République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : **EDP Et Analyse Numérique**

Par :

Melle. ZAAIMIA Asma

Intitulé

Théorèmes du point fixe commun dans les espaces b-métriques

Dirigé par : Prof. ELLAGGOUNE Fateh

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. F. AISSAOUI	MCB	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. F. ELLAGGOUNE	Prof	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. F. LAKHAL	MCA	Univ-Guelma

Session Juin 2018

Remerciement

Nous remercions avant tout Dieu le tout puissant qui nous a donné la force, la volonté, la patience et la santé durant toute cette période. Grace à Dieu ce travail a été accompli.

Je remerciement vont aussi à notre Encadreur Mr. Fateh ELLAGOUNE pour nous avoir encadrés et nous a aidés à terminer ce travail par sa présence, ces idées pertinentes et ces conseils.

J'adresse mes sincères remerciements à tous les professeurs, et aussi à toutes les personnes dont le nombre est très élevé pour les citer ici, qui ont contribué de près ou de loin directement ou indirectement à notre modeste travail.

Dédicace

A la personne la plus signifiante dans ma vie ;
A la voix qui guide mes décisions ;
Au visage tracé dans mes yeux ;
A l'esprit qui m'entoure à tout instant
A chère mère
Que dieu la protège
A ma force, ma Soutien : Mon cher père

A mon âme sœur, mon compagnon, mon bonheur et mon sourire :
AMINA
A mes frères et ma sœur DINA
Bien-aimé de mon cœur, ma chère : NADIA
À mon amie depuis l'enfance : NIHED
A mon bel oiseau : DALEL
A mes amis qui sont avec moi plusieurs années : SAMIA, IMEN,
A.ABDA
A mes chère amies dans la résidence : CHAHRA, WAHIDA, IMEN,
SAMIRA

En fin de compte, je ne peux pas terminer cette dédicace sans remercier A.DRIDI pour son aide, ses conseils et ses pensées ; Je vous accorderai le crédit dans toute ma vie.

Table des matières

Résumé

Ce mémoire s'inscrit dans la continuité des travaux sur le point fixe commun dans des espaces b-métriques généralisées.

Notre travail consiste à étudié quelques résultats d'existence et d'unicité du point fixe commun pour des opérateurs univoque et multivoque sur des espaces b-métriques généralisées sans utiliser l'hypothèse de la continuité. De plus, cette étude est clôturée par une application pour les systèmes d'équations opérationnelles dans un espace vectoriel b-normé complet.

Mots clés : point fixe commun, univoque, multivoque, espaces b-métriques généralisées, l'hypothèse de la continuité, b-distances généralisées.

Abstract

This thesis included in the continuous work onthe common fixed point in generalized b-metric spaces.

Our work is to study some results of the existence and the uniqueness of the common fixed point for single-valued and multivalued operators on generalized b-metric spaces without the use of the hypothesis of continuity.

Furthermore, an application is presented for a system of operator equations in complete b-normed vector space.

Key words: the common fixed point, generalized b-metric spaces,the hypothesis of continuity,generalized b-distances.

Introduction

Qu'est-ce qu'un point fixe ?

La théorie de point fixe est un des outils les plus puissants des mathématiques modernes et peut être considérée comme la branche cardinale de l'analyse non-linéaire. L'analyse non-linéaire a été développée dans les années 1950 par des mathématiciens comme Browder comme une combinaison d'analyse fonctionnelle et l'analyse variationnelle. Cependant, les résultats tous premiers avaient déjà été obtenus en 1920. Les résultats d'analyse non-linéaire sont applicables à une vaste gamme de domaines. Plusieurs problèmes de la physique, la chimie, la biologie et l'économie mènent aux modèles non-linéaires. Les équations différentielles non-linéaire, les équations intégrales, les inégalités variationnelles et les problèmes d'optimisation plus généraux sont certains des sujets importants dans l'analyse non-linéaire. On le rencontre partout et sur touts les chemins : que vous étudiez les fractales, les cours de la bourse, les équations de la physique mathématique ou vérifiez un conteur électronique vous rencontrez des point fixes.

Un point fixe est un point qui reste immobile par une application ou une transformation. Autrement dit, soient X un ensemble et $T : X \to X$ une application. Une solution d'une équation $T(x) = x$ est appelée un point fixe de T. Ces résultats théoriques nous permettent de résoudre certains problèmes mathématiques, par exemple trouver les racines d'un polynôme, ou pour montrer l'existence des solutions numériques des équations différentielles sans les déterminer explicitement.

Le théorème de Brouwer est prouvé en 1912, ce théorème est un résultat de topologie algébrique, sous sa forme la plus simple, ce théorème exige uniquement la continuité de l'application d'un intervalle fermé borné dans lui-même. Et de façon plus générale, l'application continue doit être définie dans un convexe compact d'un espace euclidien dans lui-même.

Le théorème de l'application contractante prouvé par Banach en 1922 dit qu'une contraction d'un espace métrique complet dans lui-même admet un point fixe unique. De plus, il fournit un algorithme d'approximation du point fixe comme limite d'une suite itéré. Mais d'une part, montrer que la fonction est contractante peut entraîner de laborieux calculs, d'autre part les conditions sur la fonction et l'espace étudiés restreignent le nombre de cas aux quels on peut appliquer le théorème.

L'activité dans la théorie de point fixe métrique a été limitée aux extensions secondaires du principe de contraction de Banach et ses applications variées. Pourtant, le théorème du point fixe de Schauder établie en 1930, est une généralisation du théorème du point fixe de Brouwer et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique.

Mais la théorie a gagné la nouvelle motivation en conséquence du travail de Felix Browder au milieu de 1960 et la contribution majeure au développement de l'analyse fonctionnelle non-linéaire comme une branche active et essentielle de mathématique.

En 1989, Bakhtin [2] a présenté la notion des espaces b-métriques comme une généralisation des espaces métriques et cette notion a été largement utilisée par Czerwik dans [9].

Bakhtin a prouvé la contraction principale de la contraction dans les espaces b-métrique qui généralise la fameuse contraction principale de Banach dans les espaces métriques.

Cette mémoire est divisé en trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous rappelons le théorème du point fixe d'une fonction et on présente une généralisation du théorème de la contraction de Banach. Nous choisissons le problème de l'existence et l'unicité des solutions de certains problèmes afin de démontrer les résultats en détail. On présente le théorème de Brouwer sur la boule unité de $\mathbb{R}^n$. Enfin on présente aussi le théorème de Schauder qui prolonge le théorème de Brouwer pour montrer l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons deux cas de théorème du point fixe :

* 1^{er} cas d'une seule fonction qui contient théorème de Kannan et Ćirić.

* $2^{ème}$ cas de plusieurs fonctions qui contient la contraction généralisée et quasi contraction.

Dans le troisième chapitre, nous construisons une théorie de point fixe dans des espaces b-métrique. Nous commençons par la présentation de la notion d'un espace b-métrique et nous donnons quelques exemples d'espaces b-métrique. Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous présentons quelques résultats de point fixes communs pour des opérateurs univoques et multivoques.

Chapitre 1

Introduction à la théorie du point fixe

1.1 Préliminaires

Définition 1.1 : *Une distance sur un espace X est une application $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les trois propriétés suivantes :*

$1 : d(x,\ y) = 0 \iff x = y,$

$2 : \forall x,\ y \in X;\ \ d(x,\ y) = d(y,\ x),$

$3 : \forall x,\ y,\ z \in X;\ \ d(x,\ z) \leq d(x,\ y) + d(y,\ z).$

Une paire $(X,\ d)$ s'appelle un espace métrique.

Définition 1.2 :(*Qu'est-ce qu'un point fixe ?*)

Soit $I \subset \mathbb{R}$, $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on dit que l'intervalle I est stable par la fonction T si et seulement si $T(I) \subset I$.

Soit $T : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I. On dit que x est un point fixe de T lorsque :

$$T(x) = x.$$

En d'autres termes, les points fixes de T sont les solutions, lorsqu'elles existent de *l'équation* $T(x) = x$.

Définition 1.3 : *Soient* E *et* F *deux espaces métriques. Une application* $T : E \to F$ *est dit* $k-$*lipschitzienne s'il existe une constante réel* k *positive telle que :*

$$d(T(x), T(y)) \leq kd(x,\ y).$$

Définition 1.4 : *On dit que* T *est une application contractante si* T *est une application* $k-$*lipschitzienne avec* $0 \leq k \leq 1$.

Définition 1.5 : *Une suite* $\{x_n\}_{n>1}$ *d'un espace métrique* (X, d) *est de Cauchy si :*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n,\ m \geqslant N;\ d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Définition 1.6 : *On dit que* (X, d) *est un espace métrique complet si et seulement si toute suites de Cauchy est convergente.*

Définition 1.7 : (*Ensemble convexe*)

Soit E *un espace vectoriel et* A *une partie de* E. *On dit que* A *convexe si :*

$$\forall x,\ y \in A; \forall \lambda \in \left]0, 1\right[,\ \lambda x + (1 - \lambda)\, y \in A.$$

1.2 Théorèmes du point fixe

Théorème 1.1 :

Soit T *une fonction continue sur l'intervalle* $[a, b]$ *telle que* $[a, b]$ *soit stable par* T. *Alors la fonction* T *admet au moins un point fixe dans l'intervalle* $[a, b]$.

Preuve : En effet considérons la fonction continue g définie sur $[a, b]$, par :

$$g(x) = x - T(x).$$

Alors g est continue sur $[a, b]$.

On a par ailleurs :

$$\begin{aligned} g(a) &= a - T(a) \leq 0 \\ g(b) &= b - T(b) \geq 0 \end{aligned}$$

car $T(a)$ et $T(b)$, par hypothèse, appartiennent à $[a, b]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ possède au moins une solution sur $[a, b]$. Il en est de même de l'équation $f(x) = x$ et on peut affirmer que f possède au moins un point fixe.

Remarquons que la stabilité de l'intervalle I ne garantit pas l'existence d'un point fixe, sauf le cas que nous venons d'étudier d'un intervalle fermé borné. Par exemple la fonction exponentielle est une fonction de $I = \mathbb{R}$ dans $I = \mathbb{R}$, mais on sait bien que l'équation $\exp x = x$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Théorème 1.2 : *Soient I un intervalle fermé non vide et $T : I \longrightarrow I$ une application contractante sur I. Alors :*

1. *T admet un unique point fixe τ dans I.*

2. *$\forall u_0 \in I$, on a la suite $u_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par :*

$$\begin{cases} u_0 \in I, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = T(u_n), \end{cases} \tag{1.1}$$

converge vers τ.

Remarque 1.1 : On peut remplacer l'hypothèse $T : I \longrightarrow I$ contractante par $T : I \longrightarrow \mathbb{R}$ contractante et telle que : $T(I) \subset I$.

Preuve : Remarquons que u_0 étant dans I et I étant stable par T, la suite (u_n) est bien définie, et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in I$.

Existence d'un point fixe : Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la propriété :

$$P(n) : | u_{n+1} - u_n | \leq k^n | u_1 - u_0 | .$$

On a évidemment $P(0)$.

Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$:

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $P(n)$. Alors :

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| = |T(u_{n+1}) - T(u_n)| \underset{T(I)\subset I}{\overset{T \text{ contractante}}{\leq}} k\,|u_{n+1} - u_n| \leq k^{n+1} \mid u_1 - u_0 \mid,$$

d'où $P(n+1)$.

Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) : \mid u_{n+1} - u_n \mid \leq k^n \mid u_1 - u_0 \mid .$$

Déduisons que (u_n) est de Cauchy :

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ avec $q > p \geq 0$.

Notons $r = q - p$.

On a :

$$\mid u_q - u_p \mid = \mid u_{p+r} - u_p \mid = \sum_{i=p}^{p+r-1} u_{i+1} - u_i \leq \sum_{i=p}^{p+r-1} \mid u_{i+1} - u_i \mid \leq \sum_{i=p}^{p+r-1} k^i \mid u_1 - u_0 \mid,$$

or :

$$\sum_{i=p}^{p+r-1} k^i \mid u_1 - u_0 \mid = k^p \mid u_1 - u_0 \mid \sum_{i=0}^{r-1} k^i,$$

et comme $k \in [0, 1[$, la série géométrique de terme général k^i converge et majorée par $\dfrac{1}{1-k}$.

D'où :

$$\mid u_q - u_p \mid \leq \frac{k^p}{1-k} \mid u_1 - u_0 \mid .$$

Et enfin,

$$k \in [0,\ 1[: \frac{k^p}{1-k} \to 0,\ quand\ p \to \infty.$$

En conséquence :

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N},\ (p \geq \mathbb{N} \Rightarrow \frac{k^p}{1-k} \mid u_1 - u_0 \mid \leq \varepsilon \Rightarrow \mid u_q - u_p \mid \leq \varepsilon).$$

Ce qui prouve que la suite (u_n) est de Cauchy, et comme $\mathbb{R}$ est complet, (u_n) converge.

Notons τ sa limite. Comme I est fermé, on a $\tau \in I$.

Or, T est continue en τ (puisque contractante sur I) donc :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} T(u_n) &= T(\lim_{n\to\infty} u_n),\\
\lim_{n\to\infty} u_{n+1} &= T(\tau),\\
\tau &= T(\tau).
\end{aligned}$$

On a donc démontré que T admet un point fixe τ dans I et que (u_n) converge vers τ.

Unicité du point fixe : Supposons : $\exists\ \tau,\ \tau' \in I$, $T(\tau) = \tau$ et $T(\tau') = \tau'$.

Comme T est contractante sur I :

$$\begin{aligned}
\mid T(\tau) - T(\tau') \mid &\leq k \mid \tau - \tau' \mid,\\
\mid \tau - \tau' \mid &\leq k \mid \tau - \tau' \mid,\\
(1-k) \mid \tau - \tau' \mid &\leq 0.
\end{aligned}$$

Or $k \in [0, 1[$, donc :

$$\begin{aligned}
\mid \ \tau - \tau' \mid &\leq 0,\\
\tau &= \tau'.
\end{aligned}$$

Le théorème est démontré.

Remarque 1.2 : Le théorème du point fixe ne s'applique pas si l'on remplace l'hypothèse T contractante sur I par l'hypothèse T 1−lipschitzienne sur I.

Contre exemple 1.1 : Soit T une application définie par :

$$\begin{array}{ccc} T & : & I \to I \\ x & \longmapsto & x + \dfrac{1}{x} \end{array}$$

Soient x et y dans $I = [1, +\infty[$ avec $x < y$.

Comme T est croissante sur $[1, +\infty[$, on a :

$$|T(y) - T(x)| \leq T(y) - T(x) \leq y - x + \frac{x-y}{xy} \leq y - x \leq |y - x|\,.$$

Ce qui prouve que T est $1-$lipschitzienne sur I.

Cependant T n'a pas de point fixe sur I. (L'équation $T(x) = x$ n'a pas de solution).

Exemple 1.2 : Etudions la convergence de la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in [-1, +\infty[\\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \end{cases}$$

On introduit l'application f définie sur $[-1, +\infty[$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{1 + x}$$

Point fixe de f :

$$f(x) = x \Longleftrightarrow \sqrt{1+x} = x \Longleftrightarrow x \geq 0 \ et \ x^2 - x - 1 = 0 \Longleftrightarrow x = \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

On montre facilement f que est dérivable sur $[-1, +\infty[$, croissante sur $[-1, +\infty[$, puis que : $f\left([-1, +\infty[\right) = [0, +\infty[\subset [-1, +\infty[$.

L'intervalle $I = [-1, +\infty[$ est donc stable et la suite (u_n) est bien définie.

De plus : $\forall x \in \mathbb{R}_+, |f\,'(x)| = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}} \leq \dfrac{1}{2}$.

D'après l'inégalité des accroissement finis :

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+,\ |f(b)-f(a)| \leq \frac{1}{2}|b-a|$. Donc f est $\frac{1}{2}$-lipschizienne sur I, donc contractante sur I.

En outre : $f(\mathbb{R}_+) = [-1,+\infty[\subset \mathbb{R}_+$ donc $\mathbb{R}_+$ est stable par f.

D'après le théorème du point fixe, la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_+ \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases}$

converge donc vers ϕ.

Enfin, si $u_0 \in [-1,0[$ alors $u_1 \in \mathbb{R}_+$ et d'après ce qui précède, (u_n) converge encore vers ϕ.

1.3 Théorème du point fixe de Banach

Le théorème du point fixe de Banach (connu aussi sous le nom théorème de l'application contraction) est un théorème simple à prouver et qui s'applique aux espaces complets et possède de nombreuses applications. Ces applications incluent les théorèmes d'existences pour les équations différentielles, équations intégrales et convergence de certaines méthodes numériques comme celle de Newton pour la résolution d'équations.

Théorème 1.3 : *Soient (E,d) un espace métrique complet et T une application contractante de E dans E. Alors T admet un unique point fixe $x \in E$ de plus toute suite d'élément de E vérifiant la récurrence $x_{n+1} = T(x_n)$ converge vers x.*

Preuve :

<u>Existence :</u> Soit $y \in E$ un point arbitraire dans E. Considérons la suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ donnée par :

$$\begin{cases} x_0 = y \\ x_{n+1} = T(x_n),\ n \geq 0. \end{cases}$$

On doit prouver que (x_n) est une suite de Cauchy dans E. Pour $m < n$, on utilise l'inégalité triangulaire :

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \dots + d(x_{n-1}, x_n)$$

et comme T est contraction :

$$d(x_p, x_{p+1)} = d(T(x_{p-1}), T(x_p)) \leq kd(x_{p-1}, x_p), \forall p > 1.$$

Alors :

$$\begin{aligned}
d(x_m, x_n) &\leq kd(x_{m-1}, x_m) + kd(x_m, x_{m+1}) + ... + kd(x_{n-2}, x_{n-1}), \\
&\leq k^2 d(x_{m-2}, x_{m-1}) + k^2 d(x_{m-1}, x_m) + ... + k^2 d(x_{n-3}, x_{n-2}), \\
&\leq k^m d(x_1, x_0) + k^{m+1} d(x_1, x_0) + ... + k^{n-1} d(x_1, x_0), \\
&\leq (k^m + k^{m+1} + k^{m+2} + ... + k^{n-1}) d(x_0, x_1), \\
&\leq k^m (1 + k + k^2 + ... + k^{n-m-1}) d(x_0, x_1), \\
&\leq k^m \frac{1}{1-k} d(x_0, x_1).
\end{aligned}$$

Car :$1 + k + k^2 + ... + k^{n-m-1}$ suite géométrique ; et on déduit que $(x_n)_n$ est de Cauchy donc $(x_n)_n$ Converge vers x dans E.

T est continue on a :

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} T(x_{n-1}) = T(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}) = T(x).$$

Donc x est point fixe de T.

Unicité : On suppose deux point fixe de T.

Donc $x = T(x)$ et $y = T(y)$ alors :

$$d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

Ce qui implique que

$$d(x, y) = 0$$

Alors $x = y$ (puisque $k < 1$).

Exemple 1.3 : *Considérons* $f(x) = \frac{1}{8}(-2x^3 + x^2 + 6x + 2)$ *pour* $x \in [0,1]$; *On voit que* $2 \leq -2x^3 + x^2 + 6x + 2 \leq 7$, *par conséquent,* $f[0,1] \subset \left[\frac{1}{4}, \frac{7}{8}\right] \subset [0,1]$.

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \frac{1}{8}\left|-2x^3 + -2y^3 + x^2 - y^2 + 6x - 6y\right| \\ &= \frac{1}{8}|x-y|\left|-2x^2 - 2y^2 - 2xy + x + y + 6\right| \\ &\leq \frac{1}{4}|x-y|, \text{ pout tout } x, y \in [0,1]. \end{aligned}$$

Cela montre que f *est une application contractante sur* $[0,1]$; *qui est complet, alors il existe une solution unique pour*

$$x = \frac{1}{8}(-2x^3 + x^2 + 6x + 2)$$

$$-2x^3 + x^2 - 2x + 2 = 0$$

Sur $[0,1]$; *on peut obtenir cette solution numériquement par processus itératif en commençant par n'importe quel point initial de* $[0,1]$: *Par exemple, pour* $x_0 = 1$; *on obtient*

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0) = 0,875 \\ x_2 &= f(x_1) = 0,8345 \\ x_3 &= f(x_2) = 0,8176 \\ x_4 &= f(x_3) = 0,8101 \\ x_5 &= f(x_4) = 0,8067 \\ x_6 &= f(x_5) = 0,8051 \end{aligned}$$

Notons que l'équation cubique $-2x^3 + x^2 - 2x + 2 = 0$ *admet trois racines, et si on souhaite calculer celles qui restent on doit fabriquer autres contractions sur des intervalles appropriés.*

Contre exemples 1.4 : *Les exemples suivant montrent que chacune des hypothèses du théorème est réellement nécessaire.*

1. X n'est pas stable par $f : f(x) = \sqrt{1+x^2}$ *sur* $X = [0,1]$.

Or X est fermé dans $\mathbb{R}$, *et complet car* $\mathbb{R}$ *est complet. De plus,* $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} < 1 \Rightarrow \sup|f'(x)| < 1 \Rightarrow f$ *est contractante.*

Mais f n'a pas de point fixe car $f([0,1]) = [1, \sqrt{2}]$,*i.e X n'est pas stable par f.*

2. f n'est pas contractante : $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ *sur* $[0, +\infty[$.

Or $f : X \to X$, *et X est un fermé de* $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ *est complet donc X est complet.*

Mais $sup|f'(x)| = 1$ *donc f n'est pas contractante.*

3. X n'est pas complet : $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{2}$ *sur* $\left[0, \frac{\pi}{4}\right[$.

Or $f\left(\left]0, \frac{\pi}{4}\right]\right) = \left]0, \frac{\sqrt{2}}{4}\right] \subset \left]0, \frac{\pi}{4}\right]$, *et* $\sup|f'(x)| = \frac{1}{2} < 1$, *donc f est contractante. Mais X n'est pas fermé dans* $\mathbb{R}$ *donc pas complet.*

1.4 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Ce théorème est une application du théorème Banach. En effet, nous verrons qu'une façon de le démontrer est d'appliquer le théorème précédent avec E un ensemble des fonctions et φ une application bien choisie.

Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ et $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application continue. On introduit le problème de Cauchy (C) suivant :

Etant donné $(t_0, y_0) \in U$, trouver une solution $y : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ de l'équation différentielle $y' = f(t, y) \in U$ telle que $t_0 \in I$ et $y(t_0) = y_0$.

Défnition 1.8 : *Soient* $T > 0$ *et* $r_0 > 0$. *On dit que* $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times B_f(y_0, r_0)$ *est un cylindre de sécurité pour* (C) *si toute solution du problème de Cauchy* $y(t_0) = y_0$ *avec* $I \subset [t_0 - T, t_0 + T]$ *reste contenue dans* $B_f(y_0, r_0)$.

Définition 1.9 : *On dit que f est localement lipschitzienne par rapport à la variable y sur U si* $\forall (t_0, y_0) \in U$, *il existe un voisinage V de* (t_0, y_0) *dans U et une constante* $k = k(V)$ *telle que* $\forall (t, y_1), (t,\ y_2) \in V$, *on ait* $\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq k \|y_1 - y_2\|$.

Théorème 1.4 :[10] (*Cauchy-Lipschitz*)

Si $f : U \to \mathbb{R}^m$ est continue et localement lipschitzienne par rapport à y sur U, alors pour tout cylindre de sécurité $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times B_f(y_0, r_0)$, le problème de Cauchy admet une unique solution $y : [t_0 - T, t_0 + T] \to U$.

De plus, si on pose $\phi(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y(u))du$, il existe $p \in N$ telque la suite itérée $\phi^p(z)$ converge uniformément vers la solution exacte.

Preuve : On commence par construire un cylindre de sécurité pour (C).

Soit V un voisinage de (t_0, y_0) sur lequel f est k-lipschitzienne par rapport à y, et soient $T_0 > 0$ et $C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times B(y_0, r_0) \subset V$ un cylindre. C_0 est un fermé borné de $\mathbb{R}^{m+1}$ donc compact, et on en déduit alors que f est bornée sur C_0.

Soit $M = \sup_{(t,y)\in C_0} \|f(t, y(t))\|$. On pose $T = \min(T_0, \frac{r_0}{M})$. On va montrer $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times B_f(y_0, r_0)$ qu'est un cylindre de sécurité pour (C).

Soit $y : I \subset [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \to \mathbb{R}^m$ avec $y(t_0) = y_0$ et $y' = f(t, y)$ $\forall t \in I$. Supposons qu'il existe $\tau \in [t_0, t_0 + T[$ tel que $y(\tau)$ n'appartient pas à $B_f(y_0, r_0)$. De plus, supposons que $J = \{t \in [t_0, t_0 + T[: y(t) \notin B_f(y_0, r_0)\}$ soit non vide. On pose $\tau = \inf J$. Alors $\forall t \in [t_0, \tau[$ on a $y(t) \in B_f(y_0, r_0)$, et de plus $d(y_0, y(\tau)) = r_0$. Comme $(t, y(t)) \in C_0, \forall t \in [t_0, \tau]$ et $y' = f(t, y)$ on a, par le Théorème des Accroissements Finis,

$$r_0 = \|y_0 - y(\tau)\| = \|y(t_0) - y(\tau)\| \leq |t_0 - \tau| \sup_{t\in[t_0,\tau]} |y'(t)| < M \times T \leq r_0.$$

Donc par passage à la limite ($B_f(y_0, r_0)$ étant fermé) on a $y(t) \in B_f(y_0, r_0)$ $\forall t \in [t_0, t_0 + T] \cap I$.

De même on montre que $y(t) \in B_f(y_0, r_0)$ $\forall t \in [t_0 - T, t_0] \cap I$ et donc $y(t) \in B_f(y_0, r_0) \forall t \in I$.

Dans la suite on travaille avec ce cylindre de sécurité. On remarque que par construction on a $\sup_C |f| = M$ et f est k-lipschitzienne par rapport à y sur C. On note $F = C^0([t_0 - T, t_0 + T], B(y_0, r_0))$ muni de la distance $d = \|.\|_\infty$.

$\forall y \in F$ on associe $\phi(y)$ définie par :

$$\phi(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y(u))du$$

On montre d'abord l'équivalence suivante : *y est solution de $(C) \Leftrightarrow y$ est un point fixe de ϕ* :

($\Leftarrow$) Supposons que y est un point fixe de ϕ. Alors $\forall y \in F$ on a $\phi(y) = y$ d'où $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y(u))du$. Or f est continue sur U donc y est continue sur U. De plus, y est dérivable sur $[T_0 - t, T_0 + t]$ et sa dérivée égale $f(t, y(t))$, i.e. $y'(t) = f(t, y(t))$. On a aussi $y(t_0) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y(u))du = y_0$. Donc f est solution du problème de Cauchy (C).

($\Rightarrow$) Supposons que maintenant y est solution de (C). On a alors $y'(t) = f(t, y(t))$ et $y(t_0) = y_0$. On peut intégrer y' par rapport à u car $y'(u) = f(u, y(u))$ et $u \mapsto f(u, y(u))$ est continue sur un segment et donc intégrable sur ce même segment. Alors on obtient :

$$\int_{t_0}^{t} y'(u)du = \int_{t_0}^{t} f(u, y(u))du = [y(u)]_{u=t_0}^{u=t} = y(t) - y(t_0) = y(t) - y_0.$$

Donc, on a bien $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y(u))du = \phi(y)(t)$ et donc y est point fixe de ϕ.

On veut appliquer le théorème du point fixe à ϕ^p (pour p bien choisi).

1. On montre d'abord ϕ qu'est une application de F dans F. Pour cela on montre que $\phi(y)(t) \in B_f(y_0, r_0) \forall t \in [t_0 - T, t_0 + T]$. Soit $y \in F$. On remarque que si $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$,

$$\begin{aligned} \|\phi(y)(t) - y_0\| &= \|\int_{t_0}^{t} f(u, y(u))du\| \\ &\leq \int_{t_0}^{t} \|f(u, y(u))\| \, du \\ &\leq M \int_{t_0}^{t} du \\ &\leq M|t - t_0| \\ &\leq MT \leq r_0 \end{aligned}$$

Donc $\forall t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, $\phi(y)(t) \in B_f(y_0, r_0)$ d'où $\phi(y) \in F$ et on a évidemment la stabilité de F par ϕ^p.

2. On montre maintenant ϕ^p qu'est contractante. Soient $y, z \in F$. On note $y_p = \phi^p(y)$ et $z_p = \phi^p(z)$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$. Par récurrence sur p on montre qu'on a :

$$\|y_p(t) - z_p(t)\| \leq k^p \frac{|t-t_0|^p}{p!} d(y,z) \tag{1.2}$$

- Initialisation : C'est évident dans le cas $p = 0$.

- Généralisation : Supposons que pour un certain entier p quelconque mais fixé on ait (1.2). Alors

$$\begin{aligned}
\|y_{p+1}(t) - z_{p+1}(t)\| &\leq |\int_{t_0}^{t} k \,\|y_p(u) - z_p(u)\|\, du|, \\
&\leq |\int_{t_0}^{t} k.k^p \frac{|u-t_0|^p}{p!} d(y,z) du| \\
&\leq \frac{k^{p+1}}{p!} d(y,z) | \int_{t_0}^{t} |u-t_0|^p du| \\
&= \frac{k^{p+1}}{p!} d(y,z) | \left[\frac{|u-t_0|^{p+1}}{p+1} \right]_{u=t_0}^{u=t} | = k^{p+1} \frac{|t-t_0|^{p+1}}{(p+1)!} d(y,z)
\end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

Comme $|t - t_0| \leq T$, on a $d(y_p, z_p(t)) \leq k^p \frac{T^p}{p!} d(y,z)$, donc ϕ est lipschitzienne de rapport $k^p \frac{T^p}{p!}$. Et il existe un $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $k^p \frac{T^p}{p!} < 1$

(Car $\lim_{p \to +\infty} k^p \frac{T^p}{p!} = 0$). Donc, pour $q \geq p$, ϕ^q est contractante.

3. Le théorème de Banach nous donne la complétude de F.

On déduit du théorème Banach ϕ^q qu'admet un unique point fixe y. De plus $\phi^q(\phi(y)) = \phi(\phi^q(y)) = \phi(y)$ donc $\phi(y)$ est un point fixe de ϕ^q, et par unicité du point fixe de ϕ^q on a $\phi(y) = y$. Comme les points fixes de ϕ sont des points fixes de ϕ^q on en déduit que y est l'unique point fixe de ϕ. Finalement, y est l'unique solution de l'équation $y' = f(t,y)$.

1.5 Théorèmes du point fixe topologiques

1.5.1 Théorème du point fixe de Brouwer (1912)

Le théorème de Brouwer est un théorème du point fixe qui donne l'existence d'un point fixe (mais pas nécessairement l'unicité) pour une fonction continue sur une boule fermé dans un espace de dimension finie.

Théorème 1.5 : *Soit K une partie non vide, compacte et convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : K \to K$ une fonction continue. Alors il existe $x \in K$ tel que $f(x) = x$.*

Remarque 1.3 : Les parties convexes et compactes de $\mathbb{R}$ sont les segments.

Le théorème de Brouwer prend donc dans le cas $n = 1$ la forme particulière suivante :

Théorème 1.6 :

Si $f : [a, b] \to [a, b]$ est une fonction continue, alors il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = x$.

Preuve :

Si f est continue de $[a, b]$ dans lui-même, la fonction, $g : x \longmapsto f(x) - x$ est continu.

Prend en a :

$$f(a) - a \geqslant 0$$

et en b :

$$f(b) - b \leq 0$$

Alors par le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction g s'annule en un point x_0, qui est un point fixe de T.

Afin de démontrer le théorème, on va d'abord le réduire dans le cas où $K = B_f(0, 1)$.

1.5.2 Théorème du point fixe de type Schauder (1930)

Ce théorème prolonge le résultat du théorème de Brouwer pour montrer l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach.

Le Théorème du Point fixe de Schauder est plus topologique et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique. Et nous avons le résultat suivant :

Théorème 1.7 :

Soit K un sous ensemble non vide, compact et convexe d'un espace de Banach X et Supposons $T : K \to K$ une application continue. Alors T admet un point fixe.

Preuve :

Soit $T : K \to K$ une application continue. Comme K est compact, T est uniformément continue ; donc, si on fixe $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x,\ y \in K$, On ait :

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \varepsilon \text{ dès que } \|x - y\| \leq \delta.$$

De plus, il existe un ensemble fini des points $\{x_1, x_2, ..., x_p\} \subset K$ tel que les boules ouvertes de rayon δ centrées aux x_j recouvrent K, i.e $K \subset \bigcup_{1 \leq j \leq p} B(x_j, \delta)$. Si on désigne $L := Vec(T(x_j))_{1 \leq j \leq p}$, alors L est de dimension finie, et $K^* := K \cap L$ est compact convexe de dimension finie.

Pour $1 \leq j \leq p$, on définit la fonction continue : $\psi_j : E \to \mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} 0 & si \ \|x - x_j\| \geq \delta \\ 1 - \dfrac{\|x - x_j\|}{\delta} & sinon \end{cases}$$

et on voit que ψ_j est strictement positive sur $B(x_j, \delta)$ et nulle dehors.

On a donc, pour tout $x \in K$, $\sum\limits_{j=1}^{p} \psi_j(x) > 0$ et donc on peut définir sur K les fonctions continues positives φ_j par :

$$\varphi_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\sum\limits_{j=1}^{p} \psi_j(x)}.$$

Pour lesquelles on a $\sum\limits_{j=1}^{p} \varphi_j(x) = 1$ pour tout $x \in K$.

On pose alors, pour $x \in K$, $g(x) := \sum\limits_{j=1}^{p} \varphi_j(x)\ T(x_j)$. g est continue (car elle est la somme des fonctions continues) et prend ses valeurs dans K^* (car $g(x)$ est un barycentre des $T(x_j)$) Donc, si on prend la restriction $g|_K : K^* \to K^*$,par le théorème de Brouwer, g possède un point fixe $y \in K^*$. De plus :

$$\begin{aligned} T(y) - y &= T(y) - g(y), \\ &= \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y)T(y) - \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y)T(x_j), \\ &= \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) \left| T(y) - T(x_j) \right|. \end{aligned}$$

Or si $\varphi_j(y) \neq 0$ alors $\|y - x_j\| < \delta$ et donc $\|T(y) - T(x_j)\| < \varepsilon$. Donc, on a pour tout j :

$$\left\| \varphi_j(y) \left| T(y) - T(x_j) \right| \right\| < \varepsilon \varphi_j(y)$$

et donc

$$\begin{aligned} \|T(y) - y\| &\leq \sum_{j=1}^{p} \left\| \varphi_j(y) \left| T(y) - T(x_j) \right| \right\|, \\ &\leq \sum_{j=1}^{p} \varepsilon \varphi_j(y) \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Donc, pour tout entier m, on peut trouver un point $y_m \subset K^*$ tel que :

$$\| T(y_m) - y_m \| < 2^{-m}.$$

Et puisque K est compact, de la suite $\{y_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ on peut extraire une sous-suite (y_{m_k}) qui converge vers un point $y^* \subset K$. Alors T étant continue, la suite $(T(y_{m_k}))$ converge vers $T(y^*)$, et on conclut que $T(y^*) = y^*$, (i.e. y^* est un point fixe de T sur K).

1.6 Théorème du point fixe de Krasnoselskii (1955)

Nous donnons un théorème d'existence du point fixe concernant les applications de la forme $T = U + C$, où C est continue et compacte et U une contraction (voir [14], [19], [21]).

Théorème 1.8 : *Soit X un espace de Banach et D un ensemble non vide de X fermé borné et convexe.*

U, C deux applications de D dans X telles que :

U est une contraction (de constante k) et C est compact et continue.

$$Ux + Cy \in D,\ \forall x, y \in D$$

Alors il existe $x \in D$ tel que $Ux + Cy = x$.

Preuve :

Soit y fixé dans D, comme U est une contraction, l'équation $x = Ux + Cy$ admet une solution unique x dans D.

On définit l'application :

$$L : D \to D$$

$$y \to Ly = x$$

telle que :

$$Ly = ULy + Cy \tag{1.3}$$

On a $LD \subset D$.

On montre que L est compacte et continue et d'après le théorème de Schauder, on pourra, conclure qu'il existe $y \in D$ tel que $Ly = y$, d'où $Uy + Cy = y$.

Soit y_n un point arbitraire de D, alors de (1.3) :

$$\begin{aligned} Ly_n &= ULy_n + Cy_n \\ Ly - Ly_n &= ULy - ULy_n + Cy - Cy_n \end{aligned}$$

$$\|Ly - Ly_n\| \leq \|ULy - ULy_n\| + \|Cy - Cy_n\|$$

et puisque U est une contraction on a :

$$\|Ly - Ly_n\| \leq k \|Ly - Ly_n\| + \|Cy - Cy_n\|$$

$$\leq \frac{1}{1-k} \|Cy - Cy_n\| \tag{1.4}$$

d'où la continuité de L.

Il reste à montrer LD qu'est relativement compact.

En effet, comme CD est relativement compact,

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists (1-k)\ \varepsilon$ -réseau $Cy_1 ... Cy_n$ c'est-à-dire les boules $B(Cy_n, (1-k)\varepsilon)$ telles que :

$$CD \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(Cy_n, (1-k)\varepsilon).$$

Alors de (1.4), Ly_1 ....Ly_n est un ε -réseau de LD.

1.7 Comparaison entres quelques théorèmes du point fixe (Banach, Brouwer, Schauder et Krasnoselskii)

Le théorème de point fixe est un résultat qui permet d'affirmer qu'une fonction f admet sous certaines conditions un point fixe, ces théorèmes révèlent être des outils trés importantes en mathématiques, principalement dans le domaine de la résolution des équations différentielle. Le théorèmes du point fixe de **Banach** s'appuie sur le fait que la fonction étudiée soit contractante d'un espace métrique complet à valeur dans lui-même et ces itérations tendent vers le point fixe.

Très différent, le théorème du point fixe de **Brouwer** garantit l'existence d'un point fixe d'une fonction continue définie de la boule unité fermée euclidienne sur elle même et le théorème du point fixe de **Schauder** prolonge le résultat du théorème de Brouwer pour montrer l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach.

Mais le théorème de **Krasnoselskii** a joint les deux résultats de Banach et Schauder afin d'entirer son théorème qui affirme sous certaines conditions sur l'espace de Banach, l'application de la forme : $Ux+Cx$; Ou U est contractante et C compact admet un point fixe.

Chapitre 2

Généralisation du théorème de Banach

2.1 Cas d'une seule fonction

2.1.1 Théorème du point fixe de Kannan

Dans le théorème de Banach $(0 \leq k < 1)$ est une constante, T admet un point fixe unique. Noter que n'importe quelle contraction est continue sur X.

Définition 2.1 *: Soient (X, d) un espace métrique, et $T : X \to X$. On dit que T est une application de Kannan s'il existe un nombre réel $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$, tel que pour tout x, $y \in X$, on a :*

$$d(T(x), T(y)) \leq k[d(x, T(x)) + d(y, T(y))] \tag{2.1}$$

Remarque 2.1 : Les conditions de contraction et le condition (2.1) sont indépendantes.

Théorème 2.1 (*Kannan 1968*) **:** *Soit (X, d) un espace métrique complet, et $T : X \to X$ une application de Kannan.*

Alors T admet un point fixe unique dans X, i.e.$\exists! u \in X$ tel que $T(u) = u$. On outre *ce point peut-être obtenue comme limite de toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définit par l'itération :*

$$x_{n+1} = T(x_n) = T^n(x),\ n \in \mathbb{N},\ \textit{avec } x_0 \textit{ élément arbitraire de } X.$$

Preuve : Soient x_0 un point arbitraire de X, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite engendrée par l'itération ci-dessus. Alors, la condition (2.1) donne :

$$\begin{aligned} d(x_1, x_2) &= d(T(x_0), T(x_1)), \\ &\leq k\left[d(x_0, T(x_0)) + d(x_1, T(x_1))\right], \\ &\leq kd(x_0, T(x_0)) + kd(x_1, x_2). \\ &\leq \frac{k}{1-k} d(x_0, T(x_0)) \end{aligned}$$

Donc :

$$d(x_1, x_2) = \frac{k}{1-k} d(x_0, x_1)$$

et de la même façon, on a :

$$\begin{aligned} d(x_2, x_3) &= d(T(x_1), T(x_2)), \\ &\leq k\left[d(x_1, T(x_1)) + d(x_2, T(x_2))\right] = \\ &\leq kd(x_1, T(x_1) + kd(x_2, x_3). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} d(x_2, x_3) &\leq \frac{k}{1-k} d(x_1, x_2), \\ &\leq \left(\frac{k}{1-k}\right)^2 d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Ainsi, pour n quelconque on aura :

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(T^{n-1}(x), T^n(x)) \leq \left(\frac{k}{1-k}\right)^n d(x_0, x_1) \tag{2.2}$$

En appliquant l'inégalité triangulaire on obtient pour des entiers arbitraires $n, p \in \mathbb{N}^*$:

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + ... + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}).$$

posons $\dfrac{k}{1-k} = \alpha < 1$, $\forall k \in [0, \ \frac{1}{2}[$, on utilisant l'inégalité (2,2), on trouve :

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq \left(\alpha^n + \alpha^{n+1} + ... + \alpha^{n+p-1}\right) d\left(x_0, x_1\right) \\ &\leq \alpha^n \left(1 + \alpha + ... + \alpha^{p-1}\right) d\left(x_0, x_1\right) \\ &= \frac{\alpha^n (1-\alpha^p)}{1-\alpha} d(x_0, x_1) \\ &< \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, x_1) \to 0, \ si\ n \to \infty. \end{aligned}$$

par conséquent $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, et comme (X, d) est complet, elle converge vers une limite $u \in X$, c'est à dire $\lim\limits_{n\to\infty} T^n(x) = u$. On va montrer maintenant que $Tu = u$, comme $\lim\limits_{n\to\infty} T^n x = u$, alors on a :

$$\begin{aligned} d(u, Tu) &\leq d(u, T^n x) + d(TT^{n-1}x, Tu), \\ &\leq d(u, T^n x) + k\left[d(T^{n-1}x, T^n x) + d(u, Tu)\right]. \end{aligned}$$

D'où

$$(1-k) d(u, Tu) \leq d(u, T^n x) + k d(T^{n-1}x, T^n x).$$

Ce qui implique, on utilisant l'inégalité (2.2)

$$\begin{aligned} d(u, Tu) &\leq \frac{1}{1-k} d(u, T^n x) + \frac{k}{1-k} d(T^{n-1}x, T^n x), \\ &\leq \frac{1}{1-k} d(u, T^n x) + \left(\frac{k}{1-k}\right)^n d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Quand n tend vers ∞ nous avons :

$$0 \leq d(u, Tu) \leq 0.$$

Qui donne $Tu = u$. Pour prouver l'unicité, supposons que l'on a deux points fixes u, v différents. Donc :

$$\begin{aligned} 0 &< d(u,v) = d(Tu,Tv), \\ &\leq k\left[d(u,Tu) + d(v,Tv)\right], \\ &= 0. \end{aligned}$$

Avec $k \in [0, \frac{1}{2}[$ or ceci est absurde.

Exemple 2.1 : Soient $X = \mathbb{R}$, l'ensemble des nombres réels muni de la distance usuel et $T : X \to X$ définie par :

$$T(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \in \left]-\infty, 2\right] \\ -\frac{1}{2} & si\ x \in \left[2, +\infty\right[. \end{cases}$$

Alors T satisfait (2.1) avec $k = \frac{1}{5}$, T n'est pas continue.

Un des conditions les plus généraux de contraction obtenus de cette façon, concernant l'itération de Picard qui converge toujours au point fixe unique, a été donné par Ćirić.

2.1.2 Théorème du point fixe de Ćirić

Contraction généralisée :

Soient T une application défini sur un espace métrique (X,d) vers lui même, et $A \subset X$. On note par $\delta(A)$ le diamètre de A, défini par :

$$\delta(A) = \sup\left\{d(a,b) : a, b \in A\right\}.$$

Définition 2.2 : *Soit $f : X \to X$ une orbite de T à x_0 est un suite définit par :*

$$\left\{x_n : x_n \in T(x_{n-1}),\ n = 1, 2,\ ...\right\}.$$

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(x;n) &= \{x, T(x), ..., T^n(x)\}\,,\ n = 1, 2, ...\\ \mathcal{O}(x;\infty) &= \{x, T(x), ..., T^n(x), ...\}\,.\end{aligned}$$

Définition 2.3 : *On dit que $T : X \to X$ est une contraction généralisée, s'il existe des nombres positifs q, s, r et t indépendantes de x et y, tel que $q + s + r + 2t = \lambda < 1$ et :*

$$d(T(x), T(y)) \leq qd(x, y) + rd(x, T(x)) + sd(y, T(y)) + t[d(x, T(y)) + d(y, T(x))]. \quad (2.3)$$

$\Rightarrow$ *Si T satisfait la condition de contraction, alors T satisfait également la condition (2.3) pour chaque nombres positifs q, s, r et t, tels que :*

$$0 \leq r + s + 2t < 1 - q - c;\ (0 < c \leq 1 - q)\,.$$

$\Rightarrow$ *Si T satisfait la condition (2.1), alors T satisfait également la condition (2.3) pour chaque nombre non négatif q tel que $0 \leq q < 1 - 2k - c$ $(0 < c \leq 1 - 2k\ /\ k \in \mathbb{R}^+)$.*

Maintenant nous donnons un exemple qui prouve qu'il existe des applications qui ne satisfont pas la condition de contraction ou (2.1), mais satisfont la condition (2.3).

Exemple 2.2 : Soient $(X, |.|)$ un espace métrique, $X = [0, 2] \subset \mathbb{R}$, et T défini par :

$$T(x) = \begin{cases} \frac{x}{9}\ si\ 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{x}{10}\ si\ 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

L'application T n'est pas contractante sur X, par exemple, si $x = \frac{999}{1000}$, $y = \frac{1001}{1000}$, alors :

$$d(T(x), T(y)) = \frac{981}{90000} > 5 \times \frac{180}{90000} = 5d(x, y).$$

Mais T satisfait (2.3) avec $q = \frac{1}{10}$, $r = s = \frac{1}{4}$, $t = \frac{1}{6}$, pour tous x, $y \in X$.

Exemple 2.3 : Soient $(X, ||)$ un espace métrique, $X = [0, 10] \subset \mathbb{R}$, et T défini par,

$$Tx = \frac{3}{4}x \text{ pour tout } x \in X$$

Par exemple si $x = 0$ et $y = 8$, alors $d(T(x), T(y)) = 6 > 2k = kd(x, y)$ T n'est pas application de Kannan pour $k < 3$.

Mais T satisfait (2.3) sur X avec $q = \frac{3}{4}$, $r = s = t = \frac{1}{20}$, pour tous $x,\ y \in X$.

Théorème 2.2 *: Soit T une contraction généralisée d'un espace métrique complet X dans lui-même, alors :*

(i) T admet un point fixe unique $u \in X$.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} T^n(x) = u$.

(iii) $d(T^n(x), u) \leq \dfrac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x, T(x))$, pour tout $x \in X$.

Preuve : (i) Soit x un point arbitraire de X, On définit la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$x_0 = x,\ x_1 = T(x_0),\ ...,\ x_n = T(x_{n-1}) = T^n(x),\ ...$$

Comme T est contraction généralisée on a :

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_{n+1}) &= d(T(x_{n-1}), T(x_n)) \\
&\leq qd(x_{n-1}, T(x_{n-1})) + rd(x_{n-1}, T(x_{n-1})) \\
&\quad + sd(x_n, T(x_n)) + t[d(x_{n-1}, T(x_n)) + d(x_n, T(x_{n-1}))] \\
&= qd(x_{n-1}, x_n) + rd(x_{n-1}, x_n) + sd(x_n, x_{n+1}) + td(x_{n-1}, x_{n+1}).
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité triangulaire on trouve :

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq (q+r)\, d(x_{n-1}, x_n) + sd(x_n, x_{n+1}) + t(d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})).$$

Par conséquent :

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{(q+r+t)}{1-(s+t)} d(x_{n-1}, x_n). \tag{2.4}$$

Comme $\lambda < 1$, alors :

$$q + r + t + \lambda s + \lambda t \leq \lambda,$$

nous avons cela

$$\frac{q + r + t}{1 - (s + t)} \leq \lambda.$$

Pour tout $x,\ y \in X$, et ainsi l'inégalité (2.4) on obtient :

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda d(x_{n-1}, x_n). \tag{2.5}$$

Donc

$$d\left(x_n, x_{n+1}\right) \leq \lambda d\left(x_{n-1}, x_n\right) \leq ... \leq \lambda^n d\left(x_0,\ x_1\right).$$

En application l'inégalité triangulaire on a pour tout $n,\ p \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + ... + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}), \\ &\leq \sum_{i=1}^{p} d(x_{n+i-1}, x_{n+i}), \\ &\leq \sum_{i=1}^{p} \lambda^{n+i-1} d\left(x_0, x_1\right). \end{aligned}$$

Par conséquent

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{\lambda^n(1 - \lambda^p)}{1 - \lambda} d(x_0, x_1) < \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} d(x_0, x_1). \tag{2.6}$$

D'où $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, et comme (X, d) est complet, elle converge vers une limite $u \in X$, c'est à dire :

$$\lim_{n\to\infty} T^n(x) = \lim_{n\to\infty} x_n = u. \tag{2.7}$$

Maintenant nous montrons que u est un point fixe de T, c'est à dire :

$$T(u) = \lim_{n\to\infty} T^n(x) = \lim_{n\to\infty} x_n = u. \tag{2.8}$$

Puisque T est une contraction généralisée, la condition (2.3) plus l'inégalité triangulaire donne :

$$\begin{aligned}
d(Tu, T(x_n)) &\leq qd(u, x_n) + r[d(u, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, T(u))] \\
&\quad + sd(x_n + x_{n+1}) + t[d(u, T(x_n)) + d(x_n, T(u))], \\
&\leq \lambda d(u, x_n) + (r+t)d(u, x_{n+1}) + rd(x_{n+1}, T(u)) \\
&\quad + sd(x_n, x_{n+1}) + t[d(T(u), T(x_n)) + d(T(x_n), x_n)], \\
&\leq \lambda d(u, x_n) + \lambda d(u, x_{n+1}) + (r+t)d(u, x_{n+1}) + \lambda d(x_n, x_{n+1}), \\
&\leq \lambda[d(u, x_n) + d(u, x_{n+1}) + d(x_n + x_{n+1})] + \lambda d(T(u), T(x_n)).
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$d\left(T(u), T(x_n)\right) \leq \frac{\lambda}{1-\lambda}\left[d\left(u, x_n\right) + d\left(u, x_{n+1}\right) + d\left(x_n + x_{n+1}\right)\right]. \tag{2.9}$$

D'après (2.7) et (2.9) on obtient (2.8).

Montrons enfin que u est unique, supposons que v est un autre point fixe de T. Alors d'après la condition (2.3), on trouve :

$$\begin{aligned}
d\left(u, v\right) &= d\left(Tu, Tv\right), \\
&\leq qd\left(u, v\right) + rd\left(u, Tu\right) + sd\left(v, Tv\right) + t\left[d\left(u, Tv\right) + d\left(v, Tv\right)\right], \\
&\leq \lambda d\left(u, v\right).
\end{aligned}$$

avec $\lambda \in [0, 1[$, or ceci est absurde. Puisque x est arbitraire, de (2.7) il suit que (ii) est prouvé.

Passant à la limite $(p \to \infty)$ dans (2.6) nous obtenons la relation (iii).

Quasi-contraction

Définition 2.4 : *Soit T une application d'un espace métrique (X, d) dans lui-même. T est dite quasi-contraction s'il existe un nombre réel $q \in [0, 1[$, tel que pour tout $x, y \in X$, on a :*

$$d(T(x), T(y)) \leq q \max\{d(x, y), d(x, T(x)), d(y, T(y)), d(x, T(y)), d(y, T(x))\} \tag{2.10}$$

Remarque 2.2 : Il est clair que (2.1) implique (2.3). L'exemple suivant prouve qu'une quasi-contraction n'a pas une contraction généralisée.

Exemple 2.4 : *Soient :*

$$X_1 = \{m/n, m = 0, 1, 3, 9, \ \ldots; \ n = 1, 4, \ \ldots, \ 3k+1, \ \ldots\}$$

$$X_2 = \{m/n, m = 1, 3, 9, 27, \ \ldots; \ n = 2, 5, \ \ldots, \ 3k+2, \ \ldots\}$$

et $X = X_1 \cup X_2$, est un espace métrique muni de la distance usuel, on défini $T : X \to X$, par :

$$Tx = \begin{cases} \frac{3x}{5}, \ si \ x \in X_1, \\ \frac{x}{8}, \ si \ x \in X_2. \end{cases}$$

L'application T est un quasi-contraction avec $q = \frac{3}{5}$. En effet si x et y dans X_1 ou X_2, alors : $d(Tx, Ty) = \begin{cases} |\frac{3x}{5} - \frac{3y}{5}| = \frac{3}{5}|x-y| \ si \ x, y \in X_1 \\ |\frac{x}{8} - \frac{y}{8}| = \frac{1}{8}|x-y| \leq \frac{3}{5}|x-y| \ si \ x, y \in X_2 \end{cases}$

Donc, $d(Tx, Ty) \leq \frac{3}{5}d(x, y)$ pour tout $x, \ y \in X$.

Soient maintenant $x \in X_1$ et $y \in X_2$, alors :

si $x > \frac{5}{24}y \Rightarrow d(Tx, \ Ty) = |\frac{3x}{5} - \frac{y}{8}| = \frac{3}{5}\left|x - \frac{5}{24}y\right| \leq \frac{3}{5}\left|x - \frac{1}{8}y\right| = \frac{3}{5}\left|dx, Ty\right|$,

si $x < \frac{5}{24}y \Rightarrow d\left|Tx, Ty\right| = |\frac{3x}{5} - \frac{y}{8}| = \frac{3}{5}\left|\frac{5}{24}y - x\right| \leq \frac{3}{5}\left|y - x\right| = \frac{3}{5}d(x, y)$.

Par conséquent, T sur X satisfait la condition

$$d(Tx, Ty) \leq \frac{3}{5}\max\{d(x, y), d(x, Ty), d(y, Tx)\}.$$

d'où (2.3). Pour prouver que T n'est pas une contraction généralisée sur X, posons $x = 1$ et $y = \frac{1}{2}$, alors on trouve :

$$qd(x,y) + rd(x,Tx) + sd(y,Ty) + t[d(x,Ty), d(y,Tx)] = q\tfrac{1}{2} + r\tfrac{2}{5} + s\tfrac{7}{16} + t\tfrac{83}{80}$$

$$\begin{aligned} &< (q+r+s+2t)\frac{83}{160} \\ &< \frac{83}{160} < \frac{43}{160} = d(Tx, Ty). \end{aligned}$$

Puisque $q+r+s+2t < 1$. Donc la condition de contraction généralisée n'est pas satisfaite.

Théorème 2.3 (*Ćirić 1974*) **:** *Soit T une quasi-contraction d'un espace métrique complet (X, d) dans lui-même. Alors :*

(a) T Admet un unique point fixe $u \in X$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} T^n(x) = u$.

(c) $d(T^n(x), u) \leq \left(\frac{q^n}{1-q}\right) d(x, T(x))$, pour tout $x \in X$.

Preuve : (voir [7]).

Théorème 2.4 : *Soit T une application d'un espace métrique complet (X, d) dans lui-même. Si là existe un entier positif k tel que l'itération $\{T^k(x)\}$ est quasi-contraction, alors :*

(a') T admet un point fixe unique $u \in X$,

(b') $\lim\limits_{n\to\infty} T^n(x) = u$,

(c') $d(T^n(x), u) \leq \left(\frac{q^m a(x)}{1-q}\right)$, pour tout $x \in X$.

Avec $a(x) = \max\{d(T^i(x), T^{i+k}(x)),\ i = 0, 1, 2, ..., k-1\}$, et $m = E\left(\frac{n}{k}\right)$ est le plus grand nombre entier n'excédant pas $\dfrac{n}{k}$.

Preuve : Supposons qu'il existe un entier positif k tel que l'itération T^k est une quasi-contraction, alors d'après le théorème 2.3. $T^k(x)$ Admet un point fixe unique $u \in X$, donc :

$$T^k(Tu) = T\left(T^k(u)\right) = T(u).$$

Par l'unicité on a $T(u) = u$, c'est à dire que u est un point fixe pour T.

Pour démontrer l'unicité de point fixe de T, supposons que v est un autre point fixe.

Alors :

$$v = T(v) = T(T(v)) = ... = T^k(v).$$

Donc v est aussi un point fixe pour T^k. Ainsi $u = v$.

Pour montrer (c'), soit n un entier tel que $n = mk + j$, $0 \leq j \leq k$, $m \geq 0$, et pour tout $x \in X$,

$$T^n(x) = \left(T^k\right)^m T^j(x).$$

Puisque T^k est quasi-contraction, d'après l'inégalité (c) de Théorème 2.3 on obtient ;

$$\begin{aligned} d(T^n(x), u) &= d(\left(T^k\right)^m T^j(x), u) \leq \frac{q^m}{1-q} d(T^j(x), T^k T^j(x)), \\ &\leq \frac{q^m}{1-q} \max\left\{d(T^i(x),\ T^{i+k}(x)),\ i = 0, 1, 2, ..., k-1\right\}. \end{aligned}$$

Ce qui prouve (c'), et d'où (b').

2.2 Cas de plusieurs fonctions

Dans cette section nous énonçons et prouvons des théorèmes généraux de point fixe commun pour des applications satisfaisant quelques conditions et états (généralisés des types quasi-contraction et contraction généralisée,.....).

Soient X un espace métrique complet, f une application continue sur X et S une application sur X tels que,

$$S(X) \subset T(X). \tag{2.11}$$

Nous définissons une suite des points $\{x_n\}$ comme suit. Pour $x_0 \in X$ arbitraire, comme $S(X) \subset T(X)$ nous pouvons choisir un point x_1 dans X tel que $S(x_0) = T(x_1)$. En général pour le point $x_n \in X$ nous pouvons prendre le point $x_{n+1} \in X$, tel que $S(x_n) = T(x_{n+1})$. Posons que

$$S(x_n) = T(x_{n+1}) = y_n \ (n = 0, 1, 2, ...). \tag{2.12}$$

Notons par $\mathcal{O}(y_k; n)$ l'ensemble des points $\{y_k, y_{k+1}, ..., y_{k+n}\}$.

Maintenant on suppose que T et S satisfont la condition suivante :

Il existe une constante $q \in (0,1)$ tels que pour chaque $x, y \in X$:

$$d(S(x), S(y)) \leq q \max\{d(T(x), T(y)), d(T(x), S(x)), d(T(y), S(y)), d(T(x), S(y)), d(T(y), S(x))\} \tag{2.13}$$

Lemme 2.1 : *Pour tout $k \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$, supposent $\delta[\mathcal{O}(y_k; n)] \geq 0$, alors :*

$$\delta[\mathcal{O}(y_k; n)] = d(y_k, y_j)$$

Tel que $k < j \leq k + n$. En outre :

$$\delta[\mathcal{O}(y_k; n)] \leq q\delta[\mathcal{O}(y_{k-1}; n+1)], \quad (k \geq 1) \tag{2.14}$$

Lemme 2.2 : *Sous les hypothèses du lemme 2.3 :*

$$\delta[\mathcal{O}(y_k; n)] \leq \frac{q^k}{1-q} d(y_0, y_1). \tag{2.15}$$

Théorème 2.5 : *Soient (X, d) un espace métrique complet, et S, $T : X \to X$ deux applications faiblement compatibles, satisfaits les conditions (2.12) et (2.14) Alors S, T admettent un point fixe commun unique.*

Preuve : Nous remarquons d'abord qu'il est suffisant de prenant un point y tels que $T(y) = S(y)$, alors :

$$\begin{aligned} d(S(Sy), S(y)) &\leq q \max\{d(T(Sy), T(y)), d(T(Sy), S(Sy)), d(T(y), S(y)), \\ &\quad , d(T(Sy), S(y)), d(T(y), S(Sy))\}, \\ &= qd(S(Sy), S(y)). \end{aligned}$$

Par conséquent Sy est un point fixe de S. Comme S et T sont *faiblement compatibles*, on obtient :

$$T(Sy) = S(Ty) = S(Sy) = S(y).$$

Donc Sy est un point fixe de T. D'après (2.11), on définit la suite des points $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ par (2.12). Si $\delta\left[\mathcal{O}\left(y_k;n\right)\right] = 0$, pour un certains n et k, alors $y_k = y_{k+1}$. C'est à dire, $T(x_{k+1}) = S(x_{k+1})$. Autrement, si $\delta\left[\mathcal{O}\left(y_k;n\right)\right] > 0$, d'après (2.15) et pour $\varepsilon > 0$, on peut prennent $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$q^{n_0} d\left(y_0, y_1\right) < (1-q)\,\varepsilon,$$

avec $m > n \geq n_0$;

$$d(y_m, y_n) \leq \delta\left[\mathcal{O}\left(y_{n_0}; m - n_0\right)\right] < \varepsilon.$$

Ce qui montre que $\{y_n\}_n$ est une suite de Cauchy, et comme X est complet, elle converge vers une limite $y \in X$, c'est à dire :

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} S(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_{n+1}) = y. \tag{2.16}$$

Comme $S(X) \subseteq f(X)$, il existe un point $u \in X$ tel que $y = T(u)$. D'après (2.13) on obtient :

$$\begin{aligned} d(S(u), y) &\leq d(S(u), S(x_{n+1})) + d(S(x_{n+1}), y), \\ &\leq q \max\{d(T(u), T(x_{n+1})), d(T(x_{n+1}), S(x_n)), \\ &\qquad d(T(u), S(u)), d(T(x_{n+1}), S(u)), d(T(u), S(x_{n+1}))\} + d(S(x_{n+1}), y). \end{aligned}$$

Quand $n \to \infty$ nous avons :

$$d(S(u), y) \leq q d(S(u), y),$$

d'où $T(u) = S(u) = y$. Comme S et T sont *faiblement compatibles*, on obtient :

$$T(Su) = S(Ty) = S(Su) = S(u) = y.$$

Donc Su est un point fixe commun de S et T.

L'unicité du point fixe commun est immédiate de (2.13). Supposons que l'on a deux points fixes $y,\ y^*$ différents tels que :

$$\begin{aligned} d(S(y), S(y^*)) &\leq q \max\{d(T(y), T(y^*)), d(T(y), S(y)), d(T(y^*), S(y^*)), \\ &\quad d(T(y), S(y^*)), d(T(y^*), S(y))\}, \\ &= qd(T(y), T(y^*)) = qd(S(y), S(y^*)). \end{aligned}$$

Ce qui implique :

$$(1-q)\, d(S(y), S(y^*)) \leq 0.$$

Ce qui est une contradiction. Donc $y = y^*$.

2.2.1 Contraction généralisée pour plusieurs fonctions

Le résultat de cette section est donné par un théorème de point fixe commun pour deux paires d'applications faiblement compatibles dans les espaces métriques complets.

Théorème 2.6 : *Soient $f,\ S,\ g$ et T des applications d'un espace métrique complet (X, d) dans lui-même, tels que :*

(a) $f(X) \subset T(X),\ g(X) \subset S(X)$.

(b) Pour tout $x,\ y \in X$, les applications $f,\ g,\ S$ et T vérifient la condition suivante :

$$d(fx, gy) \leq qd(Sx, Ty) + rd(fx, Sx) + sd(gy, Ty) + t\,[d(fx, Ty) + d(gy, Sx)]. \quad (2.17)$$

Où $q,\ r,\ s,\ t \in [0, 1[$ tels que $q + r + s + 2t = \lambda < 1$.

Si un sous-espace $T(X)$ ou $S(X)$ est fermé dans X. Alors $\{f, S\}$ et $\{g, T\}$ admettent un unique point coïncidence dans X, de plus si $\{f, S\}$ et $\{g, T\}$ sont faiblement compatible, alors $f,\ S,\ g$ et T admet un point fixe commun et unique dans X.

2.2.2 Quasi-contraction pour plusieurs fonctions

Le résultat de cette section est un théorème de point fixe commun pour deux paires de applications faiblement compatibles dans les espaces métriques complets en utilisant un module contractive.

Définition 2.5 : *Une fonction ϕ est dit un module contractive si, $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ et $\phi(t) < t$ pour tout $t > 0$.*

Définition 2.6 : *On dit que une fonction ϕ de valeurs réels défini sur $X \subseteq \mathbb{R}$ est semi-continue supérieur si, $\lim\limits_{n\to\infty} \sup \phi(t_n) \leq \phi(t)$ pour chaque suite $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, avec $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t$.*

Il est clair que chaque fonction continue est aussi semi-continue supérieur mais l'inverse ne peut pas vrais.

Théorème 2.7 : *Soient f, g, S et T sont des applications d'un espace métrique complet (X, d) dans lui-même, satisfaisant les conditions suivantes :*

(1) *$T(X) \subseteq f(X)$ et $S(X) \subseteq g(X)$.*

(2) *$d(Sx, Ty) \leq \phi(\lambda(x, y))$, tel que ϕ est un module contractive semi-continu supérieur, avec :*

$$\lambda(x,y) = \max\left\{d(fx, gy), d(fx, Sx), d(gy, Ty), \frac{1}{2}(d(fx, Ty) + d(gy, Sx))\right\}.$$

(3) *Les paires (S, f) et (T, g) sont faiblement compatibles. Alors f, g, S et T admettent un point fixe commun et unique dans X.*

Chapitre 3

Théorèmes du point fixe commun dans l'espaces b-métrique généralisé

3.1 Définitions de base

Définition 3.1 :*Soit X un ensemble non vide et $s \geq 1$ un nombre réel donné. On appelle b-distance à valeur vectoriel sur X la fonction d de $X \times X$ dans $\mathbb{R}_+$ (resp $\mathbb{R}_+^n$) telle que, pour x, y, $z \in X$ toutes les conditions suivantes sont satisfaites :*

$1 : d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$

$2 : d(x,y) = d(y,x),$

$3 : d(x,z) \leq s[d(x,y) + d(y,z)].$

Une paire (X,d) s'appelle un espace b-métrique (resp un espace b-métrique généralisé).

La classe des espaces b-métriques est plus grande que la classe des espaces métriques, car un espace b-métrique est un espace métrique lorsque $s = 1$ dans la troisième hypothèse de la définition ci-dessus. Notez qu'un espace métrique est évidemment un espace b-métrique. Cependant, Czerwik [9] a montré qu'une b-métrique sur X n'a pas besoin d'être une métrique sur X.

Exemple 3.1 : Soit $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ et $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ tel que $d(x_1, x_2) = a \geq 2$,

$d(x_1, x_3) = d(x_2, x_3) = 1,\ d(x_n, x_n)$ et $d(x_n, x_k) = d(x_k, x_n)$, pour $n, k = 1, 2, 3$.

Puis

$$d(x_n, x_k) \leq \frac{a}{2}\left[d(x_n, x_i) + d(x_i, x_k)\right],\ pour\ n, k, i = 1, 2, 3.$$

Alors (X, d) est un espace b-métrique. pour $a > 2$ l'inégalité du triangle ordinaire ne tient pas et (X, d) n'est pas un espace métrique.

Exemple 3.2 : Soit (X, d) un espace métrique et $\rho(x, y) = [d(x, y)]^p$, pour $p > 1$ est un nombre réel. nous montrons que ρ est b-métrique pour $s = 2^{p-1}$.

Il est clair que les conditions (1) et (2) de définition 3.1 sont satisfaites. pour $1 < p < \infty$, d'apré la convexité de la fonction $f(x) = x^p$ on obtient :

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^p \leq \frac{1}{2}\left(a^p + b^p\right).$$

Ainsi, $(a+b)^p \leq 2^{p-1}\left(a^p + b^p\right)$ est vérifié.

Efin, pour tous $x,\ y,\ z \in X$ nous avons :

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= [d(x, y)]^p \\ &\leq [d(x, z) + d(z, y)]^p \\ &\leq 2^{p-1}\left[d(x, z)^p + d(z, y)^p\right] \\ &= 2^{p-1}\left[\rho(x, z) + \rho(z, y)\right]. \end{aligned}$$

Remarques 3.1 :

1) Si $n = 1$ dans la définition précédente, on obtient le concept de b-métrique présenté par Bakhtin. De plus, si on considère $s = 1$ on obtient la définition de l'espace métrique généralisé.

2) Si $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}^n$ avec $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ et $c \in \mathbb{R}$ alors par $\alpha \leq \beta$ (respectivement $\alpha < \beta$), cela veut dire que $\alpha_i \leq \beta_i$ (respectivement $\alpha_i < \beta_i$), pour tous $i = \overline{1, n}$ et par $\alpha \leq c$ cela veut dire que $\alpha_i \leq c$, pour tous $i = \overline{1, n}$.

Notons que dans un espace b-métrique généralisé les notions de suite convergente, suite de Cauchy, complet, la compacité, sous-ensemble ouvert et fermé sont similaires à ceux pour les espaces métriques habituelles mais en général la b-distance généralisé n'est pas continue, par exemple, on peut voir [12].

Dans tout le reste de cette mémoire, on désigne par $M_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ l'ensemble de tous les matrices $n \times n$ avec des éléments positifs, par Θ la matrice nulle et par I la matrice identité. Notons également que pour la simplicité, on fait une identification entre les lignes et les colonnes dans $\mathbb{R}^n$.

Définition 3.2 : [23] *Une matrice $C \in M_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ converge vers zéro si et seulement si :*

$$C^n \to \Theta, \quad \text{quant } n \to \infty.$$

Pour la preuve des résultats principales, on a besoin du théorème suivant qui est un résultat classique dans l'analyse des matrices, voir ([16], [18]). Pour d'autres exemples et considérations sur les matrices qui convergent vers zéro, (voir [22]).

Théorème 3.1 :[16] *Soit $C \in M_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$, les relations suivantes sont équivalentes :*

i) *C est une matrice qui converge vers zéro.*

ii) *La matrice $(I - C)$ est inversible et :*

$$(I-C)^{-1} = I + C + C^2 + \ldots + C^n + \ldots,$$

iii) *La matrice $(I - C)$ est inversible et $(I - C)^{-1}$ a des éléments non négatifs.*

Les résultats suivants sont utiles pour certaines démonstrations dans ce chapitre.

Exemple 3.3 : Quelques exemples de matrice convergente vers zéro :

(a) : toute matrice $\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}$, pour $a, b \in \mathbb{R}_+$ et $a + b < 1$;

(b) : toute matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$,pour $a, b \in \mathbb{R}_+$ et $a + b < 1$;

(c) : toute matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, pour $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ et $\max\{a, c\} < 1$.

$d(x_1, x_3) = d(x_2, x_3) = 1$, $d(x_n, x_n) = 0$ et $d(x_n, x_k) = d(x_k, x_n)$, pour $n, k = 1, 2, 3$.

Puis

$$d(x_n, x_k) \leq \frac{a}{2}\left[d(x_n, x_i) + d(x_i, x_k)\right], \ pour\ n, k, i = 1, 2, 3.$$

Alors (X, d) est un espace b-métrique. pour $a > 2$ l'inégalité du triangle ordinaire ne tient pas et (X, d) n'est pas un espace métrique.

Exemple 3.2 : Soit (X, d) un espace métrique et $\rho(x, y) = [d(x, y)]^p$, pour $p > 1$ est un nombre réel. nous montrons que ρ est b-métrique pour $s = 2^{p-1}$.

Il est clair que les conditions (1) et (2) de définition 3.1 sont satisfaites. pour $1 < p < \infty$, d'apré la convexité de la fonction $f(x) = x^p$ on obtient :

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^p \leq \frac{1}{2}\left(a^p + b^p\right).$$

Ainsi, $(a+b)^p \leq 2^{p-1}\left(a^p + b^p\right)$ est vérifié.

Efin, pour tous $x,\ y,\ z \in X$ nous avons :

$$\begin{aligned}
\rho(x, y) &= [d(x, y)]^p \\
&\leq [d(x, z) + d(z, y)]^p \\
&\leq 2^{p-1}\left[d(x, z)^p + d(z, y)^p\right] \\
&= 2^{p-1}\left[\rho(x, z) + \rho(z, y)\right].
\end{aligned}$$

Remarques 3.1 :

1) Si $n = 1$ dans la définition précédente, on obtient le concept de b-métrique présenté par Bakhtin. De plus, si on considère $s = 1$ on obtient la définition de l'espace métrique généralisé.

2) Si $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}^n$ avec $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ et $c \in \mathbb{R}$ alors par $\alpha \leq \beta$ (respectivement $\alpha < \beta$), cela veut dire que $\alpha_i \leq \beta_i$ (respectivement $\alpha_i < \beta_i$), pour tous $i = \overline{1, n}$ et par $\alpha \leq c$ cela veut dire que $\alpha_i \leq c$, pour tous $i = \overline{1, n}$.

Notons que dans un espace b-métrique généralisé les notions de suite convergente, l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_{n+p}) &\leq sd(x_n, x_{n+1}) + s^2 d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + s^{p-2} d(x_{n+p-3}, x_{n+p-2}) \\
&\quad + s^{p-1} d(x_{n+p-2}, x_{n+p-1}) + s^{p-1} d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\
&\leq sC^n d(x_0, x_1) + s^2 C^{n+1} d(x_0, x_1) + \cdots + s^{p-2} C^{n+p-3} d(x_0, x_1) \\
&\quad + s^{p-1} C^{n+p-2} d(x_0, x_1) + s^{p-1} C^{n+p-1} d(x_0, x_1) \\
&= sC^n d(x_0, x_1)[I + sC + \cdots + s^{p-2} C^{p-2} + s^{p-1} C^{p-1}] \\
&\leq sC^n d(x_0, x_1)[I + sC + \cdots + s^{p-2} C^{p-2} + s^{p-1} C^{p-1}] \\
&\leq sC^n d(x_0, x_1)(I - sC)^{-1} \\
&\leq (sC)^n d(x_0, x_1)(I - sC)^{-1}.
\end{aligned}$$

Notons que $(I - sC)$ est inversible puisque sC converge vers zéro. Cela implique que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

Dans le cas de l'espace b-métrique, le lemme précédent sera comme suit :

Lemme 3.3 : [20] *Soit (X, d) un espace b-métrique et $\{x_n\}$ une suite dans X, tels que :*

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq Cd(x_{n-1}, x_n),$$

où $0 < C \leq 1$. Alors la suite $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy dans X à condition que $sC < 1$

Pour le cas de l'espace métrique généralisé ou l'espace métrique, il suffit de remplacer s par 1 dans le lemme 3.1 et le lemme 3.2 respectivement.

Dans ce chapitre, on généralise et améliore le théorème suivant de M.Boriceanu [5].

Théorème 3.2 : *Soit (X, d) un espace b-métrique généralisé complet. Supposons que l'opérateur $f : X \to X$ satisfait les conditions suivantes :*

a) *f est continue.*

b) *il existe des matrices M, N, $P \in M_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ avec :*

i) $(I - N - Ps)$ est inversible et $(I - N - Ps)^{-1} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$;

ii) sC converge vers zéro, où $C = (I - N - Ps)^{-1}(M + N + Ps)$;

iii) $d(f(x), f(y)) \leq Md(x, y) + N[d(x, f(x)) + d(y, f(y))] + P[d(x, f(y)) + d(y, f(x))]$, pour tout $x,\ y \in X$

Alors :

1) *f a un point fixe x^* dans X.*

2) *Si de plus, $(I - M - 2P)$ est inversible et $(I - M - 2P)^{-1} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$, alors x^* est unique.*

3.2 Théorèmes des points fixes dans l'espace b-métrique généralisé :

Théorème 3.3 : *Soit (X, d) un espace b-métrique généralisé complet. Supposons que les opérateurs $f, g : X \to X$ satisfaisant les conditions suivantes :*

il existe des matrices $M,\ N,\ P \in M_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ avec :

i) *$(I - N - Ps)$ est inversible et $(I - N - Ps)^{-1} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$, $(I - sN - s^2P)$ est inversible et $(I - sN - s^2P)^{-1} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$;*

ii) *sC converge vers zéro, où $C = (I - N - Ps)^{-1}(M + N + Ps)$;*

iii) $d(f(x), g(y)) \leq Md(x, y) + N[d(x, f(x)) + d(y, g(y))] + P[d(x, g(y)) + d(y, f(x))]$, pour tout $x,\ y \in X$.

Alors :

1. *f et g ont un point fixe commun z dans X.*

2. *Si de plus, $(I - M - 2P)$ est inversible et $(I - M - 2P)^{-1} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$, alors z est unique.*

3. *Si $(I - s(M + P) - s^2P)$ est inversible et $(I - s(M + P) - s^2P)^{-1} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ alors le problème du point fixe (de f et g) est bien posé.*

Preuve :

1) Soit x_0 un point dans X, on considère $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'approximations successives pour f et g défini par :

$$\begin{aligned} x_{2n+1} &= f(x_{2n}), \qquad n = 0,\ 1,\ \ldots \\ x_{2n+2} &= g(x_{2n+1}), \quad n = 0,\ 1,\ \ldots \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} d(x_{2n}, x_{2n+1}) &= d(g(x_{2n-1}), f(x_{2n})) \\ &\leq Md(x_{2n-1}, x_{2n}) + N[d(x_{2n}, f(x_{2n})) + d(x_{2n-1}, g(x_{2n-1}))] \\ &\quad +P[d(x_{2n},\ g(x_{2n-1})) + d(x_{2n-1},\ f(x_{2n}))] \\ &= Md(x_{2n-1}, x_{2n}) + N[d(x_{2n}, x_{2n+1}) + d(x_{2n-1}, x_{2n})] + Pd(x_{2n-1}, x_{2n+1}) \\ &\leq Md(x_{2n-1}, x_{2n}) + N[d(x_{2n}, x_{2n+1}) + d(x_{2n-1}, x_{2n})] \\ &\quad +Ps[d(x_{2n-1}, x_{2n}) + d(x_{2n}, x_{2n+1})]. \end{aligned}$$

Cela implique que :

$$d(x_{2n}, x_{2n+1}) \leq (I - N - Ps)^{-1}(M + N + Ps)d(x_{2n-1}, x_{2n}) = Cd(x_{2n-1}, x_{2n}).$$

De même, on a :

$$\begin{aligned} d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) &= d(f(x_{2n}), g(x_{2n+1})) \\ &\leq Md(x_{2n}, x_{2n+1}) + N[d(x_{2n}, f(x_{2n})) + d(x_{2n+1}, g(x_{2n+1}))] \\ &\quad +P[d(x_{2n}, g(x_{2n+1})) + d(x_{2n+1}, f(x_{2n}))] \\ &= Md(x_{2n}, x_{2n+1}) + N[d(x_{2n}, x_{2n+1}) + d(x_{2n+1}, x_{2n+2})] + Pd(x_{2n}, x_{2n+2}) \\ &\leq Md(x_{2n}, x_{2n+1}) + N[d(x_{2n}, x_{2n+1}) + d(x_{2n+1}, x_{2n+2})] \\ &\quad +Ps[d(x_{2n}, x_{2n+1}) + d(x_{2n+1}, x_{2n+2})]. \end{aligned}$$

Donc :

$$d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \leq (I - N - Ps)^{-1}(M + N + Ps)d(x_{2n}, x_{2n+1}) = Cd(x_{2n}, x_{2n+1}).$$

Alors :

$$d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) = C^2 d(x_{2n-1},\ x_{2n}).$$

On obtient :

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq C^n d(x_0,\ x_1), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Pour monter que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, on estime $d(x_n, x_{n+1})$ en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_{n+p}) &\leq sd(x_n, x_{n+1}) + s^2 d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + s^{p-2} d(x_{n+p-3}, x_{n+p-2}) \\
&\quad + s^{p-1} d(x_{n+p-2}, x_{n+p-1}) + s^p d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\
&\leq sC^n d(x_0, x_1) + s^2 C^{n+1} d(x_0, x_1) + \cdots + s^{p-2} C^{n+p-3} d(x_0, x_1) \\
&\quad + s^{p-1} C^{n+p-2} d(x_0, x_1) + s^p C^{n+p-1} d(x_0, x_1) \\
&= sC^n [I + sC + \cdots + s^{p-2} C^{p-2} + s^{p-1} C^{p-1}] d(x_0, x_1) \\
&\leq sC^n [I + sC + \cdots + s^{p-2} C^{p-2} + s^{p-1} C^{p-1}] d(x_0, x_1) \\
&\leq sC^n (I - sC)^{-1} d(x_0, x_1) \\
&\leq (sC)^n (I - sC)^{-1} d(x_0, x_1).
\end{aligned}$$

Suivant les mêmes étapes du lemme 3.2, on obtient que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

On sait que (X, d) est complet donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans X. Ainsi, il existe $z \in X$ tels que $d(x_n,\ z) \to 0$, quand $n \to \infty$.

Maintenant on prouve que z est un point fixe de f, en estimant $d(f(z),z)$ on obtient :

$$\begin{aligned} d(f(z),z) &\leq sd(f(z),g(x_{2n+1}))+sd(x_{2n+2},z) \\ d(f(z),z)-sd(x_{2n+2},z) &\leq sd(f(z),g(x_{2n+1})) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d(f(z),g(x_{2n+1})) &\leq Md(z,x_{2n+1})+N[d(z,f(z))+d(x_{2n+1},g(x_{2n+1}))] \\ &\quad +P[d(z,g(x_{2n+1}))+d(x_{2n+1},f(z))] \\ &= Md(z,x_{2n+1})+N[d(z,f(z))+d(x_{2n+1},x_{2n+2})] \\ &\quad +P[d(z,x_{2n+2})+d(x_{2n+1},f(z))]. \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} d(f(z),z)-sd(x_{2n+2},z) &\leq sMd(z,x_{2n+1})+sN[d(z,f(z))+d(x_{2n+1},x_{2n+2})] \\ &\quad +sP[d(z,x_{2n+2})+d(x_{2n+1},f(z))] \\ &\leq sMd(z,x_{2n+1})+sN[d(z,f(z))+d(x_{2n+1},x_{2n+2})] \\ &\quad +sP[d(z,x_{2n+2})+s(d(x_{2n+1},z)+d(z,f(z)))]. \end{aligned}$$

Passant à la limite et en tenant compte que $(I-sN-s^2P)$ est inversible et $(I-sN-s^2P)^{-1}\in M_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ on trouve que z est un point fixe de f.

Pour montrer que z est un point fixe de g, on utilise la condition (iii) avec :

$$\begin{aligned} d(z,g(z)) &= d(f(z),g(z)) \\ &\leq Md(z,z)+N[d(z,f(z))+d(z,g(z))]+P[d(z,g(z))+d(z,f(z))]. \end{aligned}$$

On obtient :

$$(I-N-P)d(z,g(z))\leq 0.$$

Comme $(I-N-P)$ est inversible et $(I-N-P)^{-1} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ on conclut que $z = g(z)$. Alors, z est un point fixe commun pour f et g.

2) Maintenant on montre que le point fixe commun de f et g est unique. Pour cela, on suppose qu'il existe un autre point w fixé par f. En utilisant la condition (iii), on a :

$$\begin{aligned} d(w,z) &= d(f(w),g(z)) \\ &\leq Md(w,z) + N[d(w,f(w)) + d(z,g(z))] + P[d(w,g(z)) + d(z,f(w))] \\ &\leq (M+2P)d(w,z). \end{aligned}$$

On obtient :

$$(I-M-2P)d(w,z) \leq 0.$$

En tenant compte que $(I-M-2P)$ est inversible et $(I-M-2P)^{-1} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ cela implique que z est un point fixe commun unique pour f et g.

3) D'après les résultats précédents, on sait que f et g ont un point fixe commun unique z dans X. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans X tels que $\lim_{n\to\infty} d(f(x_n),x_n) = 0$ ou $\lim_{n\to\infty} d(g(x_n),x_n) = 0$, on a :

$$d(x_n,z) \leq s(d(x_n,g(x_n)) + d(g(x_n),f(z)))$$

et

$$\begin{aligned} d(g(x_n),f(z)) &\leq Md(x_n,z) + N[d(x_n,g(x_n)) + d(z,f(z))] + P[d(x_n,f(z)) + d(z,g(x_n))] \\ &\leq Md(x_n,z) + Nd(x_n,g(x_n)) + Pd(x_n,z) + Ps[d(z,x_n) + d(x_n,g(x_n))] \end{aligned}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
d(x_n, z) &\leq sd(x_n, g(x_n)) + s[Md(x_n, z) + Nd(x_n, g(x_n)) \\
&\quad +Pd(x_n, z) + Ps(d(z, x_n) + d(x_n, g(x_n)))] \\
&= sd(x_n, g(x_n)) + sMd(x_n, z) + sNd(x_n, g(x_n)) \\
&\quad +sPd(x_n, z) + s^2Pd(z, x_n) + s^2Pd(x_n, g(x_n)).
\end{aligned}$$

Cela implique que :

$$(I - s(M + P) - s^2P)d(z, x_n) \leq (sI + sN + s^2P)d(x_n, g(x_n)).$$

Passant à la limite et en tenant compte que $(I - s(M + P) - s^2P)$ est inversible et $(I - s(M + P) - s^2P)^{-1} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$, on trouve que $d(z, x_n) \to 0$, as $n \to \infty$.

Nous obtenons la notion d'espace métrique généralisé dans le théorème précédent si $s = 1$, dans ce cas on a :

Corollaire 3.1 : *Soit (X, d) un espace métrique généralisé complet. Supposons que les opérateurs $f, g : X \to X$ satisfaisant les conditions suivantes :*

il existe des matrices M, N, $P \in M_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ avec :

i) *$(I - N - P)$ est inversible et $(I - N - P)^{-1} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$.*

ii) *C converge vers zéro, où $C = (I - N - P)^{-1}(M + N + P)$.*

iii) $d(f(x), g(y)) \leq Md(x, y)+N[d(x, f(x))+d(y, g(y))]+P[d(x, g(y))+d(y, f(x))]$, pour tous $x, y \in X$.

Alors :

1. f et g ont un point fixe commun z dans X.

2. Si de plus, $(I - M - 2P)$ est inversible et $(I - M - 2P)^{-1} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$, alors :

- z est unique.

- le problème du point fixe (de f et g) est bien posé.

Preuve. On suit les mêmes étapes du lemme 3.2, on trouve :

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq C^n(I - C)^{-1}d(x_0, x_1).$$

Notons que $(I - C)$ est inversible puisque C converge vers zéro, cela implique que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. En utilisant le fait que (X, d) est complet on obtient que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans X. Ainsi, il existe $z \in X$ tels que $d(x_n, z) \to 0$, quand $n \to \infty$.

Maintenant, on montre que z est un point fixe de f pour tous les entiers positifs n, en utilisant la condition (iii), on trouve :

$$\begin{aligned}
d(f(z), x_{2n+2}) &= d(f(z), g(x_{2n+1})) \\
&\leq Md(z, x_{2n+1}) + N[d(z, f(z)) + d(x_{2n+1}, g(x_{2n+1}))] \\
&\quad +P[d(z, g(x_{2n+1})) + d(x_{2n+1}, f(z))] \\
&= Md(z, x_{2n+1}) + N[d(z, f(z)) + d(x_{2n+1}, x_{2n+2})] \\
&\quad +P[d(z, x_{2n+2}) + d(x_{2n+1}, f(z))].
\end{aligned}$$

Passant à la limite (la distance d'un espace métrique généralisé est continue) et en tenant compte que $(I - N - P)$ est inversible et $(I - N - P)^{-1} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ cela implique que $z = f(z)$, donc z est un point fixe pour f.

Le reste de la preuve, on suit les mêmes étapes que dans le théorème 3.3.

On obtient le concept d'espace b-métrique dans le théorème précédent si $n = 1$, dans ce cas on a :

Corollaire 3.2 : *Soit (X, d) un espace b-métrique complet. Supposons que les opérateurs $f, g : X \to X$ satisfaisant les conditions suivantes :*

il existe des matrices $M,\ N,\ P \in M_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ avec :

i) $d(f(x), g(y)) \leq Md(x, y) + N[d(x, f(x)) + d(y, g(y))] + P[d(x, g(y)) + d(y, f(x))]$, pour tous $x,\ y \in X$.

ii) $sC < 1$ *avec* $C = \frac{M+N+Ps}{1-N-Ps}$, $sN + s^2P < 1$ *et* $N + Ps < 1$

Alors :

1.*f et g admettent un point fixe commun z dans X.*

2. *Si, de plus, $M + 2P < 1$ alors z est unique.*

3. *Si $(s(M + P) + s^2 P) < 1$ alors le problème du point fixe (de f et g) est bien posé.*

Preuve. En appliquant le lemme 3.3 (nous pouvons également voir[20] et [11]) et en suivant les mêmes étapes que dans le théorème 3.3, nous obtenons le résultat.

Ensuite, on donne la définition d'un espace vectoriel b-normé.

Définition 3.4 : *Soit X un espace vectoriel. une b-norme sur X est une fonction :*

$$\|.\| : X \to \mathbb{R}_+$$

qui satisfait les trois conditions suivantes :

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$

2. $\|\alpha x\| = |\alpha|^s \|x\|, \quad \forall x \in X, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$ et $s \geq 1,$

3. $\|x + y\| \leq s(\|x\| + \|y\|), \quad \forall x, \ y \in X, \ \ s \geq 1.$

Un espace vectoriel muni d'une b-norme est appelé un espace vectoriel b-normé.

Remarque 3.2 : Notons ici que certains avantages d'une norme à valeur vectorielle par rapport aux normes habituelles (scalaires) étaient bien indiqués, par plusieurs exemples dans Precup [16]. Plus précisément, on peut montrer qu'en général, la condition que la matrice C converge vers zéro est plus faible que les conditions de contraction pour les normes suivent :

$$\begin{aligned} \|x\|_M &= \|x_1\| + \|x_2\| \\ \|x\|_C &= \max\{\|x_1\|, \|x_2\|\} \\ \|x\|_E &= (\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2)^{1/2} \end{aligned}$$

Comme application du théorème 3.3, on présente ce théorème pour un système d'équations opératoriels.

Théorème 3.4 : *Soit $(X, |.|)$ un espace b-Banach et soit $f, \ g : X \times X \to X$ deux* *opérateurs. Supposons qu'il existe m_{ij}, n_{ij}, $p_{ij} \in R_+$, $i, j \in \{1, 2\}$ tels que :*

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}, \ N = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix}, \ P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

pour chaque $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in X \times X$, on a :

(1) $|f_1(x_1, x_2) - g_1(y_1, y_2)| \leq m_{11}|x_1 - y_1| + m_{12}|x_2 - y_2| + n_{11}(|x_1 - f_1(x_1, x_2)| + |y_1 - g_1(y_1, y_2)|) + n_{12}(|x_2 - f_2(x_1, x_2)| + |y_2 - g_2(y_1, y_2)|) + p_{11}(|x_1 - g_1(y_1, y_2)| + |y_1 - f_1(x_1, x_2)|) + +p_{12}(|x_2 - g_2(y_1, y_2)| + |y_2 - f_2(x_1, x_2)|)$

(2) $|f_2(x_1, x_2) - g_2(y_1, y_2)| \leq m_{21}|x_1 - y_1| + m_{22}|x_2 - y_2| + n_{21}(|x_1 - f_1(x_1, x_2)| + |y_1 - g_1(y_1, y_2)|) + n_{22}(|x_2 - f_2(x_1, x_2)| + |y_2 - g_2(y_1, y_2)|) + p_{21}(|x_1 - g_1(y_1, y_2)| + |y_1 - f_1(x_1, x_2)|) + p_{22}(|x_2 - g_2(y_1, y_2)| + |y_2 - f_2(x_1, x_2)|)$.

En outre, on suppose que la matrice $(I - N - Ps)$ est inversible et $(I - N - Ps)^{-1} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$, $(I - sN - s^2P)$ est inversible et $(I - sN - s^2P)^{-1} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ et que sC converge vers zéro. Alors, le système :

$$\begin{aligned} u_1 &= f_1(u_1, u_2) = g_1(u_1, u_2), \\ u_2 &= f_2(u_1, u_2) = g_2(u_1, u_2), \end{aligned}$$

admet au moins une solution $z \in X \times X$. En outre, si en plus, la matrice $(I - M - 2P)$ est inversible et $(I - M - 2P)^{-1} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ alors cette solution est unique.

Preuve. Considérons $E = X \times X$ et les opérateurs f et g sont donnés par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= (f_1(x_1, x_2),\ f_2(x_1, x_2)) \\ g(y_1, y_2) &= (g_1(y_1, y_2),\ g_2(y_1, y_2)). \end{aligned}$$

Alors notre système est maintenant représenté comme une équation du point fixe de la forme suivante : $w = f(w) = g(w)$, $w \in E$. Notons aussi que la condition (1) + (2)

peut être représenter comme suit :

$$\|f(x) - g(y)\| \leq M\|x - y\| + N(\|x - f(x)\| + \|y - g(y)\|)$$
$$+P(\|x - g(y)\| + \|y - f(x)\|) \text{ pour tous } x,\ y \in X \times X.$$

Par conséquent, le théorème 3.3 s'applique dans (E, d) avec :

$$d(u, v) = \|u - v\| = \begin{pmatrix} |u_1 - v_1| \\ |u_2 - v_2| \end{pmatrix}.$$

3.3 Conclusion

La théorie du point fixe a une importance capitale dans l'étude de l'existence de solution pour les équations d'opérateurs non linéaires. De nombreux théorèmes d'existence sont obtenus à partir des théorèmes de Banach et Schauder, en transformant le problème d'existence en un problème de point fixe. Mais celui de Brouwer est particulièrement célèbre.

Le théorème de Banach ne s'appuie pas sur les propriétés topologiques du domaine de définition mais sur le fait que la fonction étudiée soit contractante.

Le résultat de Brouwer est l'un des théorèmes clef caractérisant la topologie d'un espace euclidien. Il intervient pour établir des résultats fins sur les équations différentielles, il est présent dans la géométrie différentielle. Il apparait dans diverses branches, comme la théorie des jeux.

Ce théorème est généralisé en 1930 aux espaces de Banach. Cette généralisation est due à Schauder. Ce théorème affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique, mais qui nous permet de résoudre plusieurs problèmes.

Bibliographie

[1] M. Akkouchi, V. Popa, *Well posedness of fixed point problem for mappings satisfying an implicit relation*, Demonstratio Math, **43**(2010), 923-929.

[2] I. A. Bakhtin, *The contraction mapping principle in quasimetric spaces*, Funct. Anal, Unianowsk Gos. Ped. Inst, **30**(1989), 26-37.

[3] S. Bazine and M. Bota, A generalization of Hardy-Rogers theorem ingeneralized b-metric spaces, Nonlinear Stud. 253 (3) (2016), 1-12.

[4] V. Berinde, *Generalized contractions in quasimetric spaces*, Seminar on Fixed Point Theory, **3**(1993), 3-9.

[5] M. Boriceanu, *Fixed point theory on spaces with vector-valued b-metrics*, Demonstratio Math, **4**(2009), 831-841.

[6] M. Boriceanu, *Fixed point theory for multivalued generalized contraction on a set with two b-metrics*, Studia Univ. "Babes-Bolyai". Mathematica, **LIV**(2009), 3-14.

[7] Lj. B. Ciric, Generalized contractions and fixed-point theorem, Publ. Inst. Math., 12 (26) (1971), 19-26.

[8] S. Czerwik, *Nonlinear set-valued contraction mappings in b-metric spaces*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, **46**(1998), 263-276.

[9] S. Czerwik, Contmction mappings in b-metric spaces, Acta Math. Inform. Univ. Ostrav. 1 (1993), 5-11.

[10] J-P. Demailly Analyse numérique et équations di érentielles, collection Grenoble Sciences, presses universitaires de Grenoble, Grenoble (1996)

[11] H. Huang, S. Xu, *Fixed point theorems of contractive mappings in cone b-metric spaces and applications*, Fixed Point Theory Appl, **112**(2013), 1-13.

[12] N. Hussain, D. Doric, Z. Kadelburg, S. Radenovic, *Suzuki-type fixed point results in metric type spaces*, Fixed Point Theory Appl, (2012), 1-12.

[13] R. Kannan, Some remarks on xed points, Bull. Calcutta Math. Soc. 60, 71-76, 1960.

[14] M.A. Krasnoselskii, Positive solutions of operator equations, Noordhoff, Groningen 1964

[15] A. I. Perov, *On the Cauchy problem for a system of ordinary differential equations*, Pviblizhen. Met. Reshen. Differ. Uvavn, **2**(1964), 115-134.

[16] R. Precup, *The role of matrices that are convergent to zero in the study of semilinear operator systems*, Mathematical and Computer Modelling, **49**(2009), 703-708.

[17] S. Reich, Some results concerning contraction mappings, Canad. Math. Bull. 14, 121-124,1971.

[18] I. A. Rus, *Principles and Applications of the Fixed Point Theory*, Dacia, Cluj-Napoca, 1979.

[19] V.M. Sehgal and S.P. Singh, On a fixed point theorem of Krasnoselskii for locally convex-spaces, Pacific J. Math. 62 (1976) 561-567

[20] S. L. Singh, S. Czerwik, K. Krol, A. Singh, *Coincidences and fixed points of hybrid contractions*, Tamsui Oxf. J. Math. Sci, **24**(2008), 401-416.

[21] Y.P. Sun, Y. Sun, Positive solutions for singular semi positive Neumann boundary value problems, Electronic journal of differential equations (2004) 133

[22] M. Turinici, *Finite-dimensional vector contractions and their fixed points*, Studia Universitatis Babeş-Bolyai. Mathematica, **35**(1990), 30-42.

[23] R. S. Varga, *Matrix Iterative Analysis*, Springer Series in Computational Mathematics, Springer, Berlin, Germany, **27**, 2000.

[24] P.P. Zabreiko, R.N. Kachurovskii and M.A.O. Krasnoselskii, On a fixed point principal for operators in Hilbert spaces, Funk. Anal. Prilojenia 1, 2 (1967) 168-169