrôler l'état du matériel.

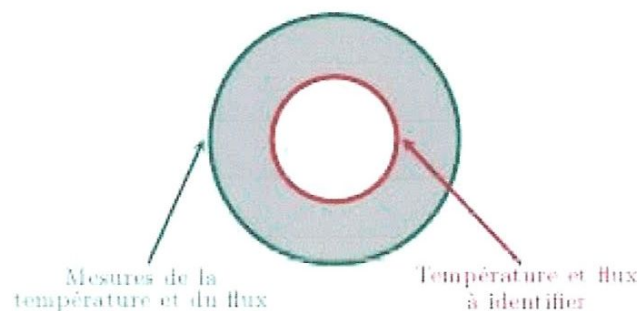


FIGURE 1.4 – Pipeline

- (c) Le dernier exemple concerne la détection de contacts (figure 1.5). On considère un solide inclus dans un autre. A partir des mesures de déplacement sur la frontière atteignable, on souhaite identifier les zones de contacts et de frottement entre ces deux solides.

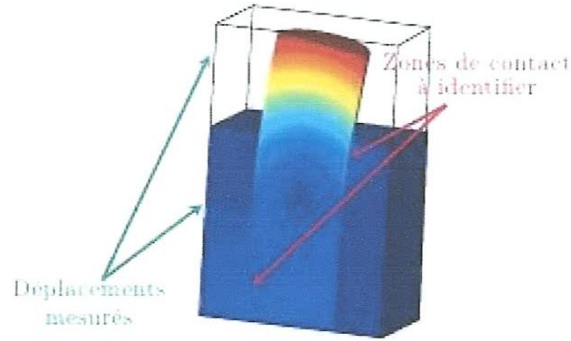


FIGURE 1.5 – Inclusion

### 1.4.5 Exemples de problèmes inverses liés au bi-Laplacien

Plusieurs années après l'article de Cecchi et Cannon [12] dans lequel ils étudient un problème inverse associé au bilaplacien avec des conditions aux limites uniquement accessibles sur une partie du bord du domaine de la solution, Lesnic et Marin [13] appliquent une méthode des solutions fondamentales à l'équation biharmonique suivante :

$$\Delta(\Delta)u(x) = \Delta^2 u(x) = 0, \quad x \in \Omega,$$

qui é au système d'équations :

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= v(x), & x \in \Omega \\ \Delta v(x) &= 0, & x \in \Omega \end{aligned}$$

modélisant l'écoulement de Stokes, auquel cas les fonctions  $u$  et  $v$  sont appelées la fonction courant et le tourbillon de l'écoulement du fluide.

L'opérateur biharmonique régit également la flexion des plaques minces en petits déplacements. Comme on le verra, le problème de Cauchy en théorie des plaques minces peut être ramené à une cascade de deux problèmes de Cauchy pour le laplacien. Alors  $u$  désigne la déflexion de la plaque et  $v$  une fonction auxiliaire qui permet de reconstituer les moments de flexion.

L'ouvert  $\Omega$  est borné dans  $\mathbb{R}^2$ . Son bord  $\Gamma = \Gamma_d \cup \Gamma_i$  est tel que  $\Gamma_d$  et  $\Gamma_i$  soient deux parties disjointes et non vides. Plusieurs formulations relatives aux conditions aux limites portant sur  $u$  et  $v$  peuvent être prises en compte sur  $\Gamma_d$  (aucune condition n'est donnée sur  $\Gamma_i$ ). Par exemple

$$u(x)|_{\Gamma_d} = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x)}{\partial n}|_{\Gamma_d} = u_1(x), \quad v(x)|_{\Gamma_d} = v_0(x), \quad \frac{\partial v(x)}{\partial n}|_{\Gamma_d} = v_1(x)$$

ou bien

$$u(x)|_{\Gamma_d} = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x)}{\partial n}|_{\Gamma_i} = u_1(x), \quad v(x)|_{\Gamma_d} = v_0(x),$$

L'idée principale de la méthode de Lesnic et Marin est de construire une approximation de la solution du problème inverse par une combinaison linéaire de solutions fondamentales en des points de singularité par rapport aux points de source. Ces derniers sont situés en dehors du domaine  $\Omega$ . La méthode des solutions fondamentales étant principalement numérique, le problème approché conduit à la résolution d'un système d'équations linéaires dont la solution inconnue  $x$  satisfait l'égalité :

$$Ax = F. \tag{1.6}$$

La matrice des solutions fondamentales  $\mathbb{A}$  et le vecteur  $\mathbb{F}$  sont donnés par des équations définies dans [13]. Le système linéaire précédent étant mal conditionné à cause du caractère mal posé du problème inverse initial.

## Chapitre 2

# Méthode de régularisation par des conditions auxiliaires

*« Perhaps the most famous inverse problem for the mathematical community is : Can one hear the shape of a drum ?. That is : Is one able to figure out the shape of a drum based on the sound it emits ? »*

---

Kac, M.

### Sommaire

---

<b>2.1 Détermination de la solution</b> . . . . .	<b>12</b>
2.1.1 Instabilité de la solution . . . . .	13
<b>2.2 Présentation de la méthode de régularisation</b> . . . . .	<b>14</b>
2.2.1 Détermination de la solution du problème $(P_n^\delta)$ . . . . .	16
2.2.2 Dépendance continue . . . . .	16
2.2.3 Estimations de convergence sous données exactes . . . . .	18
<b>2.3 Estimation d'erreur sous des données bruitées</b> . . . . .	<b>20</b>

---



## 2.1 Détermination de la solution

Dans un rectangle  $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < \pi, 0 < t < T\}$ , on considère le problème biharmonique homogène suivant :

$$Lu \equiv \Delta^2 u = u_{tttt}(x, t) + 2u_{ttxx}(x, t) + u_{xxxx}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega, \quad (2.1)$$

les conditions aux limites par rapport à la variable spatiale  $x$  sont

$$u|_{x=0} = 0, \Delta u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = 0, \Delta u|_{x=\pi} = 0, \quad (2.2)$$

et les conditions aux limites par rapport à la variable spatiale  $t$  sont données par

$$u|_{t=0} = f(x), \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = g(x), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (2.3)$$

$$\Delta u|_{t=T} = h(x), \frac{\partial \Delta u}{\partial t}|_{t=T} = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (2.4)$$

où  $\Delta^2$  est l'opérateur bilaplacien,  $T > 0$   $f, g$  et  $h$  sont des fonctions dans  $L^2_{(0,\pi)}$ . On note brièvement les équations (2.1)-(2.4) par (BHP).

On va construire une solution  $u \in C^4(\Omega) \cap C^3(\bar{\Omega})$  de l'équation (2.1) vérifiant les conditions aux limites (2.3)-(2.4), sous la forme

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k(x) \varphi_k(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(t) \sin(kx), \quad (2.5)$$

où  $\varphi_k(t) = \langle u(x, t), \omega_k(x) \rangle_{L^2(0,\pi)}$  et  $\omega_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(kx)$ ,  $k = 1, 2, \dots$  représente une base orthonormée dans  $L^2(0, \pi)$ .

En supposant que la série (2.5) est convergente, on injecte (2.5) dans l'équation (2.1) et dans les conditions aux limites (2.2)-(2.4), on obtient les équations suivantes :

$$\varphi_k^{(4)}(t) - 2k^2 \varphi_k''(t) + k^4 \varphi_k(t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (2.6)$$

$$\varphi_k(0) = c_k(f), \quad \varphi_k'(0) = c_k(g), \quad (2.7)$$

$$\varphi_k''(T) - k^2 \varphi_k(T) = c_k(h), \quad \varphi_k^{(3)}(T) - k^2 \varphi_k'(T) = 0. \quad (2.8)$$

où  $c_k(f)$ ,  $c_k(g)$  et  $c_k(h)$  sont les coefficients de Fourier des fonctions  $f, g$  et  $h$  respectivement, avec

$$f(x) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} c_{\lambda}(f) \omega_{\lambda}(x), \quad g(x) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} c_{\lambda}(g) \omega_{\lambda}(x) \quad \text{et} \quad h(x) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} c_{\lambda}(h) \omega_{\lambda}(x).$$

La solution de (2.6) est donnée par

$$\varphi_k(t) = (c_1 t + c_2) e^{kt} + (c_3 t + c_4) e^{-kt},$$

on remplace cette dernière expression dans (2.7), (2.8) on obtient le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} c_2 + c_4 & = c_k(f) \\ c_1 + kc_2 + c_3 - kc_4 & = c_k(g) \\ 2ke^{kT} c_1 - 2ke^{-kT} c_3 & = c_k(h) \\ e^{kT} c_1 + e^{-kT} c_3 & = 0 \end{cases}$$

On peut montrer que le déterminant de la matrice du système est non nul,

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & k & 1 & -k \\ 2ke^{kT} & 0 & -2ke^{-kT} & 0 \\ e^{kT} & 0 & e^{-kT} & 0 \end{pmatrix},$$

car  $\det \Sigma = 8k^2 \geq 8 > 0$ , ce qui donne l'existence d'une seule solution possible. Par un calcul direct on détermine les constantes  $c_1, c_2, c_3$  et  $c_4$ , puis on trouve

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k(x) \left\{ \cosh(kt) c_k(f) + \frac{\sinh(kt)}{k} c_k(g) \right. \\ & \left. + \frac{\sinh(kT) \sinh(kt)}{2k^2} c_k(h) - t \frac{\sinh(k(T-t))}{2K} c_k(h) \right\}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

### 2.1.1 Instabilité de la solution

Si on pose  $g(x) = h(x) = 0$ , il est facile de voir qu'un choix de  $f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(kx)}{k}$  qui tend vers zéro quand  $k \rightarrow \infty$ , mais la solution  $u(x, t)$  ne tend pas vers zéro. Cependant, le problème (BHP) est mal-posé au sens d'Hadamard [1].

Nous présentons également la classe abstraite de Gevrey des fonctions de commande  $p > 0$  et index  $q$ , défini par :

$$\mathcal{C}_{p,q}^{\eta} = \left\{ \eta \in L^2(0, \pi) : \|\eta\|_{p,q}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{2pkT}}{k^q} c_k^2(\eta) < +\infty \right\} \quad p > 0, q \in \mathbb{R}, \quad (2.10)$$

où  $c_k(\eta) = \langle \eta, \omega_k \rangle_{L^2(0,\pi)}$  est le coefficient de Fourier de la fonction  $\eta$ .

Maintenant, on présente des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité données par [16], ces conditions sont basées sur la notion de solution forte.

**Définition 2.1.1** (voir [16]) On dit que la fonction  $u \in L^2(\Omega)$  est une solution forte de (BHP) s'il existe une suite de fonctions  $u_m \in C^4(\Omega) \cap C^3(\bar{\Omega})$  vérifiant les conditions (2.2)-(2.4) telle que  $u_m$  converge vers  $u$  par rapport à la norme  $L^2(\Omega)$ .

On choisit la suite des sommes partielles suivante :

$$u_m(x, t) = \sum_{k=1}^m \omega_k(x) \varphi_k(t). \quad (2.11)$$

Si  $f, g$  et  $h \in L^2(0, \pi)$ , alors, l'existence d'une solution forte du problème (BHP) est équivalente à la convergence de la suite  $u_m$  dans  $L^2(\Omega)$ .

En se basant sur l'égalité de Parseval, la convergence de la suite  $u_m$  dans  $L^2(\Omega)$  est équivalente à la convergence de la série numérique

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\varphi_k(t)\|_{L^2(0,1)}^2 < \infty. \quad (2.12)$$

**Lemme 2.1.1** Le (BHP) admet une solution forte si et seulement si

$$f \in \mathcal{C}_{1,1}^f \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{2kT}}{k} |c_k(f)|^2 < \infty, \quad (2.13)$$

$$g \in \mathcal{C}_{1,3}^g \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{2kT}}{k^3} |c_k(g)|^2 < \infty, \quad (2.14)$$

$$h \in \mathcal{C}_{2,5}^h \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{4kT}}{k^5} |c_k(h)|^2 < \infty, \quad (2.15)$$

où  $c_k(f)$ ,  $c_k(g)$  et  $c_k(h)$  sont les coefficients de Fourier des fonctions  $f$ ,  $g$  et  $h$  respectivement.

## 2.2 Présentation de la méthode de régularisation

Dans ce travail on va régulariser le problème (BHP) par la méthode des conditions auxiliaires, cette méthode consiste à remplacer le problème en question par une famille de problèmes dépendant d'un petit paramètre de régularisation noté  $\alpha$ .

$$(P_{\alpha}^{\delta}) \quad \begin{cases} \Delta^2 u_{\alpha}^{\delta}(x, t) = 0, & (x, t) \in \Omega, \\ u_{\alpha}^{\delta}(0, t) = \Delta u_{\alpha}^{\delta}(0, t) = 0, & 0 \leq t \leq T, \\ u_{\alpha}^{\delta}(\pi, t) = \Delta u_{\alpha}^{\delta}(\pi, t) = 0, & 0 \leq t \leq T, \\ u_{\alpha}^{\delta}(x, 0) + \alpha u_{\alpha}^{\delta}(x, T) = f^{\delta}(x), \quad \frac{\partial u_{\alpha}^{\delta}(x, 0)}{\partial t} = g^{\delta}, & 0 \leq x \leq \pi, \\ \Delta u_{\alpha}^{\delta}(x, T) + \alpha \Delta u_{\alpha}^{\delta}(x, 0) = h^{\delta}(x), \quad \frac{\partial \Delta u_{\alpha}^{\delta}(x, T)}{\partial t} = 0, & 0 \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

où la condition  $u_{\alpha}^{\delta}(x, 0) = f^{\delta}$  est remplacée par la condition non locale

$$u_{\alpha}^{\delta}(x, 0) + \alpha u_{\alpha}^{\delta}(x, T) = f^{\delta},$$

et la condition  $\Delta u_{\alpha}^{\delta}(x, T) = h^{\delta}$  est remplacée par la condition non locale

$$\Delta u_{\alpha}^{\delta}(x, T) + \alpha \Delta u_{\alpha}^{\delta}(x, 0) = h^{\delta},$$

avec  $\alpha$  est le paramètre de régularisation, et les données bruitées  $f^{\delta}, g^{\delta}, h^{\delta} \in L^2(0, \pi)$ , vérifient

$$\|f^{\delta} - f\|_{L^2(0, \pi)} \leq \delta_1, \quad \|g^{\delta} - g\|_{L^2(0, \pi)} \leq \delta_2, \quad \|h^{\delta} - h\|_{L^2(0, \pi)} \leq \delta_3. \quad (2.16)$$

On note  $\delta = \max(\delta_1, \delta_2, \delta_3) > 0$  le niveau de bruit.

Puis, on montre les convergences suivantes :

$$\|u_{\alpha}^{\delta}(\cdot, 0) - f\| \rightarrow 0, \quad \text{si } \alpha \rightarrow 0, \quad (2.17)$$

$$\|\Delta u_{\alpha}^{\delta}(\cdot, T) - h\| \rightarrow 0, \quad \text{si } \alpha \rightarrow 0, \quad (2.18)$$

$$\sup_{0 < t \leq T} \|u_{\alpha}^{\delta}(\cdot, t) - u(\cdot, t)\| \rightarrow 0, \quad \text{si } \alpha \rightarrow 0, \quad (2.19)$$

$$\sup_{0 \leq t < T} \|\Delta u_{\alpha}^{\delta}(\cdot, t) - \Delta u(\cdot, t)\| \rightarrow 0, \quad \text{si } \alpha \rightarrow 0. \quad (2.20)$$

Avant d'énoncer les principaux résultats, nous introduisons certaines fonctions fréquemment utilisées.

Pour  $k \geq 1$ , nous introduisons les fonctions

$$N_{\alpha}(k) = (1 + \alpha \cosh(kT)) \leq N_{\alpha}^2(k), \quad (2.21)$$

$$G_{\alpha}(k) = \frac{\alpha \cosh(kT)}{N_{\alpha}(k)}. \quad (2.22)$$

Il est clair que

$$G_\alpha(k) = \frac{\alpha \cosh(kT)}{N_\alpha(k)} \leq \begin{cases} \frac{\alpha e^{kT}}{1 + \frac{\alpha}{2} e^{kT}} = \frac{2\alpha}{\alpha + 2e^{-kT}}, \\ \alpha \cosh(kT) \\ 1. \end{cases} \quad (2.23)$$

On donne maintenant un lemme technique, qui joue le rôle clé dans notre analyse et calculs.

**Lemme 2.2.1** Soit

$$[1, +\infty[\ni z \mapsto \mathcal{R}_r(z) = \frac{1}{\alpha z^r + 2e^{-zT}}, \quad (2.24)$$

où  $\alpha > 0$ ,  $T > 0$ , et  $r \geq 1$ . Alors on a

1.

$$\mathcal{R}_r(z) \leq \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\ell_1}{\ln(\ell_2(1/\alpha))} \right)^r, \quad (2.25)$$

où  $\ell_1 = rT$ , et  $\ell_2 = 2(T)^r / r$ .

2. si  $r = 1$ , la fonction  $z \mapsto \mathcal{R}_1(z)$  peut également être estimé comme suit

$$\mathcal{R}_1(z) \leq \frac{T}{\alpha(\ln(2T/\alpha) + 1)}. \quad (2.26)$$

**Preuve 2.2.1** 1. En dérivant la fonction  $\mathcal{R}_r(z)$  par rapport à  $z$ , on obtient

$$\mathcal{R}'_r(z) = \frac{-1}{(\alpha z^r + 2e^{-zT})^2} (\alpha r z^{r-1} - 2Te^{-zT}).$$

Ainsi  $\mathcal{R}'_r(z) = 0$  quand

$$\hat{z} = \{z \mapsto \alpha r z^{r-1}\} \cap \{z \mapsto 2Te^{-zT}\}, \quad (2.27)$$

donc

$$\mathcal{R}_r(z) \leq \mathcal{R}_r(\hat{z}) \leq \frac{1}{\alpha \hat{z}^r + 2e^{-\hat{z}T}} \leq \frac{1}{\alpha \hat{z}^r}. \quad (2.28)$$

Maintenant nous avons

$$\alpha r \hat{z}^{r-1} - 2Te^{-\hat{z}T} = 0 \Leftrightarrow \frac{2T}{\alpha r} = \hat{z}^{r-1} e^{\hat{z}T}.$$

En utilisant l'inégalité ( $e^s \geq s$ ,  $s \geq 0$ ), puis pour  $s = \hat{z}T$ , nous obtenons  $e^{\hat{z}T} \geq \hat{z}T$  et nous pouvons écrire

$$\frac{2T}{\alpha r} \leq e^{\hat{z}T} \left( \frac{e^{\hat{z}T}}{T} \right)^{r-1} \leq T^{1-r} e^{r\hat{z}T},$$

ce qui implique que

$$\hat{z} > \frac{1}{rT} \ln \left( \frac{2T^r}{\alpha r} \right). \quad (2.29)$$

Par conséquent, nous obtenons

$$\mathcal{R}_r(z) \leq \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\ell_1}{\ln(\ell_2(1/\alpha))} \right)^r, \quad (2.30)$$

où  $\ell_1 = rT$ , et  $\ell_2 = 2(T)^r / r$ .

2. si  $r = 1$ , Dérivons la fonction  $\mathcal{R}_1(z)$  par rapport à  $z$ , alors

$$\mathcal{R}'_1(z) = \frac{-1}{(\alpha z + 2e^{-zT})^2} (\alpha - 2Te^{-zT}).$$

ainsi  $\mathcal{R}'_1(z) = 0$  quand

$$z^* = \frac{1}{T} \ln(2T/\alpha),$$

nous avons donc  $z^*$  est la valeur critique à laquelle  $\mathcal{R}_1$  réalise son maximum. Donc on peut écrire l'inégalité

$$\mathcal{R}_1(z) \leq \mathcal{R}_1(z^*) = \frac{T}{\alpha(\ln(2T/\alpha) + 1)}.$$

### 2.2.1 Détermination de la solution du problème $(P_\alpha^\delta)$

Par un calcul similaire à celui utilisé dans la détermination de la solution du problème (BHP) on trouve

$$\begin{cases} \alpha Te^{kT} c_1 + (1 + \alpha e^{kT}) c_2 + \alpha Te^{-kT} c_3 + (1 + \alpha e^{-kT}) c_4 = c_k(f) \\ c_1 + kc_2 + c_3 - kc_4 = c_k(g) \\ 2k(e^{kT} + \alpha) c_1 - 2k(e^{-kT} + \alpha) c_3 = c_k(h) \\ 2k^2 e^{kT} c_1 + 2k^2 e^{-kT} c_3 = 0, \end{cases}$$

En résolvant le système (2.2.1), on trouve :

$$\begin{cases} c_1 = \frac{e^{kT}}{4kN_\alpha(k)} c_k(h) \\ c_2 = \frac{c_k(f)}{\alpha(k)} + \frac{(1 + \alpha e^{kT})}{2kN_\alpha(k)} c_k(g) + \frac{(1 + \alpha e^{-kT}) \sinh(kT)}{4k^2 N_\alpha^2(k)} c_k(h) \\ c_3 = -\frac{e^{-kT}}{4kN_\alpha(k)} c_k(h) \\ c_4 = \frac{c_k(f)}{2N_\alpha(k)} - \frac{(1 + \alpha e^{kT})}{2kN_\alpha(k)} c_k(g) - \frac{(1 + \alpha e^{kT}) \sinh(kT)}{4k^2 N_\alpha^2(k)} c_k(h). \end{cases}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} u_\alpha(x, t) = & \sum_{k \geq 1} \omega_k \left\{ \frac{\cosh(kt)}{N_\alpha(k)} c_k(f) + \frac{\sinh(kt) - \alpha \sinh(k(T-t))}{kN_\alpha(k)} c_k(g) - t \frac{\sinh(k(T-t))}{2kN_\alpha(k)} c_k(h) \right. \\ & \left. + \frac{\sinh(kT)[\sinh(kt) - \alpha \sinh(k(T-t))]}{2k^2 N_\alpha^2(k)} c_k(h) \right\} \end{aligned} \quad (2.31)$$

La solution avec des données exactes .

### 2.2.2 Dépendance continue

**Théorème 2.2.1** Soient  $f, g, h \in L^2_{(0,\pi)}$ . Alors  $u_\alpha(x, t)$  dépend continûment par rapport aux données  $f, g, h$ , et on a :

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(x, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 & \leq \frac{4}{\alpha^2} \|f\|_{L^2_{(0,\pi)}}^2 + \left( \frac{8}{\alpha^2} + 32 \left( \frac{T}{\alpha(\ln(2T/\alpha) + 1)} \right)^2 \right) \|g\|_{L^2_{(0,\pi)}}^2 \\ & + \left( \frac{1 + \alpha^2(1 + T^2) + 2\alpha}{\alpha^4} \right) \|h\|_{L^2_{(0,\pi)}}^2 \end{aligned} \quad (2.32)$$

**Preuve 2.2.2** La fonction  $\cosh$  est croissante donc  $\frac{\coth(kt)}{\cosh(kT)} \leq 1$  et  $\cosh(x) > \sinh(x)$  puis en utilisant le fait que  $(x + y + z)^2 \leq 3x^2 + 3y^2 + 3z^2$ , don on peut écrire

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(x, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \|e_1 + e_2 + e_3 + e_4\|_{L^2_{(0,T)}}^2 \\ &\leq 4 \sum_{k \geq 1} (\|e\|^2 + \|e\|^2 + \|e\|^2) \\ &= E_1 + E_2 + E_3 + E_4, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} E_1 &= 4 \sum_{k \geq 1} \|e_1\|^2 = 4 \sum_{k \geq 1} \frac{\cosh^2(kt)}{N_\alpha^2(k)} |c_k(f)|^2 \\ &= 4 \sum_{k \geq 1} \frac{\cosh^2(kt)}{(1 + \alpha \cosh(kT))^2} |c_k(f)|^2 \\ &\leq 4 \sum_{k \geq 1} \frac{\cosh^2(kt)}{\alpha^2 \cosh(kT)^2} |c_k(f)|^2 \text{ car } \cosh \text{ est une fonction croissante } \frac{\coth(kt)}{\cosh(kT)} \leq 1 \\ &\leq \frac{4}{\alpha^2} \sum_{k \geq 1} |c_k(f)|^2 = \frac{4}{\alpha^2} \|f\|_{L^2_{(0,\pi)}}^2 \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} E_2 &= 4 \sum_{k \geq 1} \|e_2\|^2 = 4 \sum_{k \geq 1} \frac{(\sinh(kT) - \alpha \sinh(k(T-t)))^2}{k^2 N_\alpha^2(k)} |c_k(g)|^2 \\ &\leq 8 \sum_{k \geq 1} \frac{\sinh(kT)}{k^2 \alpha^2 \cosh^2(kT)} |c_k(g)|^2 + 8 \sum_{k \geq 1} \frac{\alpha^2 \sinh^2(k(T-t))}{k^2 N_\alpha^2(k)} |c_k(g)|^2 \\ &\leq \frac{8}{\alpha^2} \|g\|_{L^2_{(0,\pi)}}^2 + \sum_{k \geq 1} \frac{4\alpha^2}{(2ke^{-kT} + k\alpha)^2} |c_k(g)|^2 \\ &\leq \frac{8}{\alpha^2} \|g\|_{L^2_{(0,\pi)}}^2 + 32 \left( \frac{T}{\alpha(\ln(2T/\alpha) + 1)} \right)^2 \|g\|_{L^2_{(0,\pi)}}^2 \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} E_3 &= 4 \sum_{k \geq 1} \|e_3\|^2 = 4 \sum_{k \geq 1} \left( \frac{t \sinh(k(T-t))}{2k N_\alpha(k)} \right)^2 |c_k(h)|^2 \\ &\leq \frac{1}{\alpha^2} t^2 \sum_{k \geq 1} \frac{\sinh(kT)^2}{\cosh(kT)^2} |c_k(h)|^2 \\ &\leq \frac{1}{\alpha^2} T^2 \sum_{k \geq 1} \frac{\sinh(kT)^2}{\cosh(kT)^2} |c_k(h)|^2 \\ &\leq \frac{1}{\alpha^2} T^2 \sum_{k \geq 1} |c_k(h)|^2 = \frac{1}{\alpha^2} T^2 \|h\|_{L^2_{(0,\pi)}}^2 \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} E_4 &= 4 \sum_{k \geq 1} \|e_4\|^2 = 4 \sum_{k \geq 1} \frac{(\sinh(kT)[\sinh(kt) - \alpha \sinh(k(T-t))])^2}{4k^4 N_\alpha^4(k)} |c_k(h)|^2 \\ &\leq \frac{1}{\alpha^4} \sum_{k \geq 1} \frac{\sinh(kT)^4}{\cosh(kT)^4} |c_k(h)|^2 + \frac{1}{\alpha^2} \sum_{k \geq 1} \frac{\sinh(kT)^4}{\cosh(kT)^4} |c_k(h)|^2 \\ &\quad + \frac{2}{\alpha^3} \sum_{k \geq 1} \frac{\sinh(kT)^4}{\cosh(kT)^4} |c_k(h)|^2 \\ &= \left( \frac{1}{\alpha^4} + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha^3} \right) \|h\|_{L^2_{(0,\pi)}}^2 \end{aligned} \quad (2.36)$$

En sommant les inégalités (2.33), (2.34), (2.35) et (2.36) on obtient l'estimation (2.32)

### 2.2.3 Estimations de convergence sous données exactes

**Théorème 2.2.2** Pour tous  $f, g$  dans  $L_2(0, \pi)$  nous avons

1. Si  $h \in \mathcal{C}_{1,0}^h$ , alors  $\|u_\alpha(\cdot, 0) - f\|$  tend vers zéro quand  $\alpha$  tend vers zéro. C'est à dire que  $u_\alpha(\cdot, 0)$  converge vers  $f$  dans  $L^2(0, \pi)$ .
2. Pour tous  $f, g$  dans  $L^2(0, \pi)$ , alors  $\|\Delta u_\alpha(\cdot, T) - h\|$  tend vers zéro quand  $\alpha$  tend vers zéro. C'est à dire que  $\Delta u_\alpha(\cdot, T)$  converge vers  $h$  dans  $L^2(0, \pi)$ .

**Preuve 2.2.3** — Preuve de la partie (1)

Si  $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k(x) c_k(f)$  et  $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k(x) c_k(g)$ .  $h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k(x) c_k(h)$  Puis, à partir (2.21), (2.22) et l'inégalité  $(x + y + z)^2 \leq 3x^2 + 3y^2 + 3z^2$ , nous avons

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(\cdot, 0) - f\|^2 &= \left\| \sum_{k \geq 1} \omega_k(x) \left\{ \frac{c_k(f)}{N_\alpha(k)} - \frac{\alpha \sinh(kT)}{k N_\alpha(k)} c_k(g) - \frac{\alpha \sinh^2(kT)}{2k^2 N_\alpha^2(k)} c_k(h) - c_k(f) \right\} \right\|^2 \\ &\leq 3 \sum_{k \geq 1} \frac{\alpha^2 \cosh(kT)^2}{(1 + \alpha \cosh(kT))^2} |c_k(f)|^2 + 3 \sum_{k \geq 1} \frac{\alpha^2 \sinh(kT)^2}{k^2 (1 + \alpha \cosh(kT))^2} |c_k(g)|^2 \\ &\leq 3 \sum_{k \geq 1} \frac{\alpha^2 \sinh(kT)^4}{4k^4 (1 + \alpha \cosh(kT))^4} |c_k(h)|^2 \\ &\leq \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 \end{aligned} \quad (2.37)$$

Ensuite, en utilisant (2.23) et le fait que

$$\|f\|_{L^2_{(0,\pi)}}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k(f)|^2 \geq \sum_{N_1+1}^{\infty} |c_k(f)|^2, \quad (2.38)$$

où  $N_1$  est une constante positive qui sera donnée plus tard. De plus on a

$$h \in \mathcal{C}_{1,0}^h \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} e^{2kT} |c_k(g)|^2 < \infty, \quad (2.39)$$

donc on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= 3 \sum_{k \geq 1} \frac{\alpha^2 \cosh(kT)^2}{(1 + \alpha \cosh(kT))^2} |c_k(f)|^2 \\ &= 3 \sum_{k=1}^{N_1} \frac{\alpha^2 \cosh(kT)^2}{(1 + \alpha \cosh(kT))^2} |c_k(f)|^2 + 3 \sum_{k=N_1+1}^{\infty} \frac{\alpha^2 \cosh(kT)^2}{(1 + \alpha \cosh(kT))^2} |c_k(f)|^2 \\ &= 3 \sum_{k=1}^{N_1} \alpha^2 \cosh(kT)^2 |c_k(f)|^2 + 3 \sum_{k=N_1+1}^{\infty} |c_k(f)|^2, \end{aligned} \quad (2.40)$$

puisque  $f \in L^2_{(0,\pi)}$  et d'après (2.38), on fixe  $\varepsilon > 0$  et on choisit  $N_1$  un entier naturel positif tq

$$\sum_{k=N_1+1}^{\infty} |c_k(f)|^2 < \frac{\varepsilon}{18}, \quad (2.41)$$

et on choisit  $\alpha$  tq

$$\alpha^2 < \varepsilon (18 \sum_{k=1}^{N_1} \cosh^2(kT) |c_k(f)|^2)^{-1} \quad (2.42)$$

pour avoir

$$3 \sum_{k=1}^{N_1} \alpha^2 \cosh(kT)^2 |c_k(f)|^2 < \frac{\varepsilon}{6},$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 &= 3 \sum_{k \geq 1} \frac{\alpha^2 \sinh^2(kT)}{k^2 N_\alpha(k)^2} |c_k(g)|^2 \\ &= 3 \sum_{k=1}^{N_2} \frac{\alpha^2 \sinh^2(kT)}{(1 + \alpha \cosh(kT))^2} |c_k(g)|^2 + 3 \sum_{k=N_2+1}^{\infty} \frac{\alpha^2 \sinh^2(kT)}{k^2 (1 + \alpha \cosh(kT))^2} |c_k(g)|^2 \\ &\leq 3 \sum_{k=1}^{N_2} \alpha^2 \sinh^2(kT) |c_k(g)|^2 + 3 \sum_{k=N_2+1}^{\infty} |c_k(g)|^2 \end{aligned} \quad (2.43)$$

pour continuer le calcul, il suffit d'utiliser (2.39) D'après  $g \in L^2_{(0,\pi)}$  et d'après (2.38) donc on fixe  $\varepsilon > 0$  et  $N_2$  entier naturel positif tq

$$\sum_{k=N_1+1}^{\infty} |c_k(g)|^2 < \frac{\varepsilon}{18} \text{ et on choisit } \alpha \text{ tq}$$

$$3 \sum_{k=1}^{N_1} \alpha^2 \cosh(kT)^2 |c_k(g)|^2 < \frac{\varepsilon}{6}$$

Il suffit prendre  $\alpha$  tq

$$\alpha^2 < \varepsilon \left( 18 \sum_{k=1}^{\infty} |c_k(f)|^2 \right)^{-1}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3 &= 3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^2 \sinh^4(kT)}{4k^4 N_\alpha(k)^4} |c_k(g)|^2 \\ &= 3 \sum_{k=1}^{N_3} \frac{\alpha^2 \sinh^4(kT)}{4k^4 (1 + \alpha \cosh(kT))^4} |c_k(g)|^2 + 3 \sum_{k=N_3+1}^{\infty} \frac{\alpha^2 \sinh^4(kT)}{4k^4 (1 + \alpha \cosh(kT))^4} |c_k(g)|^2 \\ &\leq \frac{3}{4} \sum_{k=1}^{N_3} \frac{\alpha^2 \sinh^4(kT)}{(1 + \alpha \cosh(kT))^2} |c_k(g)|^2 + \frac{3}{4} \sum_{k=1}^{N_3} \frac{\alpha^2 \sinh^4(kT)}{(1 + \alpha \cosh(kT))^4} |c_k(g)|^2 \\ &\leq \frac{3}{4} \sum_{k=1}^{N_3} \alpha^2 \sinh^4(kT) |c_k(g)|^2 + \frac{3}{4} \sum_{k=N_3+1}^{\infty} \frac{\alpha^2 \sinh^4(kT)}{(1 + \alpha \cosh(kT))^2} |c_k(g)|^2 \end{aligned} \quad (2.44)$$

il suffit de prendre condition sur  $h$ , utilisé (2.39), on peut écrire :

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} \sum_{k=1}^{\infty} e^{2kT} |c_k(g)|^2 &< \frac{\varepsilon}{8} \\ \sum_{k=1}^{\infty} e^{2kT} |c_k(h)|^2 &< \frac{2\varepsilon}{9} \end{aligned}$$

et on choisit  $\alpha$  tq

$$\sum_{k=1}^{N_3} \alpha^2 \sinh^4(kT) |c_k(g)|^2 < \frac{2\varepsilon}{9}$$

Il suffit prendre  $\alpha$  tq

$$\alpha^2 < 2\varepsilon (9 \sum_{k=1}^{N_3} \alpha^2 \sinh^4(kT) |c_k(g)|^2)^{-1}$$



— Preuve de la partie (2)

$$\begin{aligned}
 \|\Delta u_\alpha(0, T) - h\|^2 &= \sum_{k \geq 1} \frac{\alpha^2 \cosh^2(kT)}{(1 + \alpha^2 \cosh(kT))^2} |c_k(h)|^2 \\
 &= \sum_{k=1}^{N_4} \frac{\alpha^2 \cosh^2(kT)}{(1 + \alpha^2 \cosh(kT))^2} |c_k(h)|^2 + \sum_{k=N_4+1}^{\infty} \frac{\alpha^2 \cosh^2(kT)}{(1 + \cosh(kT))^2} |c_k(h)|^2 \\
 &\leq \sum_{k=1}^{N_4} \alpha^2 \cosh^2(kT) |c_k(h)|^2 + \sum_{k=N_4+1}^{\infty} |c_k(h)|^2 \tag{2.45}
 \end{aligned}$$

$h \in L^2(0, \pi)$  et d'après (2.38), on fixe  $\epsilon > 0$  et  $N_4$  entier naturelle positif tq :

$$\sum_{k=N_4+1}^{\infty} |c_k(h)|^2 < \epsilon,$$

et on choisit  $\alpha$  tq

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{N_4} \alpha^2 \cosh^2(kT) |c_k(h)|^2 &< \epsilon, \\
 \alpha^2 &< \epsilon \left( \sum_{k=1}^{N_4} \alpha^2 \cosh^2(kT) |c_k(h)|^2 \right)^{-1}
 \end{aligned}$$

### 2.3 Estimation d'erreur sous des données bruitées

Maintenant, on suppose que les données  $f$ ,  $g$  et  $h$  sont bruitées, c'est-à-dire que, si on a  $f^\delta$ ,  $g^\delta$  et  $h^\delta$  à la place de  $f$ ,  $g$  et  $h$  respectivement avec

$$\|f^\delta - f\| \leq \delta_1, \quad \|g^\delta - g\| \leq \delta_2, \quad \|h^\delta - h\| \leq \delta_3. \tag{2.46}$$

Ensuite, nous avons le théorème suivant

**Théorème 2.3.1** *Supposons que  $f$ ,  $g$  et  $h$  vérifient les conditions suivantes :*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} e^{2kT} |c_k(f)|^2 \leq E_1^2, \quad (r > 0), \tag{2.47}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{4kT} |c_k(g)|^2 \leq E_{2,0}^2, \tag{2.48}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{4kT} |c_k(h)|^2 \leq E_{3,0}^2, \tag{2.49}$$

et  $u$  donnée par (2.9) est la solution exacte du problème mal-posé (BHP),  $u_\alpha^\delta$  définie par (2.31) est la solution régularisée construite à partir du problème  $(P_\alpha^\delta)$  associé aux données bruitées  $f^\delta$ ,  $g^\delta$  et  $h^\delta$ . Pour tout  $\delta = \max(\delta_1, \delta_2, \delta_3) > 0$  les données mesurées  $f^\delta$ ,  $g^\delta$  et  $h^\delta$ , vérifient (2.46) et le paramètre de régularisation  $\alpha(\delta)$  est choisi comme suit

$$\alpha = \delta^\theta, \quad (0 < \theta < \frac{1}{2}), \tag{2.50}$$

alors, pour tout  $t$  fixé ( $0 < t \leq T$ ), on a l'estimation d'erreur suivante

$$\begin{aligned} \sup_{0 < t \leq T} \|u_{\alpha}^{\delta}(\cdot, t) - u(\cdot, t)\| &\leq \sqrt{12\delta^{2-\theta} + \delta^{2(1-\theta)}(5 + T^2) + 4\delta^2 + \delta^{2(1-2\theta)} + 2\delta^{2-3\theta}} \\ &+ 4\sqrt{\left(e_4^{2r}(\alpha)E_1^2 + e_5(\alpha)(3 + T^2 + 2e_5(\alpha))E_{2,0}^2\right)}, \end{aligned}$$

où

$$e_4(\delta^{\theta}) = \left(\frac{\ell_1}{\ln(\ell_2(1/(\delta^{\theta})))}\right), \quad e_5(\delta^{\theta}) = \frac{T^2}{\ln(2T/\delta^{\theta}) + 1},$$

et  $\ell_1 = rT$ ,  $\ell_2 = 2(T)^r/r$ .

**Preuve 2.3.1** Soit  $u_{\alpha}$  la solution du problème  $(P_{\alpha}^{\delta})$  correspondante aux données exactes  $f, g$  et  $h$ . D'après l'inégalité triangulaire, il est clair que

$$\|u_{\alpha}^{\delta} - u\| \leq \|u_{\alpha}^{\delta} - u_{\alpha}\| + \|u_{\alpha} - u\|. \quad (2.51)$$

D'après le théorème (2.2.1), on a

$$\|u_{\alpha}^{\delta}(\cdot, t) - u_{\alpha}(\cdot, t)\|_{L^2(0, \pi)}^2 \leq e_1(\alpha)\|f^{\delta} - f\|^2 + e_2(\alpha)\|g^{\delta} - g\|^2 + e_3(\alpha)\|h^{\delta} - h\|^2, \quad (2.52)$$

avec

$$e_1(\alpha) = \frac{4}{\alpha^2}, \quad e_2(\alpha) = \frac{8}{\alpha^2} + 32\left(\frac{T}{\alpha(\ln(2T/\alpha) + 1)}\right)^2, \quad e_3(\alpha) = \frac{1 + \alpha^2(1 + T^2) + 2\alpha}{\alpha^4},$$

Si  $\alpha = \delta^{\theta}$ , cela implique

$$\|u_{\alpha}^{\delta}(\cdot, t) - u_{\alpha}(\cdot, t)\|_{L^2(0, \pi)} \leq \sqrt{12\delta^{2-\theta} + \delta^{2(1-\theta)}(5 + T^2) + 4\delta^2 + \delta^{2(1-2\theta)} + 2\delta^{2-3\theta}}. \quad (2.53)$$

A partir de, (2.30), (2.9), (2.31), et (2.46), on a

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t) - u_{\alpha}(\cdot, t)\|^2 &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k(x) \left\{ \left( \cosh(kt) - \frac{\cosh(kt)}{N_{\alpha}(k)} \right) c_k(f) \right. \right. \\ &+ \left( \frac{\sinh(kt)}{k} - \frac{\sinh(kt) - \alpha \sinh(k(T-t))}{kN_{\alpha}(k)} \right) c_k(g) \\ &+ \frac{\sinh(kT) \sinh(kt)}{2k^2} c_k(h) + \frac{t \sinh(k(T-t))}{2kN_{\alpha}(k)} c_k(h) \\ &- \frac{t \sinh(k(T-t))}{2k} c_k(h) - \frac{\sinh(kT) \sinh(kt)}{2k^2 N_{\alpha}^2(k)} c_k(h) \\ &\left. \left. + \frac{\alpha \sinh(kT) \sinh(k(T-t))}{2k^2 N_{\alpha}^2(k)} c_k(h) \right\} \right\|^2 \\ &\leq 4(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_4), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^2 \cosh^2(kT) \cosh^2(kt)}{N_{\alpha}^2(k)} c_k^2(f), \\ \mathcal{E}_2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^2}{k^2 N_{\alpha}^2(k)} [\sinh(k(T-t)) + \sinh(kt) \cosh(kT)]^2 c_k^2(g), \\ \mathcal{E}_3 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T^2 \alpha^2 \sinh^2(k(T-t)) \cosh^2(kT)}{4k^2 N_{\alpha}^2(k)} c_k^2(h) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_4 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sinh(kT) \sinh(kt) \cosh(kT) (\alpha^2 \cosh(kT) + 2\alpha)}{2k^2 N_{\alpha}^2(k)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha \sinh(kT) \sinh(k(T-t))}{2k^2 N_{\alpha}^2(k)} \right\}^2 c_k^2(h) \end{aligned} \quad (2.54)$$

En utilisant le lemme (2.2.1) on a

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &\leq 4\alpha^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha + 2e^{-kT})^2} \frac{k^{2r}}{k^{2r}} \cosh^2(kT) c_k^2(f) \\ &\leq 4\alpha^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha k^r + 2e^{-kT})^2} k^{2r} \cosh^2(kT) c_k^2(f) \\ &= 4\alpha^2 \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{R}_r^2(k) k^{2r} \cosh^2(kT) c_k^2(f) \\ &\leq 4(e_4(\alpha))^{2r} E_1^2, \end{aligned} \quad (2.55)$$

où  $e_4(\alpha) = \left( \frac{\ell_1}{\ln(\ell_2(1/\alpha))} \right)$ .

En utilisant l'inégalité  $(x + y + z)^2 \leq 3x^2 + 3y^2 + 3z^2$ , nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2 &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sinh^4(kT) \cosh^2(kT) 2(4\alpha^2 + \alpha^4 \cosh^2(kT))}{4k^4 N_{\alpha}^4(k)} c_k^2(g) \\ &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^2 \sinh^4(kT) \cosh^2(kT)}{k^4 N_{\alpha}^4(k)} c_k^2(g) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^4 \sinh^4(kT) \cosh^4(kT)}{k^4 N_{\alpha}^4(k)} c_k^2(g). \end{aligned}$$

Comme  $k \geq 1$ , et par (2.21), et en utilisant les inégalités  $\sinh(kT) \leq \cosh(kT) \leq e^{kT}$ ,  $\cosh(kT) \geq \frac{1}{2} e^{kT}$ , on a

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2 &\leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^2 \sinh^4(kT) \cosh^2(kT)}{k^4 N_{\alpha}^4(k)} c_k^2(g) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^4 \sinh^4(kT) \cosh^4(kT)}{k^4 N_{\alpha}^4(k)} c_k^2(g) \\ &\leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^2 e^{6kT}}{k^4 (1 + \frac{\alpha}{2} e^{kT})^2} c_k^2(g) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^4 e^{8kT}}{k^4 (1 + \frac{\alpha}{2} e^{kT})^4} c_k^2(g) \\ &\leq 8\alpha^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{4kT}}{k^2 (2ke^{-kT} + \alpha k)^2} c_k^2(g) + 8\alpha^4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{4kT}}{(2ke^{-kT} + \alpha k)^4} c_k^2(g) \\ &\leq 8\alpha^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2e^{-kT} + \alpha k)^2} e^{4kT} c_k^2(g) + 8\alpha^4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2e^{-kT} + \alpha k)^4} e^{4kT} c_k^2(g) \\ &\leq 8\alpha^2 \left( \sup_{k \geq 1} (\mathcal{Y}_1(k)) \right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{4kT} c_k^2(g) + 8\alpha^4 \left( \sup_{k \geq 1} (\mathcal{Y}_1(k)) \right)^4 \sum_{k=1}^{\infty} e^{4kT} c_k^2(g), \end{aligned}$$

on utilisant la condition (2.48) et la deuxième partie du lemme 2.2.1, la dernière inégalité peut être estimée comme suit

$$\mathcal{E}_2 \leq 8e_5(\alpha)(1 + e_5(\alpha))E_{2,0}^2, \quad (2.56)$$

où  $e_5(\alpha) = \frac{T^2}{(1 + \ln(2T/\alpha))^2}$ .

Par la même méthode utilisée dans l'estimation  $\mathcal{E}_2$ , nous concluons que

$$\mathcal{E}_3 \leq 4T^2 \alpha^2 \frac{T^2}{\alpha^2 (1 + \ln(2T/\alpha))^2} E_{2,0}^2 = 4T^2 e_5(\alpha) E_{2,0}^2, \quad (2.57)$$

$$\mathcal{E}_4 \leq 4\alpha^2 \frac{T^2}{\alpha^2(1 + \ln(2T/\alpha))^2} E_{2,0}^2 = 4e_5(\alpha) E_{2,0}^2. \quad (2.58)$$

En utilisant (2.55), (2.56), (2.57) et (2.58) nous pouvons obtenir l'estimation

$$\|u(\cdot, t) - u_\alpha(\cdot, t)\|^2 \leq 16 \left( e_4^{2r}(\alpha) E_1^2 + e_5(\alpha)(3 + T^2 + 2e_5(\alpha)) E_{2,0}^2 \right). \quad (2.59)$$

**Théorème 2.3.2** Supposons que  $f$  et  $h$  vérifient les conditions suivantes

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} |c_k(f)|^2 \leq E_0^2, \quad (r > 0), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{2kT}}{k^2} |c_k(h)|^2 \leq E_{1,1}^2,$$

et  $u$  donné par (2.9) est la solution exacte du problème mal posé (BHP),  $u_\alpha^\delta$  défini par (2.31) est la solution régularisée construite à partir du problème  $(P_\alpha^\delta)$  associée aux données bruitées.

$(f^\delta, g^\delta, h^\delta)$ . Pour chaque  $\delta > 0$  les données mesurées  $(f^\delta, g^\delta, h^\delta)$  vérifier (2.46), le paramètre de régularisation  $\alpha(\delta)$  est choisi à priori

$$\alpha = \delta^\theta, \quad (0 < \theta < \frac{1}{2}). \quad (2.60)$$

Alors on a l'estimation d'erreur suivante :

$$\begin{aligned} \|u_\alpha^\delta(\cdot, 0) - f\| &\leq \sqrt{\frac{3}{4}(e_4(\delta^\theta))^{2r} E_0^2 + \frac{3}{4}(e_5(\delta^\theta))^2 E_0^2 + \frac{3}{4}(e_5(\delta^\theta))^2 E_{1,1}^2} \\ &+ \sqrt{6}\delta^{1-\theta} + \sqrt{\frac{3}{4}}e_5(\delta^\theta)\delta \end{aligned} \quad (2.61)$$

où

$$e_4(\delta^\theta) = \left( \frac{\ell_1}{\ln(\ell_2(1/(\delta^\theta)))} \right), \quad e_5(\delta^\theta) = \frac{T^2}{\ln(2T/\delta^\theta) + 1},$$

$$\ell_1 = rT, \quad \ell_2 = 2(T)^r / r.$$

**Preuve 2.3.2** En utilisant (2.51) on a

$$\|u_\alpha^\delta(\cdot, 0) - f\| \leq \|u_\alpha^\delta(\cdot, 0) - u_\alpha(\cdot, 0)\| + \|u_\alpha(\cdot, 0) - f\|, \quad (2.62)$$

Puisque  $\frac{1}{N_\alpha(k)} \leq \frac{1}{\alpha \cosh(kT)}$ , la quantité  $\|u_\alpha^\delta(\cdot, 0) - u_\alpha(\cdot, 0)\|$  peut être estimée comme suit :

$$\begin{aligned} \|u_\alpha^\delta(\cdot, 0) - u_\alpha(\cdot, 0)\|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{N_\alpha(k)} (c_k(f^\delta) - c_k(f)) + \frac{\alpha \sinh(kT)}{k N_\alpha(k)} (c_k(g^\delta) - c_k(g)) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha \sinh^2(kT)}{k^2 N_\alpha^2(k)} (c_k(h^\delta) - c_k(h)) \right\}^2 \\ &\leq 3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{N_\alpha^2(k)} (c_k(f^\delta) - c_k(f))^2 + 3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^2 \sinh^2(kT)}{k^2 N_\alpha^2(k)} (c_k(g^\delta) - c_k(g))^2 \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^2 \sinh^4(kT)}{4k^4 N_\alpha^4(k)} (c_k(h^\delta) - c_k(h))^2 \\ &\leq \frac{3}{\alpha^2} \|f^\delta - f\|^2 + \frac{3}{\alpha^2} \|h^\delta - h\|^2 \\ &\quad + 3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^2 \sinh^2(kT)}{k^2 N_\alpha^2(k)} (c_k(g^\delta) - c_k(g))^2 \end{aligned} \quad (2.63)$$

avec

$$\begin{aligned}
 3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^2 \sinh^2(kT)}{k^2 N_{\alpha}^2(k)} (c_k(g^{\delta}) - c_k(g))^2 &\leq 3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^2 e^{2kT}}{k^2 \left(1 + \frac{\alpha e^{kT}}{2}\right)^2} \\
 &\leq 3\alpha^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{2e^{-kT} + \alpha k}{2}\right)^2} \\
 &\leq \frac{3\alpha^2}{4} \sum_{k=1}^{\infty} R_1^2(k) (c_k(g^{\delta}) - c_k(g))^2 \\
 &\leq \frac{3}{4} (e_5(\delta^{\theta}))^2 \|c_k(g^{\delta}) - c_k(g)\|^2 \quad (2.64)
 \end{aligned}$$

De (2.24), en utilisant l'inégalité  $N_{\alpha}^4(k) \geq N_{\alpha}^2(k)$ , on a

$$\begin{aligned}
 \|f - u_{\alpha}(\cdot, 0)\|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k(x) \left\{ \left( \frac{1}{N_{\alpha}(k)} - N_{\alpha}(k) \right) c_k(f) - \frac{\alpha \sinh(kT)}{k N_{\alpha}(k)} c_k(g) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\alpha \sinh^2(kT)}{2k^2 N_{\alpha}^2(k)} c_k(h) \right\}^2 \\
 &\leq 3 \sum_{k \geq 1} \frac{\alpha^2 \cosh^2(kT)}{(1 + \alpha \cosh(kT))^2} |c_k(f)|^2 + 3 \sum_{k \geq 1} \frac{\alpha^2 \sinh^2(kT)}{k^2 (1 + \alpha \cosh(kT))^2} |c_k(g)|^2 \\
 &\quad + 3 \sum_{k \geq 1} \frac{\alpha^2 \sinh^2(kT)}{4k^4 (1 + \cosh(kT))^4} |c_k(h)| \\
 &\leq J_1 + J_2 + J_3, \quad (2.65)
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 J_1 &= 3 \sum_{k \geq 1} \frac{\alpha^2 \cosh^2(kT)}{(1 + \alpha \cosh(kT))^2} c_k^2(f) \\
 &\leq 3\alpha^2 \sum_{k \geq 1} \frac{k^{2r} e^{2kT}}{k^{2r} \left(1 + \frac{\alpha e^{kT}}{2}\right)^2} c_k^2(f) \\
 &\leq \frac{3k^{2r}}{4} \sum_{k \geq 1} \left( \frac{l_1}{\ln(l_2(\frac{1}{\alpha}))} \right)^{2r} c_k^2(f) \\
 &\leq \frac{3}{4} (e_4(\delta^{\theta}))^{2r} E_0^2 \quad (2.66)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_2 &= 3 \sum_{k \geq 1} \frac{\alpha^2 \sinh^2(kT)}{k^2 (1 + \alpha \cosh(kT))^2} c_k^2(g) \\
 &\leq 3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^2 e^{2kT}}{k^2 \left(1 + \frac{\alpha e^{kT}}{2}\right)^2} c_k^2(g) \\
 &\leq 3 \sum_{k \geq 1} \frac{\alpha^2}{\left(\frac{2e^{-kT} + \alpha k}{2}\right)^2} c_k^2(g) \\
 &\leq \frac{3\alpha^2}{4} \sum_{k \geq 1} R_1^2(k) c_k^2(g) \\
 &\leq \frac{3}{4} (e_5(\delta^{\theta}))^2 E_0^2 \quad (2.67)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_3 &= 3 \sum_{k \geq 1} \frac{\alpha^2 \sinh^4(kT)}{4k^4(1 + \cosh(kT))^4} c_k^2(h) \\
 &\leq 3 \sum_{k \geq 1} \frac{\alpha^2 e^{4kT}}{4k^4 \left(1 + \frac{\alpha e^{kT}}{2}\right)^2} c_k^2(h) \\
 &\leq \frac{3}{4} \alpha^2 R_1^2(k) \sum_{k \geq 1} \frac{e^{2kT}}{k^2} c_k^2(h) \\
 &\leq \frac{3}{4} \left(e_5(\delta^\theta)\right)^2 E_{1,1}^2
 \end{aligned} \tag{2.68}$$

**Théorème 2.3.3** Si  $h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k(x) c_k(h)$ , et s'il existe une constante  $r > 0$  tq

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} e^{2kT} |c_k(h)|^2 \leq C_1^2.$$

Le paramètre de régularisation  $\alpha$  est choisi comme  $\alpha = \delta^\theta$ , ( $0 < \theta < \frac{1}{2}$ ), alors on a l'estimation d'erreur suivante

$$\sup_{0 \leq t < T} \left\| \Delta u_\alpha^\delta(\cdot, t) - \Delta u(\cdot, t) \right\| \leq \delta^{1-\theta} + 2(e_4(\delta^\theta))^r C_1, \tag{2.69}$$

où  $e_4(\delta^\theta) = \left( \frac{\ell_1}{\ln(\ell_2(1/\delta^\theta))} \right)$ ,  $\ell_1 = rT$ , and  $\ell_2 = 2(T)^r / r$ .

**Preuve 2.3.3** Premièrement on a

$$\left\| \Delta u_\alpha^\delta(\cdot, t) - \Delta u(\cdot, t) \right\| \leq \left\| \Delta u_\alpha^\delta(\cdot, t) - \Delta u_\alpha(\cdot, t) \right\| + \left\| \Delta u_\alpha(\cdot, t) - \Delta u(\cdot, t) \right\|,$$

où

$$\begin{aligned}
 \left\| \Delta u_\alpha^\delta(\cdot, t) - \Delta u_\alpha(\cdot, t) \right\|^2 &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k(x) \left\{ \frac{\cosh(k(T-t))}{N_\alpha(k)} (c_k^\delta(h) - c_k(h)) \right\} \right\|^2 \\
 &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cosh^2(kT)}{N_\alpha^2(k)} (c_k^\delta(h) - c_k(h))^2 \\
 &\leq \frac{1}{\alpha^2} \|h^\delta - h\|^2 \leq \delta^{2(1-\theta)}.
 \end{aligned} \tag{2.70}$$

et

$$\begin{aligned}
 \left\| \Delta u_\alpha(\cdot, t) - \Delta u(\cdot, t) \right\|^2 &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k(x) \left\{ \frac{\alpha \cosh(kT) \cosh(k(T-t))}{N_\alpha(k)} c_k(h) \right\} \right\|^2 \\
 &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^2 \cosh^2(kT)}{N_\alpha^2(k)} \cosh^2(kT) c_k^2(h) \\
 &\leq 4\alpha^2 \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{R}_r^2(k) k^{2r} e^{2kT} c_k^2(h) \\
 &\leq 4\alpha^2 (\sup_{k \geq 1} \mathcal{R}_r(k))^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} e^{2kT} c_k^2(h) \\
 &\leq 4e_4(\alpha)^{2r} C_1^2.
 \end{aligned} \tag{2.71}$$

En combinant (2.70) et (2.71) on obtient l'estimation recherchée.

**Théorème 2.3.4** Si

$$h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k(x) c_k(h),$$

et s'il existe une constante  $r > 0$  tq  $\sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} |c_k(h)|^2 \leq D_0^2$ . Le paramètre de régularisation  $\alpha$  est choisit comme  $\alpha = \delta^\theta$ , ( $0 < \theta < \frac{1}{2}$ ), alors on a

$$\left\| \Delta u_\alpha^\delta(\cdot, T) - h \right\| \leq \delta^{1-\theta} + 2e_4(\alpha)^r D_0. \quad (2.72)$$

**Preuve 2.3.4** Premièrement on a

$$\left\| \Delta u_\alpha^\delta(\cdot, T) - h \right\| \leq \left\| \Delta u_\alpha^\delta(\cdot, T) - \Delta u_\alpha(\cdot, T) \right\| + \left\| \Delta u_\alpha(\cdot, T) - h \right\|$$

où

$$\begin{aligned} \left\| \Delta u_\alpha^\delta(\cdot, T) - \Delta u_\alpha(\cdot, T) \right\|^2 &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k(x) \left\{ \frac{1}{N_\alpha(k)} (c_k^\delta(h) - c_k(h)) \right\} \right\|^2 \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{N_\alpha^2(k)} (c_k^\delta(h) - c_k(h))^2 \\ &\leq \frac{1}{\alpha^2} \|h^\delta - h\|^2 \leq \delta^{2(1-\theta)}. \end{aligned} \quad (2.73)$$

$$\begin{aligned} \left\| \Delta u_\alpha(\cdot, T) - h \right\|^2 &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k(x) \left\{ \frac{\alpha \cosh(kT)}{N_\alpha(k)} c_k(h) \right\} \right\|^2 \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^2 \cosh^2(kT)}{N_\alpha^2(k)} c_k^2(h) \\ &\leq 4\alpha^2 \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{R}_r^2(k) k^{2r} c_k^2(h) \\ &\leq 4\alpha^2 (\sup_{k \geq 1} \mathcal{R}_r(k))^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} c_k^2(h) \\ &\leq 4e_3(\alpha)^{2r} D_0^2. \end{aligned} \quad (2.74)$$

En combinant (2.73) et (2.74) on obtient l'estimation recherchée.

# Chapitre 3

## Illustrations numérique

*« The mathematical model will be accepted as long as its predictions do not contradict experimental facts. That is a very strong requirement of the scientific discourse. If the model fails, one does not have any impediment to throw it away, to reject it, no matter for how long and for how many it has been used. »*

*Francisco D.M.N and Antônio J.da  
S.N*

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Choix de la méthode d'approximation . . . . .</b>	<b>28</b>
3.1.1	Exemple numérique . . . . .	28
<b>3.2</b>	<b>Problème semi-discrétisé . . . . .</b>	<b>29</b>
3.2.1	Discussions . . . . .	30
<b>3.3</b>	<b>Tableaux annexes . . . . .</b>	<b>36</b>
<b>3.4</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>36</b>
<b>3.5</b>	<b>Bibliographie . . . . .</b>	<b>37</b>

---



### 3.1 Choix de la méthode d'approximation

Dans cette section, nous utilisons un exemple numérique pour vérifier l'efficacité de notre méthode de régularisation.

L'approche la plus simple pour discrétiser un problème est de décomposer la fonction  $u(x_i, t)$  sur un ensemble de points de contrôle répartis dans l'espace. On cherche alors à décrire le déplacement  $u$  en chacun des points.

Un des avantages majeurs de la méthode aux différences finies et sa simplicité, ce qui permet de traiter relativement facilement une grande variété de problèmes. De plus, on peut assez simplement obtenir une précision accrue sur les opérateurs de différentiation spatiale sous certaines contraintes de régularité de la solution.

La résolution numérique des problèmes biharmoniques implique généralement des défis importants en ce qui concerne l'approximation des dérivées d'ordre élevé et l'imposition de conditions aux limites doubles.

Pour cette raison, nous proposons une méthode de différence finie semi-discrète

Le principe des méthodes de différences finies consiste à se donner un certain nombre de points du domaine, qu'on notera  $(x_1, \dots, x_N) \subset \mathbb{R}^N$ . On approche alors l'opérateur différentiel en espace en chacun des  $x_i$  par des quotients différentiels.

#### 3.1.1 Exemple numérique

Nous choisissons  $T = 1$ ,  $f(x) = g(x) = h(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(x)$  et la solution exacte  $u(x, t)$  est calculée en résolvant le problème mal-posé de l'équation biharmonique (BHP).

$$\begin{cases} u_{tttt}(x, t) + 2u_{ttxx}(x, t) + u_{xxxx}(x, t) = 0, & (x, t) \in (0, \pi) \times (0, 1), \\ u|_{x=0} = 0, \Delta u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = 0, \Delta u|_{x=\pi} = 0, & t \in (0, 1), \\ u|_{t=0} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(x), & 0 \leq x \leq \pi, \\ \Delta u|_{t=1} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(x), \quad \frac{\partial \Delta u}{\partial t}|_{t=1} = 0, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases} \quad (3.1)$$

Il n'est pas trop difficile de voir que la solution exacte est

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \cosh(t) + \sinh(t) + \frac{1}{2} [\sinh(1) \sinh(t) - t \sinh(1-t)] \right\} \sin(x), \quad (3.2)$$

La première équation dans le problème (3.1) peut être écrite sous la forme suivante

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - A \right)^2 u(x, t) = 0,$$

où  $A$  est l'opérateur défini par

$$\begin{cases} \mathcal{D}(A) = \{u \in L^2(0, \pi) \mid u|_{x=0} = \Delta u|_{x=0} = 0, u|_{x=\pi} = \Delta u|_{x=\pi} = 0\} \\ A = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \mathcal{D}(A) \subset L^2(0, \pi), \end{cases} \quad (3.3)$$

et il est facile de vérifier que l'opérateur est positif, auto-adjoint avec une résolvante compacte ( $A$  est diagonalisable).

Les valeurs et vecteurs propres  $(\lambda_k, \varphi_k)$  de  $A$  sont  $\lambda_k = k^2$ ,  $\varphi_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(kx)$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ . Comme proposé dans le chapitre 2, au lieu de résoudre le problème mal-posé (BHP), nous résolvons le problème bien-posé  $(P_\alpha^\delta)$ , où le paramètre de régularisation  $\alpha$  doit être choisit a priori selon le critère (2.60).

### 3.2 Problème semi-discrétisé

En utilisant un méthode de différence finies centrée avec un pas  $h = \frac{\pi}{N+1}$  pour approximer la première dérivée  $u_x$  et la dérivée seconde  $u_{xx}$ , on peut obtenir le problème semi-discrét suivant (système d'équation différentielle ordinaire) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{d^2}{dt^2} - \mathbb{A}^N \right) u_\alpha(x_i, t) = 0, \quad x_i = ih, i = 1, \dots, N, t \in (0, 1), \\ u_\alpha(x_0 = 0, t) = u_\alpha(x_{N+1} = \pi, t) = 0, \quad t \in (0, 1), \\ \Delta u_\alpha(x_0 = 0, t) = \Delta u_\alpha(x_{N+1} = \pi, t) = 0, \quad t \in (0, 1), \\ u_\alpha(x_i, 0) = f(x_i) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(x_i), \quad \frac{\partial u_\alpha}{\partial t}(x_i, 0) = g(x_i) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(x_i), \quad x_i = ih, i = 1, \dots, N, \\ \Delta u_\alpha(x_i, 1) = h(x_i) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(x_i), \quad \frac{\partial \Delta u_\alpha(x_i, T)}{\partial t} = 0, \quad x_i = ih, i = 1, \dots, N, \end{array} \right. \quad (3.4)$$

où  $\mathbb{A}^N$  est la matrice de discrétisation issue de l'opérateur  $A = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}$

$$\mathbb{A}^N = \frac{1}{h^2} \text{Tridiag}(-1, 2, -1) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}).$$

La valeur finale de la solution et la valeur initiale de Laplace solution du problème (3.4) sont

$$u_\alpha(x_i, 1) = \frac{\cosh(\sqrt{\mathbb{A}^N})}{(\mathbb{I}_N + \alpha \cosh(\sqrt{\mathbb{A}^N}))} f(x_i) + \frac{\sinh(\sqrt{\mathbb{A}^N})}{2\sqrt{\mathbb{A}^N}(\mathbb{I}_N + \alpha \cosh(\sqrt{\mathbb{A}^N}))} g(x_i) \quad (3.5)$$

$$+ \frac{\sinh^2(\sqrt{\mathbb{A}^N})}{2\mathbb{A}^N(\mathbb{I}_N + \alpha \cosh(\sqrt{\mathbb{A}^N}))^2} h(x_i), \quad (3.6)$$

$$\Delta u_\alpha(x_i, 0) = \frac{\cosh(\sqrt{\mathbb{A}^N})}{(\mathbb{I}_N + \alpha \cosh(\sqrt{\mathbb{A}^N}))} h(x_i), \quad (3.7)$$

où  $\mathbb{I}_N$  est la matrice identité, les vecteurs  $f = (f_1, f_2, \dots, f_N) = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_N))$ ,  $g = (g_1, g_2, \dots, g_N) = (g(x_1), g(x_2), \dots, g(x_N))$ , et  $h = (h_1, h_2, \dots, h_N) = (h(x_1), h(x_2), \dots, h(x_N))$  représente la forme discrète des fonctions (données)  $f(x)$ ,  $g(x)$  et  $h(x)$ . Notez qu'en pratique, les données  $f(x)$ ,  $g(x)$  et  $h(x)$  sont obtenues par mesure et sont donc inévitablement contaminés par une erreur de mesure, certains aléatoires distribués uniformément les bruits  $\epsilon$  sont ajoutés à  $f$ ,  $g$  et  $h$  dans nos exemples de test, i.e.,

$$f^\delta = g^\delta = h^\delta = f + \epsilon \text{randn}(\text{size}(f)),$$

et  $\epsilon$  indique le niveau de bruit des données mesurées. La borne de l'erreur de mesure  $\delta$  peut être mesurée dans le sens de l'erreur moyenne quadratique (RMSE) selon

$$\delta := \|f^\delta - f\|_{l^2} = \|g^\delta - g\|_{l^2} = \left( \frac{1}{N+1} \sum_{i=1}^{N+1} (f_i - f_i^\delta)^2 \right)^{1/2},$$

et il est facile de voir que  $\epsilon$  et  $\delta$  possèdent le même ordre de grandeur. Afin d'étudier l'algorithme, nous évaluons l'erreur relative  $Err_u$  de la solution est définie par

$$Err_u = \frac{\|u_\alpha^\delta(\cdot, 1) - u(\cdot, 1)\|_{l^2}}{\|u(\cdot, 1)\|_{l^2}}.$$

L'erreur relative  $Err_{\Delta u}$  de Laplace solution est définie par

$$Err_{\Delta u} = \frac{\|\Delta u_\alpha^\delta(\cdot, 0) - \Delta u(\cdot, 0)\|_{l^2}}{\|\Delta u(\cdot, 0)\|_{l^2}}.$$

### 3.2.1 Discussions

Les résultats numériques sont donnés par les figures 3.1, ..., 3.10, tableau 1 et tableau 2. Les résultats numériques pour les données exactes  $u(x, 1)$  et  $\Delta u(x, 0)$  sont donnés par la figure 3.1 et la figure 3.6. Les résultats numériques pour  $u_\alpha^\delta(x, 1)$ ,  $\Delta u_\alpha^\delta(x, 0)$  et l'erreur absolue entre la solution exacte et la solution régularisée, avec  $\epsilon \in \{0.1, 0.01, 0.001, 0.0001\}$  sont données par les figures 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.7, 3.8, 3.9 and 3.10.

Les résultats numérique présenté dans la figure 3.1 et la figure 3.6 montre une bonne approximation entre la donnée de Dirichlet  $data(u(x, 1))$  et la donnée de Laplace  $(\Delta u(x, 0))$  avec les solutions exactes.

Les figures 3.2, 3.3, 3.4, 3.5 et le Tableau 1 montre une très bonne approximation pour notre méthode. De plus, les figures 3.7, 3.8, 3.9, 3.10 et le Tableau 2 montre que notre méthode améliore l'erreur et qu'elle est effective et stable.

Il est important de noter qu'il est possible d'utiliser une méthode de régularisation avec deux paramètres, où le premier paramètre est utilisé pour remplacer la condition initiale par une condition nonlocale et le second paramètre est utilisé pour perturber la condition finale de Laplace.

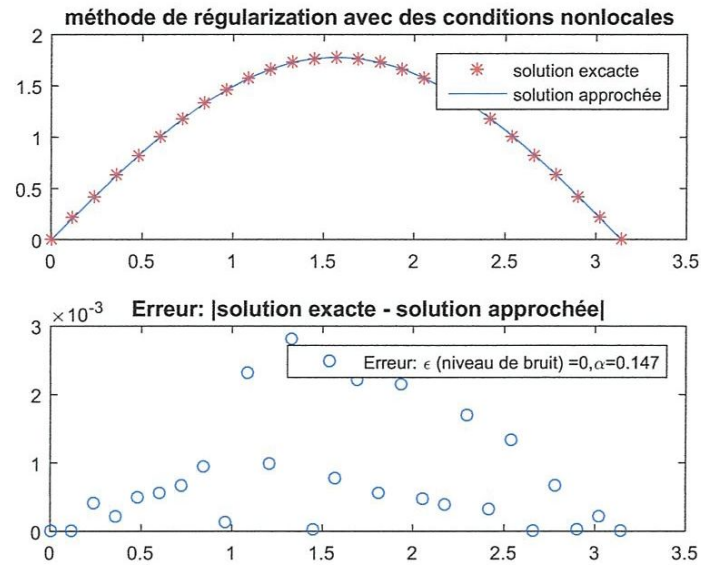


FIGURE 3.1 – Solution exacte, solution régularisée avec des données exactes,  $\epsilon = 0$  et l'erreur absolue

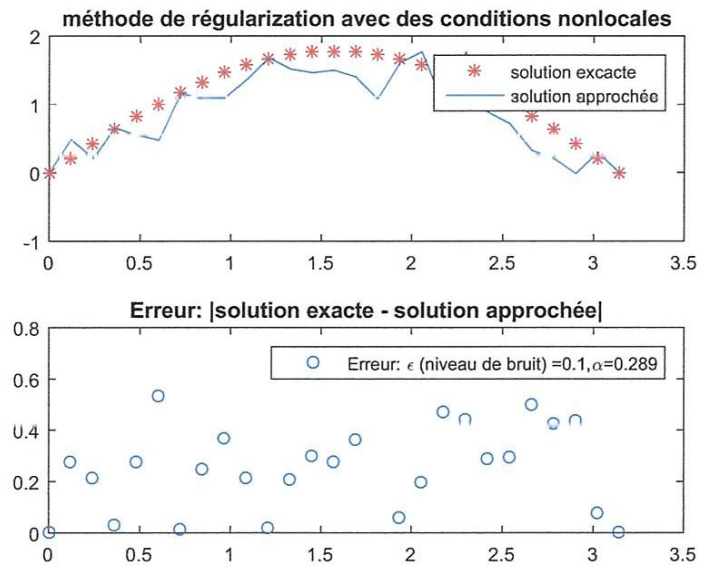


FIGURE 3.2 – Solution exacte, solution régularisée avec des données bruitées,  $\epsilon = 0.1$  et l'erreur absolue

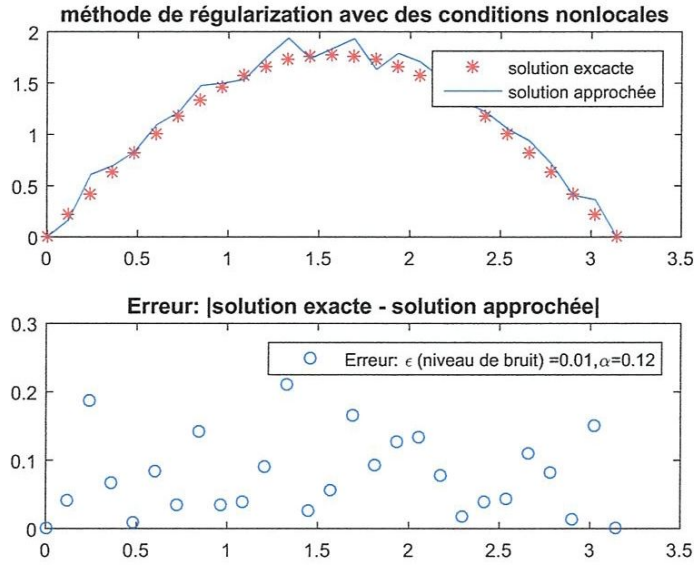


FIGURE 3.3 – Solution exacte, solution régularisée avec des données bruitées,  $\epsilon = 0.01$  et l'erreur absolue

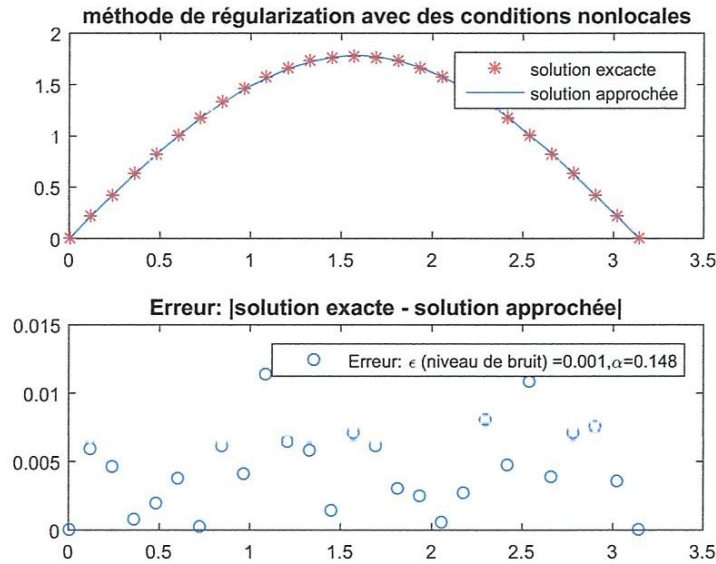


FIGURE 3.4 – Solution exacte, solution régularisée avec des données bruitées,  $\epsilon = 0.001$  et l'erreur absolue

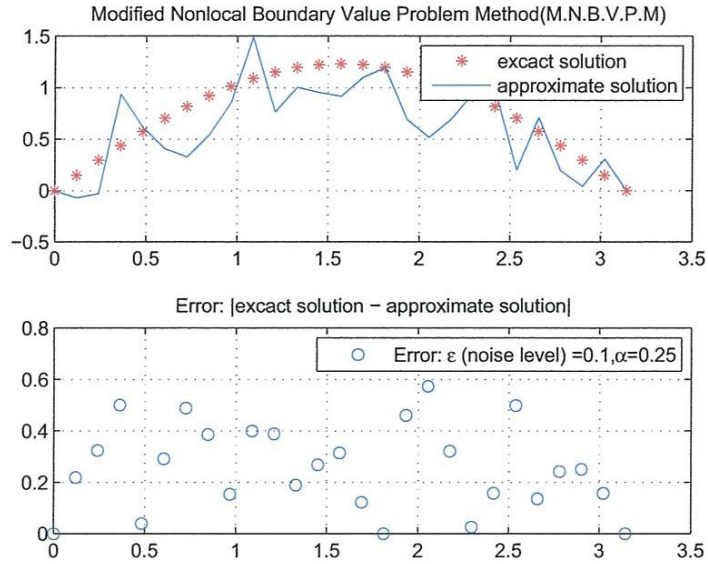


FIGURE 3.7 – Solution  $\Delta u$ , solution régularisée  $\Delta u_\alpha$  avec des données exactes,  $\epsilon = 0.1$  et l'erreur absolue

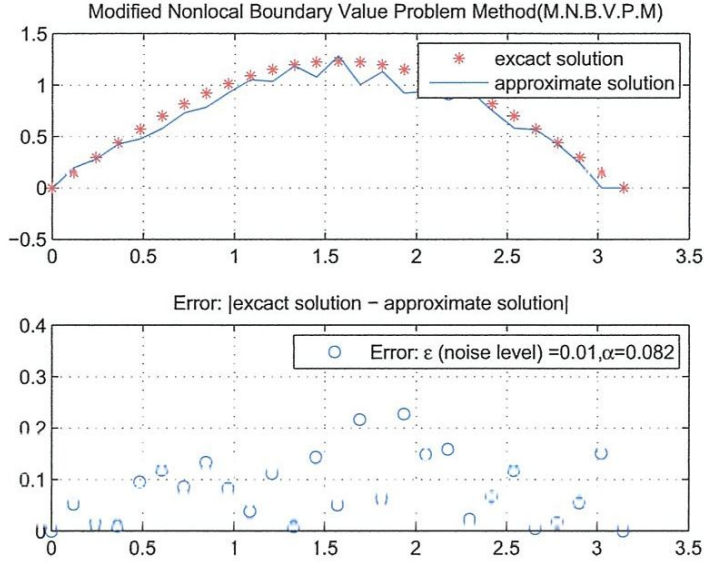


FIGURE 3.8 – Solution  $\Delta u$ , solution régularisée  $\Delta u_\alpha$  avec des données exactes,  $\epsilon = 0$  et l'erreur absolue

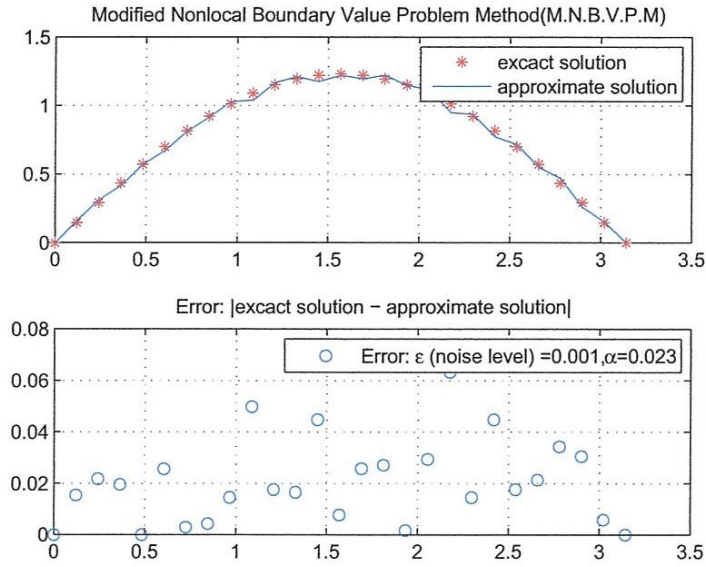


FIGURE 3.9 – Solution  $\Delta u$ , solution régularisée  $\Delta u_\alpha$  avec des données exactes,  $\epsilon = 0.1$  et l'erreur absolue

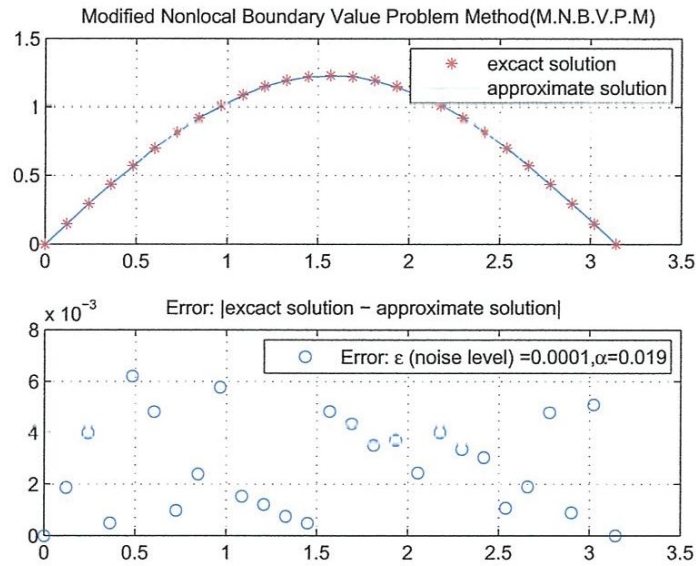


FIGURE 3.10 – Solution  $\Delta u$ , solution régularisée  $\Delta u_\alpha$  avec des données exactes,  $\epsilon = 0$  et l'erreur absolue

### 3.3 Tableaux annexes

**Table 1.** L'erreur relative de  $u_\alpha$  au  $T = 1$  pour  $N = 27$  et dans différents niveaux de bruit.

Niveau de bruit $\epsilon$	Paramètre de régularisation $\alpha$	$Err_u$
0	0.147	$8.9134 \times 10^{-4}$
0.1	0.2890	0.2580
0.01	0.139	0.0338
0.001	0.148	0.0044
0.0001	0.147	0.0011

**Table 2.** L'erreur relative de  $\Delta u_\alpha$  au  $T = 0$  pour  $N = 27$  et dans différents niveaux de bruit.

Niveau de bruit $\epsilon$	Paramètre de régularisation $\alpha$	$Err_{\Delta u}$
0	0.0186	$1.49 \times 10^{-5}$
0.1	0.25	0.3574
0.01	0.082	0.1172
0.001	0.023	0.0306
0.0001	0.019	0.0031

### 3.4 Conclusion

Dans ce travail, on s'est intéressé à une classe de problèmes de grande importance dans nombreux domaines de l'industrie et de l'ingénierie. C'est le problème inverse pour l'équation biharmonique homogène dans un rectangle, ce dernier modélise une plaque mince rectangulaire.

On a montré que le problème est mal posé au sens d'hadamard, nous avons opté pour une méthode de régularisation dite " méthode de régularisation par des condition auxiliaire ", la mise en oeuvre numérique et basée sur l'application de la méthode des différences finies semi-discrètes pour une suite de problèmes bien posés dépendant d'un petit paramètre de régularisation.

Les résultats numérique réalisés sur un exemple pour un domaine rectangulaire, montrent l'efficacité de la méthode proposée .



### 3.5 Bibliographie

- [1] Hadamard J. *Lecture note on Cauchy's problem in linear partial differential equations*. Yale Uni Press, New Haven ; 1923.
- [2] Love A. E. H. *On the small free vibrations and deformations of elastic shells*. *Philosophical trans. of the Royal Society (London)*, 1888, Vol. série A, N 17.
- [3] P. Destuynder. *Une théorie asymptotique des plaques minces en élasticité linéaire, volume 2 of Recherches en Mathématiques Appliquées*. Masson, Paris, 1986.
- [4] P. Destuynder and M. Salaun. *Mathematical analysis of thin plate models, volume 24 of Mathématiques et Applications (Berlin)*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [5] O. Millet, A. Hamdouni, and A. Cimetière. *Justification du modèle bidimensionnel non linéaire de plaque par développement asymptotique des équations d'équilibre*. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series IIB-Mechanics-Physics-Chemistry-Astronomy*, 324(6) :349-354, 1997.
- [6] Gazzola F, Grunau H.C, Sweers G. *Polyharmonic boundary value problems. A monograph on positivity preserving and nonlinear higher order elliptic equations in bounded domains*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg ; 2010.
- [7] A. Benrabah and N. Boussetila (2018) : *Modified nonlocal boundary value problem method for an ill-posed problem for the biharmonic equation*, *Inverse Problems in Science and Engineering*, DOI : 10.1080/17415977.2018.1461859
- [8] P. C. Sabatier, editor. *Problèmes inverses, volume 35 of Cahiers Mathématiques Montpellier [Montpellier Mathematical Reports]*. Université des Sciences et Techniques du Languedoc U.E.R. de Mathématiques, Montpellier, 1986. RCP 264, *Papers presented at the RCP meeting on interdisciplinary study of inverse problems held in Montpellier, November 26-30, 1985*.
- [9] Victor Isakov. *Inverse problems for partial differential equations, volume 127 of Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [10] P. G. Ciarlet and P. Destuynder. *A justification of the two-dimensional linear plate model*. *J. Mécanique*, 18(2) :315-344, 1979.
- [11] Victor Isakov. *Inverse problems for partial differential equations, volume 127 of Applied Mathematical Sciences*. Springer, New York, second edition, 2006.
- [12] J. R. Cannon and Maria M. Cecchi. *The numerical solution of some biharmonic problems by mathematical programming techniques*. *SIAM J. Numer. Anal.*, 3 :451-466, 1966.
- [13] L. Marin and D. Lesnic. *The method of fundamental solutions for inverse boundary value problems associated with the two-dimensional biharmonic equation*. *Math. Comput. Modelling*, 42(3-4) :261-278, 2005.
- [14] Sweers G. *A survey on boundary conditions for the biharmonic*. *Complex Variables and Elliptic Equations*. 2009 ; 54 ; 79-93.
- [15] Meleshko V. V. *Selected topics in the history of the two-dimensional biharmonic problem*. *Appl. Mech. Rev.* 2003 ; 56 ; 33-85.
- [16] Kal'menov TS, Iskakova UA. *On a boundary value problem for the biharmonic equation*. *AIP Conf. Proc.* 1676 (2015), Article ID 020031.
- [17] DERBANE Saïd, *Mémoire de magistère, Modélisation des Plaques Minces par la Méthode des Éléments finis* Mémoire de magistère, Université Mohamed El-Bachir El-Isahani, 2013