République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : EDP et Analyse numérique

Par : **ZEGHDOUDI Ahlem**

Intitulé

Sur quelques principes du maximum et leurs applications en EDP

Dirigé par : Mr. Bousetila Nadjib

Devant le jury

Président	Dr. Debbouche Amar	Prof.	Univ-Guelma
Rapporteur	Dr. Boussetila Nadjib	Prof.	Univ-Guelma
Examinateur	Dr. Benarioua Khadir	MCB	Univ-Guelma

Session Juin 2018

REMERCIEMENTS

أحمد الله الذي أنار لي درب العلم و المعرفة، و أعانني على أداء هذا الواجب ووفقني إلى انجاز هذا العمل ...

اللّهم لك الحمد

La réalisation de ce mémoire a été possible grâce au concours de plusieurs personnes à qui je voudrais témoigner toute ma reconnaissance.

Je voudrais tout d'abord adresser ma gratitude à Mr.Bousetila Nadjib d'avoir accepté d'encadrer ce travail, je les remercies pour ses conseils judicieux, qui ont contribué à alimenter ma réflexion.

Mes remerciements vont également aux membres du jury, qui ont accepté d'évaluer, discuter et examiner mon modeste travail.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

A mes parents.Mon père Ahmed et ma mère Zeghdoudi Fouzia Aucun hommage ne pourrait être à la hauteur de l'amour dont ils ne cessent de me combler. Que dieu leur procure bonne santé et longue vie.

A celui que j'aime beaucoup et qui m'a soutenue tout au long de ce projet :Madam Salima Dahmoune, Mouhamed Dahmoune et bien sur à mes frères Ibtissem, Salima et Aymen, Ines sans oublié ma grand-mère Fatima et fille de ma soeur Mayar nour alhouda.

A toute amies , et sûrtout Salima et Nedjla, Selma, Sara

A toute la famille zeghdoudi, et à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin pour que ce projet soit possible, je vous dis merci.

Zeghdoudi Ahlem

Table des matières

Introduction

Un résultat classique de la théorie des fonctions holomorphes, connu sous le nom de **principe du maximum**, affirme que, pour une fonction f, holomorphe dans un ouvert connexe borné Ω du plan complexe et continue sur $\bar{\Omega}$, le maximum de $|f|$ ne peut pas être atteint qu'en un point du bord de Ω sauf si f est constante dans Ω.

Le but de ce mémoire est de montrer que cette propriété n'est pas désénervée uniquement pour les modules des fonctions holomorphes, mais qu'elle est partagée pour classe plus vaste de fonctions.

En dimension 1, on connaît des fonctions u de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ qui atteignent leur maximum sur le bord ; ce sont les fonctions strictement convexes. Pour celles qui sont de classe C^2,cela se traduit par la condition $u''(x) > 0, \forall x \in [a,b]$.

Dans ce mémoire, on se limite aux problème elliptiques. On donne les deux grand cadres, le cadre dit « fort », où l'on s'intéresse aux solutions au sens classique, et le cadre dit « faible » où l'on considère des solutions variationnelles (faibles). Plus précisément, on traite les deux cas :

Principe du maximum faible. Si Ω est un ouvert borné et $u \in C(\overline{\Omega})$ harmonique sur Ω, alors

$$\max_{\partial\Omega} u(x) = \max_{\overline{\Omega}} u(x),$$

et de même pour les minima.

Principe du maximum fort. Si de plus Ω est connexe, alors s'il existe $y \in \Omega$ tel que $u(y) = \max_{\overline{\Omega}} u(x)$, u est constante, et de même pour les minima.

Le principe du maximum est un outils fondamental pour étudier l'unicité ainsi que la positivité des solutions de certains problèmes elliptiques linéaires d'ordre deux. Ce principe se comprend assez bien intuitivement lorsque on pense à un champ de température exercé sur le bord d'un domaine Ω borné. En effet, dans ce cadre, qui est justifié physiquement, la temperature en tout point du domaine ne peut pas dépasser la température initiale imposée sur le bord $\partial\Omega$. Ce phénomène se traduit Mathématiquement par

$$\forall x \in \Omega, \inf_{\partial\Omega} u(x) \leq u(x) \leq \sup_{\partial\Omega} u(x).$$

Comme $v(y) = 0$, puisque $|y - x_0| = R$, on en déduit que pour t assez petit, $t < 0$, on a

$$u(y + tv) - u(y) \leq -\varepsilon(v(y + tv) - v(y)),$$

d'où

$$\frac{u(y + tv) - u(y)}{t} \geq -\varepsilon \frac{v(y + tv) - v(y)}{t}$$

Faisant tendre t vers zéro on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial v}(y) \geq -\varepsilon \frac{\partial v}{\partial v}(y) = -\varepsilon \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_{0i}) \frac{\partial v}{\partial x_i}(y),$$

d'où

$$\frac{\partial u}{\partial v}(y) \geq -\varepsilon \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_{0i})[-2\lambda(y_i - x_{0i})] \exp -\lambda |y - x_0|^2,$$

i.e

$$\frac{\partial u}{\partial v}(y) \geq 2\lambda\varepsilon R^2 \exp -\lambda R^2 > 0.$$

Preuve de théorème 3.1. Considérons l'ensemble $F = \{x \in \Omega : u(x) = M\}$ où $M = \sup_{x \in \bar{\Omega}} u(x)$. Par hypothèse F est non vide. D'autre part F est évidemment fermé dans Ω car u est continue. Si nous montrons que F est ouvert dans Ω qui est connexe on aura $F = \Omega$, ce qui est la conclusion désirée.

Soit $z \in F \subset \Omega$. Comme Ω est ouvert il existe $\delta > 0$ tel que $B(z, \delta) \subset \Omega$ (toutes les boules considérées ouvertes).

1) S'il existe un voisinage de z contenu dans F on a terminé.

2) Sinon, dans tout voisinage de z il y a des points x où $u(x) < M$. Posons

$$I = \{\lambda \geq 0 : B(x_0, \lambda) \subset \{x : u(x) < M\}\}.$$

Cet ensemble possède les propiétés suivantes :

a) I est non vide car pour $|x - x_0| < \varepsilon$ assez petit on a, par continuité de u, $u(x) < M$.

b) I est un intervalle car si $\lambda \in I$ et $\lambda' < \lambda$, $B(x_0, \lambda') \subset B(x_0, \lambda)$.

c) $I \subset \left[0, \frac{\delta}{3}\right]$ car si $\lambda > \frac{\delta}{3}$ on a $z \in B(x_0, \lambda)$ puisque $|x_0 - z| < \frac{\delta}{3}$,et $u(z) = M$.

d) Si $\lambda \in I$, $B(x_0, \lambda) \subset \Omega$. En effet $B(x_0, \lambda) \subset B(z, \frac{2\delta}{3}) \subset B(z, \delta) \subset \Omega$, car $|x - z| \leq |x - x_0| + |z - x_0| < \lambda + \frac{\delta}{3} \leq \frac{2\delta}{3}$.

e) I est fermé. En effet soit $(\lambda_n) \in I, \lambda_n \to \lambda$ dans $\left[0, \frac{\delta}{3}\right]$. S'il existe n_0 tel que $\lambda_{n0} \geq \lambda$ alors $B(x_0, \lambda) \subset B(x_0, \lambda_{n0}) \subset \{u < M\}$. Supposons $\lambda_n < \lambda$.

Soit x tel que $|x - x_0| < \lambda$, il existe alors n_0 tel que $|x - x_0| < \lambda_{n0} < \lambda$ et donc $u(x) < M$, i.e. $B(x_0, \lambda) \subset \{u < M\}$ et $\lambda \in I$.

Donc il existe $R > 0$ tel que $I = [0, R]$. Alors $B(x_0, R) \subset \{x : u(x) < M\}$.

Par contre il existe un point y de la frontière de $B(x_0, R)$ où $u = M$. En effet, si sur la frontière de B on avait $u < M$, par compacité on aurait $u < M$ sur une boule $B(x_0, R + \varepsilon)$, i.e. $R + \varepsilon \in I, \varepsilon > 0$. En résumé :

1)$u(y) = M > u(x), \forall x \in B(x_0, R) \subset B(z, \frac{2\delta}{3}) \subset \Omega$, d'après d).

2) $Lu(x) \geq 0$ sur un voisinage de$B(x_0, R)$.

On déduit du lemme 3.1 que $\frac{\partial u}{\partial v}(y) > 0$. Mais $y \in \Omega$ (car $y \in B(z, \delta)$) et en ce point u atteint un maximum. Donc $\frac{\partial u}{\partial x_i}(y) = 0$, $i = 1 : n$, d'où $\frac{\partial u}{\partial v}(y) = 0$. Ceci est une contradiction, donc F est ouvert.

4. Extensions

L'opérateur L défini en (1.1) ne contient pas de terme d'ordre zéro. Dans ce paragraphe, nous allons prolonger les versions du principe de maximum en présence d'un tel terme. Soit donc

$$L = \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x)$$

Théorème 4.1. ***(principe du maximum faible)*** *Supposons que L défini en* (4) *et* (1.2) *et* (1.3) *et que $c(x) \leq 0$ dans Ω. Soit u continue sur $\bar{\Omega}$ et C^2 sur Ω telle que $Lu(x) \geq 0$ (resp. $Lu(x) \leq 0$) dans Ω. Possons $u^+(x) = \sup(u(x), 0)$ (resp. $u^-(x) = \inf(u(x), 0)$, alors :*

$$\begin{cases} u(x) \le \sup\limits_{y\in\partial\Omega} u^+(y), & \forall x \in \Omega \\ \\ u(x) \ge \inf\limits_{y\in\partial\Omega} u^-(y), & \forall x \in \Omega \end{cases}$$

Démonstration. Posons $\Omega_+ = \{x \in \Omega : u(x) > 0\}$. Si $\Omega_+ = \phi$, alors $u(x) \le 0$ dans Ω. Si $\Omega_+ \ne \phi$ c'est un ouvert borné et $Lu(x) \ge 0$ dans Ω_+. Par conséquent

$$\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \ge -c(x)u(x) \ge 0 \text{ dans } \Omega_+$$

On peut appliquer le théorème 2.1 à $L-c$, u et Ω_+. On en déduit

$$0 < u(x) \le \sup_{y\in\partial\Omega_+} u(y) = u(y_0) = u^+(y_0), \forall x \in \Omega_+ \text{où } y_0 \in \partial\Omega_+$$

On a $y_0 \in \partial\Omega$. En effet si $y_0 \in \Omega$, il existerait un voisinage de y_0 dans Ω dans lequel on aurait $u(y) > 0$ et donc y_0 serait intérieur à Ω_+, ce qui contredit $y_0 \in \partial\Omega_+$. On a donc pour $x \in \Omega_+$

$$u(x) \le u^+(y_0) \le \sup_{y\in\partial\Omega} u^+(y) \tag{4.1}$$

Pour x tel que $u(x) \le 0$ l'inégalité (4) est encore vraie vu que le membre de droite est positif. □

Théorème 4.2. ***(principe du maximum fort)***

Soit L défini en . Supposons que L vérifie (3.1) et (3.2) et que $c(x) \le 0$ dans Ω. Soit u continue sur $\bar{\Omega}$ et C^2 sur Ω telle que $Lu(x) \ge 0$ (resp $Lu(x) \le 0$) dans Ω. Si u atteint en $x_0 \in \Omega$ un maximum (resp. un minimum) strictement positif (resp.strictement négatif) alors u est constante dans Ω.

Preuve. C'est une conséquence du théorème 3.1. Notons $M = \sup\limits_{\bar{\Omega}} u(x) > 0$ et $F = \{x \in \Omega : u(x) = M\}$ alors F est fermé dans Ω et non vide par hypothèse. Montrons qu'il est ouvert. Soit $x_0 \in F$. Il existe un voisinage V de x_0 dans Ω dans lequel $u(x) > 0$. Dans V on a

$$\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \ge -c(x)u(x) \ge 0. \tag{4.2}$$

On peut appliquer au membre de gauche de (4.2) le théorème 3.1 avec $\Omega = V$. On en déduit que u est constante dans V , i.e. $V \subset F$

Remarque 4.1. Dans le théorème ci-dessus la condition $c(x) \leq 0$ est très importante. Voici un contre exemple dans le cas où elle est violée.

La fonction $u(x) = \sin x$ est solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = 0$$

sur $[0, \pi]$ et elle atteint en $x = \frac{\pi}{2}$ un maximum strictement positif.

Bibliographie

[1] G. K. Ambler, The Maximum Principle in Elliptic Equations, University of Bristol 1998.

[2] M.H. Protter, H.F. Weinberger, Maximum Principles in Differential Equations. Springer-Verlag, New York 1984.

[3] H.Queffélec, C. Zuily, Analyse pour l'agrégation, Dunod 2013.

1 Rappels

DÉFINITION 0.1. On appelle domaine de $\mathbb{R}^n$ tout ouvert connexe D de $\mathbb{R}^n$.

DÉFINITION 0.2. La frontière d'un ensemble D (notée ∂D) est l'intersection de la fermeture de D et la fermeture du complémentaire : $\partial D = \overline{D} \cap \left(\overline{\mathbb{R}^n \backslash D}\right)$.

DÉFINITION 0.3. On note par $\triangle$ l'opérateur de Laplace (ou le Laplacien) :

$$\triangle \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots\dots\dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

DÉFINITION 0.4. Si la fonction u vérifie l'équation $\triangle u = 0$ sur D, on dit que u est harmonique dans D.
Si $\triangle u \geq 0$ sur D alors u est dite sous-harmonique dans D.
Si $\triangle u \leq 0$ sur D alors u est dite sur-rharmonie dans D.

DÉFINITION 0.5. La dérivée directionnelle de u au point p suivant la direction v est par définition :

$$\frac{\partial u}{\partial v} \equiv \lim_{x \to p}(v.\nabla u(x)) = \lim_{x \to p}(v_1 \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} + \dots\dots\dots\dots + v_n \frac{\partial u(x)}{\partial x_n}),$$

si la limite existe.

PROPOSITION 0.1. *Si $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ admet un maximum local en $p \in D(u)$, alors*

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(p) = 0, \ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(p) \leq 0, \quad \forall i = 1 \dots n.$$

1. Opérateurs elliptiques

On introduits les définition et notations suivantes.

DÉFINITION 1.1. Les opérateurs de la form

$$l \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \tag{1.1}$$

où $a_{ij} = a_{ji}$ et $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ sont appelés elliptiques au piont $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, s'il existe une fonction positive $\mu(x)$ telle que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\varepsilon_i \varepsilon_j \geq \mu(x) \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2, \quad \forall (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{1.2}$$

On dit que L est elliptique sur D si il est elliptique en tous les points de D. Il est uniformément elliptique sur D si il est elliptique sur (D) et si il existe une constante $\mu_0 > 0$ telle que $\mu(x) \geq \mu_0$ pour tout $x \in D$.

DÉFINITION 1.2. Par définition, l'opérateur

$$(L+h) = \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + h$$

est elliptique en point x si l'opérateur

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

est elliptique en x.

DÉFINITION 1.3. La matrice $(c_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ji} c_{ki} - \delta_{jk}$$

LEMME 1.1. *Supposons que l'opérateur*

$$L = \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

est elliptique. Alors il existe une transformation orthogonale

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j \tag{1.3}$$

pour laquelle l'opérateur prend la forme

$$L_1 \equiv \sum_{k,l=1}^{n} b_{kl} \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_l}$$

où

$$b_{kl} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} c_{ki} c_{lj}.$$

De plus, l'opérateur L_1 est elliptique.

Preuve. De (3.2), on voit que $\frac{\partial y_i}{\partial x_j}$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right) \\
&= \sum_{i,j,k,l=1}^{n} a_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_l}\frac{\partial y_l}{\partial x_j}\right) \\
&= \sum_{i,j,k,l=1}^{n} a_{i,j} \left(\frac{\partial}{\partial y_k} c_{ki} \frac{\partial}{\partial y_l} c_{lj}\right) \\
&= \sum_{i,j,k,l=1}^{n} a_{ij} c_{ki} c_{li} \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_l}
\end{aligned}$$

On définit $b_{kl} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} c_{ki} c_{lj}$, nous voyons que la première partie du lemme est prouvée. Il nous reste l'ellipticité de L_1 pour compléter la preuve.

Considérez le n-uplet $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots\dots\dots, \varepsilon_n)$. On peut écrire

$$\sum_{k,l=1}^{n} b_{kl} \varepsilon_k \varepsilon_l = \sum_{i,j,k,l=1}^{n} a_{ij} c_{ki} \varepsilon_k c_{lj} \varepsilon_l$$

On définit maintenant

$$\eta_i \quad \sum_{k=1}^{n} c_{kl} \varepsilon_k$$

Alors

$$\sum_{k,l=1}^{n} b_{kl}\varepsilon_k\varepsilon_l = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\eta_i\eta_j$$

Puisque L est elliptique

$$\begin{aligned}\sum_{k,l=1}^{n} b_{kl}\varepsilon_k\varepsilon_l &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\eta_i\eta_j \\ &\geq \mu(x)\sum_{i=1}^{n}\eta_i^2 \\ &= \mu(x)\sum_{i,k,l=1}^{n} c_{ki}\varepsilon_k c_{li}\varepsilon_l\end{aligned} \tag{1.4}$$

Or $\{c_{ij}\}$ est orthogonale, donc $\sum_{i=1}^{n} c_{ki}c_{li} = \delta_{kl}$, et l'expression (1.4) se réduit à $\mu(x)\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k^2$.
D'où L_1 est elliptique.

Lemme 1.2. *Un opérateur différentiel d'ordre deux est elliptique en x, s'il existe une transformation linéaire (changement de base)*

$$z_k = \sum_{j=1}^{n} d_{kj}x_j$$

telle que dans la nouvelle base $\{z_k\}$, l'opérateur L devient l'opérateur Laplacien $\triangle$.

Preuve. Rappelons que toute matrice $A = (a_{ij})$ réelle et symétrique est diagonalisable dans une une base orthonormale, i.e. il existe une matrice orthogonale $C = (c_{ij})$ telle que la matrice $B = (b_{ij}) = CAC^{-1}$,

$$b_{ij} = \sum_{k,l=1}^{n} c_{ik}a_{kl}c_{jl}$$

soit diagonale,. i.e. $b_{ij} = 0$ si $i \neq j$)
On rappelle que b_{jj} de B sont les valeurs propres de A, et les colonnes de C sont leurs vecteurs propres correspondants.
Si la matrice est diagonalisable dans une base orthonormale, il en résulte que

$$\sum_{k,l=1}^{n} b_{kl}\eta_k\eta_l = \sum_{k=1}^{n} b_{kk}\eta_k^2 \geq \mu(x)\sum_{k=1}^{n}\eta_k^2 \tag{1.5}$$

où $\sum b_{kl} \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_l}$ est l'opérateur elliptique L_1 du lemme précédent et $(\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n) \in R^n$ est un vecteur arbitraire.

On suppose maintenant que pour un point particulier $\widetilde{x}$, l'opérateur L a été mis sous la forme diagonale

$$L \equiv \sum_{i=1}^{n} b_{ii}(\widetilde{x}) \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}.$$

Si on introduit la transformation linéaire

$$z_k = \frac{1}{\sqrt{b_{kk}(x)}} y_k$$

on peut voir facilement que ce changement de base transforme l'expression différentielle de L à la forme $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial z_i^2}$, ce qu'est le Laplacien $\triangle$ dans les nouvelles coordonnées z.

2

Principe du maximum en dimension 1

1. Résultats de base

Soit u une fonction deux fois continûment différentiable sur l'intervalle $]a,b[$. On suppose que u satisfait l'inégalité différentielle :

$$u'' + g(x)u' > 0, \tag{1.1}$$

où $g(x)$ est une fonction bornée sur l'intervalle $]a,b[$. Alors, on montre que u n'admet pas un maximum local dans $]a,b[$.

On sait bien que, si x_0 est un un maximum local, alors

$$u'(x_0) = 0 \text{ et } u''(x_0) \leq 0. \tag{1.2}$$

Il est clair que la fonction $u = Cte$ vérifie l'inégalité différentielle

$$u'' + g(x)u' \geq 0,$$

et tout point intérieur de l'intervalle $]a,b[$ réalise un maximum local.

Dans ce qui suit, on montre que la seule solution u vérifiant (1.1) et admet un maximum local dans l'intervalle $]a,b[$ est $u = Cte$.

Théorème 1.1. *On suppose que que $u = u(x)$ satisfait l'inégalité différentielle*

$$L[u] = u'' + g(x)u' > 0, \quad 0a < x < b, \tag{1.3}$$

où $g(x)$ est une fonction bornée.

Si $u(x) \leq M$ dans (a,b) et si $u = M$ pour un certain point intérieur c de (a,b), alors $u \equiv M$.

Preuve. Dans la preuve de ce théorème, on va supposer qu'il existe un point d dans (a,b) tel que $u(d) < M$ et que cette hypothèse nous ramène à une contradiction.

On distingue deux cas : $(d < c)$ et $(c < d)$. La preuve des deux cas est identique, donc, on prouve uniquement le cas $(d < c)$.

On introduit la fonction auxiliaire z donnée par

$$z(x) = \exp(-\alpha(x-c)) - 1, \tag{1.4}$$

avec α une constante positive qui sera déterminée plus tard.

Il est clair que que $z > 0$ pour $a < x < c$, $z < 0$ pour $c < x < b$ et $z(c) = 0$.

En substituant (1.4) dans (1.3), on obtient

$$\begin{aligned} L[z] &= z'' + g(x)z' = \alpha^2 \exp(-\alpha(x-c)) - g(x)\alpha \exp(-\alpha(x-c)) \\ &= \alpha[\alpha - g(x)] \exp(-\alpha(x-c)). \end{aligned}$$

On choisit α telle que $\alpha > \sup\limits_{a<x<b} g(x)$, alors on peut voir que $L[z] > 0$ pour $a < x < b$ (car α est positive).

On définit la fonction

$$w(x) = u(x) + \varepsilon z(x),$$

où $\varepsilon > 0$ vérifie la condition

$$\varepsilon < \frac{M - u(d)}{z(d)}.$$

Le fait que $u(d) < M$ et $z(d) > 0$ nous permet de définir un tel choix de ε positif.

Puisque z est négatif pour $c < x < b$,, on a alors $w(x) < M$ pour $c < x < b$ (car $u(x) < M$ dans (a,b)).

Par définition de ε, on peut écrire

$$\begin{aligned} w(d) &= u(d) + \xi z(d) \\ &< u(d) + M - u(d) \\ &= M \end{aligned}$$

alors

$$w(d) < M.$$

Au point c, on a

$$\begin{aligned} w(c) &= u(c) + \xi z(c) \\ &= M + \xi.0 \\ w(c) &= M \end{aligned}$$

En combinant les remarques précédentes ($w(x) < M$ dans $(c,d); w(d) < M$ et $w(c) = M$), on peut conclure que w atteint une valeur maximale $\geq M$ dans (d,b).
Mais

$$L[w] = L[u] + \xi L[z] > 0$$

et donc w ne peut pas atteindre son maximum en un point intérieur de (d,b). Contradiction.

Corollaire 1.1. *Supposons que u satisfait l'inégalitè différentielle*

$$L[u] = u'' + g(x)u' \leq 0, \quad a < x < b, \tag{1.5}$$

où $g(x)$ est une fonction bornée.
Si $u(x) \geq m$ dans (a,b) et si $u = m$ pour un certain point intérieur c de (a,b), alors $u \equiv m$.

2. Exemples

Exemple 2.1. *La fonction $u = \cos(x)$ satisfait $u'' + g(x)u' = 0$ dans $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ où $g(x) = -\cot(x)$, et pourtant u dament un maximum en $x = 0$..*

Cet exemple montre que la condition $g(x)$ est bornée est nécessaire dans la preuve. La fonction u admet un maximum en point intérieur est dû du fait que u n'est pas bornée en zéro.

Exemple 2.2. *Dans cet exemple, on montre que la solution u de :*

$$u'' + \exp(x)u' = -1 \tag{2.1}$$

ne peut pas atteindre un min sur $(0,1)$.

Explication : Posons

$$L[u] = u'' + \exp(x)u'. \tag{2.2}$$

Il est clair que toute solution u de (2.2) vérifie $L[u] < 0$. Puisque $\exp(x)$ est bornée sur $(0,1)$,

on voit que $L[u]$ satisfait le corollaire 1.1, ainsi u n'admet pas un minimum sur $(0,1)$ sinon $u \equiv const$ ne satisfait pas (2.1).

3. Comportement de la solution aux extrimités

Théorème 3.1. *Supposons que u est une solution non constante de l'équation* (1.3), *et soit* $u'(b)$ *la dérivée à gauche de u en b. On suppose aussi que* $g(x)$ *est bornée sur chaque sous intervalle fermé* $[a', b'] \subset (a, b)$. *Si le maximum de u est atteint en* $x = b$, *alors* $u'(b) > 0$.

Preuve. Supposons que $u(b) = M$, $u(x) \leq M$ pour $a \leq x \leq b$ et que pour un certain point d dans (a, b) nous avons $u(b) < M$. On sait que que nous pouvons trouver un tel d parce que u n'est pas constante.

On introduit la fonction auxiliaire z donnée par

$$z(x) = \exp(-\alpha(x - b)) - 1 \tag{3.1}$$

où $\alpha > 0$ est choisie de façon que $\alpha > \sup_{a<x<b} g(x)$ pour $a < x < b$ et pour que $L[z] > 0$.

Posons

$$w(x) = u(x) \mid \xi z(x)$$

avec ξ choisi de façon que

$$0 < \xi < \frac{M - u(d)}{z(d)}.$$

Puisque $L[w] > 0$ sur $[d, b]$, la valeur maximale de w doit être atteint en d ou b

On a $w(b) = M > w(d)$, ainsi le maximum doit se produire en b.

En conséquence, la dérivée à gauche de w en b ne peut pas être négative, sinon, $w(b - \delta) > w(b)$ pour certains $\delta > 0$, donc nous avons $w'(b) = u'(b) + \xi z'(b) \geq 0$.

D'où $z'(b) = -\alpha < 0$ et donc $u'(b) > 0$.

Si le maximum atteint en $z = a$, on a le même résultat.

3

Principes du maximum en dimension supérieure

1. Notations et hypothèses

Dans tout ce qui suit, on note par Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, et $\partial\Omega$ sa frontière (le bord), $\partial\Omega = \bar{\Omega}\backslash\Omega$.

On considère un opérateur différentiel du second ordre sur Ω, défini par

$$Lu(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \tag{1.1}$$

On fait les hypothéses suivantes :

$$\text{Les coefficients } a_{ij}, b_i \text{ sont des fonctions bornées sur } \Omega. \tag{1.2}$$

$$\begin{cases} \text{Pour tout } x \in \Omega, \text{la matrice } \left(a_{ij}(x)\right) \text{ est symétrique, positive et} \\ \exists i_0 \in \{1, ..., n\} \text{ et } c_0 > 0 \text{ tels que } \; a_{i_0 i_0}(x) \geq c_0, \forall x \in \Omega \end{cases} \tag{1.3}$$

• L'exemple le plus simple d'opérateur vérifiant les conditions ci-dessus est le laplacien $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.

• Rappelons qu'une matrice symétrique $A \in \mathcal{M}_n(R)$ est dite positive (*resp.* définie positive) si $\langle A\xi, \xi \rangle \geq 0$ pour tout ξ dans $\mathbb{R}^n$ (*resp.* $\langle A\xi, \xi \rangle > 0$ pour tout $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$. Si A est positive (*resp.* définie positive) elle sera notée $A \geq 0$ (*resp.* $A > 0$).

2. Principe du maximum faible

Théorème 2.1. *On suppose que l'opérateur L défini en (1.1) vérifie les conditions (1.2) et (1.3). Soit u une fonction réelle continue sur $\bar{\Omega}$ et C^2 sur Ω telle que $Lu(x) \geq 0$ (resp. $Lu(x) \leq 0$) pour tout x dans Ω. Alors*

$$\begin{cases} u(x) \leq \sup\limits_{y \in \partial\Omega} u(y) \quad \forall x \in \Omega \\ \\ u(x) \geq \inf\limits_{y \in \partial\Omega} u(y) \quad \forall x \in \Omega \end{cases} \tag{c2-4}$$

La conclusion du théorème 2.1 peut aussi s'écrire :

$$\sup_{x \in \Omega} u(x) = \sup_{y \in \partial\Omega} u(y).$$

Elle signifie que le maximum de u sur $\bar{\Omega}$ est sûrement atteint en un point de $\partial\Omega$; cependant cela n'exclut pas le fait que ce maximum puisse aussi être atteint en un point de Ω. Ceci explique pourquoi on parle de principe du maximum faible.

Preuve du Théorème 2.1. Notons S_n l'espace vectoriel des matrices carrées $n \times n$ symétriques et réelles.

Pour $A = (a_{ij}) \in S_n$, on note $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ la trace de A.

Avant d'entamer la preuve du théorème, on introduit les lemmes techniques suivants.

Lemme 2.1. *Soient $A, B \in S_n$ telles que $A \geq 0$, $B \leq 0$. Alors $tr(AB) \leq 0$.*

Démonstration. Comme A est symétrique, alors il existe une matrice P orthogonale telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale. Notons $P^{-1}AP = diag(\lambda_i)$ et $P^{-1}BP = (\tilde{b}_{ij})$.

On utilise les propriétés suivantes :

i) $tr(AB) = tr(P^{-1}ABP) = tr(P^{-1}APP^{-1}BP) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tilde{b}_{ii}$

ii) $A \geq 0 \Rightarrow P^{-1}AP \geq 0 \Rightarrow \lambda_i \geq 0, i = 1 : n$.

iii) $B \leq 0 \Rightarrow P^{-1}BP \leq 0 \Rightarrow \tilde{b}_{ii} \leq 0, i = 1 : n$.

□

Lemme 2.2. *Soient L et u comme au théorème 2.1. Supposons que $Lu(x) > 0, \forall x \in \Omega$. Alors,*

$$u(x) < \sup_{z \in \bar{\Omega}} u(z) = \sup_{y \in \partial\Omega} u(y), \forall x \in \Omega.$$

Autrement dit, le maximum de u n'est atteint que sur la frontière.

DÉMONSTRATION. Puisque u est continue sur $\bar{\Omega}$ qui est compact, elle atteint son maximum en un point x_0 de $\bar{\Omega}$. Si $x_0 \in \Omega$, en ce point on a $\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0) = 0$ et $B = (\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)) \leq 0$.

Notons $A = (a_{ij}(x_0))$. On a $Lu(x_0) = \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(x_0)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = tr(AB)$.

Comme par hypothèse on a $A \geq 0$, le lemme 2.1 implique que $Lu(x_0) \leq 0$, ce qui est contraire à lypothèse. □

Supposons maintenant que $Lu(x) \geq 0$ dans Ω. soit i_0 l'indice défini en (1.3). Comme b_{i_0} est borné, il existe $K > 0$ tel que $|b_{i_0}(x)| \leq K$ pour x dans Ω. Soit $\lambda > \frac{K}{c_0}$. Pour tout $\varepsilon > 0$ posons $v(x) = u(x) + \varepsilon \exp(\lambda x_{i_0})$, $x \in \Omega$.

Comme Ω est borné il existe $\delta > 0$ tel que $|x_{i_0}| \leq \delta$ pour x dans $\bar{\Omega}$. D'autre part

$$Lv(x) = Lu(x) + (a_{i_0 i_0}(x)\lambda^2 + b_{i_0}(x)\lambda)\varepsilon \exp \lambda x_{i_0}.$$

Par conséquent, pour x dans Ω, on a

$$Lv(x) \geq Lu(x) + \lambda^2(C_0 - \frac{K}{\lambda})\varepsilon \exp -\lambda\delta > 0,$$

car $Lu(x) \geq 0$ et $C_0 > \frac{K}{\lambda}$. D'aprés le lemme 2.2, on a

$$v(x) < \sup_{y \in \partial\Omega}(u(y) + \varepsilon \exp \lambda y_{i_0}) \leq \sup_{y \in \partial\Omega} u(y) + \varepsilon \exp \lambda\delta$$

En faisant tendre ε vers zéro, on obtient

$$u(x) \leq \sup_{y \in \partial\Omega} u(y), \quad \forall x \in \Omega.$$

De la même manière on montre le cas $Lu(x) \leq 0$.

3. Principe du maximum fort

Soit L l'opérateur défini en (1.1)

$$L = \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

On suppose qu'il vérifie les conditions suivantes :

$$a_{ij}, b_i \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}). \tag{3.1}$$

$$\exists \alpha > 0 : \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha |\xi|^2, \quad \forall x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{3.2}$$

Remarque 3.1. La condition (3.2) implique que la matrice $(a_{ij}(x))$ est définie positive pour tout $x \in \Omega$.

Sous ces conditions, on a le théorème suivant.

THÉORÈME 3.1. *Supposons que L vérifie les conditions* (3.2) *et* (3.2) *et que* Ω *soit* ***connexe***. *Soit* u *une fonction réelle continue sur* $\bar{\Omega}$ *et* C^2 *dans* Ω *telle que* $Lu(x) \geq 0$ *(resp.* $Lu(x) \leq 0$*),* $\forall x \in \Omega$. *Alors si* u *atteint son maximum (resp. son minimum) en un point de* Ω, u *est constante dans* Ω.

Preuve du théorème 3.1.

Résultats préparatoires

a) Soient $x_0 \in \Omega$, $R > 0$ et $B = \{x : |x - x_0| < R\} \subset \Omega$. La frontière de B, $\partial B = \{x : |x - x_0| = R\}$ est une hypersurface de $\mathbb{R}^n$. En tout point $y \in \partial B$ il y a un vecteur normal v qui pointe vers l'extérieur de B. On a $v(y) = y - x_0$ $(= \vec{x_0 y})$. Soit u une fonction C^1 sur un voisinage de $\bar{B}$. La dérivée normale de u au point y est la dérivée de u dans la direction du vecteur $v(y)$ au point y. On a

$$\frac{\partial u}{\partial v}(y) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_{0i}) \frac{\partial u}{\partial x_i}(y) = \lim_{t \to 0} \frac{u(y + tv(y)) - u(y)}{t},$$

(on prend $t < 0$ pour que $y + tv(y) \in B$).

b) Lemme de Hopf.

LEMME 3.1. *Soient* x_0, R, B *comme ci-dessus. Supposons qu'il existe un point* $y \in \partial B$ *tel que* $u(y) > u(x), \forall x \in B$. *Alors* $\dfrac{\partial u}{\partial v}(y) > 0$

Autrement dit u est **strictement** *croissante dans la direction du vecteur normal extérieur* v.

Preuve du Lemme 3.1. D'aprés les conditions (3.1), il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\sum_{i,j=1}^{n} \left|a_{ij}(x)\right| + \sum_{i=1}^{n} |b_i(x)| \leq K.$$

Fixon $\rho \in]0, R[$. Prenons $\lambda > 0$ assez grand pour que

$$4\lambda^2 \alpha \rho^2 - 2\lambda K - 2\lambda k R > 0, \tag{3.3}$$

où α est la constante apparaissant dans (3.2).

On introduit la fonction

$$v(x) = \exp -\lambda |x - x_0|^2 - \exp -\lambda R^2, \ \ \rho \leq |x - x_0|.$$

Notons que $v = 0$ si $|x - x_0| = R$ et que $v \geq 0$. Il est facile de voir que pour $\rho < |x - x_0| < R$:

$$\begin{aligned} Lv(x) &= (4\lambda^2 \sum a_{ij}(x)(x_i - x_{i0})(x_j - x_{0j}) \\ &\quad -2\lambda \sum_{i-1}^{n} a_{ii}(x) - 2\lambda \sum_{i-1}^{n} b_i(x)(x_i - x_{0i}) \exp -\lambda |x - x_0|^2 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Il résulte de (3.2) et (3.3) que

$$Lv(x) > (4\lambda^2 \alpha \rho^2 - 2\lambda K - 2\lambda K R) \exp -\lambda R^2 > 0, \ \ \rho < |x - x_0| < R$$

.

Nous allons appliquer le principe du maximum faible à la fonction $u(x) - u(y) + \varepsilon v(x)$ et à l'ouvert $\Omega_0 = \{x : \rho < |x - x_0| < R\}$.

i) Si $|x - x_0| = \rho$ on a par hypothése $u(x) < u(y)$.Par conséquent il existe $\varepsilon > 0$ tel que $u(x) - u(y) + \varepsilon v(x) \leq 0$.

ii) Si $|x - x_0| = R$ on a $u(x) \leq u(y)$ car $u(x) = \lim_{n \to +\infty} u(x_n)$ où $|x_n - x_0| < R$ et $u(x_n) < u(y)$. Comme $v = 0$ on a $u(x) - u(y) + \varepsilon v(x) \leq 0$.

iii) $L(u(x) - u(y) + \varepsilon v(x)) = Lu(x) + \varepsilon Lv(x) > 0, x \in \Omega_0$, d'aprés l'hypothèse, et (3). Il résulte du théorème 2.1 que

$$u(x) - u(y) + \varepsilon v(x) \leq 0, \ \ \rho < |x - x_0| < R.$$