République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : EDP Et **Analyse numérique**

Par :

BOUKANSOUS Sarra

Intitulé

Raffinage des Solutions Approximatives de l'équation Intégral de Fredholm

Dirigé par :
Dr GUEBBAI HAMZA

Devant le jury

PRESIDENT	Dr.BENDJAZIA Nassima	MCB	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr.GUEBBAI Hamza	MCA	Univ-Guelma
EXAMINATEU	Dr.BELHIRECHE Hanane	MCB	Univ-Guelma

Session Juin 2018

Table des matières

Dédicaces

Je dédie ce mémoire
A mes chers parents, symbole de sacrifice, de tendresse et d'amour..........

Remerciements

En préambule à ce mémoire nous remercions ALLAH qui nous aide et nous donne la patience et le courage durant ces longues années d'étude.

Je tiens à remercier vivement mon encadreur dr guebbai hamza pour sa guidance et son soutient indéfectible durant la préparation de cet mémoire, dès le début sa confiance à mon égard et à mon travail m'a donnée une énergie et une inspiration de soulever toutes les difficultés.

Ma sincère reconnaissance à tous les membres du jury pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de présider et examiner ce travail

Par ailleurs, mes remerciements s'adressent aussi à des nombreux professeurs qui ont eu pour moi, une importance certaine de ma formation et à tous les membres du département des mathématiques.

Je remercie mes fréres et tous mes ami(e)s Pour leur confiance,et tout ceux qui m'ont aidé de près ou loin à réaliser ce travail.

0.1 Introduction

L'analyse numérique déstinée à l'étude des équations intégrales joue un rôle très important en Mathématiques, Physique et surtout en sciences techniques. Aujourd'hui le developpement accéléré des ordinateurs permet de construire des méthodes numériques plus complexes et mieux adaptées à ce genre d'équations. Elle sont devenues aujourd'hui un outil essentiel pour l'investigation dans les différents problèmes fondamentaux de notre assimilation des phénomènes scientifiques qui sont difficiles, à savoir impossible à résoudre dans le passé.

Nous nous intérréssons aux équations intégrales de Fredholm de seconde espèce. Ce genre d'équation représente un grand intérêt mathématiques, surtout les méthodes basées sur l'intégration numérique dévelloppées à la base par Nyström.

Ce qui nous intéresse dans ce mémoire est la version itérative de la méthode de Nyström. Ces méthodes sont développées pour résoudre les problèmes matriciels de grandes tailles. Les méthodes directes ont tendence à fournir des matrices de taille énorme pour mieux converger.

Suivant ces axes, notre travail est divisé en quatre chapitres :

Chapitre 1 :Est consacré essentiellement à présenter les notions analytiques et numériques, qui nous sembles le plus utiles pour assurer l'existence et unicité de la solution et la construction des chapitres suivants.

Chapitre 2 : Dans ce chapitre, nous présentons une étude numérique de l'équations de Fredholm linéaire de la deuxième espèce en utilisant la méthode de Nyström dans l'espace des fonctions continues.

Chapitre 3 : Ce chapitre est consacré aux méthodes itératives pour améliorer les solutions approchées issues des méthodes directes.

Chapitre 4 : Contient les tests numériques qui montrent l'efficacité des deux versions de la méthodes de Nyström.

Chapitre 1

Context théorique de l'équation

ce chapitre est dédie à la présentation de l'équation intégrale de Fredholm et quelques théorèmes de l'analyse fonctionnelle qui nous aide a mieux cette équation des deux côtés analytique et numerique.

1.1 *opérateur intégral :*

Définition 1.1 *Soit $k : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction supposée continue c-à-d $k \in C([a,b])$, pour cette fonction on définit l'opérateur intégral sur $C([a,b])$ à image dans $C[a,b]$ par la formule suivante :*

$$\begin{aligned} K \quad &: \quad u \in C([a,b]) \longrightarrow Ku \in C([a,b]), \qquad (1.1.1) \\ \forall x \quad &\in \quad [a,b], \; Ku(t) = \int_a^b k(t,s)u(s)ds. \end{aligned}$$

K est appellé opérateur intégrale de type de Fredholm et k est son noyau.

Théorème 1.1 *K est lineaire et borné. en plus :*

$$\| K \| = \sup_{\|u\|_{C([a,b])=1}} \| Ku \|_{C([a,b])} = \sup_{t\in[a,b]} \int_a^b | k(t,s) | ds.$$

Proof. Soit $\| u \|_{C[a,b]} = 1$
On a :

$$\| Ku \| = \sup_{t\in[a,b]} | \int_a^b k(t,s)u(s)ds |$$

$$\leq \sup_{t\in[a,b]} \int_a^b \mid k(t,s) \mid u(s)ds$$

$$\leq \sup_{t\in[a,b]} \int_a^b \mid k(t,s) \mid ds \sup_{t\in[a,b]} \mid u(s) \mid,$$

donc

$$\| K \| \leq \sup_{t\in[a,b]} \int_a^b \mid k(t,s) \mid ds.$$

Si on prend $u_0(s) = 1$, quelle que soit $s \in [a,b]$ on trouve :

$$\| Ku_0 \| \leq \sup_{t\in[a,b]} \int_a^b \mid k(t,s) \mid ds.$$

Donc

$$\| K \| = \sup_{x\in[a,b]} \int_a^b \mid k(x,y) \mid dy.$$

■

Théorème 1.2 *Soit $S \subseteq C([a,b])$,on suppose que les fonctions de S sont uniformément bornées et équicontinue sur $[a,b]$, ce qui signifie que :*

$$\sup_{f\in S} \| f \|_{C[a,b]} < \infty,$$

et

$$\mid f(t) - f'(s) \mid \leq c_s(\varepsilon) \text{ pour } \| t - s \| \leq \varepsilon \quad \forall f \in S.$$

Avec $c_s(\varepsilon) \longrightarrow 0$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$, alors S est relativement compact dans $C[a,b]$.

Proof. voir[1]. ■

Ce dernier résultat nous permet de démontrer que K est compact c-à-d : L'image de la boule unité $B(0,1)$ de X par K est relativement compact dans Y.

1.2 *Compacité relative*

Cette notion est trés difficile à obtenir malgré qu'elle est d'une importance crucial pour ce genre des problémes mathématiques. Nous rappelons qu'une

sous-ensemble S d'un espace topologique est dit relativement compact si toute suite de cet ensemble contient une sous suite convergente.
Par contre lorsqu'on travail sur l'espace $C([a,b])$, le théorème d'Arzéla Ascoli est le meilleur outil pour obtenir la compacite relative.

Théorème 1.3 *L'opérateur définie en (1.1.1) est compact sur $C[a,b]$.*

Proof. désignons par B la boule unité de $C[a,b]$, pour montrer que notre opérateur est compact, il suffit d'établir que :
-$H = K(B)$ est équicontinue.
-Pour tout $t \in [a,b]$, l'ensemble $H_t = \{u(t)/u \in H\}$,est relativement compact.
On remarque en premier que k est uniformément continue sur $[a,b] \times [a,b]$. Pour tout$u$ de B et tout t, t' de $[a,b]$ on écrit :

$$\begin{aligned}
\mid Au(t) - Au(t') \mid &= \mid \int_a^b [k(t,s) - k(t',s)]u(s)ds \mid \\
&\leq \int_a^b \mid k(t,s) - k(t',s) \mid\mid u(s) \mid ds, \\
&\leq \parallel u \parallel \int_a^b \mid k(t,s) - k(t',s) \mid ds, \\
&\leq \int_a^b \mid k(t,s) - k(t',s) ds.
\end{aligned}$$

La continuité uniforme de k sur $[a,b] \times [a,b]$ permct d'assosié à tout réel $\varepsilon \geq 0$ et autre réel $\alpha \geq 0$de sorte que

$$\mid t - t' \mid \leq \alpha \Longrightarrow \mid k(t,s) - k(t',s) \mid \leq \frac{\varepsilon}{b-a},$$

donc$\forall \varepsilon > 0. \exists \varepsilon > 0 / \forall t, t' \in [a,b]$

$$\mid t - t' \mid \leq \alpha \Longrightarrow \mid Ku(t) - Ku(t') \mid \leq \varepsilon \forall u \in B.$$

Se qui ségnifie que H est équicontinue.Passons à la seconde condition :
Pour que l'ensemble $\Gamma = \{g(t) = Ku(t), u \in B\}$ soit relativement compact il suffit qu'il soit borné.calculons a cet effet :

$$\begin{aligned}
\mid Ku(x) \mid = \mid g(t) \mid &= \mid \int_a^b k(t,s)u(s)ds \mid \\
&\leq \parallel u \parallel \int_a^b \sup_{t,s \in [a,b]} \mid k(t,s) \mid ds \leq (b-a)M,
\end{aligned}$$

où

$$M = \sup_{t,s\in[a,b]} \mid k(t,s) \mid .$$

Il apparait ainsi que Γ est borné.
Le théorème (1.1) achevé la démonstration . ■

1.3 *Equations de Fredholm :*

Une équation intégrale linéaire de Fredholm de second espèce pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$donnée par

$$\lambda u(t) - \int_a^b k(t,s)u(s)ds = f(t), \qquad a \leq t \leq b \tag{1.3.1}$$

Où le noyau k et le seconde terme f sont continue sur l'intervalle$[a,b]$, λest un réel non null ,la fonction u est à déterminer dans le même espace de$f$.

Nous rappelons que lorsque $\lambda = 0$, notre équation de Fredholm devient de premiere espèce et ce n'est pas le sujet de ce travail.Pour asurer l'existance et l'unicite de la solution u de cette équation, nous avons besoin du théorème de Neumann. Nous utilisans que la version simple de ce théorème, puisque il nous donne une condition trés acceptable au sens pratique pour assurer l'existance et l'unicite.

Théorème 1.4 *Soit L un opérateur lineaire borné d'un éspace de banach X dans lui même, avec $\| L \| < 1$ alors $I - L$ admet un opérateur inverse borné donné par la série de Taylor*

$$(I-L)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} L^n$$

de plus

$$\| (I-L)^{-1} \| \leq \frac{1}{1 - \| L \|}. \tag{1.3.2}$$

Proof. Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$une suite de $BL(X)$, définie par :

$$S_n - \sum_{i=0}^{n} L^i, \; n \geq 0,$$

avec $L^0 = I$. On a

$$\| S_{n+p} - S_n \| = \| \sum_{n+1}^{n+p} L^i \| \leq \sum_{n+1}^{n+p} \| L^i \| \leq \sum_{n+1}^{n+p} \| L \|^i,$$

D'où

$$\| S_{n+p} - S_n \| \leq \frac{\| L \|^{n+1}}{1 - \| L \|},$$

par consequent on à

$$\sup_{p \geq 1} \| S_{n+p} - S_n \| \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

Donc la suite (S_n) est une suite de Cauchy dans l'espace complet $BL(X)$. Alors il existe $S \in BL(X)$ tel que

$$\| S_n - S \| \to 0 \text{ quand } n \to \infty,$$

on remarque aussi que

$$(I - L)S_n = S_n(I - L) = I - L^{n+1},$$

$$\lim_{n \to \infty} (I - L)S_n = \lim_{n \to \infty} S_n(I - L) = \lim_{n \to \infty} I - L^{n+1},$$

$$\| (I - L^{n+1}) - I \| = \| L^{n+1} \| \leq \| L \|^{n+1} \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

Ce qui donne

$$(I - L)S = S(I - L) = I.$$

Ce qui permet de dire que l'opérateur $(I - L)$ est inversible et on a :

$$S = (I - L)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} L^i$$

Il reste a montrer (1.3.2). Nous avons

$$\| S_n \| = \sum_{i=0}^{n} \| L^n \| \leq \sum_{i=0}^{n} \| L \|^n \leq \frac{1}{1 - \| L \|}.$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty} \| S_n \| = S \leq \frac{1}{1 - \| L \|}.$$

$$\| (I - L)^{-1} \| \leq \frac{1}{1 - \| L \|}.$$

■

Remarque 1.1 *Ce théorème permet d'affirmer que sous les hypothéses énoncées, pour tout $f \in X$, l'équation $(I - L)u = f$, admet une unique solution donnée par*

$$u = (I - L)^{-1} f.$$

Corollary 1.5

$$| \lambda | > \| K \| = \sup_{t\in[a,b]} \int_a^b | k(t,s) | \, dt.$$

alors u exist et unique.

1.4 Intégration numérique :

On cherche à estimer la valeur numérique de

$$I = \int_a^b f(t)dt.$$

Avec :
a et b deux réels ($a < b$) et $f : [a, b] \to R$ est une fonction continue.

Dans la pratique, parmi les méthodes d'intégration numérique les plus usuelles, celles de Newton-Cotes, elles sont basées sur l'interpolation de la fonction d'intégration f par un polynôme construit sur un système de noeuds. Cependant, le comportement de la convergence est insuffisant lorsque le degré d'interpolation est élevé, pour cette raison, il est plus pratique d'utiliser ce qu'on appelle les règles composites. Notamment la règle composite du trapèze et la règle composite de Simpson.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la subdivision suivante :$t_j = a + jh$, $0 \leq j \leq n$ où $h = \frac{b-a}{n}$.
Les formules d'intégrations numériques qu'on va étudier sont donné par :

$$\int_a^b f(t)dt \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(t_i). \tag{1.4.1}$$

où les w_i sont les les quantités positives appellées poids,vériant :

$$\begin{cases} \sup\limits_{0\leq i\leq n} \mid w_i \mid = W < \infty, \forall n \in \mathbb{N}^* \\ \lim\limits_{n\to\infty} \mid \int_a^b f(t)dt - \sum\limits_{i=0}^{n} w_i f(t_i) \mid = 0, \forall f \in [a,b]. \end{cases}$$

Définition 1.2 *La méthode de trapézes est la méthode de quadrature qui a pour poids la suite suivante :*

$$\begin{cases} w_0 = w_1 = \frac{1}{2}h, \\ w_i = h, 1 \leq i \leq n-1 \end{cases}.$$

C'est la méthode la plus facile à utiliser et la plus pratique en programation numérique.

Chapitre 2

Méthode de Nyström version directe

Dans ce chapitre, nous allons voir la méthode de nyström qui est une méthode basée sur le concept de l'intégration numérique présente dans le chapitre précédent.

2.1 Opérateur approché

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$on étulisant la formule de quadrature qui consiste à changer l'opérateur

$$Ku(t) = \int_a^b k(t,s)u(s)ds,$$

par une autre équation approché de la forme :

$$K_n u(t) = \sum_{j=0}^{n} w_j k(t,t_j)u(t_j).$$

Théorème 2.1 *pour $n \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\| K_n u(x) = \sup_{\|u\|_{C[a,b]}=1} \| K_n u \|_{C[a,b]} = \sup_{t\in[a,b]} W \sum_{j=0}^{n} | k(t,t_j) | .$$

Proof. de la même façon que le théorème(1.1) ∎

2.2 Convergence de la méthode

Définition 2.1 *pour tout $n \geq 1; t, s \in [a, b]$, on définit :*

$$e_n(t,s) = \int_a^b k(t,v)k(v,s)dv - \sum_{j=0}^{n} w_j k(t,t_j)k(t_j,s),\ \ t,s \in [a,b], n \geq 1.$$

appellée l'erreur d'intégration pour l'intégrant $k(t,.)k(.,s)$.

$\forall x \in [a,b]$ on a :

$$(K - K_n)Kx(t) = \int_a^b e_n(t,s)x(s)ds, \tag{2.2.2}$$

$$(K - K_n)K_n x(t) = \sum_{j=0}^{n} w_j e_n(t,t_j)x(t_j). \tag{2.2.3}$$

De plus,

$$\| (K - K_n)K \| = \max_{x\in[a,b]} \int_a^b \mid e_n(t,s) \mid ds, \tag{2.2.4}$$

$$\| (K - K_n)K_n \| = \max_{x\in[a,b]} \sum_{j=0}^{n} \mid w_j e_n(t,t_j) \mid . \tag{2.2.5}$$

Enfin,l'erreur numérique d'intégration E_n converge vers zéro uniformément sur $[a, b]$,

$$c_E \equiv \lim_{n\longrightarrow\infty} \max_{(t,s)\in[a,b]} \mid e_n(t,s) \mid = 0 \tag{2.2.6}$$

et donc,

$$\| (K - K_n)K \|, \| (K - K_n)K_n \| \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow \infty \tag{2.2.7}$$

Proof. on sait que :

$$Ku(t) = \int_a^b k(t,s)u(s)ds,$$

$$K_n u(t) = \sum_{j=0}^{n} wjk(t,t_j)u(t_j)$$

1)Pour montrer(2.2.2)et (2.2.3) on a :

$$\begin{aligned}
(K-K_n)Kx(t) &= (K-K_n)\left[\int_a^b k(t,s)x(s)ds\right] \\
&= Ky(t)-K_ny(t) \\
&= \int_a^b k(t,v)y(v)dv-\sum^n w_jk(t,v_j)y(v_j) \\
&= \int_a^b k(t,v)\int_a^b k(v,s)x(s)dsdv-\sum_{j=0}^n w_jk(t,v_j)\int_a^b k(v_j,s)x(s) \\
&= \int_a^b\left[\int_a^b k(t,v)k(v,s)dv\right]x(s)ds-\int_a^b\left[\sum_{j=0}^n w_jk(t,v_j)k(v_j,t)\right]x(s)ds \\
&= \int_a^b\left[\int_a^b k(t,v)k(v,s)dv-\sum_{j=0}^n w_jk(t,v_j)k(v_j,s)\right]x(s)ds \\
&= \int_a^b e_n(t,s)x(s)ds.
\end{aligned}$$

(2.2.3)De la même façon.

2)pour montrer (2.2.6), nous commencons par montrer que $\{e_n(t,s)\mid n\geq 1\}$ est une famille uniformémment bornée et equicontinue. Ce qui implique que $e_n(t,s)\longrightarrow 0$ uniformément sur $[a,b]$ pour le faire nous utilisons le théorème d'Ascoli, par l'hypothése que la régle de quadrature (1.4.1) converge pour toutes fonctions continues g sur$[a,b]$, nous obtcnons pour chaquc $t,s\in[a,b], e_n(t,s)\longrightarrow 0$ quand $n\longrightarrow\infty$.

a)Nous avons pour tout $t,s\in[a,b]$

$$\begin{aligned}
e_n(t,s) &\leq \int_a^b k(t,v)k(v,s)dv+\sum_{j=0}^n w_jk(t,v_j)k(v_j,s) \\
&\leq (b-a)(\max_{t,s\in[a,b]}\mid k(t,s)\mid)^2+\sup_{n\geq 1}\sum_{j-0}^n\mid w_j\mid(\max_{t,s\in[a,b]}\mid k(t,s)\mid)^2 \\
&\leq c_dc_k^2+c_Ic_k^2 \\
&\leq c_k^2(c_d+c_I)
\end{aligned}$$

avec

$$c_d = \int_a^b dy, c_I = \sup_{n\geq 1} \sum_{j=0}^{n} \mid w_j \mid, c_k = \max_{t,s\in[a,b]} \mid k(t,s) \mid .$$

b)pour montrer e_n équicontinue :

$$\begin{aligned}
\mid e_n(t,s) - e_n(\xi,s) \mid &\leq \mid e_n(t,s) - e_n(\xi,s) + e_n(\xi,s) - e_n(\xi,s) \mid \\
&\leq \mid e_n(t,s) - e_n(\xi,s) \mid + \mid e_n(\xi,s) - e_n(\xi,\eta) \mid
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mid \quad e_n(t,s) - e_n(\xi,s) \mid &\leq \int_a^b k(t,v)k(v,s)dv + \sum_{j=0}^{n} w_j k(t,v_j)k(v_j,s) \\
&- \int_a^b k(\xi,v)k(v,s)dv - \sum_{j=0}^{n} w_j k(\xi,v_j)k(v_j,s) \\
&\leq c_k c_d \max_{v\in[a,b]}(k(t,s) - k(\xi,s)) + c_I c_k \max_{v\in[a,b]}(k(t,v) - k(\xi,s)) \\
&\leq c_k(c_d + c_I) \max_{v\in[a,b]} \mid k(t,v) - k(\xi,v) \mid
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mid \quad e_n(\xi,s) - e_n(\xi,\eta) \mid &\leq \int_a^b k(\xi,v)k(v,s)dv + \sum_{j=0}^{n} w_j k(\xi,v_j)k(v_j,s) \\
&- \int_a^b k(\xi,v)k(v,\eta)dv - \sum_{j=0}^{n} w_j kv\xi,x_j)k(v_j,\eta) \\
&\leq c_k(c_d + c_I)(\max_{v\in[a,b]} k(v,s) - k(v,\eta))
\end{aligned}$$

Avec $k(t,s)$ uniformément continue e_n équicontinue.
Par (a)et (b) on montré que e_n converge uniformément donc $e_n \to 0$.
Pour (2.2.7)on a :

$$\| (k - k_n)k \| = c_d \max_{t,s\in[a,b]} \mid e_n(t,s) \mid dy \to 0,$$

$$\| (k - k_n)k_n \| = c_I \max_{t,s\in[a,b]} | e_n(t,s) | \to 0.$$

Ce qui montre que

$$\| (k - k_n)k \|, \ \| (k - k_n)k_n \| \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow \infty.$$

■

Théorème 2.2 *Soit X un espace de banach , soit S, T des opérateurs bornés sur X dans X .tel que S soit compact. pour $\lambda \neq 0$ supposons $\lambda - T$, est inversible ce qui implique $(\lambda - T)^{-1}$ existe comme un opérateur borné sur X a X.*

Finallement on suppose :

$$\| (T - S)S \| \leq \frac{| \lambda |}{\| (\lambda - T)^{-1} \|}, \tag{2.2.8}$$

alors $(\lambda - S)^{-1}$exist et bornée de X a X avec

$$\| (\lambda - S)^{-1} \| \leq \frac{1 + \| (\lambda - T)^{-1} \| \| S \|}{| \lambda | - \| (\lambda - T)^{-1} \| \| (T - S)S \|},$$

si $(\lambda - T)u = f$ et $(\lambda - S)z = f$ .Alors par soustraction, on trouve :

$$\| u - z \| \leq \| (\lambda - S)^{-1} \| \| Tu - Su \| . \tag{2.2.10}$$

Proof. Considérons que si $(\lambda - S)^{-1}$ exist alors cela satisferait l'identite suivante :

$$\frac{1}{\lambda}\left\{I + (\lambda - S)^{-1}S\right\} = \frac{1}{\lambda}(\lambda - S)^{-1}\left\{(\lambda - S) + S\right\}$$

$$= (\lambda - S)^{-1},$$

donc

$$(\lambda - S)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left\{I + (\lambda - S)^{-1}S\right\}.$$

Sans aucune motivation à cet point, nous envisegeons cette approche :

$$(\lambda - S)^{-1} \approx \frac{1}{\lambda}\left\{I + (\lambda - T)^{-1}S\right\},$$

pour vérifier cette approximation, nous remarquons que :

$$\frac{1}{\lambda}\left\{I + (\lambda - T)^{-1}S\right\}(\lambda - S) = \frac{(\lambda - S)}{\lambda} + \frac{(\lambda - T)^{-1}(S\lambda - S^2)}{\lambda}$$

$$= I - \frac{S}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}(\lambda - T)^{-1}(S\lambda - S^2)$$

$$= I + \frac{1}{\lambda}(\lambda - T)^{-1}\left\{S\lambda - S^2 - S\lambda + ST\right\}$$

$$= I + \frac{1}{\lambda}(\lambda - T)^{-1}\left\{S(T - S)\right\},$$

donc on a :

$$\frac{1}{\lambda}\left\{I + (\lambda - T)^{-1}S\right\}(\lambda - S) = \left\{I + \frac{1}{\lambda}(\lambda - T)^{-1}(T - S)S\right\}.$$

Le côté droite est inversible par le théoréme de Neumann car (2.2.9) implique que

$$\frac{1}{\lambda} \parallel (\lambda - T)^{-1} \parallel\parallel (T - S)S \parallel \leq 1,$$

de plus,

$$\parallel [\lambda + (\lambda - T)^{-1}(T - S)S]^{-1} \parallel \leq \frac{1}{\mid \lambda \mid - \parallel (\lambda - T)^{-1} \parallel\parallel (T - S)S \parallel},$$

puisque S est compact, alors $(\lambda - S)^{-1}$exist et borné i.e :

$$(\lambda - S)^{-1} = \frac{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}(\lambda - T)^{-1}S}{I + \frac{1}{\lambda}(\lambda - T)^{-1}(T - S)S}$$

$$= \frac{I + (\lambda - T)^{-1}S}{\lambda + (\lambda - T)^{-1}(T - S)S}$$

$$(\lambda - S)^{-1} = [\lambda + (\lambda - T)^{-1}(T - S)S]^{-1}\left\{I + (\lambda - T)^{-1}S\right\},$$

on trouve :

$$\parallel (\lambda - S)^{-1} \parallel \leq \frac{1 + \parallel (\lambda - T)^{-1}S \parallel}{\mid \lambda \mid + \parallel (\lambda - T)^{-1} \parallel\parallel (T - S)S \parallel}.$$

Pour l'erreur $u - z$, réecrie $(\lambda - T)u = f$:

$$(\lambda \quad T)u = f$$

$$\lambda u - \lambda T = f \Longrightarrow \lambda u - \lambda T + Su - Su = f$$

$$(\lambda - S)u = f + (T - S)u$$

soustraire $(\lambda - S)z = f$, pour obtenir :

$$(\lambda - S)u - (\lambda - S)z = (T - S)u$$
$$(\lambda - S)(u - z) = (T - S)u$$

$$\Longrightarrow (u - z) = (\lambda - S)^{-1}(T - S)u,$$

par passage en norme,

$$\| (u - z) \| \leq \| (\lambda - S)^{-1} \| \| (T - S)u \| .$$

ce théorème montre la convergence de la methode de nystrom. ■

Corollary 2.3 *pour n suffisamment grand,* $n \geq N, (\lambda - K_n)^{-1}$*existe et unéformément borné,*

$$(\lambda - K_n)^{-1} \leq \frac{1 + \| (\lambda - K_n)^{-1} \| \| K_n \|}{| \lambda | - \| (\lambda - K_n)^{-1} \| \| (K - K_n)K_n \|} \leq c_y, n \geq N.$$

pour une constante appropriée $c_y < 1$*pour les équations* $(\lambda - K)u = f$ *et* $(\lambda - K_n)u_n = f$ *, nous avons*

$$\| u - u_n \|_\infty \leq \| (\lambda - K_n)^{-1} \| \| (K - K_n)u \|_\infty$$
$$\leq c_y \| (K - K_n)u \|_\infty, n \geq N.$$

Proof. On raprend le lemme précédent avec $S = K_n$ et $T = K$ du fait que, $\| (K - K_n)K_n \| \to 0$ quand $n \to \infty$, alors il existe

$$N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \| (K - K_n)K_n \| .$$

on a

$$\| K_n \| < M, n \geq 1.$$

Alors

$$c_y = \frac{1 + \| (\lambda - K_n)^{-1} \| \| K_n \|}{| \lambda | - \| (\lambda - K_n)^{-1} \| \| (K - K_n)K_n \|} \leq \infty.$$

eci termine la preuve. ■

Chapitre 3

Version itérative

Nous avons vu dans le chapitre précédent la possibilité de construire une solution approchée de notre équation. la qualité de cette solution dépend diréctement du paramétre de subdivision n.
Nous savons que plus n est grand plus la solution numérique est proche. sauf que, augmenter n revient a la résolution de systéme de plus en plus grand ce qui rend le calcul pratiquement impossible et trés entaché par les erreures numériques. Ce que nous proposons dans ce chapitre est une solution de ce probleme numérique. Nous allons présenter deux méthodes itératives qui consitent a utiliser une matrice de dimension $n \times m$ pour approchée la solution approchée a l'ordre $m > n$.

3.1 Suites réccurantes

Dans cette section nous aillons étudier les suites de la forme :

$$\begin{cases} x^0 donné \\ x^{\nu+1} = Bx^{\nu} + c \end{cases},$$

où, B est un opérateur borné de X dans X et $c \in X$.Ce qui nous intérèsse est la convergence de cet suite,pour cela on introduit les notions suivants :

Définition 3.1 *On dit qu'une méthode itérative est convergente si pour tout choix initial* $x^0 \in \mathbb{R}^n$ *on a*

$$x^k \to x^* \text{ quand } k \to \infty.$$

Définition 3.2 *on appel rayon spectrale de l'opérateur* B *le nombre réel :*

$$\rho(B) = \max_{1 \leq i \leq n} \mid \lambda_i \mid$$

où, λ_i sont les valeurs propres de B.

Théorème 3.1 *pout tout $n \in \mathbb{N}$*

$$\rho(A) = \sqrt[n]{A^n}.$$

Proof. voir[2] ■

Théorème 3.2 *Soit la suite :*

$$\begin{cases} x^0 \text{ donne} \\ x^{v+1} = Bx^v + c \end{cases}$$

Cette suites se sont convergente si et seulement si $\rho(B) < 1$. En plus

1-l'équation $x = Bx + c$ admet une unique solution x^*.

2-la suite $x^k \to x^*$ quelle que soit x^0.

Proof. On définit la suite suivante :

$$y_n = \sum_{k=0}^{n} B^k c$$

dans [2]ils montrent que la suite $\{y_n\}$ est convergente si et seulement si

$$\rho(B) < 1$$

Mais

$$\lim_{n \to \infty} y_n = y = \sum_{k=0}^{n} B^k c.$$

Ce qui est la solution de l'équation $y = By + c$.

Donc, la suite converge si et seulement si $\rho(B) < 1$. ■

Théorème 3.3 *Soit $B \in BL(X)$, tq $\exists p \in \mathbb{N}^*$ tq*

$$\parallel B^p \parallel < 1$$

alors

$$\rho(B) < 1.$$

Proof. On a

$$\rho(B) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\| B^n \|}.$$

Mais

$$\| B^p \| < 1 \Longrightarrow \sqrt[p]{\| B^p \|}$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\| B^n \|}$$

$$\Longrightarrow \rho(B) < 1.$$

■

Corollary 3.4 *Soit X un espace de Banach et soit $K_n : X \to X$ une suite collectivement compacte et ponctuellement convergente vers$K : X \to X$.*
Alors :

$$\| (K_n - K)K \| \to 0 \qquad et \ \| (K_n - K)K_n \| \to 0, n \to \infty.$$

theoreme 2 :

soit $K_n \in \mathcal{L}(X,Y)$ une suite d'approximation ponctuellement convergen-tevers $K \in \mathcal{L}(X,Y)$. Alors elle est uniformément convergente sur tout sous ensemble compact x de X, i.e. :

$$\sup_{x\in c} \| K_n x - Kx \| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Proof. On considère : $S = \{x \in X : \| x \| = 1\}$ et $B = \{x \in X : \| x \| \leq 1\}$la boule unité.
On a $x \in c$ (c c'est un compact) et $\sup_{x\in c} \| K_n x - Kx \| \to 0$ quand $n \to \infty$.

$$\| (K - K_m)K_l \| = \sup_{x\in S} \| (K - K_m)K_l x \| .$$

$$\leq \sup_{x\in B} \| (K - K_m)K_l x \| .$$

On prend $y = K_l x$ donc :

$$\sup_{x\in B} \| (K - K_m)K_l x \| \leq \sup_{y\in K_l B} \| (K - K_m)y \|$$

$$\leq \sup_{y\in \overline{K_l B}} \| (K - K_m)y \| .$$

Comme $(\overline{K_l B}$ et compact et fermé :chaque image d'une boule unite sa fermuture est compact) donc l'ensemble y est compact .

alors

$$\sup_{y \in \overline{K_l B}} \| \ (\ K - K_m)y \ \| \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

D'ou la convergence uniforme est obtenue.
On fin, on a :

$$a_n = \sup_{m \ \geq n} \sup_{l \ \geq 1} \| \ (K - K_m)K_l \ \| \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

■

3.2 Méthodes de raffinage :

3.2.1 Méthode 1 :

on Définie la méthode itérative 1 par :

$$(\lambda - K_n)x_m^{\nu+1} = y(K_m - K_n)x_m^{\nu}.$$

Théorème 3.5 *Si* $\| \ B^2 \ \| < 1$ *alos* $\lim_{\upsilon \to \infty} x_m^{\upsilon} = x_m$

Proof. $\forall m > n$,de $(\lambda - K_m)x_m = y$, on écrit :

$$(\lambda - K_n)x_m = y \ \ (K_m - K_n)x_m.$$

Alors pour l'erreur on trouve :

$$x_m^{\nu} - x_m^{\nu+1} = \ (\lambda - K_n)^{-1}(K_m - K_n)(x_m - x_m^{\nu}).$$

On prend :

$$B = (\lambda - K_n)^{-1}(K_m - K_n)$$

avec $(\lambda - K_n)^{-1}$ est uniformement bornée par c_2.

on a

$$c_1 = \sup_{n \ \geq \ 1} \| \ K_n \ \| \ .$$

On va démontre que $\| \ B^2 \ \| < 1$ alors :

$$\| \ [(\lambda - K_n)^{-1}(K_m - K_n)]^2 \ \| = \| \ (\lambda - K_n)^{-1}(K_m - K_n)(\lambda - K_n) \ ^1(K_m - K_n) \ \|$$

$$\leq \| (\lambda - K_n)^{-1} \| \| (K_m - K + K - K_n)(\lambda - K_n)^{-1}(K_m - K_n) \|$$
$$\leq c_2(\lambda) \| (K_m - K)(\lambda - K_n)^{-1} K_m - (K - K_n)(\lambda - K_n)^{-1} K_n \|$$
$$\leq c_2(\lambda) \| (K_m - K)(\lambda - K_n)^{-1} K_m + c_2 \| (K - K_n) K_n \| c_2.$$

On prend $\alpha = \| (K_m - K)(\lambda - K_n)^{-1} K_m \|$ on suppose que $K_m K_n = K_n K_m$(ça veux dire que $K_m$commute avec K_n).
Et d'apres (1.21) on a :

$$(\lambda - K_n)^{-1} = [\left\{ I + \frac{1}{\lambda} (\lambda - K_m)^{-1}(K_m - K_n) K_n \right\}^{-1}] \frac{1}{| \lambda |} \{ I + (\lambda - K_m)^{-1} K_n \}$$

avec

$$\left\{ I + \frac{1}{\lambda} (\lambda - K_m)^{-1}(K_m - K_n) K_n \right\}^{-1} < 2.$$

On conclus que :

$$\alpha \leq \| (K_m - K) K_m \| \frac{2}{| \lambda |} \{ I + (\lambda - K_m)^{-1} K_n \}.$$

$$\alpha \leq \| (K_m - K) K_m \| 2 \frac{1}{| \lambda |} (1 + c_2(\lambda) c_1).$$

Donc

$$\| [(\lambda - K_n)^{-1}(K_m - K_n)]^2 \| \leq c_2(\lambda) \| (K_m - K) K_m (K_m - K)$$

$$* 2 \frac{1}{\lambda} (1 + c_2(\lambda) c_1) + c_2^2 \| (K - K_n) K_n \|.$$
$$\leq 2 c_2^2(\lambda) \frac{a_m}{| \lambda |} (1 + c_2(\lambda) c_1) + c_2^2 a_n.$$

D'apres le théorème (2) a_m et $a_n \to 0$ quand $n, m \to \infty$ alors

$$\| [(\lambda - K_n)^{-1}(K_m - K_n)]^2 \| < 1$$

alors $\| B^2 \| < 1$ et d'apres ca $\rho(B) < 1$ l'équation admet une unique solution et la suite iterative converge. ■

3.2.2 méthode 2

On définie la méthode d'itération comme :

$$(\lambda - K_n)x_m^{\nu+1} = y \ + \ \frac{1}{\lambda}(K_m - K_n)y + \frac{1}{\lambda}(K_m - K_n)K_m x_m^{\nu}.$$

Théorème 3.6 *Si* $\| B \| < 1$ *alros* $\lim_{\upsilon \to \infty} x_m^{\upsilon} = x_m$.

Proof. Si on prend

$$x_m = \frac{1}{\lambda}y + \frac{1}{\lambda}K_m x_m,$$

ça nous donne :

$$(\lambda - K_n)x_m = y \ + \ \frac{1}{\lambda}(K_m - K_n)y + \frac{1}{\lambda}(K_m - K_n)K_m x_m.$$

Pour l'erreur on a :

$$x_m^{\nu} - x_m^{\nu+1} \leq \frac{1}{\lambda}(\lambda - K_n)^{-1}(K_m - K_n)K_m(x_m - x_m^{\nu}).$$

En prend

$$B = \frac{1}{\lambda}(\lambda - K_n)^{-1}(K_m - K_n),$$

et en va démontre que $\| B \| < 1$
dans ce cas on trouve

$$\| \frac{1}{\lambda}(\lambda - K_n)^{-1}(K_m - K_n) \| \leq \frac{1}{\lambda}c_2(\lambda) \| (K_m - K + K - K_n)K_m \| .$$

$$\leq \frac{1}{\lambda}c_2(\lambda) \| (K_m - K)K_m \| + \| K - K_n)K_m \| .$$

$$\leq \frac{1}{\lambda}c_2(\lambda)a_m + a_n.$$

$a_m, a_n \to 0$ quand $n, m \to \infty$ donc :

$$\| B \| - \| \frac{1}{\lambda}(\lambda - K_n)^{-1}(K_m - K_n) \| < 1.$$

alors $\| B \| < 1$ et d'apres ça $\rho(B) < 1$ l'équation admet une unique solution et la suite iterative converge. ■

Chapitre 4
Résultats numériques

Nous allons étudier l'équation suivante :

$$2u(x) - \int_a^b e^{yx} u(y) dy = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Si on prend

$$f(x) = 2e^x - \frac{(-1 + e^{1+x})}{(1 + x)}.$$

Et

$$u(x) = e^x.$$

Cet exemple est celui étudié dans [1] et les résultats obtenue par la méthode directe sont mis avec ceux obtenus par la méthode itérative.

Méthode 1:

Si on choisis la règle de trapèze , avec :

n=5 ; m=100.

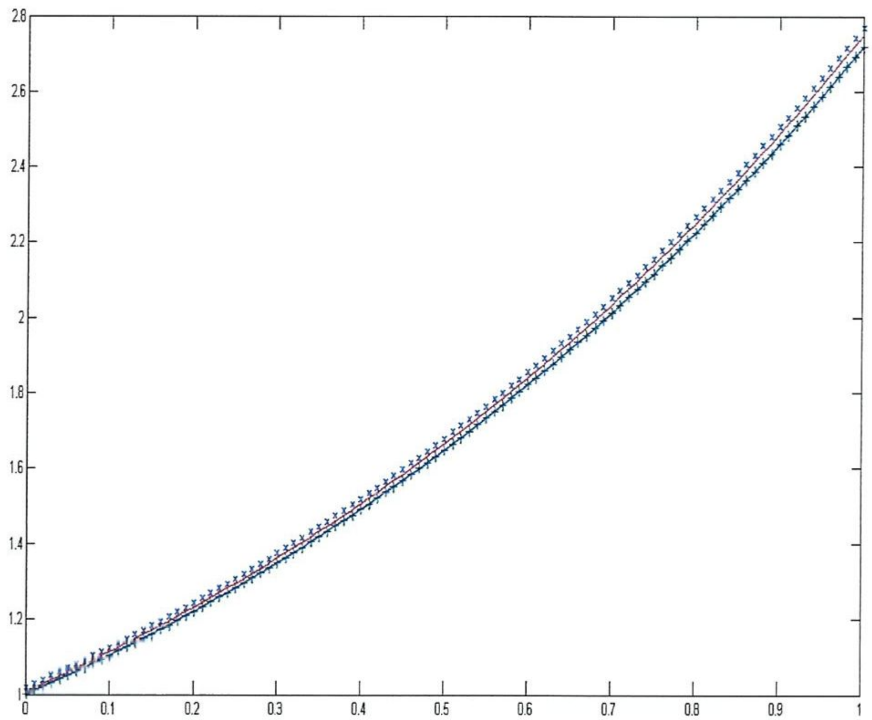

FIGURE 1:Solution exacte : ligne rouge

Solution approchée : les plus

Solution raffinée : les crois

n=15 ; m=150.

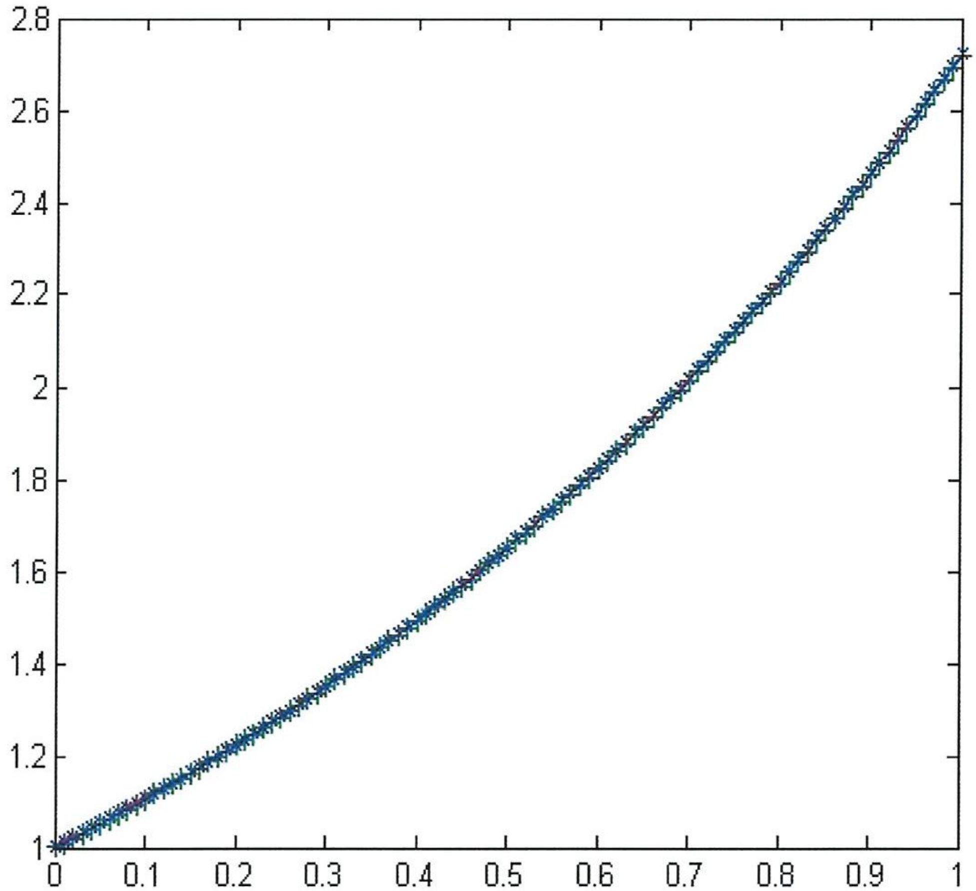

FIGURE 2:Solution exacte : ligne rouge

Solution approchée : les plus

Solution raffinée : les crois

n=400 ; m=500.

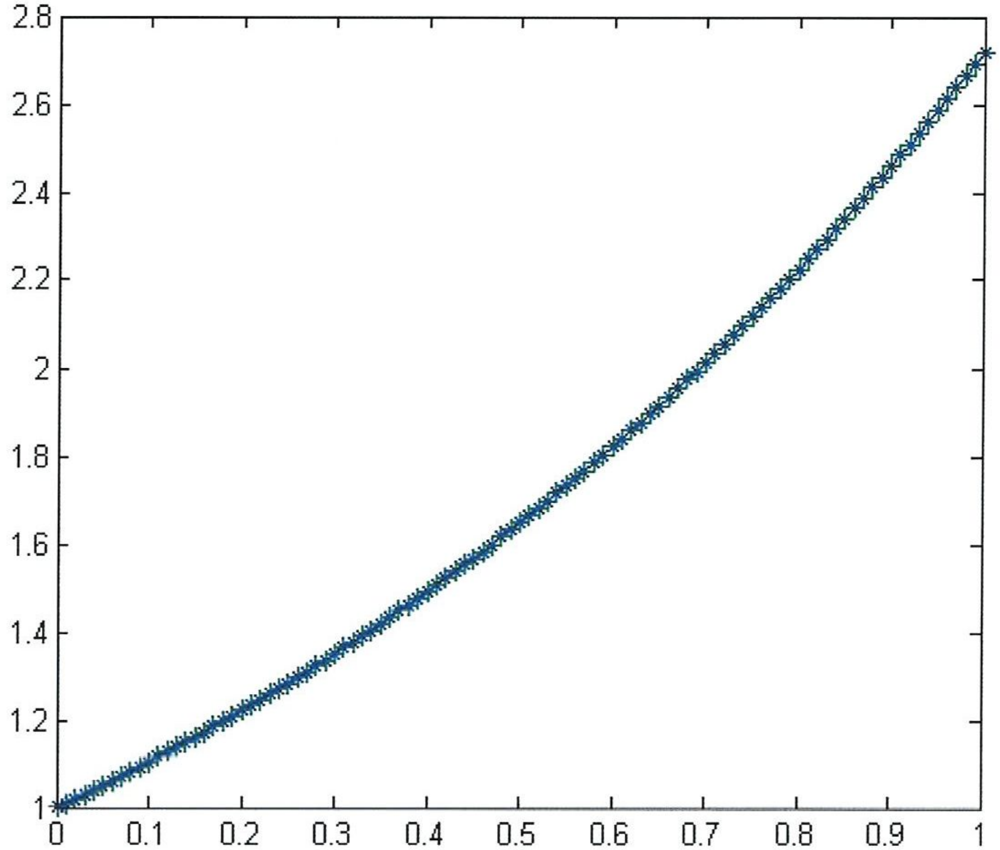

FIGURE 3:Solution exacte : ligne rouge

Solution approchée : les plus

Solution raffinée : les crois

Méthode 2:

n=5 ; m=100.

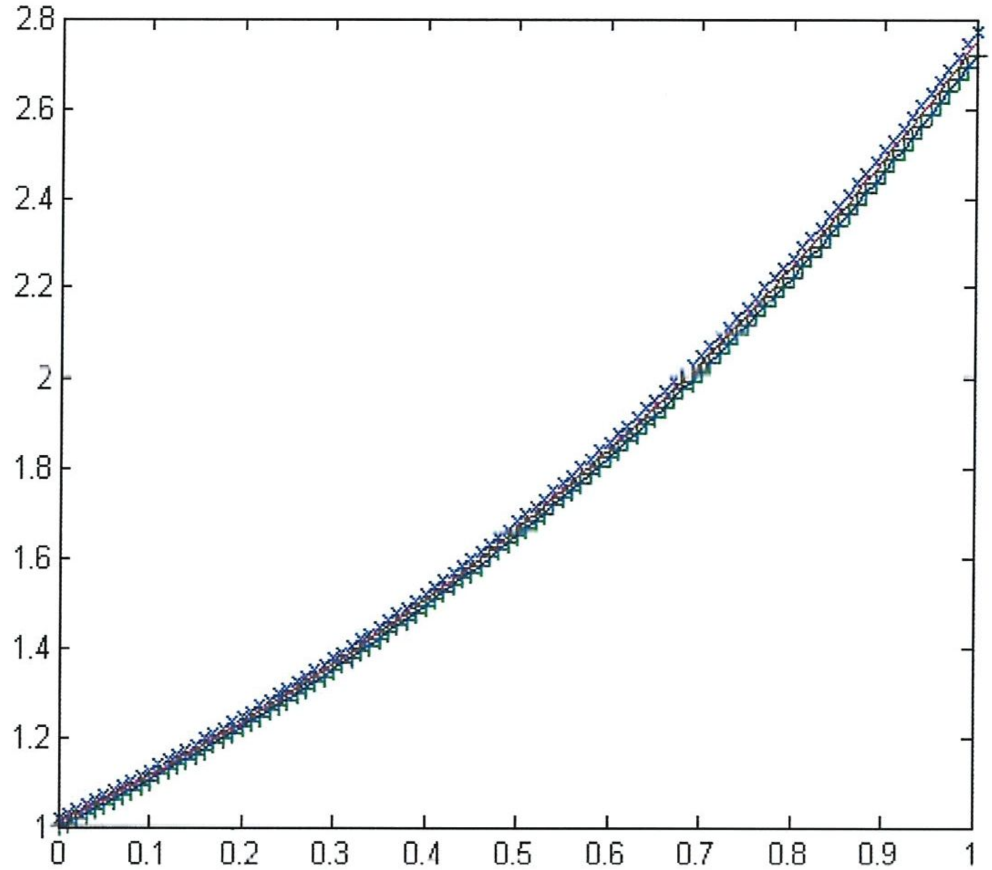

FIGURE 4:Solution exacte : ligne rouge

Solution approchée : les plus

Solution raffinée : les crois

n=15 ; m=150.

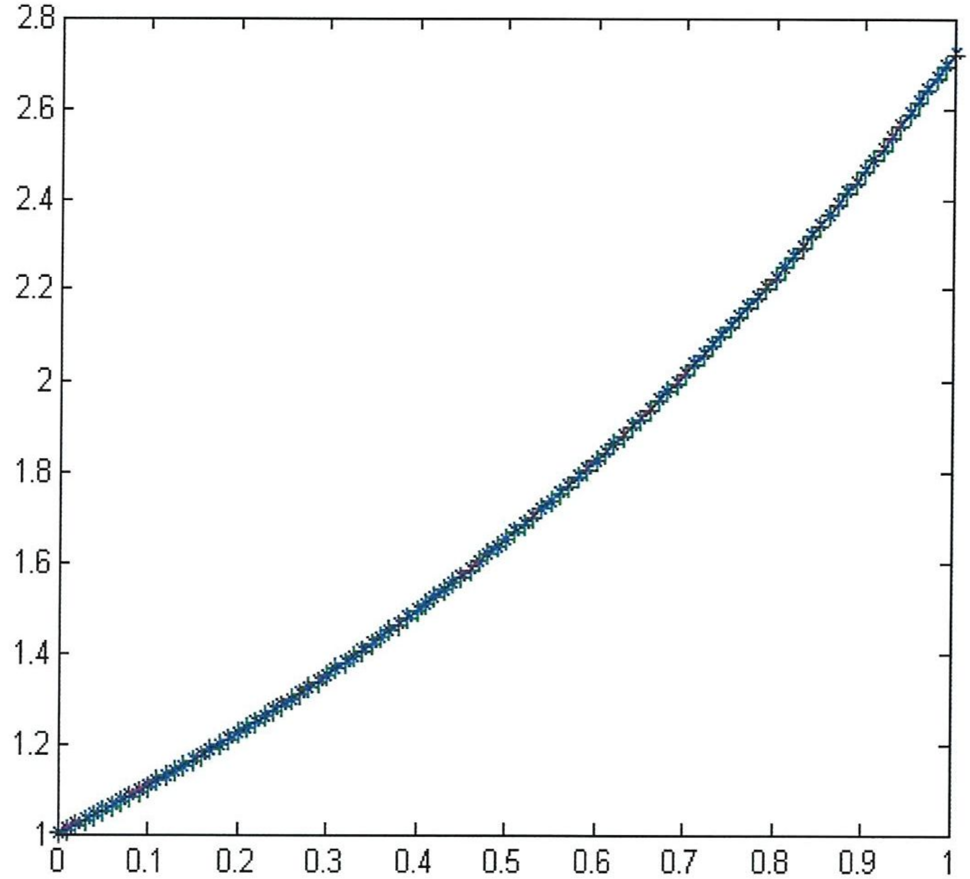

FIGURE 5:Solution exacte : ligne rouge

Solution approchée : les plus

Solution raffinée : les crois

n=400 ; m=500.

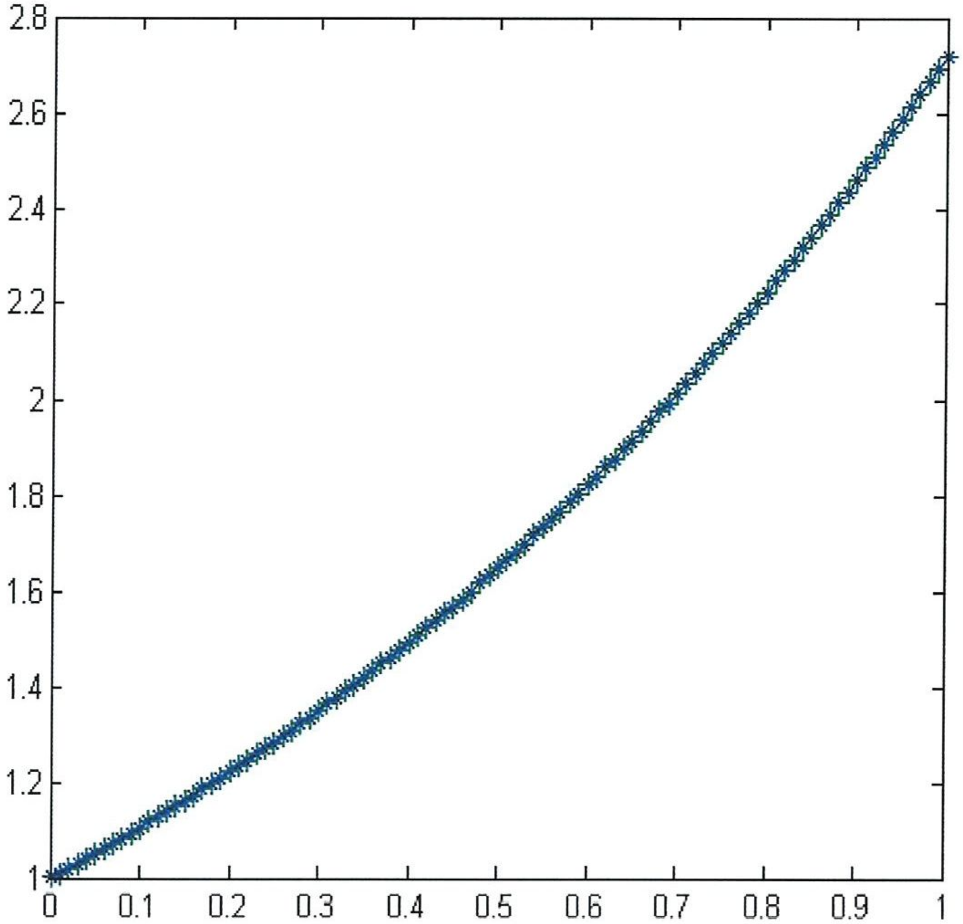

FIGURE 6:Solution exacte : ligne rouge

Solution approchée : les plus

Solution raffinée : les crois

Bibliographie

[1] *Atkinson Kendall E."the numerical solution of boundary integral equations."*INSTITUTE OF MATHEMATICS AND ITS APPLICATIONS CONFERENCE SERIES. *Vol 63.Oxford Universite press,1997.*

[2] *Ahues Mario, Alain Lagillier,and Balmohan limaye.spectral computations for bounded operators.*CRC Press,2001.

[3] *H. Hochstadt, Integral Equations, Wiley-Interscience, New Yoork (1989).*

[4] *Ram. P. Kanwal, Linear integral equations, theory and technique, Acadimic*

Press, INC, New Yoork (1971)

[5] *P. K. Kythe and P. Puri, Computational Methods for Linear Integral Equations.*

[6] *Birkhauser, Boston (2002).D. Porter and DS. G. Stirling, Integral equations, A practical treatment, from spectral theory to applications , Cambridge University Press, Cambridge (1990).*