République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : **EDP et Analyse Numérique**

Par :

KHALFALLAOUI Roumaïssa

Intitulé

EXISTENCE LOCALE POUR LES OPERATEURS DIFFERENTIELS A COEFFICIENTS CONSTANTS

Dirigé par : Dr. BENARIOUA Khadir

Devant le jury

PRESIDENT	Mr. BADRAOUI Salah	Pr	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Mr. BENARIOUA Khadir	MCB	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Mr. BENRABAH Abderafik	MCA	Univ-Guelma

Session Juin 2018

Remerciements :

Je tiens tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant et miséricordieux, qui m'a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

En second lieu, je tiens à remercier mon encadreur **Dr.K.BENARIOUA** son précieux conseil et son aide durant toute la période du travail et sa patience.

Mes vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'il ont porté à mes recherches en acceptant d'examiner mon travail et de l'enrichir par leurs propositions.

En fin, je tiens également à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Dédicace :

Je dédie ce modeste travail :

A mes chers parents, pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur appui et leurs prières tout au long de mes études.

A mes chères sœurs Sara, Amani et Nour EL Imane pour leur encouragements permanents et leur soutien moral.

A toute ma famille pour leur soutien tout au long de mon parcours universitaire.

A mes amis :Meriem, Nour Elhouda, Siham et Basma.

Merci d'être toujours là pour moi.

Existence locale*

KHALFALLAOUI Roumaïssa
Mémoire de Master en Mathématiques.
Université 08 mai 1945, Guelma.
Juin 2018.

RÉSUMÉ : Le théorème de Malgrange-Ehrenpreis affirme que tout opérateur différentiel à cœfficients constants admet une solution élémentaire (et est donc localement résoluble). J'en donne ici deux démonstrations (une globale et une autre purement locale), et je calcule les solutions élémentaires des opérateurs les plus classiques : Laplacien, Chaleur, Schrödinger et Ondes. Par ailleurs, je démontre la formule de la moyenne (et sa réciproque) pour l'équation de Laplace, le principe du maximum, le théorème de Liouville, ainsi que la régularité $\mathscr{C}^\infty$ et l'analyticité des fonctions harmoniques.

MOTS CLÉ : Opérateurs différentiels à cœfficients constants – Solutions élémentaires – Résolubilité locale – Transformée de Fourier – Séries de Fourier – Laplacien – Chaleur – Ondes – Transport – Formule de la moyenne pour l'équation de Laplace – principe du maximum – Estimations locales pour les fonctions harmoniques – Théorème de Liouville – Analyticité des fonctions harmoniques.

Table des matières

*Document saisi à l'aide du logiciel de traitement de texte TEX, au format LATEX 2_ε.

1 Rappels, Notations et Conventions

1.1 Généralités

Les notations sont celles des équations aux dérivées partielles. Lorsque d est un nombre entier strictement positif, $x=(x_1,x_2,\dots,x_d)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^d$, et $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_d)$ est un d-multi-indice (*i.e* un d-uple de nombres entiers ≥ 0), on pose :

$$|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_d \tag{1}$$

$$||x||=(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_d^2)^{1/2} \tag{2}$$

$$\alpha!=\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_d! \tag{3}$$

$$x^\alpha=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_d^{\alpha_d} \tag{4}$$

$$\partial_j=\frac{\partial}{\partial x_j} \quad (\text{pour } j=1,2,\dots,d) \tag{5}$$

$$\partial=(\partial_1,\partial_2,\dots,\partial_d) \tag{6}$$

$$\partial^\alpha=\partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}\ldots\partial_d^{\alpha_d} \tag{7}$$

$$D_j=\frac{1}{i}\partial_j \quad (\text{pour } j=1,2,\dots,d, \text{ et } i^2=-1) \tag{8}$$

$$D=\frac{1}{i}\partial \tag{9}$$

$$D^\alpha=D_1^{\alpha_1}D_2^{\alpha_2}\ldots D_d^{\alpha_d} \tag{10}$$

de sorte que, pour une fonction f suffisamment différentiable, la formule de Taylor s'écrit :

$$f(x+h)=\sum_{|\alpha|<N}\partial^\alpha f(x)\frac{h^\alpha}{\alpha!}+O(||h||^N). \tag{11}$$

1.2 Fonctions test et distributions

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, K une partie compacte de Ω, k un entier naturel, et rappelons que :

• $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions réelles ou complexes, continues sur $\mathbb{R}^n$ et tendant vers zéro à l'infini (*i.e* quand $|x| \to \infty$).

• $\mathscr{C}^k(\Omega)$ est l'espace des fonctions réelles ou complexes, k-fois continûment différentiables sur Ω. C'est un espace de Fréchet [1] pour la topologie définie par la famille de semi-normes $(N_{K,k})_K$ où K décrit les compacts de Ω et,

$$\forall f \in \mathscr{C}^k(\Omega), \quad N_{K,k}(f) = \sup_{\substack{x\in K\\ |\alpha|\le k}} |\partial^\alpha f(x)|. \tag{12}$$

• $\mathscr{C}^k_b(\Omega)$ est le sous-espace de $\mathscr{C}^k(\Omega)$ dont les éléments sont les fonctions qui sont bornées, ainsi que toutes leurs dérivées d'ordre $\le k$. C'est un Banach pour la norme :

$$||f||_{\mathscr{C}^k_b} \equiv \sup_{\substack{x\in \Omega\\ |\alpha|\le k}} |\partial^\alpha f(x)|. \tag{13}$$

• $\mathscr{C}^k_K(\Omega)$ est le sous-espace de $\mathscr{C}^k(\Omega)$ dont les éléments sont à supports [2] dans K. C'est un espace de Banach pour la norme $N_{K,k}$.

• $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$ $\big($parfois noté $\mathscr{E}(\Omega)\big)$ est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω $\big(\mathscr{C}^\infty(\Omega) = \cap_{k=0}^\infty \mathscr{C}^k(\Omega)\big)$. C'est un espace de Fréchet pour la topologie définie par la famille de semi-normes $(N_{K,k})_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ K\Subset\Omega}}$.

• $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ $\big($également noté $\mathscr{D}(\Omega)\big)$ est l'espace des fonctions réelles ou complexes, qui sont indéfiniment différentiables sur Ω, et qui ont un support compact. Par définition, une application sur $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ est continue si, et seulement si, sa restriction à $\mathscr{C}_K^\infty(\Omega)$ est continue pour tout compact $K \Subset \Omega$.

• $\mathscr{C}^{-\infty}(\Omega)$ $\big($ou $\mathscr{D}'(\Omega)\big)$ est le dual topologique de $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$; c'est l'espace des distributions sur Ω. Sur $\mathscr{C}^{-\infty}(\Omega)$, on dispose de plusieurs topologies : la topologie faible, qui est la topologie de la convergence simple sur $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$, et la topologie forte, qui est celle de la convergence uniforme sur les parties bornées de $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ (une partie B de $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ est dite bornée s'il existe un compact $K \Subset \Omega$ tel que $B \subset \mathscr{C}_K^\infty(\Omega)$ et, pour tout entier $k \ge 0$, $N_{K,k}(B) = \sup_{\varphi\in B} N_{K,k}(\varphi) < \infty\big)$. La topologie faible (resp. forte) est définie par la famille de semi-normes $(p_F)_F$ telle que :

$$\forall T \in \mathscr{C}^{-\infty}(\Omega), \quad p_F(T) = \sup_{\varphi\in F} |\langle T, \varphi\rangle| \tag{14}$$

1. Un espace de Fréchet est un espace **localement convexe** (*i.e* dont la topologie est définie par une famille de semi-normes $(p_\alpha)_{\alpha\in I}$ qui sépare les points, c-à-d. telle que si $p_\alpha(x) = 0$ pour tout $\alpha \in I$, alors $x = 0$), **métrisable** (*i.e* de topologie définie par une famille dénombrable de semi-normes) et **complet**.

2. Le support d'une fonction f (noté Supp f) est le plus petit ensemble fermé dans le complémentaire duquel f est nulle.

où F parcourt l'ensemble des parties finies (resp. des parties bornées) de $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$. La topologie forte est, comme son nom l'indique, (vraiment) plus fine que la topologie faible : Une **famille** qui converge faiblement ne converge pas toujours fortement. Cependant on a le résultat (qui a l'air miraculeux) :

> Si $(T_n)_n$ est une **suite** de distributions qui converge simplement vers une limite T, alors T est une distribution, et T_n tend fortement vers T. (15)

• $\mathscr{E}'(\Omega)$ est le dual topologique de $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$; c'est l'espace des distributions à supports compacts sur Ω.

• $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur $\mathbb{R}^n$ et à décroissance rapide ainsi que leurs dérivées de tout ordre. $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ si, et seulement si :

$$f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ et, } \forall N \in \mathbb{N}, \forall \beta \in \mathbb{N}^n, (1+|x|)^N \partial^\beta f \text{ est bornée sur } \mathbb{R}^n, \tag{16}$$

ce qui équivaut à

$$f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ et, } \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \forall \beta \in \mathbb{N}^n, x^\alpha \partial^\beta f \text{ est bornée sur } \mathbb{R}^n. \tag{17}$$

La topologie naturelle de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, et qui en fait un espace de fréchet, est celle définie par l'une des familles équivalentes de semi-normes :

$$p_N(f) = \sup_{\substack{|\beta|\leq N \\ x\in\mathbb{R}^n}} (1+|x|)^N |\partial^\beta f(x)|, \tag{18}$$

$$p_{N,\beta}(f) = \sup_{\substack{|\alpha|\leq N \\ x\in\mathbb{R}^n}} |x^\alpha \partial^\beta f(x)|, \tag{19}$$

$$p_{\alpha,N}(f) = \sup_{\substack{|\beta|\leq N \\ x\in\mathbb{R}^n}} |x^\alpha \partial^\beta f(x)|, \tag{20}$$

$$p_{N,k}(f) = \sup_{\substack{|\alpha|\leq N, |\beta|\leq k \\ x\in\mathbb{R}^n}} |x^\alpha \partial^\beta f(x)|. \tag{21}$$

Enfin, de (15) on déduit que

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^n) \tag{22}$$

et de (16) et de la formule de Leibniz, il découle que :

> La dérivation et la multiplication par un monôme sont des applications continues de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. (23)

• $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ est le dual topologique de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$: C'est l'espace (de Schwartz) des distributions tempérées. Il est muni, soit de la topologie duale faible, soit de la topologie duale forte.

• $\mathscr{O}_M(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions $\alpha \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que les applications $T \mapsto \alpha T$ soient continues de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. $\mathscr{O}_M(\mathbb{R}^n)$ est appelé l'espace des multiplicateurs de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Si $\alpha \in \mathscr{O}_M(\mathbb{R}^n)$, alors : $\forall \beta \in \mathbb{N}^n$, $D^\beta \alpha$ est une fonction à croissance lente, c'est-à-dire une fonction qui ne croît pas plus vite qu'un polynôme lorsque $|x| \to \infty$.

1.3 Produit de convolution et produit tensoriel

Si f et g sont deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}^n$, leur produit de convolution est la fonction sur $\mathbb{R}^n$, notée $f * g$, et définie par :

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y \left(= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y = (g * f)(x) \right), \tag{24}$$

et leur produit externe (ou produit tensoriel) est la fonction $f \otimes g$ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, définie par :

$$(f \otimes g)(x,y) = f(x)g(y). \tag{25}$$

Si h, φ et ψ sont des fonctions continues (ou mesurables) bornées sur $\mathbb{R}^n$, on a d'après le théorème de Fubini :

$$\langle f * g, h \rangle = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} h(x+y) f(x) g(y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{26}$$

$$\langle f \otimes g, \varphi \otimes \psi \rangle = \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} (f \otimes g)(x,y)(\varphi \otimes \psi)(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \langle f, \varphi \rangle \langle g, \psi \rangle. \tag{27}$$

La dernière formule caractérise le produit externe et permet de le définir pour deux distributions : On démontre en effet que si T et S sont deux distributions sur $\mathbb{R}^n$, il existe une unique distribution sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ notée $T \otimes S$ et appelée produit externe (ou produit tensoriel) de T et S, telle que : $\forall \varphi, \psi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\langle T \otimes S, \varphi \otimes \psi \rangle = \langle T, \varphi \rangle \langle S, \psi \rangle. \tag{28}$$

On définit alors le produit de convolution de deux distributions à support compact S et T, comme étant la distribution à support compact notée $T * S$, telle que :

$$\forall \varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n),\ \langle T * S, \varphi \rangle = \langle T \otimes S, \varphi(x+y) \rangle. \tag{29}$$

Les principales propriétés de la convolution sont :

$$u * v = v * u \tag{30}$$

$$\delta * v = v * \delta = v \tag{31}$$

$$\partial^\alpha (u * v) = (\partial^\alpha u) * v = u * (\partial^\alpha v) \tag{32}$$

$$\mathrm{Supp}\,(u * v) \subset \mathrm{Supp}\, u + \mathrm{Supp}\, v \tag{33}$$

et si $u \in \mathscr{C}'^{-\infty}$, $v \in \mathscr{C}'^{\infty}$, et u ou v est à support compact, alors :

$$u * v \in \mathscr{C}^\infty \text{ et } (u * v)(x) = \langle u, \tau_x \check{v} \rangle \tag{34}$$

Sachant que $\tau_x \check{v}(t) = v(x-t)$.

1.4 Séries de Fourier de fonctions et de distributions 2π-périodiques

On définit les Séries de Fourier des fonctions et des distributions sur $\mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n$ par :

$$u(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \widehat{u}(m)e^{imx}, \tag{35}$$

où :

$$\widehat{u}(m) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{T}^n} u(x)e^{-imx}dx, \tag{36}$$

si u est une fonction, et

$$\widehat{u}(m) = (2\pi)^{-n} < u, e^{-imx} >, \tag{37}$$

si u est une distribution. Il en découle alors les propriétés suivantes :

$$\sum_m |\widehat{u}(m)|^2 = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{T}^n} |u(x)|^2 dx \quad \text{(Parseval-Plancherel)} \tag{38}$$

$$D^\alpha u(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} m^\alpha \widehat{u}(m)e^{imx} \quad \text{(Dérivation)} \tag{39}$$

$$\left(u \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{T}^n)\right) \Longleftrightarrow \left(\forall k \in \mathbb{Z}^n,\ \sup_{m\in\mathbb{Z}^n}(1+|m|)^k|\widehat{u}(m)| < \infty\right) \tag{40}$$

$$\left(u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)\right) \Longleftrightarrow \left(\forall l \in \mathbb{Z}^n,\ |\widehat{u}(m)| \le C(1+|m|)^l\right) \tag{41}$$

1.5 Transformée de Fourier

La transformée de Fourier $\widehat{f}$ (notée aussi $\mathscr{F}f$) d'une fonction f intégrable sur $\mathbb{R}^n$ est définie par la formule :

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}f(x)dx. \tag{42}$$

On démontre aisément que

$$\mathscr{F} \text{ est linéaire,} \tag{43}$$

que

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}^n), \quad \widehat{f} \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^n) \ \text{(lemme de Riemann-Lebesgue),} \tag{44}$$

et que quelles que soient f et g dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)g(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x)dx \ \text{(théorème du transfert),} \tag{45}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}}(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g}(x)dx \ \text{(th. de Plancherel-Parseval).} \tag{46}$$

On démontre également que

$$\mathscr{F} \text{ est continue de } L^1 \longrightarrow L^\infty, \tag{47}$$

et que

$$\mathscr{F} \text{ induit un isomorphisme de } \mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{S} \tag{48}$$

$$\text{qui se prolonge en un isomorphisme de } \mathscr{S}' \longrightarrow \mathscr{S}' \tag{49}$$

$$\text{et en une isométrie de } L^2 \longrightarrow L^2. \tag{50}$$

Par définition, la transformée de Fourier d'une distribution tempérée $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ est la distribution tempérée $\widehat{u}$ telle que

$$\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n), \quad \langle \widehat{u}, \varphi \rangle = \langle u, \widehat{\varphi} \rangle. \tag{51}$$

L'isomorphisme inverse $\mathscr{F}^{-1}$ est la cotransformée de Fourier notée aussi $\overline{\mathscr{F}}$:

$$[\mathscr{F}^{-1} f](x) = [\overline{\mathscr{F}} f](x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} f(\xi) d\xi. \tag{52}$$

Enfin, la transformation de Fourier jouit des propriétés (dites d'échange) suivantes :

$$\forall f, g \in L^1(\mathbb{R}^n), \quad \mathscr{F}(f * g) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} (\mathscr{F} f)(\mathscr{F} g), \tag{53}$$

$$\forall f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n), \forall g \in L^1(\mathbb{R}^n), \quad \mathscr{F}(f g) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} [(\mathscr{F} f) * (\mathscr{F} g)], \tag{54}$$

$$\forall f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n), \forall g \in L^1(\mathbb{R}^n), \quad \mathscr{F}^{-1}(f g) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} [(\mathscr{F}^{-1} f) * (\mathscr{F}^{-1} g)], \tag{55}$$

$$\forall u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n), \quad \mathscr{F}(D^\alpha u) = \xi^\alpha \mathscr{F} u, \tag{56}$$

$$\forall u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n), \quad \mathscr{F}[P(D)u] = P(\xi) \mathscr{F} u \quad \text{et} \quad \mathscr{F}^{-1}[P(-D)u] = P(x) \mathscr{F}^{-1} u, \tag{57}$$

$$\mathscr{F}(\delta) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \quad \text{et} \quad \mathscr{F}(1) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \delta. \tag{58}$$

2 Introduction

Dans ce mémoire, on étudie la question de la résolubilité locale d'équations aux dérivées partielles (EDP) :

$$P u = f \tag{59}$$

où

$$P = P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha \tag{60}$$

est un opérateur différentiel linéaire à cœfficients constants sur un ouvert non vide Ω de $\mathbb{R}^n$.

Une formulation de ladite question est la suivante :

> *Etant donné x_0 quelconque dans Ω, existe-t-il un voisinage ouvert V de x_0 dans Ω tel que, pour toute distribution $f \in \mathscr{D}'(V)$, on puisse trouver une distribution $u \in \mathscr{D}'(V)$ qui vérifie $P u = f$ sur V ?*

Si c'est le cas, on dit que l'opérateur (60) ou que l'équation (59) est ***localement résoluble*** sur Ω, et c'est précisément le cas d'après le théorème de Malgrange-Ehrenpreis qui garantit l'existence d'une solution élémentaire E pour P, et assure donc l'existence d'une solution pour l'équation $Pu = f$, car il suffit alors de prendre $u = E \star f$.

On connaît depuis fort longtemps les solutions élémentaires des opérateurs les plus classiques :

Opérateur P	**Une solution élémentaire** E
∂_n	$1_{(x_1,\dots,x_{n-1})} \otimes Y(x_n)$
$\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}} = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}\Big)$ (Cauchy-Riemann)	$\dfrac{1}{\pi(x+iy)}$
$\Delta = \partial_1^2 + \ldots + \partial_n^2$ (Laplacien)	$\dfrac{\lvert x\rvert^{2-n}}{(2-n)\lvert S^{n-1}\rvert}$; $n \geq 3$,
$\partial_t - \Delta$ (La chaleur)	$\dfrac{Y(t)}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \exp\Big(-\dfrac{\lvert x\rvert^2}{4t}\Big)$
$D_t + \Delta$ (Schrödinger)	$\dfrac{Y(t)}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \exp\Big(-\dfrac{\lvert x\rvert^2}{4t} - in\dfrac{\pi}{4}\Big)$
$\partial_{tt}^2 - \Delta$ (Ondes)	$< E, \varphi >= \displaystyle\int \dfrac{\hat{\varphi}(\xi, \tau - i\gamma)}{\lvert\xi\rvert^2 - (\tau - i\gamma)^2}\, d\xi\, d\tau$ Pour $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$, γ constante > 0

3 Opérateurs linéaires à cœfficients constants

Selon Malgrange [5] et Ehrenpreis [2], tout opérateur différentiel linéaire non nul à cœfficients constants est localement résoluble sur $\mathbb{R}^n$. Dans ce chapitre nous donnons deux démonstrations de ce résultat : Une globale (due à Hörmander [4]), et la seconde purement locale (due à Taylor et Dadok [6]).

3.1 Le cas global

3.1.1 Solution élémentaire

Définition 3.1. *Soit $P(D)$ un opérateur différentiel linéaire à cœfficients constants sur $\mathbb{R}^n$. On dit qu'une distribution $E \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ est solution élémentaire de $P(D)$ si et seulement si : $P(D)E = \delta$.*

Théorème 3.1. *(Malgrange-Ehrenpreis) Tout opérateur différentiel linéaire non nul à cœfficients constants admet une solution élémentaire dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

Démonstration du théorème 3.1. :

Ce théorème général a été démontré par Ehrenpreiss [2] et Malgrange [5]. La démonstration que je fournis ici est due à L. Hörmander [4]. Elle est décrite très brièvement dans [1] et [4] et je me propose ici de la détailler au maximum. L'équation $P(D)E = \delta$ est équivalente au problème de division $P(\xi)\widehat{E} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}$, et l'idée principale est de définir E en tant que transformée de Fourier inverse de $\frac{(2\pi)^{-\frac{n}{2}}}{P(\xi)}$, c'est-à-dire par une formule du type :

$$\langle E, \varphi \rangle = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\mathscr{F}^{-1}(\varphi)(\xi)}{P(\xi)}\, d\xi, \quad \varphi \in \mathscr{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^n). \tag{61}$$

• Si, quel que soit $\xi \in \mathbb{R}^n$, $P(\xi) \neq 0$, c'est bel et bien la formule (61) qui définit E. En effet, la fonction $\frac{(2\pi)^{-\frac{n}{2}}}{P(\xi)}$ est $\mathscr{C}^{\infty}$ à croissance lente, ainsi que toutes ses dérivées :

$$\frac{(2\pi)^{-\frac{n}{2}}}{P(\xi)} \in \mathscr{O}_M(\mathbb{R}^n)$$

Donc, E (ainsi définie) est une distribution tempérée sur $\mathbb{R}^n$. De plus, $\forall \varphi \in \mathscr{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}
\langle P(D)E, \varphi \rangle &= \langle E, P(-D)\varphi \rangle \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\mathscr{F}^{-1}[P(-D)\varphi](\xi)}{P(\xi)}\, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \mathscr{F}^{-1}(\varphi)(\xi)\, d\xi \\
&= \langle (2\pi)^{-\frac{n}{2}}, \mathscr{F}^{-1}(\varphi) \rangle \\
&= \langle \mathscr{F}(\delta), \mathscr{F}^{-1}(\varphi) \rangle \\
&= \langle \delta, \varphi \rangle,
\end{aligned}$$

ce qui veut dire que

$$P(D)E = \delta,$$

et que E est solution élémentaire de $P(D)$.

• Dans le cas général, on utilise le lemme suivant (dont une démonstration se trouve dans [1]) :

lemme 3.1. *Si $P(D) \neq 0$, il existe une suite $(\theta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ avec $\theta_k \in \mathbb{R}^n$ et $|\theta_k| \leq 1$, une partition*[3] *différentielle de l'unité $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ avec $\rho_k \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, et une constante $c > 0$ telles que $|P(\xi + z\theta_k)| \geq c$ pour $\xi \in \operatorname{supp}\rho_k$, $z \in \mathbb{C}$ et $|z| = 1$.*

L'idée maintenant est d'intégrer dans le champs complexe pour éviter les zéros de $P(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{C}^n$, ce qui nous donne la formule :

$$\begin{aligned}
\forall\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n),\ \langle E, \varphi\rangle &= \left\langle E, \mathscr{F}(\mathscr{F}^{-1}\varphi)\right\rangle \\
&= \langle \widehat{E}, \mathscr{F}^{-1}\varphi\rangle \\
&= \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k \widehat{E}, \mathscr{F}^{-1}\varphi\right\rangle \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \langle \rho_k \widehat{E}, \mathscr{F}^{-1}\varphi\rangle \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \langle \widehat{E}, \rho_k \mathscr{F}^{-1}\varphi\rangle \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\rho_k(\xi)\mathscr{F}^{-1}\varphi(\xi)}{P(\xi)} d\xi. \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\rho_k(\xi)\widehat{\varphi}(-\xi)}{P(\xi)} d\xi.
\end{aligned}$$

Comme $\operatorname{supp}(\varphi)$ est compact, il est inclus dans une boule centrée à l'origine et de rayon R et, d'après le théorème de Paley-Wiener[4], $\widehat{\varphi}$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^n$ que l'on note $\widetilde{\widehat{\varphi}}$.

La fonction

$$\begin{aligned}
\psi \ :\ & \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\
& z \mapsto \psi(z) = \widetilde{\widehat{\varphi}}(-\xi - z\theta_k)
\end{aligned}$$

est holomorphe sur $\mathbb{C}$ car :

- $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$ telle que $h(z) = -\xi - z\theta_k$ est holomorphe (puisque toutes ses composantes le sont),
- $\widetilde{\widehat{\varphi}} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ est holomorphe,
- $\psi = \widetilde{\widehat{\varphi}} \circ h$.

3. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $(V_j)_j$ un de ses recouvrements par des ouverts. Une partition différentielle de l'unité sur Ω subordonnée à $(V_j)_j$ est une famille de fonctions $(\varphi_j)_j$ dans $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$ telles que : $\operatorname{supp}\varphi_j \subset V_j$, la famille $(\operatorname{supp}\varphi_j)_j$ est localement finie (c'est-à-dire : Pour tout compact K de Ω, l'ensemble des indices j tels que $\operatorname{supp}\varphi_j \cap K \neq \emptyset$ est fini), $\sum \varphi_j = 1$, et $\varphi_j \geq 0$.

4. Théorème de Paley-Wiener : Soit f une distribution tempérée, $\mathscr{F}f$ sa transformée de Fourier. Alors f est une distribution (resp. fonction test) à support dans la boule de rayon R si et seulement si :
(i) $\mathscr{F}f$ se prolonge en une fonction holomorphe de $\zeta = \xi + i\eta$, dans $\mathbb{C}^n$ tout entier.
(ii) Il existe N tel que $|\mathscr{F}f(\zeta)| \leq C^{ste}(1+|\zeta|)^N e^{R|\eta|}$ (resp. (ii-bis) Pour tout N on a $|\mathscr{F}f(\zeta)| \leq C^{ste}(1+|\zeta|)^{-N} e^{R|\eta|}$)

De même, la fonction $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que $p(z) = P(\xi + z\theta_k)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ puisque :

$$\begin{cases} \bullet\ (-h) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n \text{ est holomorphe,} \\ \bullet\ P : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C} \text{ est holomorphe (car c'est un polynôme),} \\ \bullet\ p = P \circ (-h), \end{cases}$$

et comme :

$$[P \circ (-h)](z) = P(\xi + z\theta_k) \neq 0 \text{ (car } |P(\xi + z\theta_k)| \geq c > 0),$$

on conclut alors que la fonction

$$\begin{aligned} f \ : \ & \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ & z \mapsto f(z) = \frac{\widetilde{\widehat{\varphi}}(-\xi - z\theta_k)}{P(\xi + z\theta_k)} \end{aligned}$$

est à son tour holomorphe sur $\mathbb{C}$.

D'après la formule de Cauchy, pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_0| < 1$,

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

et en particulier :

$$f(0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z} dz,$$

ce qui implique que :

$$\frac{\widehat{\varphi}(-\xi)}{P(\xi)} = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=1} \frac{\widetilde{\widehat{\varphi}}(-\xi - z\theta_k)}{P(\xi + z\theta_k)} \times \frac{dz}{z},$$

et par voie de conséquence :

$$\langle E, \varphi \rangle = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^n} \rho_k(\xi) \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=1} \frac{\widetilde{\widehat{\varphi}}(-\xi - z\theta_k)}{P(\xi + z\theta_k)} \times \frac{dz}{z} \right) d\xi, \quad \varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{62}$$

Proposition 3.1. *E est une distribution sur $\mathbb{R}^n$.*

Preuve de la proposition 3.1 : Il est clair que E est linéaire de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathbb{R}$. Pour montrer qu'elle est continue, on choisit une suite $(\varphi_j)_j$ qui converge vers 0 dans $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ et on démontre que $(< E, \varphi_j >)_j$ converge vers 0 dans $\mathbb{R}$.

En effet, si $(\varphi_j)_j$ est une telle suite, alors :

$$
\begin{aligned}
|<E,\varphi_j>| &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\Big|\sum_{k\in\mathbb{N}}\int_{\mathbb{R}^n}\rho_k(\xi)\Big(\frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=1}\frac{\widetilde{\widehat{\varphi}}_j(-\xi-z\theta_k)}{P(\xi+z\theta_k)}\times\frac{dz}{z}\Big)\,d\xi\Big| \\
&\le (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\sum_{k\in\mathbb{N}}\int_{\mathbb{R}^n}\rho_k(\xi)\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1}\frac{|\widetilde{\widehat{\varphi}}_j(-\xi-z\theta_k)|}{|P(\xi+z\theta_k)|}\times\frac{dz}{|z|}\Big)\,d\xi \\
&\le (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\sum_{k\in\mathbb{N}}\int_{\mathbb{R}^n}\rho_k(\xi)\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1}\frac{|\widetilde{\widehat{\varphi}}_j(-\xi-z\theta_k)|}{|P(\xi+z\theta_k)|}\times dz\Big)\,d\xi \\
&\le (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\sum_{k\in\mathbb{N}}\int_{\mathbb{R}^n}\rho_k(\xi)\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1}\frac{|\widetilde{\widehat{\varphi}}_j(-\xi-z\theta_k)|}{c}\times dz\Big)\,d\xi \quad (\textit{cf.}\ \text{lemme 3.1.})
\end{aligned}
$$

lemme 3.2. *Il existe une constante strictement positive C telle que, $\forall \xi\in\mathbb{R}^n, \forall\varphi\in\mathscr{C}_K^\infty$*

$$\sup_{\substack{|z|=1\\ k\in\mathbb{N}}}|\widetilde{\widehat{\varphi}}(-\xi-z\theta_k)|\le CN_{K,n+1}(\varphi)(1+|\xi|)^{-n-1}$$

<u>**Démonstration du lemme 3.2.**</u> : on sait :

$$\xi^\alpha\widehat{\varphi}(\xi)=\widehat{D^\alpha\varphi}(\xi)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-ix\xi}D^\alpha\varphi(x)\ dx$$

donc :

$$\xi^\alpha\widehat{\varphi}(\xi)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_K e^{-ix\xi}D^\alpha\varphi(x)\ dx$$

et la fonction $\xi\longrightarrow\xi^\alpha\widehat{\varphi}(\xi)$ se prolonge en une fonction holomorphe de la variable $\zeta=\xi+i\eta\in\mathbb{C}^n$ telle que :

$$\zeta\longrightarrow\zeta^\alpha\widetilde{\widehat{\varphi}}(\zeta)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_K e^{-ix\zeta}D^\alpha\varphi(x)\ dx$$

Par conséquent :

$$
\begin{aligned}
|\zeta^\alpha|\cdot|\widetilde{\widehat{\varphi}}(\zeta)| &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\Big|\int_K e^{-ix\zeta}D^\alpha\varphi(x)\ dx\Big| \\
&\le \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_K|D^\alpha\varphi(x)|\cdot|e^{-ix\zeta}|\ dx \\
&\le \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\sup_{x\in K}|D^\alpha\varphi(x)|\int_K|e^{-ix\zeta}|\ dx \\
&\le \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\sup_{x\in K}|D^\alpha\varphi(x)|\int_K e^{x\eta}\ dx \\
&\le \frac{\int_K e^{x\eta}\ dx}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\sup_{x\in K}|D^\alpha\varphi(x)|
\end{aligned}
$$

Autrement dit : $\forall \zeta \in \mathbb{C}^n$,

$$|\zeta^\alpha|.|\widetilde{\widehat{\varphi}}(\zeta)| \leq c_1 \sup_{x\in K} |D^\alpha \varphi(x)|$$

Donc :

$$(\sup_{|\alpha|\leq n+1} |\zeta^\alpha|)|\widetilde{\widehat{\varphi}}(\zeta)| \leq c_1 \sup_{\substack{x\in K\\ |\alpha|\leq n+1}} |D^\alpha \varphi(x)|$$

Mais :

$$c_2(1+|\zeta|^2)^{\frac{n+1}{2}} \leq \sup_{|\alpha|\leq n+1} |\zeta^\alpha|$$

et il s'ensuit alors que :

$$c_2(1+|\zeta|^2)^{\frac{n+1}{2}} |\widetilde{\widehat{\varphi}}(\zeta)| \leq c_1 N_{K,n+1}(\varphi)$$

En particulier pour $\zeta = -\xi - z\theta_k$, on a :

$$c_2(1+|-\xi - z\theta_k|^2)^{\frac{n+1}{2}} |\widetilde{\widehat{\varphi}}(-\xi - z\theta_k)| \leq c_1 N_{K,n+1}(\varphi)$$

D'où :

$$c_2 \sup_{\substack{|z|=1\\ k\in\mathbb{N}}}(1+|-\xi - z\theta_k|^2)^{\frac{n+1}{2}} \sup_{\substack{|z|=1\\ k\in\mathbb{N}}} |\widetilde{\widehat{\varphi}}(-\xi - z\theta_k)| \leq c_1 N_{K,n+1}(\varphi)$$

et cela implique que :

$$c_2(1+|-\xi - i\theta_k|^2)^{\frac{n+1}{2}} \sup_{\substack{|z|=1\\ k\in\mathbb{N}}} |\widetilde{\widehat{\varphi}}(-\xi - z\theta_k)| \leq c_1 N_{K,n+1}(\varphi)$$

Donc :

$$c_2(1+|\xi|^2+|\theta_k|^2)^{\frac{n+1}{2}} \sup_{\substack{|z|=1\\ k\in\mathbb{N}}} |\widetilde{\widehat{\varphi}}(-\xi - z\theta_k)| \leq c_1 N_{K,n+1}(\varphi)$$

Par conséquent :

$$c_2(1+|\xi|^2)^{\frac{n+1}{2}} \sup_{\substack{|z|=1\\ k\in\mathbb{N}}} |\widetilde{\widehat{\varphi}}(-\xi - z\theta_k)| \leq c_1 N_{K,n+1}(\varphi)$$

et comme :

$$\frac{1}{2}(1+|\xi|)^2 \leq 1+|\xi|^2$$

On arrive à :

$$\frac{c_2}{2}(1+|\xi|)^{n+1} \sup_{\substack{|z|=1\\ k\in\mathbb{N}}} |\widetilde{\widehat{\varphi}}(-\xi - z\theta_k)| \leq c_1 N_{K,n+1}(\varphi)$$

et finalement :

$$\sup_{\substack{|z|=1\\ k\in\mathbb{N}}} |\widetilde{\widehat{\varphi}}(-\xi - z\theta_k)| \leq C N_{K,n+1}(\varphi)(1+|\xi|)^{-n-1},$$

où :

$$C = \frac{2c_1}{c_2}$$

$\square$

Retour à la démonstration de la proposition 3.1. :

De ce qui a précédé et du lemme 3.2. il découle que :

$$\begin{aligned}
|<E,\varphi_j>| &\leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\sum_{k\in\mathbb{N}}\int_{\mathbb{R}^n}\rho_k(\xi)\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1}\frac{CN_{K,n+1}(\varphi_j)(1+|\xi|)^{-n-1}}{c}dz\Big)\,d\xi,\\
&\leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{CN_{K,n+1}(\varphi_j)(1+|\xi|)^{-n-1}}{c}\,d\xi\Big)\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1}dz\Big),\\
&\leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\frac{C}{c}\Big[\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(1+|\xi|)^{n+1}}\,d\xi\Big]N_{K,n+1}(\varphi_j),
\end{aligned}$$

à noter que l'intégrale :

$$\mathbf{I}=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(1+|\xi|)^{n+1}}\,d\xi$$

est convergente pour les raisons que voici :

- Le passage en coordonées polaires nous donne :

$$\mathbf{I}=\int_0^\infty\int_{S^{n-1}}\frac{\tau^{n-1}}{(1+\tau)^{n+1}}d\tau\,d\theta=\Big(\int_0^\infty\frac{\tau^{n-1}}{(1+\tau)^{n+1}}d\tau\Big)\Big(\int_{S^{n-1}}d\theta\Big)$$

- L'intégrale

$$\int_0^\infty\frac{\tau^{n-1}}{(1+\tau)^{n+1}}d\tau$$

  est convergente puisqu'elle est de même nature que $\int_1^\infty\frac{\tau^{n-1}}{(1+\tau)^{n+1}}d\tau$, c'est-à-dire de même nature que $\int_1^\infty\frac{1}{\tau^2}d\tau$.
- L'intégrale $\int_{S^{n-1}}d\theta$ est finie vu qu'elle désigne l'aire de la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ (que l'on calculera un peu plus loin).

Par conséquent, on a :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ |<E,\varphi_j>|\leq(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\frac{C\mathbf{I}}{c}N_{K,n+1}(\varphi_j),$$

et cela prouve que si :

$$\varphi_j\xrightarrow[j\to\infty]{\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)}0,$$

alors :

$$\langle E,\varphi_j\rangle\xrightarrow[j\to\infty]{\mathbb{R}}0,$$

et que E est une distribution sur $\mathbb{R}^n$. $\square$

<u>**Fin de la démonstration du théorème 3.1.**</u> **:**

Pour tout $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle P(D)E,\varphi\rangle &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\sum_{k\in\mathbb{N}}\int_{\mathbb{R}^n}\rho_k(\xi)\Big(\frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=1}\frac{\widetilde{[\widehat{P(-D)\varphi}]}(-\xi-z\theta_k)}{P(\xi+z\theta_k)}\times\frac{dz}{z}\Big)\,d\xi\\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\sum_{k\in\mathbb{N}}\int_{\mathbb{R}^n}\rho_k(\xi)\Big(\frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=1}\frac{\widetilde{\widehat{\varphi}}(-\xi-z\theta_k)}{z}\,dz\Big)\,d\xi\\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\sum_{k\in\mathbb{N}}\int_{\mathbb{R}^n}\rho_k(\xi)\widehat{\varphi}(-\xi)\,d\xi\\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\sum_{k\in\mathbb{N}}\int_{\mathbb{R}^n}\rho_k(\xi)\mathscr{F}^{-1}(\varphi)(\xi)\,d\xi\\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\sum_{k\in\mathbb{N}}\langle\rho_k,\mathscr{F}^{-1}(\varphi)\rangle\\
&= \Big\langle(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\sum_{k\in\mathbb{N}}\rho_k,\mathscr{F}^{-1}(\varphi)\Big\rangle\\
&= \langle(2\pi)^{-\frac{n}{2}},\mathscr{F}^{-1}(\varphi)\rangle\\
&= \langle\mathscr{F}(\delta),\mathscr{F}^{-1}(\varphi)\rangle\\
&= \langle\delta,\varphi\rangle
\end{aligned}$$

Ce qui démontre que, $P(D)E=\delta$, et que E est solution élémentaire de $P(D)$. ∎

3.1.2 Solution du problème

L'importance d'une solution élémentaire E pour un opérateur différentiel linéaire à cœfficients constants $P(D)$ réside dans le fait que, si $L_E : \mathscr{E}' \to \mathscr{E}'$ est l'opérateur de convolution défini par :

$$\forall u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n),\ L_E u = E * u,$$

on a :

$$L_E \circ P(D) = P(D)\circ L_E = Id,$$

car :

$$[L_E\circ P(D)]u = L_E[P(D)u] = E*[P(D)u] = [P(D)E]*u = \delta*u = u,$$

et

$$[P(D)\circ L_E]u = P(D)(L_E u) = P(D)(E*u) = [P(D)E]*u = \delta*u = u.$$

Donc, la connaissance d'une solution fondamentale de $P(D)$ permet de construire une inverse bilatère L_E pour $P(D)$, de résoudre l'équation $P(D)u=f$, et de décrire la régularité de cette solution. En effet :

$$(P(D)u=f)\Leftrightarrow(u=L_Ef)\Leftrightarrow(u=E*f)$$

et si f est de classe $\mathscr{C}^k$ pour un certain $k\in\mathbb{N}$, la solution u l'est également.

3.2 Le cas local

Dans la section précédente, nous avons utilisé essentiellement la transformée de Fourier pour obtenir des solutions explicites de l'équation aux dérivées partielles :

$$P(D)u = f \text{ sur } \mathbb{R}^n. \tag{63}$$

Dans la présente, nous utilisons les séries de Fourier pour démontrer l'éxistence de solutions locales pour cette dernière. De façon plus précise, nous nous proposons de démontrer que :

$$\left.\begin{array}{l} \forall x_0,\ \exists R > 0 \text{ tel que} : \forall f \in \mathscr{D}'(B(x_0,R)), \exists u \in \mathscr{D}'(B(x_0,R)) \\ \text{vérifiant } P(D)u = f \text{ sur } B(x_0,R) \end{array}\right\} \tag{64}$$

et ceci équivaut à :

$$\left.\begin{array}{l} \exists R > 0 \text{ tel que} : \forall f \in \mathscr{D}'(B(0,R)), \exists u \in \mathscr{D}'(B(0,R)) \\ \text{vérifiant } P(D)u = f \text{ sur } B(0,R) \end{array}\right\} \tag{65}$$

car, en remplaçant x_0 par 0 dans (64), on obtient (65), et en supposant que (65) est vraie, que x_0 est un point quelconque de $\mathbb{R}^n$, que R est un nombre réel strictement positif, et que τ_{-x_0} est la translation de vecteur $(-x_0)$, on arrive à :

$$\tau_{-x_0}(B(x_0,R)) = B(0,R)$$

$$\forall f \in \mathscr{D}'(B(x_0,R)), \quad \tau_{-x_0} f \in \mathscr{D}'(B(0,R))$$

$$\exists u \in \mathscr{D}'(B(0,R)) \Big/ P(D)x = \tau_{-x_0} f \text{ sur } B(0,R)$$

c'est-à-dire que :

$$\tau_{x_0}(P(D))u = f \text{ sur } \tau_{x_0}(B(0,R))$$

et comme $P(D)$ commute avec τ_{x_0}, on conclut que :

$$\exists v \in \mathscr{D}'(B(x_0,R))(v = \tau_{x_0} u) \text{ tel que} : P(D)v = f \text{ sur } B(x_0,R),$$

et cela démontre (64). ■

Proposition 3.2. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^n$, la résolution du problème (64) équivaut à celle de l'équation :*

$$P(D+\alpha)v = g \text{ sur } B(0,R). \tag{66}$$

Démonstration

On a :

$$P(D)u = f \iff P(D)[e^{i\alpha\cdot x} e^{-i\alpha\cdot x} u] = f$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} P(D)[e^{i\alpha\cdot x} v] = f. \\ u = e^{i\alpha\cdot x} v \end{array}\right.$$

Mais

$$\begin{aligned} D_j[e^{i\alpha\cdot x}v] &= [\alpha_j e^{i\alpha\cdot x}v]+e^{i\alpha\cdot x}D_j v \\ &= e^{i\alpha\cdot x}(D_j+\alpha_j)v, \end{aligned}$$

et en supposant que :

$$D_j^k[e^{i\alpha\cdot x}v]=e^{i\alpha\cdot x}(D_j+\alpha_j)^k v,$$

on obtient :

$$\begin{aligned} D_j^{k+1}[e^{i\alpha\cdot x}v] &= D_j[D_j^k(e^{i\alpha\cdot x}v)] \\ &= D_j[e^{i\alpha\cdot x}(D_j+\alpha_j)^k v] \\ &= e^{i\alpha\cdot x}(D_j+\alpha_j)(D_j+\alpha_j)^k v \\ &= e^{i\alpha\cdot x}(D_j+\alpha_j)^{k+1}v. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\forall j=1,\ldots,n,\ D_j^{\beta_j}(e^{i\alpha\cdot x}v)=e^{i\alpha\cdot x}(D_j+\alpha_j)^{\beta_j}v,$$

et comme

$$P(D)=\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^n\\ \beta\leq m}} a_\beta D_1^{\beta_1}D_2^{\beta_2}\ldots D_n^{\beta_n},$$

on arrive à :

$$\begin{aligned} P(D)(e^{i\alpha\cdot x}v) &= e^{i\alpha\cdot x}\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^n\\ \beta\leq m}} a_\beta(D_1+\alpha_1)^{\beta_1}(D_2+\alpha_2)^{\beta_2}\ldots(D_n+\alpha_n)^{\beta_n}v \\ &= e^{i\alpha\cdot x}P(D+\alpha)v, \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} P(D)u=f &\Leftrightarrow \begin{cases} e^{i\alpha\cdot x}P(D+\alpha)v=f \\ u=e^{i\alpha\cdot x}v \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} P(D+\alpha)v=fe^{-i\alpha\cdot x} \\ u=e^{i\alpha\cdot x}v \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} P(D+\alpha)v=g. \\ u=e^{i\alpha\cdot x}v \\ g=fe^{-i\alpha\cdot x} \end{cases} \end{aligned}$$

■

En composant avec une homothétie de centre l'origine et de rapport $\frac{R}{\pi}$, et en prolongeant en une fonction 2π-périodique la composée de g par ladite homothétie, on peut supposer que g est 2π-périodique, c'est-à-dire que g est dans $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$, où $\mathbb{T}^n=\mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n$ est le Tore plat de dimension n.

Théorème 3.2. *Pour presque tout $\alpha \in \mathbb{R}^n$ tel que, $\forall j = 1, \ldots, n$, $0 \leq \alpha_j \leq \pi$, l'opérateur $P(D+\alpha)$ est un isomorphisme de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ sur $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$, et de $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$ sur $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$.*

Démonstartion :

• Soit $g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$. Donc g s'écrit sous la forme :

$$g(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \widehat{g}(k) e^{ikx} \tag{67}$$

où :

$$\widehat{g}(k) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{T}^n} g(x) e^{-ikx} dx,$$

et il existe un entier positif q tel que :

$$\forall q \in \mathbb{N}, \ \sup_{k \in \mathbb{Z}^n} (1+|k|)^q |\widehat{g}(k)| < \infty. \tag{68}$$

En choisissant f telle que :

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} [P(k+\alpha)]^{-1} \widehat{g}(k) e^{ikx}, \tag{69}$$

On obtient :

$$P(D+\alpha) f = g,$$

car, $P(D)$ étant de la forme $P(D) = \sum_{|\beta| \leq m} a_\beta D^\beta$, on a :

$$\begin{aligned}
P(D+\alpha)e^{ikx} &= \sum_{|\beta| \leq m} a_\beta (D_1+\alpha_1)^{\beta_1} \ldots (D_n+\alpha_n)^{\beta_n} e^{ikx} \\
&= \sum_{|\beta| \leq m} a_\beta (k_1+\alpha_1)^{\beta_1} \ldots (k_n+\alpha_n)^{\beta_n} e^{ikx} \\
&= \sum_{|\beta| \leq m} a_\beta (k+\alpha)^{\beta} e^{ikx} \\
&= P(k+\alpha) e^{ikx},
\end{aligned}$$

et il reste donc à démontrer que f, ainsi définie, est bel et bien dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$. D'aprés la proposition 7.2 (p.34) de [8], pour presque tout $\alpha \in \mathbb{R}^n$ tel que, $\forall j = 1, \ldots, n$, $0 \leq \alpha_j \leq 1$, il existe des constantes C et N' telles que :

$$\forall k \in \mathbb{Z}^n, |P(k+\alpha)|^{-1} \leq C(1+|k|^2)^{N'},$$

et cela implique que :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{Z}^n, (1+|k|)^N |P(k+\alpha)|^{-1} |\widehat{g}(k)| \leq C(1+|k|)^N (1+|k|^2)^{N'} |\widehat{g}(k)|.$$

Mais :

$$(1+|k|^2)^{N'} \leq (1+|k|)^{2N'},$$

car :

$$\frac{(1+|k|^2)^{N'}}{(1+|k|)^{2N'}} = \left[\frac{1+|k|^2}{(1+|k|)^2}\right]^{N'} = \left(\frac{1+|k|^2}{1+|k|^2+2|k|}\right)^{N'} \leq 1,$$

et on arrive donc à :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{Z}^n,\ (1+|k|)^N |P(k+\alpha)|^{-1} |\widehat{g}(k)| \leq C(1+|k|)^{N+2N'} |\widehat{g}(k)|.$$

Comme $g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ on obtient :

$$\forall N, N' \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{Z}^n,\ \sup_{k \in \mathbb{Z}^n} (1+|k|)^{N+2N'} |\widehat{g}(k)| < \infty$$

cela implique que :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{Z}^n,\ \sup_{k \in \mathbb{Z}^n} (1+|k|)^N |P(k+\alpha)|^{-1} |\widehat{g}(k)| < \infty$$

c'est-à-dire que :

$$f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{T}^n),$$

et cela prouve la surjectivité de $P(D+\alpha)$ en tant qu'opérateur de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$.

• D'autre part, si l'on suppose que :

$$P(D+\alpha)f = 0$$

on obtient :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} P(k+\alpha)\widehat{f}(k)e^{ikx} = 0$$

et ceci équivaut à :

$$\forall k \in \mathbb{Z}^n,\ \widehat{f}(k)P(k+\alpha) = 0$$

Comme :

$$P(k+\alpha) \neq 0$$

pour presque tout $\alpha \in \mathbb{R}^n$ tel que $0 \leq \alpha_j < 1$ pour $j = 1, \ldots, n$, on conclut que :

$$\forall k \in \mathbb{Z}^n,\ \widehat{f}(k) = 0$$

c'est-à-dire que :

$$f = 0$$

et cela démontre l'injectivité de $P(D+\alpha) : \mathscr{C}^\infty(\mathbb{T}^n) \to \mathscr{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$.

• En conclusion, $P(D+\alpha)$ est un isomorphisme de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ sur $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ et, par un raisonnement similaire, on peut facilement voir que $P(D+\alpha)$ est aussi un isomorphisme de $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$ sur $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$.■

4 Solutions élémentaires des opérateurs les plus classiques

4.1 Équation de Laplace

Le Laplacien est l'opérateur du second ordre sur $\mathbb{R}^n$:

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

Le cas usuel est le cas $n = 3$. Cet opérateur apparaît dans un très grand nombre d'équations provenant de la physique, de la mécanique, ou de problèmes géométriques. Une raison de son universalité est la suivante : de nombreuses lois de la physique ont tendance à se traduire par des EDP du second ordre, invariantes par déplacement (translations et rotations). Or les seuls opérateurs linéaires du second ordre invariants par déplacement sont les $a\Delta + b$, a,b constants, de sorte que Δ doit apparaître dans la plupart des problèmes linéaires, en particulier de perturbation, provenant de la physique. L'équation $\Delta f = g$ apparaît en particulier en électrostatique, où c'est l'équation qui lie un potentiel f à la densité de charges électriques g (dans l'équation de l'électrostatique figure aussi la constante diélectrique ε_0, qui vaut 1 dans un systéme d'unités convenable). Le potentiel engendré par une charge 1 placée au point $y \in \mathbb{R}^3$ est

$$V = \frac{1}{4\pi|x-y|}$$

Comme l'équation de Laplace est linéaire, le potentiel engendré par la densité g est (principe de superposition) :

$$f(x) = \int \frac{g(y)}{4\pi|x-y|}$$

(pourvu que g ne soit pas trop grande de sorte que l'intégrale converge). Cette formule sert à résoudre l'équation de Laplace dans de nombreux cas. Un autre problème classique provenant de la physique est le problème de Dirichlet : trouver le potentiel f dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ vérifiant $\Delta f = 0$ lorsque f est connue sur le bord $\partial\Omega$. Plus généralement on étudie le problème aux limites (bien posé[5], comme le suggère l'intuition physique)

$$\begin{cases} \Delta f = g \ \text{ dans } \Omega \\ f = f_0 \ \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}.$$

4.1.1 Solution élémentaire

Une solution élémentaire de Δ est une distribution E telle que $\Delta E = \delta$. On cherche E invariante par rotation. Dans ce cas, E est de la forme $E(x) = \Phi(|x|)$ où Φ est une fonction (généralisée) de $|x|$.

5. Ce problème est dit bien posé s'il admet une et une seule solution, et si cette solution dépend continûment et différentiablement des données g et f_0.

On se place donc en dehors de l'origine et, d'un côté, on a :

$$\begin{aligned}
\Delta E(x) &= \Delta[\Phi(|x|)] \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big[\frac{x_j}{|x|}\Phi'(|x|)\Big] \\
&= \sum_{j=1}^{n}\Big[\frac{x_j^2}{|x|^2}\Phi''(|x|)+\Big(\frac{1}{|x|}-\frac{x_j^2}{|x|^3}\Big)\Phi'(|x|)\Big] \\
&= \Phi''(|x|)+\frac{n-1}{|x|}\Phi'(|x|),
\end{aligned}$$

d'un autre côté :

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n\setminus 0),\ \langle \Delta E, \varphi\rangle = \langle \delta, \varphi\rangle = \varphi(0)=0,$$

ce qui veut dire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus 0,\ \Delta E(x)=0,$$

donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus 0,\ \Phi''(|x|)+\frac{(n-1)}{|x|}\Phi'(|x|)=0.$$

Sur $\mathbb{R}_+^*$, la solution générale Φ de l'équation différentielle :

$$\Phi''(t)+\frac{(n-1)}{t}\Phi'(t)=0$$

est telle que :

$$\begin{cases} \Phi'(t)=\Psi(t) \\ \Psi'(t)+\frac{(n-1)}{t}\Psi(t)=0 \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} \Phi(t)=\int \Psi(t)dt \\ \Psi(t)=ae^{-\int \frac{(n-1)}{t}dt}, \quad a \text{ étant une constante arbitraire,} \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \Phi(t)=\int \Psi(t)dt \\ \Psi(t)=\frac{a}{t^{n-1}}, \quad \text{où } a \text{ est une constante arbitraire,} \end{cases}$$

et par suite :

$$\begin{aligned}
\Phi(t) &= \int \frac{a}{t^{n-1}}dt \\
&= \begin{cases} at+b & \text{si } n=1 \\ a\ln t+b & \text{si } n=2 \\ \dfrac{a}{(2-n)}\cdot\dfrac{1}{t^{n-2}}+b & \text{si } n\geq 3 \end{cases}, \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont des constantes arbitraires.}
\end{aligned}$$

Par conséquent, pour $x \neq 0$, E est de la forme :

$$E(x) = \begin{cases} a|x| + b & \text{si } n = 1 \\ a\ln|x| + b & \text{si } n = 2 \\ \dfrac{a}{(2-n)} \cdot \dfrac{1}{|x|^{n-2}} + b & \text{si } n \geq 3 \end{cases}$$

où a, b sont des constantes à déterminer, et l'on se propose de chercher E telle que :

$$E(x) = \begin{cases} c_1|x| & \text{si } n = 1 \\ c_2\ln|x| & \text{si } n = 2 \\ c_3|x|^{2-n} & \text{si } n \geq 3. \end{cases}$$

Proposition 4.1. *la distribution sur $\mathbb{R}^n$ définie par la fonction localement intégrable :*

$$E(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{2} & \text{si } n = 1, \\ \dfrac{\ln|x|}{2\pi} & \text{si } n = 2, \\ \dfrac{c}{|x|^{n-2}} & \text{si } n \geq 3 \left(\text{avec } \dfrac{1}{c} = (2-n)\dfrac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\right). \end{cases}$$

est solution élémentaire du Laplacien.

Démonstration.

• Cas où $n = 1$: $\forall \varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \langle \Delta E, \varphi \rangle &= \langle E, \varphi'' \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} E(x)\varphi''(x)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{|x|}{2}\varphi''(x)\,dx \\ &= \int_0^\infty x\varphi''(x)\,dx \\ &= -\int_0^\infty \varphi'(x)\,dx \\ &= \varphi(0) \\ &= \langle \delta, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Donc : $\Delta E = \delta$, et $E = \frac{|x|}{2}$ est solution élémentaire de Δ.

• Cas où $n=2$: $\forall\varphi\in\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, telle que $\varphi(x)=\phi(|x|)$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle\Delta E,\varphi\rangle &= \langle E,\Delta\varphi\rangle\\
&= \int_{\mathbb{R}^2} E(x)\Delta\varphi(x)\,dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\ln|x|}{2\pi}\Delta[\phi(|x|)]\,dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\ln|x|}{2\pi}\Big[\Phi''(|x|)+\frac{1}{|x|}\Phi'(|x|)\Big]\,dx\\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^\infty \frac{\ln r}{2\pi}\Big[\phi''(r)+\frac{1}{r}\phi'(r)\Big]r\,drd\theta\\
&= \int_0^\infty r(\ln r)\Big[\phi''(r)+\frac{1}{r}\phi'(r)\Big]\,dr\\
&= \int_0^\infty r(\ln r)\phi''(r)\,dr+\int_0^\infty(\ln r)\phi'(r)\,dr\\
&= -\int_0^\infty \phi'(r)\,dr-\int_0^\infty(\ln r)\phi'(r)\,dr+\int_0^\infty(\ln r)\phi'(r)\,dr\\
&= \phi(0)=\varphi(0)=\langle\delta,\varphi\rangle.
\end{aligned}$$

Donc $\Delta E=\delta$, et E est solution élémentaire de Δ.

• Cas où $n\geq 3$: $\forall\varphi\in\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, telle que $\varphi(x)=\phi(|x|)$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle\Delta E,\varphi\rangle &= \langle E,\Delta\varphi\rangle\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} E(x)\Delta\varphi(x)\,dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{c}{|x|^{n-2}}\Delta[\phi(|x|)]\,dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{c}{|x|^{n-2}}\Big[\Phi''(|x|)+\frac{n-1}{|x|}\Phi'(|x|)\Big]\,dx\\
&= \int_{S^{n-1}}\int_0^\infty \frac{c}{r^{n-2}}\Big[\phi''(r)+\frac{n-1}{r}\phi'(r)\Big]r^{n-1}\,drd\sigma\\
&= |S^{n-1}|\cdot\int_0^\infty \frac{c}{r^{n-2}}\Big[\phi''(r)+\frac{n-1}{r}\phi'(r)\Big]r^{n-1}\,dr\\
&= c|S^{n-1}|\cdot\int_0^\infty r\phi''(r)\,dr+c(n-1)\cdot|S^{n-1}|\cdot\int_0^\infty\phi'(r)\,dr\\
&= -c|S^{n-1}|\cdot\int_0^\infty \phi'(r)\,dr+c(n-1)\cdot|S^{n-1}|\cdot\int_0^\infty\phi'(r)\,dr\\
&= c(n-2)\cdot|S^{n-1}|\cdot\int_0^\infty\phi'(r)\,dr\\
&= \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{n/2}}\cdot|S^{n-1}|\cdot\phi(0)=\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{n/2}}\cdot|S^{n-1}|\cdot\varphi(0)=\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{n/2}}\cdot|S^{n-1}|\cdot\langle\delta,\varphi\rangle.
\end{aligned}$$

Mais,

$$\begin{aligned}
|S^{n-1}| &= \frac{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2}\,dx}{\int_0^\infty e^{-r^2} r^{n-1}\,dr} \\
&= \frac{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)}\,dx_1\ldots dx_n}{\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{n-1}{2}} t^{-\frac{1}{2}}\,dt} \\
&= \frac{\left[\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(t^2+s^2)}\,dt\,ds\right]^{\frac{n}{2}}}{\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{n}{2}-1}\,dt} \\
&= \frac{\left[\int_0^{2\pi}\int_0^\infty \rho e^{-\rho^2}\,d\rho\,d\theta\right]^{\frac{n}{2}}}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{n}{2})} \\
&= \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}
\end{aligned}$$

et il en découle que

$$\forall \varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n),\ \langle \Delta E, \varphi\rangle = \langle \delta, \varphi\rangle$$

c'est-à-dire que

$$\Delta E = \delta$$

et que E est solution élémentaire de Δ. ■

4.2 Équation des Ondes

L'opérateur des ondes (D'alembertien) sur $\mathbb{R}^n$ est l'opérateur

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x,$$

où la variable de $\mathbb{R}^n$ est notée (t,x) avec $t = x_1 \in \mathbb{R}$ et $x = (x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$.

4.2.1 Cordes Vibrantes (Ondes en dimention $1+1$)

L'équation des Cordes Vibrantes (dimention $1+1$) est :

$$\left(\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) f = g$$

où v est la vitesse de propagation. En posant :

$$X = x - vt, \quad Y = x + vt, \quad F(X,Y) = f(t,x), \quad \text{et} \quad G(X,Y) = -\frac{1}{4} g(t,x),$$

on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}[F(X,Y)] = \frac{\partial X}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial X}(X,Y) + \frac{\partial Y}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial Y}(X,Y) = \frac{\partial F}{\partial X}(X,Y) + \frac{\partial F}{\partial Y}(X,Y),$$

donc :
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)=\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(X,Y)+\frac{\partial^2 F}{\partial Y\partial X}(X,Y)+\frac{\partial^2 F}{\partial X\partial Y}(X,Y)+\frac{\partial^2 F}{\partial Y^2}(X,Y).$$
De même :
$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)=\frac{\partial}{\partial t}[F(X,Y)]=\frac{\partial X}{\partial t}\cdot\frac{\partial F}{\partial X}(X,Y)+\frac{\partial Y}{\partial t}\cdot\frac{\partial F}{\partial Y}(X,Y)=-v\frac{\partial F}{\partial X}(X,Y)+v\frac{\partial F}{\partial Y}(X,Y),$$
et il en découle que :
$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t,x)=v^2\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(X,Y)-v^2\frac{\partial^2 F}{\partial Y\partial X}(X,Y)-v^2\frac{\partial^2 F}{\partial X\partial Y}(X,Y)+v^2\frac{\partial^2 F}{\partial Y^2}(X,Y).$$
Si l'on suppose maintenant que f est de classe $\mathscr{C}^2$, l'équation des cordes vibrantes devient :
$$\frac{\partial^2 F}{\partial X\partial Y}(X,Y)=G(X,Y).$$

Donc $F(X,Y)=E*G$, où E est une solution élémentaire de l'opérateur $\dfrac{\partial^2}{\partial X\partial Y}\cdot$ En fait, $E=H_X\otimes H_Y$, où H_X et H_Y sont les fonctions d'Heaviside, car :
$$\begin{aligned}\left\langle\frac{\partial^2(H_X\otimes H_Y)}{\partial X\partial Y},\varphi\right\rangle &= \left\langle H_X\otimes H_Y,\frac{\partial^2\varphi}{\partial X\partial Y}\right\rangle\\ &= \left\langle H_X,\left\langle H_Y,\frac{\partial^2\varphi}{\partial X\partial Y}\right\rangle\right\rangle\\ &= \left\langle H_X,\left\langle -\frac{\partial H_Y}{\partial Y},\frac{\partial\varphi}{\partial X}\right\rangle\right\rangle\\ &= \left\langle H_X,\left\langle -\delta_Y,\frac{\partial\varphi}{\partial X}\right\rangle\right\rangle\\ &= \left\langle H_X,-\frac{\partial\varphi}{\partial X}(X,0)\right\rangle\\ &= \left\langle\frac{\partial H_X}{\partial X},\varphi(X,0)\right\rangle\\ &= \left\langle\delta_X,\varphi(X,0)\right\rangle\\ &= \varphi(0,0)\\ &= \langle\delta,\varphi\rangle.\end{aligned}$$

4.2.2 Problème de Cauchy

Soit $f=f(t,x)$ une distribution tempérée, et notons $\mathscr{F}_x f$ sa transformée de Fourier partielle en x. Pour les fonctions test φ on a :
$$\mathscr{F}_x\varphi(t,\xi)=\frac{1}{(2\pi)^{(n-1)/2}}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}e^{-ix\xi}\varphi(t,x)\,dx.$$

Si f vérifie le problème de Cauchy pour l'équation des Ondes,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t,x) = \Delta_x f(t,x) \\ f(0,x) = f_0(x), \\ \dfrac{\partial f}{\partial t}(0,x) = f_1(x), \end{cases}$$

sa transformée de Fourier partielle en x vérifie le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2(\mathscr{F}_x f)}{\partial t^2}(t,\xi) = -|\xi|^2 \mathscr{F}_x f(t,\xi) \\ \mathscr{F}_x f = \mathscr{F}_x f_0, \ \dfrac{\partial \mathscr{F}_x f}{\partial t} = \mathscr{F}_x f_1, \ \text{pour } t = 0, \end{cases}$$

dont l'unique solution est : $\mathscr{F}_x f = (\cos t|\xi|)\mathscr{F}_x f_0(\xi) + |\xi|^{-1} \sin t|\xi| \mathscr{F}_x f_1(\xi)$.

4.2.3 Solution élémentaire

Soit E_+ la distribution tempérée dont la transformée de Fourier partielle en x est :

$$\mathscr{F}_x E_+(t,\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} H(t,\xi) \frac{\sin t|\xi|}{|\xi|}.$$

Pour toute fonction test φ dans $\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, on a :

$$\begin{aligned}
\left\langle \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + |\xi|^2\right)\mathscr{F}_x E_+, \varphi \right\rangle - \left\langle \frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathscr{F}_x E_+ + |\xi|^2 \mathscr{F}_x E_+, \varphi \right\rangle \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left\langle \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(H(t,\xi)\frac{\sin t|\xi|}{|\xi|}\right) + |\xi|^2 H(t,\xi)\frac{\sin t|\xi|}{|\xi|}, \varphi \right\rangle \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left\langle \frac{\partial}{\partial t}\left(\delta_t \otimes 1_\xi \frac{\sin t|\xi|}{|\xi|} + H(t,\xi)\cos t|\xi| \right) \right. \\
&\qquad \left. + |\xi|^2 H(t,\xi)\frac{\sin t|\xi|}{|\xi|}, \varphi \right\rangle \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left\langle \delta_t \otimes 1_\xi - |\xi|^2 H(t,\xi)\frac{\sin t|\xi|}{|\xi|} \right. \\
&\qquad \left. + |\xi|^2 H(t,\xi)\frac{\sin t|\xi|}{|\xi|}, \varphi \right\rangle \\
&= \langle \delta_t \otimes (2\pi)^{-\frac{n}{2}} 1_\xi, \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

Donc

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + |\xi|^2\right)\mathscr{F}_x E_+ = \delta_t \otimes (2\pi)^{-\frac{n}{2}} 1_\xi,$$

et à l'aide de la transformation de Fourier inverse on obtient :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta_x\right)E_+=\delta_t\otimes\delta_x,$$

c'est-à-dire :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta_x\right)E_+=\delta,$$

et cela montre que E_+ est une solution élémenaire de l'opérateur des ondes, portée par le demi-espace $t\geq 0$.

4.3 Équation de La Chaleur et Équation de Schrödinger

Les opérateurs de la chaleur et de Schrödinger sont respectivement :

$$C=\frac{\partial}{\partial t}-\Delta \quad \text{et} \quad S=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}-\Delta.$$

Proposition 4.2. *La transformée de Fourier inverse de la fonction :*

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}\\ \xi &\mapsto \exp(-\omega|\xi|^2)\end{aligned}$$

est la fonction :

$$\begin{aligned} g:\mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \frac{1}{(2\omega)^{\frac{n}{2}}}\exp\left(\frac{-|x|^2}{4\omega}\right)\end{aligned}$$

Démonstration.

On a :

$$g(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{ix\xi-\omega|\xi|^2}d\xi.$$

Donc :

$$g(ix)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-x\xi-\omega|\xi|^2}d\xi.$$

Comme :

$$-x\xi-\omega|\xi|^2=\frac{|x|^2}{4\omega}-\left|\frac{x}{2\sqrt{\omega}}+\sqrt{\omega}\xi\right|^2,$$

on obtient :

$$g(ix)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}e^{\frac{|x|^2}{4\omega}}\int_{\mathbb{R}^n_\xi}e^{-\left|\frac{x}{2\sqrt{\omega}}+\sqrt{\omega}\xi\right|^2}d\xi.$$

et en posant :

$$\eta = \frac{x}{2\sqrt{\omega}} + \sqrt{\omega}\xi$$

on arrive à :

$$d\xi = \frac{1}{\omega^{\frac{n}{2}}} d\eta$$

et par suite :

$$g(ix) = \frac{1}{(2\pi\omega)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{|x|^2}{4\omega}} \int_{\mathbb{R}^n_\eta} e^{-|\eta|^2} d\eta = \frac{1}{(2\omega)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{|x|^2}{4\omega}}$$

Ce qui implique que :

$$g(x) = \frac{1}{(2\omega)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(\frac{-|x|^2}{4\omega}\right). \quad \square$$

4.3.1 Equation de la chaleur

le problème bien posé associé est le problème initial :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} f = \Delta f \\ f = f_0(x) \qquad \text{pour } t = 0 \end{cases}$$

où f_0 est tempérée.

Si f en est une solution tempérée, et si $\widehat{f}$ est la transformée de Fourier partielle en x de f, alors :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} \widehat{f} = -|\xi|^2 \widehat{f} \\ \widehat{f} = \widehat{f_0} \qquad \text{pour } t = 0 \end{cases}$$

Cela implique que :

$$\widehat{f} = e^{-t|\xi|^2} \widehat{f_0}$$

et que :

$$\begin{aligned} f(t,x) &= (2\pi)^{\frac{-n}{2}} [\mathscr{F}^{-1}(e^{-t|\xi|^2})] *_x f_0 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \left(\frac{1}{2t}\right)^{\frac{n}{2}} e^{\frac{-|x|^2}{4t}} *_x f_0 \\ &= \left[\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\right] *_x f_0. \end{aligned}$$

- **Solution élémentaire** : On pose $\widehat{E}(t,\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} H(t,\xi) e^{-t|\xi|^2}$ et, pour toute fonction test $\varphi \in$

$\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, on a :

$$\begin{aligned}
\left\langle\left(\frac{\partial}{\partial t}+|\xi|^2\right)\mathscr{F}_x E_+,\varphi\right\rangle &= \left\langle\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{F}_x E_+ + |\xi|^2\mathscr{F}_x E_+,\varphi\right\rangle \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\left\langle\frac{\partial}{\partial t}(H(t,\xi)e^{-t|\xi|^2})+|\xi|^2(H(t,\xi)e^{-t|\xi|^2}),\varphi\right\rangle \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\langle\delta_t\otimes 1_\xi e^{-t|\xi|^2}-|\xi|^2H(t,\xi)e^{-t|\xi|^2} \\
&\qquad +|\xi|^2H(t,\xi)e^{-t|\xi|^2},\varphi\rangle \\
&= \langle\delta_t\otimes(2\pi)^{-\frac{n}{2}}1_\xi,\varphi\rangle,
\end{aligned}$$

Donc

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+|\xi|^2\right)\widehat{E}=\delta_t\otimes(2\pi)^{-\frac{n}{2}}1_\xi$$

ou encore :

$$\mathscr{F}_x\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)E\right]=\mathscr{F}_x[\delta_t\otimes\delta_x]$$

autrement dit :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)E=\delta$$

et ainsi, l'équation de la chaleur admet une solution élémentaire E telle que :

$$\begin{aligned}
E(t,x) &= \mathscr{F}_x^{-1}\widehat{E} \\
&= \mathscr{F}_x^{-1}\left[(2\pi)^{-\frac{n}{2}}H(t,\xi)e^{-t|\xi|^2}\right] \\
&= \begin{cases}(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\mathscr{F}_x^{-1}\left[e^{-t|\xi|^2}\right] & \text{si } t\geq 0\\ 0 & \text{si } t<0\end{cases} \\
&= H(t,x)(4\pi t)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.
\end{aligned}$$

4.3.2 Équation de Schrödinger

Pour L'opérateur de Schrödinger sur $\mathbb{R}^{n+1}$, $S=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}-\Delta$, on cherche une solution au problème initial :

$$\begin{cases}Sf=0\\ f=f_0(x) \quad \text{pour } t=0\end{cases},$$

sachant que f_0 est tempérée.

Ce problème initial se réécrit :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\widehat{f}}{\partial t}=-i|\xi|^2\widehat{f}\\ \widehat{f}=\widehat{f_0} \qquad \text{pour } t=0\end{cases}.$$

Sa solution est telle que :

$$\widehat{f}=e^{-it|\xi|^2}\widehat{f_0},$$

donc

$$\begin{aligned} f(t,x) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}}[\mathscr{F}_x^{-1}(e^{-it|\xi|^2})] *_x f_0(x) \\ &= [(4\pi i t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4it}}] *_x f_0(x) \\ &= [(4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4it} - in\frac{\pi}{4}}] *_x f_0(x) \end{aligned}$$

• **Solution élémentaire :** On pose $\widehat{E}(t,\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} H(t,\xi) e^{-it|\xi|^2}$ et, pour tout $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, on a :

$$\begin{aligned} \Big\langle \Big(\frac{\partial}{\partial t} + i|\xi|^2\Big)\mathscr{F}_x E, \varphi \Big\rangle &= \Big\langle \frac{\partial}{\partial t}\mathscr{F}_x E + i|\xi|^2 \mathscr{F}_x E, \varphi \Big\rangle \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \Big\langle \frac{\partial}{\partial t}\Big[H(t,\xi)e^{-it|\xi|^2}\Big] + i|\xi|^2\Big[H(t,\xi)e^{-it|\xi|^2}\Big], \varphi \Big\rangle \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \Big\langle e^{-it|\xi|^2}\big[\delta_t \otimes 1_\xi\big] - i|\xi|^2 H(t,\xi) e^{-it|\xi|^2} \\ &\qquad + i|\xi|^2 H(t,\xi) e^{-it|\xi|^2}, \varphi \Big\rangle \\ &= \langle \delta_t \otimes [(2\pi)^{-\frac{n}{2}} 1_\xi], \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Donc

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t} + i|\xi|^2\Big)\widehat{E} = \delta_t \otimes [(2\pi)^{-\frac{n}{2}} 1_\xi],$$

de sorte que :

$$\Big(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\Big) E = \delta$$

et que l'équation de la chaleur admet pour solution élémentaire $E = \mathscr{F}_x^{-1}\widehat{E}$. En fait, E est la fonction localement intégrable :

$$\begin{aligned} E(t,x) &= \mathscr{F}_x^{-1}\widehat{E} = \mathscr{F}_x^{-1}\big[(2\pi)^{-\frac{n}{2}} H(t,\xi) e^{-it|\xi|^2}\big] \\ &= \begin{cases} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \mathscr{F}_x^{-1}\big[e^{-it|\xi|^2}\big] & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \\ &= H(t,x)(4\pi i t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4it}} - H(t,x)(4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t} - in\frac{\pi}{4}}. \end{aligned}$$

5 Fonctions harmoniques :

Définition 5.1. *Soit $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert non vide $U \subseteq \mathbb{R}^n$. On dit que u est* **harmonique** *dans U si, et seulement si : $\Delta u = 0$ sur U.*

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout réel $r > 0$, on désigne par $B(x,r)$ (resp. $\partial B(x,r)$) la boule (resp. la sphère) de centre x et de rayon r, et on se propose de démontrer que si $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction harmonique dans un ouvert non vide $U \subseteq \mathbb{R}^n$, alors, quel que soit $x \in U$ et quel que soit $r \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $B(x,r) \subset U$, le nombre $u(x)$ est à la fois égal à la moyenne de u sur $B(x,r)$ que l'on note $⨍_{B(x,r)} u(y)dy$ et à sa moyenne sur $\partial B(x,r)$ notée $⨍_{\partial B(x,r)} u(y)dS(y)$, où :

$$⨍_{B(x,r)} u(y)dy = \frac{1}{\alpha(n)r^n}\int_{B(x,r)} u(y)dy$$

et :

$$⨍_{\partial B(x,r)} u(y)dS(y) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\int_{\partial B(x,r)} u(y)dS(y),$$

et où $n\alpha(n)r^{n-1}$ est le volume de la sphère de rayon r.

Théorème 5.1. (Formules de la moyenne pour l'équation de Laplace) *: Soit $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert non vide $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Si u est harmonique dans U, alors :*

$$u(x) = ⨍_{\partial B(x,r)} u(y)dS(y) = ⨍_{B(x,r)} u(y)dy, \tag{70}$$

pour toute boule $B(x,r) \subset U$.

Démonstration :

Soit :

$$\phi(r) = ⨍_{\partial B(x,r)} u(y)dS(y),$$

donc :

$$\phi(r) = ⨍_{\partial B(0,1)} u(x+rz)dS(z)$$

et :

$$\begin{aligned}
\phi'(r) &= ⨍_{\partial B(0,1)} \nabla u(x+rz)\cdot z dS(z) \\
&= ⨍_{\partial B(x,r)} \nabla u(y)\cdot \frac{y-x}{r} dS(y) \\
&= ⨍_{\partial B(x,r)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)dS(y) \quad \text{où :} \quad \nu(y) = \frac{y-x}{r} \\
&= \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\int_{\partial B(x,r)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)dS(y).
\end{aligned}$$

Comme ν est le champ normal unitaire sortant [6] de $\partial B(x,r)$, la formule de Green [7] implique que :

$$\phi'(r) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{B(x,r)} \Delta u(y)dy \tag{71}$$

et en supposant que u est harmonique dans U, on arrive à :

$$\Delta u = 0 \quad \text{sur} \quad B(x,r)$$

d'où :

$$\phi'(r) = 0$$

et ainsi, ϕ est constante et on a :

$$\phi(r) = \lim_{t\to 0}\phi(t) = \lim_{t\to 0} \fint_{\partial B(x,t)} u(y)dS(y) = u(x),$$

c'est-à-dire :

$$u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y)dS(y).$$

Enfin, la formule de passage en coordonnées polaires [8] donne :

$$\begin{aligned}
\int_{B(x,r)} u(y)dy &= \int_0^r \left(\int_{\partial B(x,s)} u(y)dS(y)\right)ds \\
&= \int_0^r \left(n\alpha(n)s^{n-1}\fint_{\partial B(x,s)} u(y)dS(y)\right)ds \\
&= \int_0^r \left(n\alpha(n)s^{n-1}u(x)\right)ds \\
&= \alpha(n)u(x)\int_0^r ns^{n-1}ds \\
&= \alpha(n)r^n u(x)
\end{aligned}$$

ce qui conduit à :

$$u(x) = \frac{1}{\alpha(n)r^n}\int_{B(x,r)} u(y)dy$$

c'est-à-dire :

$$u(x) = \fint_{B(x,r)} u(y)dy \qquad \blacksquare$$

6. Soit $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) \leq 0\}$ où $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$. Alors, la normale sortante en un point x_0 de ∂U est le vecteur $\nu = \frac{\nabla u(x_0)}{\|\nabla u(x_0)\|}$.

7. Formule de Green : Si $u \in \mathscr{C}^2(\overline{U})$, alors : $\int_U \Delta u dx = \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS$, où ν est la normale sortante à ∂U.

8. Si $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et intégrable, alors, quel que soit $r > 0$,

$$\frac{d}{dr}\left(\int_{B(x_0,r)} u(x)dx\right) = \int_{\partial B(x_0,r)} u dS.$$

Théorème 5.2. (Réciproque de la propriété de la moyenne) : *Soit $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert non vide $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Si u est telle que :*

$$u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y)dS(y), \text{ pour toute boule } B(x,r) \subset U,$$

alors u est harmonique dans U.

Démonstration :

Soit $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert non vide $U \subseteq \mathbb{R}^n$ et, pour tout x fixé dans U et tout réel strictement positif r tel que $B(x,r) \subseteq U$, on pose :

$$\phi(r) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y)dS(y),$$

et on suppose que :

$$u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y)dS(y), \text{ pour toute boule } B(x,r) \subset U,$$

ce qui implique que :

$$\phi'(r) = 0 \text{ sur un certain intervalle }]0, r_0[. \tag{72}$$

Mais, d'après (71), on a :

$$\phi'(r) = \frac{r}{n} \fint_{B(x,r)} \Delta u(y)dy,$$

et si u n'était pas harmonique, il existerait $x \in U$ tel que $\Delta u(x) \neq 0$, et il y aurait un $r > 0$ tel que $\Delta u(y)$ soit > 0, ou < 0, pour tout $y \in B(x,r)$. cela impliquerait que $\phi'(r)$ est soit > 0, soit < 0, et contredirait (72). Par conséquent, u est harmonique dans U. ■

Théorème 5.3. (Principe du maximum) : *Soit U un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, et soit u une fonction continue sur $\overline{U}$, de classe $\mathscr{C}^2$ sur U, et harmonique dans U. Dans ce cas :*

1. *On a :*
$$\max_{\overline{U}} u = \max_{\partial U} u$$
2. *Si U est en plus connexe , et s'il existe un point $x_0 \in U$ tel que :*
$$u(x_0) = \max_{\overline{U}} u,$$
alors u est constante sur U.

Démonstration :

• On commence par le deuxième point, et pour ce faire, on suppose qu'il existe $x_0 \in U$ tel que [9] :

$$u(x_0) = \max_{\overline{U}} u.$$

Pour $0 < r < d(x_0, \partial U)$, l'égalité de la moyenne implique que :

$$\max_{\overline{U}} u = \fint_{B(x_0,r)} u(y)dy,$$

d'où :

$$\fint_{B(x_0,r)} \big[\max_{\overline{U}} u - u(y)\big]dy = 0,$$

et comme la fonction $x \mapsto \max_{\overline{U}} u - u(x)$ est positive et continue sur $B(x_0, r)$, on conclut que :

$$u(y) = \max_{\overline{U}} u \text{ pour tout } y \in B(x_0, r).$$

Mais, U est connexe. Donc, le seul sous-ensemble non vide de U qui soit à la fois ouvert et fermé dans U est U lui-même. Comme l'ensemble non vide $A = \{x \in U \mid u(x) = \max_{\overline{U}} u\}$ est à la fois ouvert (car, pour tout $x \in U$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subseteq U$) et fermé dans U (car $A = U \cap u^{-1}(\{\max_{\overline{U}} u\})$), on conclut que $A = U$, que, quel que soit $x \in U$, $u(x) = \max_{\overline{U}} u$, et que u est constante dans U.

• Pour ce qui est du premier point, on constate que U est borné, donc $\overline{U}$ est compact, et comme u est continue sur $\overline{U}$, u atteint son maximum en un point $x_0 \in \overline{U}$. Si $x_0 \in \partial U$, la question est réglée, et si $x_0 \in U$, le deuxième point du présent théorème implique que u est constante sur la composante connexe de U qui contient x_0, donc u atteint aussi son maximum sur le bord de cette composante connexe, donc sur le bord ∂U de U. ■

Remarque 5.1. *Le théorème 5.1 (principe du maximum) reste valable si l'on remplace partout dedans,* « max » *par* « min ». *Pour le voir, il suffit d'y remplacer u par $(-u)$.*

Remarque 5.2. *Le deuxième point du principe du maximum implique, en particulier, que si U est connexe et u est une fonction continue sur $\overline{U}$, de classe $\mathscr{C}^2$ sur U, et telle que :*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } U \\ u = g & \text{sur } \partial U \end{cases},$$

Alors, u est positive sur U tout entier si g est positive au moins en un point de ∂U.

9. Ce qui est sûr, c'est qu'il existe $x_1 \in \overline{U}$ tel que : $u(x_1) = \max_{\overline{U}} u$, car $\overline{U}$ est compact (puisqu'il est fermé et borné) et u est continue sur $\overline{U}$.

Théorème 5.4. **(Unicité)** : *Soit U un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Alors, pour tout $f \in \mathscr{C}(U)$ et tout $g \in \mathscr{C}(\partial U)$, il existe au plus une fonction $u \in \mathscr{C}^2(U) \cap \mathscr{C}(\overline{U})$ solution du problème de Dirichlet :*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } U \\ u = g & \text{sur } \partial U. \end{cases} \tag{73}$$

Démonstration :

Soit u_1, u_2 deux solutions du problème (73). Alors, la fonction $u = \pm(u_1 - u_2)$, qui est dans $\mathscr{C}^2(U) \cap \mathscr{C}(\overline{U})$, est solution du problème :

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } U \\ u = 0 & \text{sur } \partial U. \end{cases}$$

La fonction u étant harmonique, d'après le principe du maximum, on a :

$$\max_{\partial U} u = \max_{\overline{U}} u = 0,$$
$$\min_{\partial U} u = \min_{\overline{U}} u = 0,$$

et vu que :

$$\min_{\overline{U}} u \leq u \leq \max_{\overline{U}} u,$$

on conclut que :

$$u = 0,$$

et que :

$$u_1 = u_2. \qquad \blacksquare$$

Proposition 5.1.

1. *La fonction $\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par :*

$$\eta(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\frac{1}{|x|^2-1}}}{\int_{|x|<1} e^{\frac{1}{|x|^2-1}} dx} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1, \end{cases} \tag{74}$$

est radiale, de classe $\mathscr{C}^\infty$ et à support compact égal à $B(0,1)$, et telle que $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x) dx = 1$.

2. *Pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction $\eta_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par :*

$$\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \tag{75}$$

est $\mathscr{C}^\infty$ à support compact égal à $B(0,\varepsilon)$, et telle que $\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon dx = 1$.

3. *Si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction localement intégrable, sa régularisée f^ε est définie sur l'ensemble*

$$U_\varepsilon = \{x \in U \mid d(x, \partial U) > \varepsilon\}$$

par :

$$f^\varepsilon = \eta_\varepsilon * f \text{ sur } U_\varepsilon$$

c'est-à-dire par :

$$\forall x \in U_\varepsilon,\ f^\varepsilon(x) = \int_U \eta_\varepsilon(x-y) f(y) dy = \int_{B(0,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(y) f(x-y) dy,$$

et c'est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur U_ε.

Théorème 5.5. (Régularité) : *Soit U un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et u une fonction continue sur U. Si, pour toute boule $B(x,r) \subset U$, u vérifie la propriété (70) dite de la moyenne, alors u est $\mathscr{C}^\infty$ sur U.*

Démonstration : Soit η la fonction définie par (74) et, pour tout $\varepsilon > 0$, considérons la fonction u^ε définie sur U_ε par :

$$u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u.$$

On sait, d'après la proposition 5.1., que $u^\varepsilon \in \mathscr{C}^\infty(U_\varepsilon)$, et pour démontrer que u est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur U, on va démontrer que $u = u^\varepsilon$ sur U_ε. En effet, pour tout $x \in U_\varepsilon$, on a :

$$\begin{aligned}
u^\varepsilon(x) &= \int_U \eta_\varepsilon(x-y) u(y) dy \\
&= \int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y) u(y) dy \quad (\text{car } \operatorname{Supp} \eta_\varepsilon = B(0,\varepsilon)) \\
&= \int_{B(x,\varepsilon)} \widetilde{\eta}_\varepsilon(|x-y|) u(y) dy \quad (\text{où } \widetilde{\eta}_\varepsilon \text{ est une fonction de } \mathbb{R}_+ \text{ dans } \mathbb{R}, \text{ car } \eta \text{ est radiale}) \\
&= \int_0^\varepsilon \widetilde{\eta}_\varepsilon(r) \Big(\int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y) \Big) dr \quad (\text{on a utilisé les coordonnées polaires}) \\
&= u(x) \int_0^\varepsilon \widetilde{\eta}_\varepsilon(r) n\alpha(n) r^{n-1} dr \quad (\text{d'après } (70)) \\
&= u(x) \int_0^\varepsilon \widetilde{\eta}_\varepsilon(r) \Big(\int_{\partial B(0,r)} dS(y) \Big) dr \\
&= u(x) \int_{B(0,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(y) dy \quad (\text{coordonnées polaires}) \\
&= u(x)
\end{aligned}$$

Donc :

$$u = u^{\varepsilon} \text{ sur } U_{\varepsilon}$$

ce qui prouve que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$u \in \mathscr{C}^{\infty}(U_{\varepsilon})$$

et comme :

$$U = \bigcup_{\varepsilon > 0} U_{\varepsilon},$$

on conclut que :

$$u \in \mathscr{C}^{\infty}(U).$$

■

Théorème 5.6. (Théorème de Gauss-Green) : *Pour toute fonction $u \in \mathscr{C}^1(\overline{U})$, on a :*

$$\int_U u_{x_i}\,dx = \int_{\partial U} u\nu_i\,dS, \quad i = \overline{1,n}$$

où $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ est le champ normal sortant.

Démonstration. *cf.* [3] ■

Théorème 5.7. (Estimation locale pour les fonctions harmoniques) : *Soit U un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et u une fonction harmonique dans U. Pour toute boule $B(x_0, r) \subset U$ et tout multi-indice γ, on a :*

$$|\partial^{\gamma} u(x_0)| \leq \frac{C_{\gamma}}{r^{n+|\gamma|}} ||u||_{L^1(B(x_0,r))}, \tag{76}$$

Avec :

$$C_{\gamma} = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha(n)} & si\ |\gamma| = 0 \\[2ex] \dfrac{(2^{n+1} n|\gamma|)^{|\gamma|}}{\alpha(n)} & si\ |\gamma| \neq 0. \end{cases} \tag{77}$$

Démonstration : On démontre cette inégalité par récurrence sur $|\gamma|$.

• Pour $|\gamma|=0$, on a $\gamma=0$, donc $\partial^\gamma u = u$ et, d'après l'égalité de la moyenne :

$$\begin{aligned}
|u(x_0)| &= \left| \fint_{B(x_0,r)} u(x)dx \right| && (78)\\
&= \left| \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B(x_0,r)} u(x)dx \right| && (79)\\
&\leq \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B(x_0,r)} |u(x)|dx && (80)\\
&\leq \frac{1}{\alpha(n)r^n} ||u||_{L^1(B(x_0,r))}, && (81)
\end{aligned}$$

ce qui confirme (76) et (77) pour $|\gamma|=0$.

• Pour $|\gamma|=1$, il existe $i \in \{1,\ldots,n\}$ tel que $\partial^\gamma u = u_{x_i}$, et comme u est harmonique, u_{x_i} l'est également et on a :

$$\begin{aligned}
|\partial^\gamma u(x_0)| &= \left| \fint_{B(x_0,\frac{r}{2})} u_{x_i}(x)dx \right| \quad \text{(d'après la formule de la moyenne)} && (82)\\
&= \left| \frac{2^n}{\alpha(n)r^n} \int_{B(x_0,\frac{r}{2})} u_{x_i}(x)dx \right| && (83)\\
&= \left| \frac{2^n}{\alpha(n)r^n} \int_{\partial B(x_0,\frac{r}{2})} u(x)\nu_i(x)dS \right| \quad \text{(d'après le théorème de Gauss-Green)} && (84)\\
&\leq \frac{2^n}{\alpha(n)r^n} \int_{\partial B(x_0,\frac{r}{2})} |u|dS \quad \text{(car } |\nu_i(x)| \leq 1\text{)} && (85)\\
&\leq \frac{2^n}{\alpha(n)r^n} ||u||_{L^\infty(\partial B(x_0,\frac{r}{2}))} \int_{\partial B(x_0,\frac{r}{2})} dS && (86)\\
&\leq \frac{2n}{r} ||u||_{L^\infty(\partial B(x_0,\frac{r}{2}))}. && (87)
\end{aligned}$$

et le fait que u soit continue sur le compact $B(x_0,\frac{r}{2})$ implique l'existence d'un élément x dans $B(x_0,\frac{r}{2})$ tel que :

$$||u||_{L^\infty(\partial B(x_0,\frac{r}{2}))} = |u(x)|. \tag{88}$$

Mais l'inégalité :

$$|y-x_0| \leq |y-x| + |x-x_0| \tag{89}$$

implique que :

$$\forall y \in B\left(x,\frac{r}{2}\right),\ y \subset B(x_0,r),$$

c'est-à-dire que :

$$B\left(x,\frac{r}{2}\right) \subset B(x_0,r) \subset U, \tag{90}$$

et maintenant :

$$|u(x)| \leq \frac{1}{\alpha(n)(\frac{r}{2})^n}||u||_{L^1(B(x,\frac{r}{2}))} \quad \text{(d'après (81))} \tag{91}$$

$$\leq \frac{1}{\alpha(n)}\left(\frac{2}{r}\right)^n ||u||_{L^1(B(x_0,r))} \quad \text{(d'après (90))}. \tag{92}$$

Enfin, en combinant les inégalités (87), (88) et (92) , nous déduisons que :

$$|\partial^\gamma u(x_0)| \leq \frac{2^{n+1}n}{\alpha(n)}\frac{1}{r^{n+1}}||u||_{L^1(B(x_0,r))} \text{ si } |\gamma| = 1$$

ce qui prouve (76) et (77) pour $|\gamma| = 1$.

• On suppose à présent que $|\gamma| \geq 2$, et que :

$$\begin{cases} \text{(76) et (77) sont vraies pour toute boule } B(x_0,r) \subset U \text{ et} \\ \text{tout multi-indice } \gamma' \text{ de longueur inférieure ou égale à } |\gamma|-1. \end{cases} \tag{93}$$

Dans ce cas,

$$\forall B(x_0,r) \subset U,\ \forall \gamma \in \mathbb{N}^n(|\gamma| \geq 2),\ \exists i \in \{1,\cdots,n\},\ \exists \gamma' \in \mathbb{N}^n(|\gamma'| = |\gamma|-1) \Big/ \partial^\gamma u = (\partial^{\gamma'} u)_{x_i},$$

et de (87), nous déduisons que :

$$|\partial^\gamma u(x_0)| \leq \frac{n|\gamma|}{r}||\partial^{\gamma'} u||_{L^\infty\left(\partial B\left(x_0,\frac{r}{|\gamma|}\right)\right)}. \tag{94}$$

Comme $\partial^{\gamma'} u$ est continue, et que $B(x_0,\frac{r}{|\gamma|})$ est compact, il existe $x \in B(x_0,\frac{r}{|\gamma|})$ tel que :

$$||\partial^{\gamma'} u||_{L^\infty\left(\partial B\left(x_0,\frac{r}{|\gamma|}\right)\right)} = |\partial^{\gamma'} u(x)|, \tag{95}$$

et vu l'inégalité (89), on a :

$$y \in B\left(x, \frac{|\gamma|-1}{|\gamma|}r\right) \Rightarrow y \in B(x_0,r), \tag{96}$$

d'où :

$$B\left(x, \frac{|\gamma|-1}{|\gamma|}r\right) \subset B(x_0,r) \subset U, \tag{97}$$

et il s'ensuit alors que :

$$|\partial^{\gamma'} u(x)| \leq \frac{[2^{n+1}n(|\gamma|-1)]^{|\gamma|-1}}{\alpha(n)(\frac{|\gamma|-1}{|\gamma|}r)^{n+|\gamma|-1}}||u||_{L^1\left(B\left(x,\frac{|\gamma|-1}{|\gamma|}r\right)\right)} \quad \text{(d'après (93))} \tag{98}$$

$$\leq \frac{[2^{n+1}n(|\gamma|-1)]^{|\gamma|-1}}{\alpha(n)(\frac{|\gamma|-1}{|\gamma|}r)^{n+|\gamma|-1}}||u||_{L^1(B(x_0,r))} \quad \text{(d'après (97))}. \tag{99}$$

Enfin, de (94), (95) et (99), il découle que :

$$|\partial^{\gamma}(x_0)| \leq \frac{(2^{n+1}n|\gamma|)^{|\gamma|}}{\alpha(n)r^{n+|\gamma|}}||u||_{L^1(B(x_0,r))}$$

et cela prouve (76) et (77) pour $|\gamma| \geq 2$. ■

Théorème 5.8. (Théorème de Liouville) : *Toute fonction $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, harmonique et bornée, est constante.*

Démonstration : La fonction u étant harmonique, d'après le théorème 5.7. (avec $|\gamma| = 1$), pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, tout $r > 0$, et tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, on a :

$$0 \leq |u_{x_i}(x_0)| \leq \frac{n2^{n+1}}{\alpha(n)r^{n+1}}||u||_{L^1(B(x_0,r))}.$$

Comme :

$$||u||_{L^1(B(x_0,r))} \leq \alpha(n)r^n||u||_{L^\infty(B(x_0,r))}$$

et comte tenu du fait que u est bornée, on a aussi :

$$||u||_{L^\infty(B(x_0,r))} \leq ||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} < \infty$$

Par conséquent :

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\},\ 0 \leq |u_{x_i}(x_0)| \leq \frac{n2^{n+1}}{r}||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$$

et cela prouve que, $\forall i \in \{1, \cdots, n\}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $u_{x_i}(x_0) = 0$, c'est-à-dire que u est constante. ■

Théorème 5.9. (Formule de représentation) : *soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$, à support compact. Alors, toute solution bornée de l'équation :*

$$-\Delta u = f \ sur\ \mathbb{R}^n \qquad (100)$$

est de la forme :

$$u(x) = -\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y)dy + C \qquad (101)$$

où C est une constante, et Φ est une solution élémentaire du Laplacien.

Démonstration :

Tout d'abord, $u(x) = -\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y)dy$ est une solution de (100) car $u = -\Phi * f$. On vérifie ensuite que si $n \geq 3$, alors u est bornée. Enfin, si v est une autre solution bornée de (100), alors $w = u - v$ est harmonique et bornée, donc constante d'après le théorème de Liouville. ■

Théorème 5.10. (Analyticité) : *Toute fonction harmonique sur un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ est analytique* [10] *sur cet ouvert.*

Démonstration :

Soit U un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction harmonique sur U. Du théorème 5.5, il découle que u est de classe C^∞ sur U, et d'après la formule de Taylor avec reste de Lagrange, pour tout $x_0 \in U$ et tout x tel que $[x_0, x] \subset U$, il existe $t \in [0,1]$ tel que :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad u(x) = \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^n \\ |\gamma| < N-1}} \frac{\partial^\gamma u(x_0)}{\gamma!}(x-x_0)^\gamma + R_N(x) \quad \text{avec} \quad R_N(x) = \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^n \\ |\gamma| = N}} \frac{\partial^\gamma u(tx_0 + (1-t)x)}{\gamma!}(x-x_0)^\gamma.$$

Pour démontrer que u est analytique dans U il suffit alors de démontrer que, quel que soit $x_0 \in U$, il existe $r_0 > 0$ tel que $B(x_0, r_0) \subset U$ et tel que :

$$\forall x \in B(x_0, r_0), \ \lim_{N \to \infty} R_N(x) = 0,$$

et c'est ce que nous allons faire maintenant. En effet, pour tout x tel que $[x_0, x] \subset U$, il existe $t \in [0,1]$ tel que :

$$|R_N(x)| \leq \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^n \\ |\gamma| = N}} \frac{|\partial^\gamma u(tx_0 + (1-t)x)|}{\gamma!} |(x-x_0)^\gamma|. \tag{102}$$

Soit à présent $r = \frac{1}{4} d(x_0, \partial U)$. Pour tout $x \in B(x_0, r)$, l'inégalité :

$$|y - x_0| \leq |y - x| + |x - x_0|$$

montre que :

$$\forall x \in B(x_0, r), \ B(x, r) \subset B(x_0, 2r) \subset U,$$

et l'harmonicité de u et le théorème 5.7. impliquent que :

$$\forall x \in B(x_0, r), \ |\partial^\gamma u(x)| \leq \frac{(2^{n+1} n |\gamma|)^{|\gamma|}}{\alpha(n) r^{n+|\gamma|}} ||u||_{L^1(B(x,r))} \leq \frac{(2^{n+1} n |\gamma|)^{|\gamma|}}{\alpha(n) r^{n+|\gamma|}} ||u||_{L^1(B(x_0,2r))}.$$

Par conséquent, si :

$$M = \frac{1}{\alpha(n) r^n} ||u||_{L^1(B(x_0,2r))} \ (< \infty),$$

10. Une fonction $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite (réelle) analytique sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ si, pour tout $x_0 \in U$, il existe $r_0 > 0$ tel que $B(x_0, r_0) \subseteq U$, et il existe une famille de nombres réels $\{a_\gamma\}_{\gamma \in \mathbb{N}^n}$ vérifiant :

Pour tout $x \in B(x_0, r_0)$, la série $\sum_\gamma a_\gamma (x - x_0)^\gamma$ est convergente et $u(x) = \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^n} a_\gamma (x-x_0)^\gamma$.

Si c'est le cas, u est alors de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur U, égale à son développement de Taylor au voisinage de x_0. Autrement dit :

$$a_\gamma = \frac{\partial^\gamma u(x_0)}{\gamma!} \quad \text{et} \quad u(x) = \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^n} \frac{\partial^\gamma u(x_0)}{\gamma!}(x-x_0)^\gamma \quad \text{si} \quad |x - x_0| < r_0.$$

alors :

$$||\partial^\gamma u||_{L^\infty(B(x_0,r))} \leq M\left(\frac{2^{n+1}n}{r}\right)^{|\gamma|} |\gamma|^{|\gamma|}. \tag{103}$$

Mais, la formule de Stirling nous dit que :

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k^{k+\frac{1}{2}}}{k!e^k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

et comme toute suite convergente est bornée, il existe une constante strictement positive C telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \frac{k^{k+\frac{1}{2}}}{k!e^k} \leq C,$$

ce qui implique que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \frac{k^k}{k!e^k} \leq \frac{C}{\sqrt{k}} \leq C,$$

et par suite, pour tout multi-indices γ on a :

$$\frac{|\gamma|^{|\gamma|}}{|\gamma|!e^{|\gamma|}} \leq C,$$

c'est-à-dire :

$$|\gamma|^{|\gamma|} \leq Ce^{|\gamma|}|\gamma|! \tag{104}$$

D'un autre côté, le théorème multinomial :

$$\forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \ \forall k \in \mathbb{N}, \ (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^k = \sum_{\substack{\gamma\in\mathbb{N}^n \\ |\gamma|=k}} \frac{|\gamma|!}{\gamma!} x^\gamma$$

implique que :

$$n^k = (1 + \cdots + 1)^k = \sum_{|\gamma|=k} \frac{|\gamma|!}{\gamma!},$$

d'où :

$$\frac{|\gamma|!}{\gamma!} \leq n^{|\gamma|},$$

par suite :

$$|\gamma|! \leq n^{|\gamma|}\gamma!, \tag{105}$$

et en combinant les inégalités (103), (104) et (105), on arrive à :

$$||\partial^\gamma u||_{L^\infty(B(x_0,r))} \leq CM\left(\frac{2^{n+1}n^2e}{r}\right)^{|\gamma|} \gamma!. \tag{106}$$

Maintenant,

$$\forall x \in B(x_0, r), \ \forall t \in [0, 1], \ [tx_0 + (1-t)x] \in B(x_0, r),$$

et de (106) on déduit que :

$$\forall x \in B(x_0, r),\ |\partial^{\gamma}(t x_0 + (1-t)x)| \leq CM\left(\frac{2^{n+1}n^2 e}{r}\right)^{|\gamma|} \gamma!. \tag{107}$$

On a aussi :

$$\forall \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n,\ \forall \gamma \in \mathbb{N}^n,\ |\lambda^{\gamma}| = |\lambda_1|^{\gamma_1} \ldots |\lambda_n|^{\gamma_n} \leq |\lambda|^{|\gamma|},$$

et cela prouve que :

$$\forall x \in B(x_0, r),\ |(x - x_0)^{\gamma}| \leq |x - x_0|^{|\gamma|}. \tag{108}$$

En posant :

$$r_0 = \frac{r}{2^{n+2} n^3 e}, \tag{109}$$

il découle de (102), (107), (108) et (109) que :

$$\begin{aligned}
\forall x \in B(x_0, r_0),\ \forall N \in \mathbb{N}^*,\ |R_N(x)| &\leq CM \sum_{|\gamma|=N} \left(\frac{2^{n+1}n^2 e}{r}\right)^N \left(\frac{r}{2^{n+2}n^3 e}\right)^N \\
&\leq CM \frac{1}{(2n)^N} \sum_{|\gamma|=N} 1 \\
&\leq CM \frac{(N+1)^{n-1}}{(2n)^N},
\end{aligned}$$

et comme :

$$\lim_{N\to\infty} CM \frac{(N+1)^{n-1}}{(2n)^N} = \lim_{N\to\infty} CM e^{N[(n-1)\frac{\ln(N+1)}{N} - \ln(2n)]} = CM e^{+\infty[-\ln(2n)]} = 0$$

on conclut que :

$$\forall x_0 \in U,\ \exists r_0 > 0 \left(r_0 = \frac{d(x_0, \partial U)}{2^{n+4} n^3 e}\right) \text{ tel que : } B(x_0, r_0) \subset U \ \text{ et, } \forall x \in B(x_0, r_0),\ \lim_{N\to\infty} R_N(x) = 0,$$

et que u est analytique dans U. ■

Références

[1] J. CHAZARAIN, A. PIRIOU « *Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires* » Gauthier-Villars, 1981.

[2] L. EHRENPREIS « *Solutions of some problems of division* » Amer. J. Math. 76(1954), 883-903 ; 78(1956), 685-715 ; 82(1960), 235-236.

[3] LAURENCE C. EVANS « *Partial differential equations* » Graduate Studies in Mathematics, Volume 19, American Mathematical society, 1997.

[4] LARS HÖRMANDER. « *Linear Partial Differential operators* » Springer-Verlag, 1976.

[5] B. MALGRANGE « *Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution* » Ann Inst. Fourier Grenoble 6, (1955 - 6), 271-355.

[6] M. E. TAYLOR « *Pseudodifferential Operators* » Princeton University Press, 1981.

Index