République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : EDP Et **Analyse numérique**

Par:

Melle : Bouhali Sarra

Intitulé

Mesures et Comparaison de Risques Dans L'assurance Non-Vie

Dirigé par : Mr. Ezzebsa Abdelali

Devant le jury

PRESIDENT	Dr.Bouhadjar Slimane	MCB	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. Ezzebsa Abdelali	MCB	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr.Benchabane Abbes	MCA	Univ-Guelma

Session Juin 2018

Remerciements

J'adresse ces quelques mots pour remercier notre grand Dieu tout puissant pour exprimer ma reconnaissance envers sa grande générosité. Dieu m'a donné la volonté, la patience, la santé et la confiance durant toutes mes années d'études.

Je remercie mon encadreur **Dr. Ezzebsa Abdelali** , pour le sujet qu'il m'a proposé, pour son investissement et ses conseils précieux durant toute cette période.

Je suis très honoré que **Dr.Bouhadjar Slimane**, ait accepté de présider mon jury de Mémoire. Je le remercie pour ses conseils et ses précieuses remarques.

Je remercie **Dr.Benchabane Abbes**, d'avoir accepté d'examiner mon travail. Je suis très heureux de le voir participer à mon jury.

Je remercie également mes camarades de Master II et mes amis du département pour leurs conseils et leurs idées.

Enfin merci à tous et à toutes.

Table des matières

Introduction

L'activité d'assurance repose sur le transfert de risque : moyennant une prime, l'assuré se protège d'un risque financier aléatoire. Mesurer le risque assuré s'avère donc inévitable puisque cette information est nécessaire dans le cadre de la tarification pour déterminer les chargements de sécurité à ajouter à la prime pure et dans une approche de solvabilité pour déterminer le niveau de fonds propres dont doit disposer l'assureur pour être solvable.

Le but de ce mémoire est de présenter les outils permettant de comparer les risques et d'apprécier leur dangerosité.

Ce mémoire est structuré comme suit :

Le premier chapitre introduira les concepts de base de l'assurance non-vie, de maniére relativement informelle.

Nous verrons dans le second chapitre ce qu'est une mesure de risque, et quelles propriétés souhaitables elle doit vérifer.

Le troisième chapitre sera entiérement consacré au concept de l'utilisation de la loi des grands nombres et les primes d'assurance.

Le quatrième chapitre introduira les outils probabilistes utilisés en modélisation des risques.

Chapitre 1

Le risque et sa couverture contractuelle

1.1 Bref historique de l'assurance

La notion d'assurance semble très ancienne puisqu'on en retrouve des traces dès la plus haute Antiquité, notamment en Mésopotamie, où les commerçants effectuaient une répartition des coûts engendrés par les vols et pillages des caravanes.

D'autres types d'assurance sont apparues par la suite. Le financier italien **Lorenzo Tonti** crée en **1652** une forme de contrat d'assurance appelé **tontine** avec un mode opératoire proche de l'assurance vie.

Le grand incendie de Londres de **1666** conduit peu après à l'introduction de l'assurance incendie à Hambourg en **1676**. Alors que les premiers contrats d'assurance sur la vie sont proposés à Londres en **1698**.

Le développement de l'assurance s'est ensuite poursuivi aux $XVIIe$ et $XVIIIe$ siècles grâce a l'apparition d'outils mathematiques notamment le calcul des probabilités. Il deviens alors possible de mesurer les paramètres des contrats d'assurance (tables de mortalité, risque de perte pour une compagnie d'assurance, rentes viagères....).

L'assurance se partage en deux grandes catégories contenant elles-mêmes plusieurs branches.

— La première catégorie est l'assurances de personnes. Dans ces contrats l'indemnisation est essentiellement forfaitaire. Cette catégorie inclue principalement les assurances en cas de vie et en cas de décès, les assurances maladie, accident corporel, dépendance et emprunteur.

— la seconde catégorie concerne les assurances de biens et de responsabilités. Dans ces contrats, le remboursement en cas de sinistre est majoritairement indemnitaire. Cette catégorie inclue principalement les assurances automobiles, habitation, biens professionnels, catastrophes naturelles, construction, responsabilité civile générale, protection juridique, assistance, perte pécuniaire.

1.2 Le risque

L'immense majorité des activités humaines comporte des risques, ce qui fait d'ailleurs tout le piment de l'existence. En plus du chagrin et de la souferance occasionnés à la victime et à sa famille, ces événements néfastes, que nous appellerons désormais risques, ont souvent des conséquences economiques susceptibles d'être evaluées objectivement (en recourant aux services d'un spécialiste, par exemple). Ainsi, à supposer que votre maison parte en fumée, un expert peut déterminer combien il en côutera pour la reconstruire, et partant le préjudice que vous avez subi.

Le risque naît donc de l'aléa : il y a risque dés lors que l'individu n'est pas en mesure de prévoir avec certitude l'état futur de son patrimoine. En pratique, on se sert souvent du terme "**risque**" pour désigner a la fois la cause du risque, l'objet du risque ou encore les conséquences du sinistre. Ainsi, le risque d'incendie est la raison de l'assurance et un risque incendie représente a la fois le bâtiment qui pourrait être la proie des flammes et la dépense a laquelle s'expose la compagnie qui accorderait sa garantie au propriétaire. Parfois, le terme péril est utilisé pour désigner la cause du risque ; on parle ainsi du péril incendie. Techniquement, on confond donc souvent risque et prestation de l'assureur.

1.3 Risques assurantiels et risques financiers

1.3.1 Point commun : le risque

Le contrat d'assurance n'est pas le seul a offrir des compensations conditionnelles a certains événements. De nombreux instruments financiers comportent egalement une dimension de transfert de risque. En emettant des actions pour financer ses investissements, le propriétaire d'une entreprise transfére effectivement une part de ses risques au prorata de la mise de fonds des nouveaux actionnaires. Le détenteur d'une action peut a son tour se prémunir contre une baisse du cours de celle-ci en acquérant une option de vente (titre lui conférant le droit de vendre l'action a un prix déterminé et a un instant fixé).

1.3.2 La différence : la maniére de gérer le risque

Il y a cependant une différence essentielle entre risques assurantiels et financiers. Afin de s'en convaincre, prenons l'exemple de l'option de vente, qui confére a son détenteur le droit de vendre le titre a un prix déterminé (quel qu'en soit le cours de effectif sur le marché). L'emetteur de l'option de vente ne pourra pas réduire son risque en vendant plus de titres. Au contraire, si le cours de l'action chute, l'émetteur s'expose a d'autant plus de pertes qu'il a vendu d'options. En d'autres termes, tous les "sinistres" ont lieu simultanément pour l'émetteur de l'option, puisque toutes les actions d'une société évoluent de la même manière.

1.4 Risques pris en charge par les assureurs

Responsabilité

Dans les assurances de responsabilité, l'assureur s'engage à indemniser à la place de l'assuré le tiers lésé par sa faute. Il protège ainsi le patrimoine de l'assuré contre une action en responsabilité intentée contre lui par ce tiers. En plus de l'indemnisation proprement dite, l'assureur assiste son assuré, en organisant sa défense devant les cours et tribunaux, par exemple.

Biens matériels

En plus de sa responsabilité, l'assuré peut egalement couvrir ses biens contre des périls les menaçant. Il peut ainsi assurer son véhicule contre le vol, son domicile contre l'incendie, ses bagages contre leur perte, etc.

En fin, l'assuré peut couvrir un capital humain : sa santé et celle de ses proches. Dans ce cas, l'assureur s'engage à intervenir financiérement dans les frais d'hospitalisation, les honoraires des médecins, les dépenses de médicament, etc.

Risques inassurables

La couverture de certains risques est exclue. Il en va ainsi du risque de se voir appliquer une sanction pénale pécuniaire qui ne peut pas être couvert par une assurance, sans quoi la peine se trouverait privée de l'effet dissuasif qu'on attend d'elle.

Chapitre 2

Mesures et comparaison de risque

2.1 Mesure de risque

Les mesures de risques sont des outils de quantification de risque. Elles permettent d'évaluer un niveau de dangerosité d'un risque mais également de comparer différents risques entre eux et de les classer selon le niveau de dangerosité. Quantification et comparaison des risques peuvent ensuite être utilisées à plusieurs fins telles que l'évaluation de prime, l'allocation de capital, la détermination de marges pour les transactions financières ou encore la sélection des risques d'un portefeuille d'assurance ou de réassurance. Une mesure de risque peut être définie comme suit.

Définition 2.1 *.On appelle mesure de risque toute application ρ associant un risque X à un réel*

$$\rho(X) \in \mathbb{R}_{+} \cup \{+\infty\}.$$

2.1.1 Mesure de risque cohérente

La définition d'une mesure de risque est très générale puisque toute fonctionnelle réelle positive d'une variable aléatoire peut être considérée comme étant une mesure de risque. Aussi, Une mesure de risque est dite cohérente lorsqu'elle satisfait les quatre axiomes suivants :

axiome 1 ***(monotonicité) :*** *Une mesure de risque ρ est monotone si :*

$$P(X < Y) = 1 \Longrightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$$

quels que soient les risques X et Y.

axiome 2 ***(sous-additivité) :*** *Une mesure de risque ρ est sous-additive si :*

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$$

quels que soient les risques X et Y.

axiome 3 ***(homogénéité) :*** *Une mesure de risque ρ est homogène si :*

$$\rho(cX) = c\rho(X)$$

pour tout risque X et toute constante positive c.

axiome 4 ***(invariance par translation) :*** *Une mesure de risque ρ est invariante par translation si :*

$$\rho(X + c) = \rho(X) + c$$

pour tout risque X et toute constante c.

La monotonie permet de s'assurer que si le risque dû à Y est presque sûrement plus grand que celui dû à X alors Y est plus dangereux au sens de la mesure de risque que X. La sous-additivité traduit le fait que considérer deux risques simultanément est moins risqué que traiter les risques séparément. Cela intègre donc l'idée de diversification. L'homogénéité signifie que le fait de mesurer une proportion d'un risque revient à considérer la proportion de la mesure du risque seul. De même, ajouter un montant certain au risque implique l'ajout de ce même montant à la mesure du risque.

Remarque 2.1 *$\rho(c) = c$, pour c scalaire, ce qui signifie que la mesure d'un montant certain est ce montant lui même.*

Chargement de sécurité : Dans le domaine des assurances, frais liés à la volatilité des sinistres. L'assureur prélève ainsi des frais pour se couvrir contre des sinistres non attendus. Le chargement de sécurité est une composante de la prime d'assurance. De fait, il doit provisionner une partie des revenus perçues par les primes pour être en mesure de rembourser ses assurés au moment de la survenance de ces sinistres non prévisibles. La compagnie d'assurances n'hésitera pas non plus à se réassurer auprès d'une compagnie de réassurance. Ainsi en cas de sinistre, la compagnie d'assurance remboursera ses assurés mais se retournera vers son réassureur pour récupérer tout ou partie des sommes versées

Définition 2.2 *Une mesure de risque ρ contient un chargement de sécurité si pour tout risque X, on a $\rho(X) \geq \mathbb{E}(X)$.*

2.1.2 Mesure de risque comonotone additive

Définition 2.3 *Soit F une fonction de répartition sur $\mathbb{R}$. On appelle fonction réciproque (aussi fonction quantile) de la fonction F la fonction F^{-1} définie sur $]0,1[$ et à valeur dans $\mathbb{R}$ donnée par la relation :*

$$\forall u \in]0,1[, \quad F^{-1}(u) = \inf\{x,\ F(x) \geq u\}.$$

Rappelons qu'un vecteur aléatoire (X_1, X_2), de fonctions de répartition marginales F_1, F_2 , est un vecteur comonotone s'il existe une variable aléatoire U de loi uniforme sur $[0;1]$ telle que $(X_1; X_2)$ a la même loi que $(F_1^{-1}(U); F_2^{-1}(U))$.

Définition 2.4 *Mesure de risque comonotone : On appelle mesure de risque comonotone additive toute mesure de risque ρ telle que :*

$$\rho(X_1 + X_2) = \rho(X_1) + \rho(X_2)$$

pour tout vecteur comonotone (X_1, X_2).

De nombreuses mesures de risque ont été proposées ces dernières années. Nous présentons ici celles qui sont principalement étudiées dans la littérature mais également utilisées en pratique.

2.2 Quelque mesure de risque

2.2.1 la Value-at-Risk ($La\ VaR$).

La Value-at-Risk est une mesure probabiliste fondée sur des quantiles et représentant le **niveau de perte maximale** potentiel, relatif à une position ou un portefeuille, à horizon fixé et pour un niveau de probabilité donné. La définition générale utilisée par les praticiens est la suivante : " La **Value-at-Risk** correspond au montant des pertes qui ne devrait pas être dépassé pour un niveau de confiance donné et sur un horizon temporel donné " .

Définition 2.5 *La **Value-at-Risk*** (VaR) *de niveau de probabilité* $\alpha \in (0;1)$ *associée au risque* X *notée* $VaR(X;\alpha)$ *est donnée par :*

$$VaR(X;\alpha) = F_X^{-1}(\alpha).$$

Cette mesure de risque a le mérite de reposer sur un concept simple et facilement explicable : $VaR(X,\alpha)$ est le montant qui permettra de couvrir le montant de sinistres engendré par le risque X avec une probabilité α. Ce concept est directement lié à celui de probabilité de ruine puisque si une société, disposant d'un montant de « **ressources**» égal à $VaR(X;\alpha)$, assure un unique risque X, sa probabilité de ruine est égale à $1-\alpha$.

Propriété de stabilité par transformation monotone : Les **Value-at-Risk** ont un certain nombre de « bonnes » propriétés mathématiques parmi lesquelles le fait que pour toute fonction g croissante et continue à gauche, on a :

$$VaR_\alpha(g(X)) = g(VaR_\alpha(X)).$$

Il découle de cette propriété en prenant

$$g = F_1^{-1} + F_2^{-1} \text{ et } X = U$$

que les VaR sont comonotones additives puisque pour tout $\alpha \in]0;1[$, on a

$$VaR_\alpha((F_1^{-1} + F_2^{-1})(U)) = (F_1^{-1} + F_2^{-1})(VaR_\alpha(U))$$

En prenant

$$g(X) = X + c$$

alors

$$VaR_\alpha(X + c) = VaR_\alpha(X) + c$$

Et pour

$$g(X) = cX$$

on trouve

$$VaR_\alpha(cX) = cVaR_\alpha(X)$$

On déduit immédiatement que la **VaR** est invariante par translation et homogène.

Remarque 2.2 *La **VaR** n'est pas cohérente car elle n'est pas sous-additive.*

Toutefois, le contexte actuariel nécessite l'étude de la queue des distributions. En effet, par nature, un risque qui a une probabilité significative de causer de forts sinistres est dangereux et les compagnies d'assurance et de réassurance ont besoin d'évaluer ce niveau de dangerosité. L'épaisseur de la queue de la distribution des sinistres est donc un élément fondamental dans l'évaluation du niveau de danger d'un risque. Or, *la* VaR ne donne qu'une information ponctuelle au quantile de la distribution du sinistre et aucune information au delà de ce point. De plus, comme nous le verrons plus tard, *la VaR* ne satisfait pas en général toutes les propriétés requises à une mesure de risque dite cohérente. C'est pourquoi d'autres mesures de risque ont été proposées.

2.2.2 La Tail Value-at-Risk ($TVaR$).

Définition 2.6 *La **Tail Value-at-Risk** est la moyenne des **VaR** de niveau supérieur α , notée $TVaR(X;\alpha)$ définie par :*

$$\begin{aligned} TVaR(X;\alpha) &= \frac{1}{1-\alpha}\int_{\alpha}^{1} F_X^{-1}(p)dp \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\int_{\alpha}^{1} VaR(X;p)\,dp. \end{aligned}$$

la **Tail-VaR** contient toujours un chargement de sécurité :

$$TVaR(X;\alpha) \geq TVaR(X;0) = \mathbb{E}[X].$$

La **TVaR** est comonotones additives, du fait qu'il est une somme de **VaR** qui sont elles-mêmes comonotones additives.

Définition 2.7 *L'**expected shortfall** ($\mathbf{ES}_\alpha$) de niveau de probabilité α est la perte moyenne au-delà de la VaR au niveau α, i. e :*

$$ES_\alpha(X) = \mathbb{E}\left[(X - VaR(X;\alpha))^+\right].$$

Définition 2.8 *La **Conditionnal Tail Expectation** (CTE) de niveau α est le montant de la perte moyenne sachant que celle-ci dépasse la VaR au niveau α, i. e :*

$$CTE(X;\alpha) = \mathbb{E}[X \mid X > VaR(X;\alpha)].$$

2.2.3 Les mesures de risque de Wang

Les mesures de risque de **Wang** utilisent l'opérateur espérance sur des transformations de la distribution de la variable aléatoire d'intérêt. L'idée est alors de transformer la fonction de queue afin de générer un chargement de sécurité.

Définition 2.9 *Nous appellerons **fonction de distorsion** toute fonction croissante*

$$g : [0,1] \to [0,1]$$

telle que

$$g(0) = 0 \text{ et } g(1) = 1.$$

La fonctions de distorsion correspondante à la mesure VaR est donnée par :

$$g(x) = \mathbf{1}_{[\alpha,+\infty]}(x).$$

Pour la mesure $TVaR$ donnée par :

$$g(x) = \min\left(\frac{x}{\alpha}; 1\right)$$

Définition 2.10 *La mesure de risque de **Wang** associée à la fonction de distorsion g, natée $\rho_g(.)$ est définie par :*

$$\rho_g(x) = \int_0^{+\infty} g(\overline{F}(x))dx.$$

Propriété : La mesure de Wang peut s'écrire comme somme de **VaR**, i. e.

$$\rho_g(x) = \int_0^1 VaR(X, 1-\alpha)dg(\alpha).$$

Preuve. Notons

$$\overline{F}_X(x) = 1 - P(X \leq x)$$

et

$$g(\overline{F}_X(x)) = \int_0^{\overline{F}_X(x)} dg(\alpha)$$

puisque $g(0) = 0$ donc

$$\rho_g(X) = \int_0^{+\infty}\int_0^1 \mathbf{1}_{[\alpha \leq \overline{F}_X(x)]} dg(\alpha)\, dx$$

On déduit du théorème de Fubini que :

$$\rho_g(X) = \int_0^1\int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{[\alpha \leq \overline{F}_X(x)]} dx dg(\alpha) = \int_0^1 F_X^{-1}(1-\alpha) dg(\alpha)$$

■

Comme une mesure de **Wang** peut s'écrire sous la forme d'une somme de **VaR** qui sont comonotones additives, elle est elle-même additive pour des risques comonotones.

Chapitre 3

Premières formalisations en assurance

3.1 Outils probabilistes et prime d'assurance

Pour un assureur, l'objectif premier auquel il doit répondre est de rester solvable. En particulier, il doit mettre toutes les chances pour qu'en cas de sinistre il puisse indemniser ses assurés.

Cet assureur considère donc les K risques auxquels il est soumis et qui seront représentés par des variables aléatoires positives $X_1, ..., X_K$, Où X_k représente le montant que l'assureur doit indemniser à l'assuré k lors de la réalisation d'un sinistre.

Afin de se couvrir l'assureur demande donc à chaque assuré k une prime $\mathbb{E}[X_k]$ appelée **prime pure.** l'assureur se garantit de ne pas perdre d'argent en moyenne. Mais, ce critère n'est pas sécurisant pour l'assureur car la moyenne ne mesure pas les extrémités des distributions, donc l'assureur demande une prime plus élevée qui est de la forme :

$$(1 + \eta)\mathbb{E}[X_k]$$

η une constante strictement positive appelée **chargement**. La prime

$$(1+\eta)\mathbb{E}[X_k]$$

est appelée **prime chargée.**

A ces deux notions, il faut ajouter **la prime commerciale** en appliquant à la prime chargée un second chargement. Ce second chargement inclut les différents coûts et frais de l'assureur : rémunération du capital, taxes, coût de la réassurance et frais de gestion. La probabilité de bénéfice donnée par :

$$P_{bénéfice} = P(X_1 + ... + X_K \leq (1+\eta)\left(\mathbb{E}[X_1] + ... + \mathbb{E}[X_K]\right).$$

La probabilité de ruine :

$$P_{ruine} = P(X_1 + ... + X_K > (1+\eta)\left(\mathbb{E}[X_1] + ... + \mathbb{E}[X_K]\right).$$

Cette quantité correspond à la probabilité pour l'assureur de ne pas être en mesure d'indemniser ses assurés.

3.2 Quelques inégalités pour l'assurance non -vie

3.2.1 Inégalité de Markov

En théorie des probabilités, **l'inégalité de Markov** donne une borne supérieure de la probabilité qu'une variable aléatoire réelle à valeurs positives soit supérieure ou égale à une constante positive.

Propriété : (Inégalité de Markov). Soit X une variable aléatoire quelconque, une fonction g :$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ et une constante $a > 0$. Nous avons alors :

$$P[g(X) > a] < \frac{\mathbb{E}[g(X)]}{a}$$

Preuve. l'inégalité :

$$g(X) > a1_{\{g(X)>a\}}$$

donne en passant à l'espérance :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g(X)] &> \mathbb{E}[a1_{\{g(X)>a\}}] \\ &> a\mathbb{E}[1_{\{g(X)>a\}}] \end{aligned}$$

mais on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[1_{\{g(X)>a\}}] &= 0.P[g(X) < a] + 1.P[g(X) > a] \\ &= P[g(X) > a] \end{aligned}$$

donc

$$\mathbb{E}[g(X)] > aP[g(X) > a]$$

qui fournit le résultat annoncé. ■

3.2.2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

L'inégalité de **Bienaymé-Tchebychev** controle l'écart entre une variable aléatoire et sa moyenne. Elle s'obtient comme une simple conséquence de l'inégalité de **Markov**.

Propriété : (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev). Soit X une variable aléatoire ; possédant une moyenne μ et une variance $\sigma^2 < +\infty$ on a :

$$P[| X - \mu |> \varepsilon] < \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \qquad \forall \varepsilon > 0$$

Preuve. Il suffit d'appliquer l'inégalité de **Markov** pour

$$g(X) = (X - \mu)^2 \;\text{ et } a = \varepsilon^2$$

Alors :

$$(X-\mu)^2 > \epsilon^2 1_{\{(X-\mu)^2>\varepsilon^2\}}$$

donne en passant à l'espérance :

$$\mathbb{E}[(X-\mu)^2] > \epsilon^2 P[(X-\mu)^2 > \epsilon^2] \qquad (*)$$

on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X-\mu)^2] &= \mathbb{E}[X^2+\mu^2-2X\mu] \\
&= \mathbb{E}[X^2]+\mathbb{E}[\mu^2]-2\mathbb{E}[X]\mu \\
&= \mathbb{E}[X^2]-\mathbb{E}[X]^2=\sigma^2 \\
(*) &\Longrightarrow \sigma^2 > \epsilon^2 P[(X-\mu)^2 > \epsilon^2] \\
&\Longrightarrow P[\mid X-\mu \mid > \varepsilon] < \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}
\end{aligned}$$

■

3.2.3 Interprétation actuarielle de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

La variance (et donc l'écart-type) mesure la distance entre la charge financiére S de l'assureur et la prime pure correspondante $\mu = \mathbb{E}(S)$ On peut donc se demander ce qu'on peut affirmer a propos de l'écart entre S et sa moyenne grâce a la connaissance de la variance.

L'inégalité de **Bienaymé-Tchebychev** nous apprend que

$$\begin{aligned}
P[\quad \mid \quad S-\mu \mid \leq t\sigma] &> 1-\frac{1}{t^2} \\
\Longrightarrow P[\mid S-\mu \mid > t\sigma] &< \frac{1}{t^2}
\end{aligned}$$

quel que soit $t > 0$.

Les inégalités $(**)$ n'ont bien entendu d'intérêt que si $t > 1$. Elles signifient qu'une variable aléatoire S dont la variance est finie ne peut "pas trop" s'éloigner de sa moyenne et revétent une importance considérable pour l'actuaire (en interprétant S comme un montant de sinistre, et comme la prime pure correspondante). Ainsi, la probabilité que le montant S des sinistres s'écarte de la prime pure μ de $t = 10$ fois l'écart-type σ est toujours inférieure à

$$\frac{1}{t^2} = 1\%.$$

3.3 Assurance et loi des grands nombres

La loi des grands nombres fournit une justification pertinente du mode de calcul de la prime pure associée à S. Afin de s'en convaincre, nous aurons besoin d'un concept de convergence pour une suite de variables aléatoires.

Définition 3.1 *La suite*

$$\{T_n,\ n \in \mathbb{N}\}$$

Converge en probabilité *vers la variable aléatoire T, ce qui se notera désormais*

$$T_n \underset{proba}{\rightarrow} T$$

lorsque

$$P\left[\mid T_n - T \mid > \varepsilon\right] \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty$$

quel que soit $\varepsilon > 0$. Ceci exprime le fait qu'au fur et á mesure que n croît, la probabilité que T_n s'écarte de sa limite T de plus de ε tend vers 0; T_n se rapproche d'autant plus de sa limite T que n est grand.

Définition 3.2 *On dit que T_n* ***converge presque sûrement*** *vers T si*

$$P\left\{\lim_{n\rightarrow+\infty} T_n = T\right\} = 1$$

3.4 Convergence de la charge moyenne de sinistre par police vers la prime pure

Loi des grands nombres

Supposons que l'assureur émet un grand nombre de polices identiques, et désignons par S_i , $i = 1, 2, ..., n$, le débours total de l'assureur en relation avec la police numéro i au cours d'une période de référence (généralement un an).

Loi faible des grands nombres

Soient μ et σ^2 la moyenne et la variance commune des S_i. Notons$\overline{S}^{(n)}$ la charge moyenne de sinistre par police, i.e.

$$\overline{S}^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} S_i$$

Pour autant que les variables aléatoires S_i soient indépendantes, identiquement distribuées et de variance finie, la loi des grands nombres assure que :

$$\overline{S}^{(n)} \underset{\text{proba}}{\rightarrow} \mu \text{ lorsque } n \text{ tend vers l'infini.}$$

Loi forte des grands nombres

Considèrons n variables aléatoires indépendantes qui suivent la même loi de probabilité, intégrables (i.e.$\mathbb{E}(|X|) < +\infty$). En reprenant les notations ci-dessus, la loi forte des grands nombres précise que $\overline{S}^{(n)}$, converge vers μ « **presque sûrement** ».

C'est-à-dire que :

$$\overline{S}^{(n)} \underset{\text{p.s}}{\rightarrow} \mu \text{ lorsque } n \text{ tend vers l'infini.}$$

Chapitre 4

Modélisation actuarielle des risques

4.1 Modèles en temps discret

4.1.1 Modèle individuel

À chaque police d'assurance i correspond un risque individuel. L'assuré a une probabilité pi de subir un sinistre. Si ce dernier a lieu, son coût est aléatoire et est noté X_i Le modèle est dit « individuel » car le risque global se décompose comme la somme des risques individuels.

Définition 4.1 *Le modèle individuel de risque est une suite finie $X_1, ..., X_n$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. le monton de sinistre S est défini par :*

$$S = X_1 + ... + X_n$$

La prime pure est l'espérance mathématique

$$\mathbb{E}[S] = n\mathbb{E}[X_1]$$

4.1.2 Modèle collectif

Sur une branche d'assurance, dans une classe d'individus homogènes, on peut supposer que ces derniers auront des sinistres dont la loi est proche, idéalement ils seront indépendants et de même loi. Le défaut du précédent modèle est qu'il ne tient pas compte de la possibilité qu'un individu ait plusieurs accidents, tout du moins ce n'est pas naturel. Nous allons nous placer dans un modèle dit « collectif » où l'assureur aura un nombre aléatoire de sinistres, généralement noté N, et une séquence de sinistres aléatoires $X_1, ..., X_N$.

Le modèle collectif de risque est une extension du modèle individuel de risque.

Définition 4.2 *Le modèle collectif de risque est une suite infinie $(Y_k)_{k\geq 1}$ de variables aléatoires réelles et une variable aléatoire entières N . Le montant cumulé des sinistres S est alors défini par :*

$$S = Y_1 + ... + Y_N = \sum_{k=1}^{N} Y_k.$$

Pour utiliser facilement ce modèle, deux hypothèses (très fortes) doivent être faites :

H$_1$) Indépendance entre la fréquence et le coût des sinistres, c'est à dire que les variables aléatoires N et $(Y_k)_{k\geq 1}$ sont supposées indépendantes.

H$_2$) Indépendance et stationnarité des montants de sinistres. Les $(Y_k)_{k\geq 1}$ sont indépendantes, et surtout ne varient pas avec l'effet du temps.

Alors ; la prime pure est :

$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[Y_1]$$

4.1.3 Critère de ruine

Considérons un assureur dont le risque cumulé de sinistre est représenté par une variable aléatoire S d'espérance finie. Pour un taux de chargement $\eta > 0$, nous appellerons montant cumulé des primes chargées la quantité :

$$\Pi = (1 + \eta)\mathbb{E}[S].$$

Définition 4.3 *La probabilité de ruine est un indicateur de risque apprécié par les actuaires. Il s'agit de la probabilité que la charge totale des sinistres sur une période excède l'encaissement correspondant, augmenté le cas échéant du montant de capital dont dispose la compagnie. Considérons un ensemble de risque cumulé S de fonction de répartition F_S et de prime pure $\mathbb{E}[S] \neq 0$. Pour un chargement de sécurité $\alpha > 0$, une réserve de solvabilité $R > 0$ et une réassurance de taux de rétention $\alpha \in]0;1]$, la probabilité de ruine P_{ruine} est donnée par*

$$\begin{aligned}
P_{ruine} &= P\left(\alpha S > \alpha\left(1+\eta\right)\mathbb{E}\left[S\right] + R\right). \\
&= 1 - P\left(S \leq \left(1+\eta\right)\mathbb{E}\left[S\right] + \frac{R}{\alpha}\right) \\
&= 1 - F_S\left(\left(1+\eta\right)\mathbb{E}\left[S\right] + \frac{R}{\alpha}\right)
\end{aligned}$$

4.2 Les moments

Soit Y une variable aléatoire, un entier $r \geq 1$:

$$M_r(Y) = \mathbb{E}[Y_r] \text{ le moment d'ordre } r$$

$$\mu_r(Y) = \mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y])^r] \text{ le moment centré d'ordre r.}$$

$$\sigma(Y) = \mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y])^2] \text{ l'écart type.}$$

Dans le modèle individuel

$$S = X_1 + ... + X_K$$

si les X_k admettent un moment d'ordre 2, alors S admet aussi un moment d'ordre 2

$$\sigma^2(S) = K\sigma^2(X_1).$$

4.3.2 Espérance de X

On identifie l'expression de l'espérance de X en conditionnant sur M et en utilisant la formule de l'espérance totale

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}_M[\mathbb{E}[X \mid M]] \tag{2.1}$$

où

$$\mathbb{E}[X \mid M = 0] = 0$$

et

$$\mathbb{E}[X \mid M = k] = \mathbb{E}[B_1 + ... + B_k] = k \times \mathbb{E}[B] \quad (k \in \mathbb{N}^+).$$

Ainsi, on déduit que

$$\mathbb{E}[X \mid M] = M \times \mathbb{E}[B]. \tag{2.2}$$

En remplaçant(2.2) dans (2.1), l'expression pour $\mathbb{E}[X]$ est donnée par

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid M]] = \mathbb{E}[M \times \mathbb{E}[B]] = \mathbb{E}[M]\mathbb{E}[B]. \tag{2.3}$$

Selon (2.3), l'espérance des coûts pour un risque ($\mathbb{E}[X]$) correspond au produit du nombre espéré de sinistres($\mathbb{E}[M]$) et du montant espéré d'un sinistre ($\mathbb{E}[B]$). En actuariat, dans le contexte de l'assurance, l'espérance de la v.a.X correspond à la prime pure.

4.3.3 Variance de X

Afin d'obtenir l'expression de la variance de$X$, on conditionne à nouveau sur la v.a. M en ayant recours à la formule de la variance totale

$$Var(X) = \mathbb{E}_M[Var(X \mid M)] + Var_M(\mathbb{E}[X \mid M]) \tag{2.4}$$

où

$$Var(X \mid M = 0)$$

et

$$Var(X \mid M = k) = Var\left(\sum_{j=1}^{k} B_j\right) = \sum_{j=1}^{k} Var\left(B_j\right) = k \times Var(B) \quad (k \in \mathbb{N}^{+}) :$$

Alors, on a

$$Var(X \mid M) = M \times Var(B). \tag{2.5}$$

En remplaçant (2.5) ainsi que (2.2) dans(2.4), il en résulte que

$$\begin{aligned} Var(X) &= \mathbb{E}[M \times Var(B)] + Var(M\mathbb{E}[B]) \\ &= \mathbb{E}[M]Var(B) + Var(M)(\mathbb{E}[B])^2. \end{aligned}$$

La variance des coûts pour le risque $Var(X)$ est égale à la somme de la variance des coûts liés aux montants des sinistres, soit

$$\mathbb{E}[Var(X \mid M)] = \mathbb{E}[M]Var(B)$$

et de la variance des coûts liés au nombre de sinistres, soit

$$Var(\mathbb{E}[X \mid M]) = Var(M)(\mathbb{E}[B])^2.$$

4.3.4 Fonction de répartition de X

La fonction de répartition de X est obtenue en conditionnant sur la v.a. M telle que

$$
\begin{aligned}
F_X(x) &= Pr(X \leq x) = \sum_{k=0}^{\infty} Pr(M=k) Pr(X \leq x \mid M=k) \\
&= f_M(0) + \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k) Pr(B_1 + \ldots + B_k \leq x) \\
&= f_M(0) + \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k) F_{B_1+\ldots+B_k}(x).
\end{aligned}
$$

4.3.5 Espérance tronquée de X

On conditionne sur M pour développer l'expression de l'espérance tronquée de X, soit

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X \times 1_{\{X \leq b\}}] &= \sum_{k=0}^{\infty} Pr(M=k) \mathbb{E}\left[X \times 1_{\{X \leq b\}} \mid M=k\right] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k)\ \mathbb{E}[(B_1 + \ldots + B_k) \times 1_{\{B_1+\ldots+B_k \leq b\}}]
\end{aligned}
$$

On déduit

$$
\mathbb{E}[X \times 1_{\{X>b\}}] = \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k)\ \mathbb{E}\left[(B_1 + \ldots + B_k) \times 1_{\{B_1+\ldots+B_k > b\}}\right]. \tag{2.6}
$$

Il est possible d'évaluer (2.6) quand on possède une forme analytique pour

$$
\mathbb{E}[(B_1 + \ldots + B_k) \times 1_{\{B_1+\ldots+B_k > b\}}].
$$

4.3.6 Fonction génératrice des moments

On appelle fonction génératrice des moments de X la fonction M_X définie par

$$
M_X(t) = \mathbb{E}\left[\exp(tX)\right].
$$

On suppose que la $f.g.m$ de B existe, ce qui implique que la $f.g.m$ de X existe aussi. Afin d'obtenir l'expression de la $f.g.m$ de X, on conditionne sur la v.a. M

$$\mathbb{E}[\exp(tX)] = \mathbb{E}_M[\mathbb{E}\ [\exp(tX) \mid M\ ]] \tag{2.7}$$

Pour $M = 0$

$$\mathbb{E}[\exp(tX) \mid M = 0] = 1$$

et pour $M \in \mathbb{N}^+$, on déduit

$$\mathbb{E}[\exp(tX) \mid M = k] = \mathbb{E}[\exp(t(B_1 + ... + B_k)] = \mathbb{E}[\exp(tB_1)] \times ... \times \mathbb{E}[\exp(tB_k)]$$

car les v.a. $B_1, ..., B_k$ sont indépendantes. Comme elles sont aussi identiquement distribuées, il s'ensuit que

$$\mathbb{E}[\exp(tX) \mid M] = M_B(t)^M. \tag{2.8}$$

On remplace (2.8) dans (2.7) et on obtient

$$\mathbb{E}[\exp(tX)] = \mathbb{E}_M[M_B(t)^M]$$

4.4 Distributions de fréquence et comportement de X

En actuariat, les principales lois pour la $v.a.$ de fréquence sont les lois de Poisson, binomiale et binomiale négative. Les lois de X correspondantes sont alors appelées lois Poisson composée, binomiale composée et binomiale négative composée. Comme la loi de Poisson est au cœur de la modélisation des risques en assurance $IARD$ (*Incendie, Accidents et Risques Dive* on s'intéresse aussi aux extensions de cette loi obtenues par mélange. Pour cette raison, on décrit les lois Poisson-gamma (qui est aussi la loi binomiale négative), Poisson-inverse gaussienne et Poisson-lognormale.

4.4.1 Loi de Poisson

La loi de Poisson est fondamentale dans la modélisation du nombre de sinistres pour les risques en assurance $IARD$. Elle constitue en quelque sorte la loi de base. L'espérance et la variance de la loi de Poisson sont égales. Cette propriété est appelée l'équidispersion.

Lorsque $M \sim Pois(\lambda)$ avec

$$\mathbb{E}(M) = Var(M) = \lambda$$

il en découle que la v.a. X obéit à une loi Poisson composée avec les paramètres λ et F_B, notée $X \sim PComp(\lambda; F_B)$. L'espérance de X est

$$\mathbb{E}[X] = \lambda\mathbb{E}[B]$$

et l'expression de la variance de X est

$$Var(X) = \lambda Var(B) + \lambda\mathbb{E}[B]^2 = \lambda\mathbb{E}[B^2].$$

Le moment d'ordre 3 donné par

$$\mathbb{E}[X^3] = \lambda\mathbb{E}[B^3] + 3\lambda^2\mathbb{E}\,[B]\mathbb{E}\,[B^2] + \lambda^3\mathbb{E}^3[B].$$

On obtient

$$\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^3] = \mathbb{E}[B^3]$$

à partir duquel on détermine l'expression suivante pour le coefficient d'asymétrie :

$$\gamma(X) = \frac{\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\left[X\right])^3\right]}{(Var(X))^{3/2}} = \frac{\mathbb{E}\left[B^3\right]}{\sqrt{\lambda \mathbb{E}\left[B^2\right]^3}} > 0.$$

4.4.2 Loi binomiale

Quand $M \sim Bin(n; q)$ avec

$$\mathbb{E}[M] = nq \ , \ Var(M) = nq(1-q)$$

il en résulte que X obéit à une loi binomiale composée avec les paramètres n, q et F_B, notée $X \sim BComp(n; q; F_B)$.

L'espérance de X est

$$\mathbb{E}[X] = nq\mathbb{E}[B]$$

et la variance de X est donnée par

$$Var(X) = nqVar(B) + nq(1-q)\mathbb{E}[B]^2.$$

La $f.g.m$ de X est

$$M_X(t) = (1 - q + qM_B(t))^n.$$

Le moment centré d'ordre 3 est donné par

$$\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^3] = n(q\mathbb{E}[B^3] - 3q^2\mathbb{E}[B^2]\mathbb{E}[B] + 2q^3\mathbb{E}[B]^3), \tag{2.9}$$

En réarrangeant les termes de l'équation (2.9), on obtient

$$\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^3] = \mathbb{E}[M] \times \left(\mathbb{E}[(B - \mathbb{E}[B])^3] + 3(1-q)\mathbb{E}[B]Var[B] + (1-q)(1-2q)\mathbb{E}[B]^3\right). \tag{2.10}$$

4.4.3 Loi binomiale négative

Quand $M \sim BN(r;q)$ avec

$$\mathbb{E}[M] = r\frac{1-q}{q}, \; Var(M) = r\frac{1-q}{q^2}$$

on déduit que la v.a X obéit à une loi binomiale négative composée avec les paramètres r, q et F_B, notée $X \sim BNComp(r;q;F_B)$. L'espérance et la variance de X sont respectivement

$$\mathbb{E}[X] = r\frac{1-q}{q}\mathbb{E}[B]$$

et

$$Var(X) = r\frac{1-q}{q^2}\mathbb{E}[B]^2 + r\frac{1-q}{q}Var(B)$$

La f.g.m de X est $M_X(t) = \left(1 - \frac{1-q}{q}\left(M_B(t) - 1\right)\right)^{-r}$
Le moment centré d'ordre 3 de X est

$$\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^3] = r\frac{1-q}{q}\mathbb{E}[B^3] + 3r\frac{(1-q)^2}{q^2}\mathbb{E}[B^2] + \mathbb{E}[B] + 2r\frac{(1-q)^3}{q^3}\mathbb{E}[B]^3.$$

4.5 Comparaison des variances des trois lois composées

Pour les lois de Poisson, binomiale et binomiale négative, on sait que

$$Var(M) = \mathbb{E}[M], \; Var(M) \leq \mathbb{E}[M] \text{ et } Var(M) \geq \mathbb{E}[M]$$

On compare les variances de la loi binomiale composée et de la loi binomiale négative

4.6 Distributions du montant d'un sinistre et comportement de X

4.6.1 Loi exponentielle

La loi exponentielle est une loi fondamentale en actuariat et elles possèdent de nombreuses propriétés intéressantes. Elle sert souvent de loi de référence par rapport aux autres lois continues utilisées pour la description du comportement d'un montant de sinistre. Elle est définie en termes d'un seul paramètre. Son mode est à 0 et la fonction d'excès moyen est une constante. En supposant $B \sim \exp(\lambda)$, il est aussi possible d'obtenir des expressions analytiques de quantités définies en fonction de X, notamment la fonction de répartition, la $TVaR$ et la prime $stop - loss$ associées à X. En revanche, il est rare que la loi exponentielle soit utilisée directement pour modéliser un montant de sinistre.

Absence de mémoire : une variable aléatoire X est dite sans mémoire si pour tous $s, t \geq 0$ on a

$$P\left(X > t + s \mid X > t\right) = P(X > s)$$

L'unique loi de probabilité continue à perte de mémoire est la loi exponentielle, ainsi la propriété de perte de mémoire caractérise la loi exponentielle parmi toutes les lois continues.

propriété d'absence de mémoire : Soit une v.a. $X \sim \exp(\lambda)$. On définit la v.a.$W(d) = (X - d \mid X > d)$, correspondant à l'excédent de la v.a. X par rapport à d sachant que X dépasse d. Alors, $W(d) \sim \exp(\lambda)$.

Preuve. On identifie la distribution de $W(d)$ à partir de sa fonction de survie qui est donnée par

$$\overline{F}_W(d)(x) = P(W(d) > x) = P((X - d) > x \mid X > d)$$

$$= \frac{\exp\left(-\beta\left(x+d\right)\right)}{\exp\left(-\beta d\right)} = \exp\left(-\beta x\right).$$

■

On mentionne aussi la propriété suivante relative au minimum de n v.a. indépendantes de loi exponentielle.

Proposition 4.1 *Soient les v.a. indépendantes $X_1, ..., X_n$ de loi exponentielle avec paramètres $\beta_i > 0$ pour $i = 1, .., n$. Alors, la v.a.*

$$T_n = min(X_1, ..., X_n)$$

obéit aussi à une loi exponentielle de paramètre

$$\beta_1 + ... + \beta_n$$

Preuve. La fonction de survie de T_n est donnée par

$$\begin{aligned} \overline{F}_{T_n}(x) &= P(min(X_1, ...X_n) > x) = P(X_1 > x, ..., X_n > x) \\ &= \prod_{i=1}^{n} Pr(X_i > x) = \exp\left(-\left(\beta_1 + ... + \beta_n\right)x\right). \end{aligned}$$

ce qui conduit au résultat désiré. ■

Bibliographie

[1] M. Denuit, A. Charpentier, Mathématiques de l'assurance non vie, tome 1 : Principes fondamentaux de théorie du risque. Economica (2004).

[2] M. Denuit, Dhaene, J., Goovaerts, M., Kaas, R., & Vyncke, D. Actuarial Theory for Dependent Risks.Sous presse (2004).

[3] D. Foata. & Fuchs, A. Processus Stochastiques.Masson, Paris (2002).

[4] H.U. Gerber. An Introduction to Mathematical Risk Theory. Huebner Foundation for Insurance Education, Philadelphia(1979).

[5] M.J. Goovaerts, De Vylder, F., & Haezendonck, J. Insurance Premiums : Theory and Applications. North Holland, Amsterdam (1984).

[6] C. Gouriéroux. Statistique de l'Assurance. Economica, Paris (1999).

[7] J. Grandell. Aspects of Risk Theory. Springer Verlag, Berlin (1990).

[8] S. Haberman & T. Sibett. History of Actuarial Science. 3 : Life Insurance Mathematics. Pickering & Catto. London (1995).

[9] S. Haberman & T. Sibett. History of Actuarial Science. 4 : Life Insurance Mathematics. Pickering & Catto. London (1995).

[10] S. Haberman & T. Sibett. History of Actuarial Science. 5 : Life Insurance. Pickering & Catto. London (1995).

[11] S. Haberman & T. Sibett. History of Actuarial Science. 7 : Investment, Risk Theory, Non-Life Insurance. Pickering & Catto. London (1995).

[12] C. Hess Méthodes actuarielles de l'assurance vie. Economica (2000).

[13] D. C. Lambert. Economie des Assurances. Armand Colin, Paris (1996).

[14] C. Partrat, J.-L. Besson, Assurance non-vie, modélisation,simulation. Assurance Audit Actuariat, Economica (2005).

[15] B. Salanié. Théorie des Contrats. Economica, Paris (1996).

[16] B. Sundt. An Introduction to Non-Life Insurance Mathematics.Verlag Versicherungswirtschaft. Karlsruhe (1984).

[17] A. Tosetti.,T. Béhar,M. Fromenteau, & Ménart . Assurance : Comptabilité, Réglementation, Actuariat. Economica, Paris (2000).