République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : EDP Et Analyse numérique

Par

Mr : BEDJAOUI Abdelkarim

Intitulé

Espaces de Sobolev d'ordre réel et applications aux EDP

Dirigé par : Dr. HITTA Amara, Professeur

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. GUEBBAI	Hamza	MCA	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. HITTA	Amara	Professeur	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. LAKHAL	Fahim	MCA	Univ-Guelma

Session Juin 2018

7/10, 2019

Table des matières

REMERCIEMENTS

Je remercie ALLAH qui m'a aidé et qui m'a donné la patience et le courage durant ces longues années d'étude.

Je tiens à remercier sincèrement Monsieur **Pr HITTA Amara** qui , en tant que Directeur de mémoire, s'est toujours montré à l'écoute et qui était disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi que son inspiration, son aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer et sans qui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour.

Je remercie, également, tous les membres du Jury pour avoir accepté d'en faire partie. Leurs critiques et leurs remarques me seront, dans l'avenir, un jalon dans ma carrière professionnelle.

Je remercie mes chers parents, pour toute leur tendresse, leur amour, leur soutien et leurs prières tout au long de ma vie et mes études.

Je souhaite adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu'à la réussite de cette formidable année pédagogique.

Sans oublier aussi tous les membres de ma famille en particulier : mes soeurs, mes frères et tous mes proches.

Chapitre 1

INTRODUCTION

1.1 Aperçu historique

En analyse mathématique, les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels particulièrement adaptés à la résolution des problèmes d'équation aux dérivées partielles. Ils doivent leur nom au mathématicien russe Sergueï Lvovitch Sobolev.

Plus précisément, un espace de Sobolev est un espace vectoriel de fonctions muni de la norme obtenue par la combinaison de la norme L^p de la fonction elle-même et de ses dérivées jusqu'à un certain ordre. Les dérivées sont comprises dans un sens faible, au sens des distributions, afin de rendre l'espace complet. Les espaces de Sobolev sont donc des espaces de Banach.

Intuitivement, un espace de Sobolev est un espace de Banach de fonctions pouvant être dérivées suffisamment de fois, pour donner sens par exemple à une équation aux dérivées partielles et muni d'une norme qui mesure à la fois la taille et la régularité de la fonction.

Les espaces de Sobolev sont un outil essentiel pour l'étude des équations aux dérivées partielles. En effet, les solutions de ces équations appartiennent plus naturellement à un espace de Sobolev qu'à un espace de fonctions continues partiellement dérivables au sens classique.

1.2 Description du contenu

Ce mémoire traite des sujets suivants :

① Nous définissons les espaces de Schwartz et les distributions tempérées ainsi que la transformation de Fourier et sont utilité indéniable dans la résolution des équations aux dérivées partielles.

② Nous définissons les espaces de sobolev d'ordre entier qui sont les espaces "naturels" des fonctions permettant de résoudre les fomulations variationnelles d'équations aux dérivées partielles Nous faisons,ensuite quelques exemple d'equations aux dérivées partielles elliptiques et leurs formulation variationnelles.

③ Les espaces de Sobolev fractionnaires seront traités à l'aide de la transformée de Fourier ainsi que leurs propriétés qui forment une généralisation du cas entier.

④ Enfin, nous traiterons certaines applications de chapitres précédents à savoir : le problème de la plaque encastrée et le système de l'élacticité lineairisée.

Chapitre 2

TRANSFORMATION DE FOURIER

2.1 Introduction

Les espaces de Sobolev sont étudiés en utilisant la Transfromation de Fourier. C'est pour cela, qu'une introduction succinte sur ses propriétés et sur les résultats sur ses applications s'imposent d'une maniée naturelle.

Ainsi, la transformée de Fourier est un outil indispensable pour résoudre les équations aux dérivées partielles. Son rôle consiste, plus précisément, à transformer un problème différentiel en un problème algébrique facilement résoluble. De ce fait, la théorie des distributions tempérées lui sert de cadre plus général et bien adapté.

Nous allons définir l'espace de Schwartz, qui est l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à décraoissance rapide, **i.e.** toutes les fonctions de cet espace et toutes leurs dérivées convergent plus vite que tout polynôme quand x tend vers l'infini.

2.2 Espace de Schwartz

L'utilité principale de faire appel à l'espace de Schwartz est qu'il est invariant par la transformée de Fourier contrairement à l'espace des fonctions test dont l'image n'est pas à support compact.

Définition 2.2.1 *L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est formé par toutes les fonctions régulières $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ où f et toutes ses dérivées convergent vers 0 plus vite que tout polynôme :*

$$\boxed{\lim_{|x|\to\infty} |x^\alpha \partial^\beta u(x)| = 0, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n.}$$

Donc $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si :

① La fonction f est indéfiniment différentiable

② La fonction f et toutes ses dérivées sont à décroissance rapide c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \ \exists C_{\alpha,\beta} \in \mathbb{R} : \ \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < C_{\alpha,\beta}.}$$

Donc, l'espace de Schwartz est définie par

$$\boxed{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) : \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n \quad \text{on a} \quad x^\alpha \partial^\beta f(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \right\}.}$$

☞ **Exemple 2.2.1** Evidemment

$$\boxed{C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).}$$

Toutes les fonctions de la forme

$$\phi(x) = P(x) e^{-a|x|^2}$$

avec $a > 0$ et P fonction polynôme appartiennent à la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. En revanche, aucune fraction rationnelle (autre que la fonction nulle) n'appartient à la classe de Schwartz.

La topologie de l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ n'est pas définie par une norme, mais par une famille dénombrable de semi-normes définies comme suit :

Pour toute fonction $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on pose

$$\boldsymbol{\mathcal{N}_p(\phi) = \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq p} \sup |x^\alpha \partial^\beta \phi(x)|, \ p \in \mathbb{N}.}$$

Grâce à la famille $(\mathcal{N}_p)_{,p\in\mathbb{N}}$, on peut définir ce qu 'est une suite convergente dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Définition 2.2.2 *Une suite $(\phi_n)_{n\geq 1}$ de fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ onverge vers une fonction $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si*

$$\mathcal{N}_p(\phi_n - \phi) \to 0, \ \textit{pour tout}, \ p \geq 0, \ \textit{lorsque}, \ n \to \infty$$

2.3 Transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^n)$ et sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Rappelons que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$

Définition 2.3.1 *Soit $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$. On appelle transformation de Fourier de u la fonction*

$$\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \exp^{-ix.\xi} dx.$$

Ici i est le nombre complexe bien connu. $x.\xi = \sum_{j=1}^n x_j \xi_j$ est le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. Remarquons que la transformée de Fourier d'une fonction est à valeurs dans $\mathbb{C}$. On peut aussi choisir u fonction à valeurs complexes. Dire que u est dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ veut dire que Reu et Imu sont dans $L^1(\mathbb{R}^n)$. On notera aussi parfois $\hat{u} = \mathcal{F}(u)$

Définition 2.3.2 *A toute fonctions $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on associe sa transformation de Fourier*

$$\mathcal{F}\phi(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi}.x\phi(x)dx, \ \xi \in \mathbb{R}^n$$

L'application linéaire $\mathcal{F}$ est définie pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, puisque pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, on a

$$|e^{-i\xi.x}\phi(x)| = |\phi(x)|$$

et que $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$

Proposition 2.3.1 *Soit ϕ une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ Alors*

1. *la fonction $\mathcal{F}(\phi)$ est de classe $C^1(\mathbb{R}^n)$ et on a pour tout $j = 1, ..., n$*

$$\partial_{\xi_j}\mathcal{F}\phi(\xi) = \mathcal{F}(-ix_j\phi)(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

2. *pour tout j=1,...,n, on a*

$$\mathcal{F}(\partial_{x_j}\phi)(\xi) = i\xi_j\mathcal{F}(\phi)(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

la proposition ci-dessus qui est montré que la trasformation de Fourier sur $\mathcal{S}(R^n)$ échange dérivation et multiplication par x

2.4 Espace des distributions Tempérées

Pour pouvoir définir l'integrale de Fourier

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi.x} f(x)dx$$

d'une fonction continue f pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, il faut avoir des conditions limitant la croissance de f à l'infini .

Par exemple, il suffira de savoir que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Mais on ne peut pas définir en géneral la transformée de Fourier d'une fonction qui serait seulement localement intégrable.

Le même problème se pose évidemment lorsqu'on veut définir une notion de transformation de Fourier des distribution sous une forme quelque peu différente, toutefois, le concept de "croissance à l'infini" n'est pas clair pour une distribution. Comme on va le voir, on ne sait pas définir la transformation de Fourier que sur un sous-espace de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, à savoir la classe des distributions tempérées que nous allons étudier brièvement.

Définition 2.4.1 *Soit* T *une distribution. On dit que* T *est une distribution tempérée si* $\exists C > 0$ *;* $m \in \mathbb{N}$ *tel que pour toute fonction test* ϕ

$$\boxed{| < T, \phi > | \leq C \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq m} \|x^\alpha \partial^\beta \phi\|_{L^\infty}}$$

En d'autres termes, une distribution tempérée est une distribution telle que si ϕ_j suite de fonctions test converge vers 0 dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, alors $< T, \phi_j > \longrightarrow 0$ dans $\mathbb{R}(ou\, \mathbb{C})$.
Comme nous avons l'inclusion $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,qui est une inclusion continue et dense, alors l'ensemble des distributions tempérées, noté $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, qui est l'ensemble des formes linéaires continues sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
On a

$$\boxed{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).}$$

En effet même si la définition ci-dessus n'est vraie que pour une fonction test, on peut l'étendre sans mal par densité à une fonction dans l'espace de Schwartz.

Proposition 2.4.1 *Une distribution à support compact est une distribution tempérée*

Preuve 2.4.2 *Soit* S *une distribution à support compact. Elle est donc d'ordre fini. Il existe* C *et* m *ne dépendant que du support de* S *tels que pour toute fonction test* ϕ,

$$| < S, \phi > | \leq C \sum_{|\beta| \leq m} \|\partial^\beta \phi\|_{L^\infty}.$$

Donc $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Ensuite, toute fonction à croissance lente est une distribution tempérée.

Définition 2.4.3 *Soit* f *une fonction dans* $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$*. On dit que* f *est à* **croissance lente** *si* $\exists$ m *tel que* $(1 + |x|)^{-m} f(x)$ *appartient à* L^∞.

Proposition 2.4.2 *Une fonction* f *à croissance lente est une distribution tempérée.*

Preuve 2.4.4 *Rappelons qu'une fonction localement inégrable est une distribution. Soit alors ϕ une fonction test. il vient*

$$|<f,\phi>| = |\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)dx| \leq \|\phi(1+|x|)^m\|_{L^\infty}\|(1+|x|)^{m+n+1}\phi\|_{L^\infty}\int_{\mathbb{R}^x}\frac{dx}{(1+|x|)^{n+1}}$$

Cette derniére intégrale est finie en en vertu de

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{dx}{(1+|x|)^{n+1}} = \omega_n\int_0^{+\infty}\frac{r^{n-1}}{(1+r)^{n+1}}dr < +\infty$$

Proposition 2.4.3 *Soit $1 \leq p \leq \infty$. Alors*

$$\boxed{L^p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}$$

Preuve 2.4.5 Si f est dans L^p alors pour ϕ une fonction test

$$|<f,\phi>| \leq \|f\|_{L_p}\|(1+|x|)^{-n-1}\|_{L^{p'}}\|(1+|x|)^{n+1}\phi\|_{L_\infty}$$

L'intégrale du milieu est finie car $p'(n+1)-n+1>1$.

Proposition 2.4.4

$$\boxed{vp\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)}$$

Preuve 2.4.6 Soit θ une fonction plateau pour un voisinage de 0.
Alors

$$vp\left(\frac{1}{x}\right) = \theta(x)vp\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1-\theta(x)}{x}/$$

On en déduit que la valeur principale est la somme d'une distribution à support compact et d'une fonction de carré intégrble, donc la somme de deux disibution tempérées.

Proposition 2.4.5 *Soit une distribution tempérée $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Alors*

1. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, la dérivée $\partial^\alpha T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$*

2. *Pour toute fonction f à croissance polynômiale ainsi que toutes ses dérivées, la distribution $fT \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$;*

3. *Pour toute distribution à support compact $S \in \varepsilon'(\mathbb{R})$, le produit de convolution $T * S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

☞ **Exemple 2.4.1** *Croissance à l'infini et caractère tempéré*

Pour voir si une distribution définie par une fonction, par exemple, est tempéreée ou non, il ne suffit pas d'étudier la croissance à l'infini du module de cette fonction.
Considérons par exemple la fonction

$$x \mapsto ie^x e^{ie^x}$$

Evidemment

$$\left|ie^x e^{ie^x}\right| = e^x$$

qui à la même croissance à l'infini que les contre-exemples ci-dessus.
Mais

$$ie^x e^{ie^x} = \frac{d}{dx}(e^{ie^x})$$

et comme la fonction

$$x \mapsto e^{ie^x}$$

est une fonction de classe C^1 bornée sur $\mathbb{R}$, elle définit une distribution tempérée sur $\mathbb{R}$
D'autre part, sa dérivée au sens des distributions coïncide avec la distribution définie par sa fonction dérvée au sens usuel, de sorte que, d'aprés la prop(2.4.5) , cette fonction dérivée

$$x \mapsto ie^x e^{ie^x}$$

définit bien un élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.
Intuitivement, ce sont les osciallations rapide de la fonction $x \mapsto e^{iex}$ dans la limite $x \to +\infty$ qui annihilent la croissance de $x \mapsto e^x$ pour $x \to +\infty$

En pratique, pour décider si une distribution $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.
En pratique, pour décider si une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est tempérée, on cherchera évidemment si elle appartient aux classes d'exemple ci-dessus– distributions à support compact, fonctions de L^p, fonctions à croissance polynômiale...
Si ce n'est pas le cas, il faut ensuite chercher si la distribution considérée est une dérivée(d'ordre quelconque) d'une distribution dont on sait déja qu'elle est tempérée.
Si aucune de ces approches ne permet de conclure, il faut alors à la définition des distribution tempérées, et en vérifier la propriété de continuité

Caractérisation des distributions de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$:

Théorème 2.4.6 Tout distribution $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est de la forme

$$T = \partial_x^\alpha((1+|x|^2)^n f) \text{ au sens des distributions}$$

où $\alpha \in \mathbb{N}^n$, n un entier naturel, et f une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}^n$.

2.5 Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Comme pour beaucoup d'opérations sur les distributions, nous allons définir la transformation de Fourier en utilisant la dualité entre l'espace de Schwartz et l'ensemble des distribution tempérées.

Définition 2.5.1 Soit $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, alors $\hat{S}$ est la distribution définie par : pour tout fonction ϕ test

$$\boxed{<\hat{S},\phi>=<S,\hat{\phi}>.} \quad (2)$$

De plus $\hat{S}$ est une distribution tempérée.

Cette formule a bien a sens car

$$\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Donc $\hat{\phi}$ est aussi une fonction dans l'espace de Schwartz. De plus, l'application

$$\mathcal{F} : \phi \longmapsto \hat{\phi}$$

étant continue pour la topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, automatiqument $\hat{S}$ est une distribution tempérée. La formule (2) s'étend par densité à ϕ dans l'espace de Schwartz. On constate par contre que la formule (2) n'a pas de sens si S est une simple distribution, puisque le membre de droite n'a pas de sens car $\hat{\phi}$ n'est pas une fonction test.

Proposition 2.5.1 Soit une distribution tempérée $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Alors

1. Pour tout $k = 1, ..., n$ on a

$$\mathcal{F}(\partial_{x_k} T) = i\xi_k \mathcal{F}T$$

2. Pour tout $b = 1, ..., N$ on a

$$\mathcal{F}(x_b T) = i\partial_{\xi_k} \mathcal{F}T$$

3. Pour tout $a \in \mathbb{R}^N$ et en notant $\tau_a : x \mapsto x + a$, on a

$$\mathcal{F}(T \circ \tau_a) = e^{ia.\xi} \mathbb{F}T$$

4. Pour tout $a \in \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{F}(e^{-ia.x} T) = (\mathcal{F}T) \circ \tau_a$$

2.6 Inversion de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Théorème 2.6.1 *La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est un isomorphisme du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même, dont l'inverse est donné par la formule*

$$\mathcal{F}^{-1}T = \frac{1}{(2\pi)^n}\tilde{\mathcal{F}T}$$

où, pour toute distribution S sur $\mathbb{R}^n$, on a noté

$$\tilde{S} = S \circ (-Id_{\mathbb{R}^n})$$

c'est-à-dire que, pour toute fonction test $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ on a :

$$< \tilde{S}, \phi > = < S, \phi \circ (-Id_{\mathbb{R}^n}) > = < S, \phi(-.) >$$

Chapitre 3

ESPACES DE SOBOLEV D'ORDRE ENTIER

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

3.1 Espace de Sobolev $W^{p,k}(\Omega)$

Définition 3.1.1 Soient $k \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq +\infty$, on définit l'éspace de Sobolev $W^{p,k}(\Omega)$ par

$$\boxed{W^{p,k}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) : D^\alpha f \quad \text{existe et } \mathrm{D}^\alpha \mathrm{f} \in \mathrm{L}^\mathrm{p}(\Omega), \quad \forall |\alpha| \leq \mathrm{k}\}.}$$

On muni les espaces de Sobolev par une structure d'espaces normés dont les normes sont définies par :

$$\begin{aligned}
\|f\|_{W^{p,k}(\Omega)} &:= \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad && 1 \leq p < +\infty. \\
\|f\|_{W^{p,\infty}(\Omega)} &:= \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha f(x)|, && p = +\infty.
\end{aligned}$$

Un cas particulier trés important de ces espaces est celui oú $p = 2$ c'est-à-dire les sous-espaces de $L^2(\Omega)$ qu'on notera, pour tout $k \in \mathbb{N}$, par :

$$\boxed{H^K(\Omega) := W^{k,2}(\Omega).}$$

Par rapport aux espaces de Sobolev $W^{k,2}(\Omega)$, les espaces $H^k(\Omega)$ possèdent une propriété supplémentaire fortement agréable, à savoir :
Ce sont des espaces de Hilbert, pour le produit scalaire

$$\boxed{\forall\ f, g \in H^k(\Omega), \quad (f, g)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} \partial^\alpha f \partial^\alpha g.}$$

La norme associée sera notée par $\|.\|_{H^k(\Omega).}$:

$$\boxed{\|f\|_{H^k(\Omega)} - \sqrt{(f, f)_{H^k(\Omega)}}.}$$

3.2 Espaces de Sobolev $H^1(\Omega)$

Nous définissons maintenant une catégorie d'espaces fonctionnels très utile pour l'étude des problèmes variationnels :
Toute fonction $f \in L^2(\Omega)$ s'identifie à une distribution sur Ω , notée f. En général, pour $1 \leq i \leq n$, ses $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} \notin L^2(\Omega)$, ce qui nous conduit à introduire le sous-ensemble de $L^2(\Omega)$:

Définition 3.2.1 On appelle espace de Sobolev d'ordre 1 sur Ω, l'espace

$$\boxed{\boldsymbol{H^1(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega),\ \ \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\ 1 \leq i \leq n \right\}.}}$$

Ainsi, l'espace $H^1(\Omega)$ est le sous-espace de $L^2(\Omega)$ formé des fonction f dont le gradient s'identifie à une fonction de $(L^2(\Omega))^n$.

On munit $H^1(\Omega)$ du produit scalaire :

$$(f,g)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega \left(fg + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_i} \right) = (f,g)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)}.$$

La norme correspondante sera notée

$$\|f\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{(f,f)_{H^1(\Omega)}} = \left(\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla f\|^2_{(L^2(\Omega))^n} \right)^{1/2}.$$

3.3 Espaces de Sobolev $H_0^1(\Omega)$

Dans les probèmes variationnels, il convient de considérer des espaces qui traduisent le fait que les fonctions s'annulent sur le bord $\Gamma := \partial\Omega$ de l'ouvert Ω.

Définition 3.3.1 *Pour tout Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, on pose*

$$H_0^1(\Omega) := \overline{D(\Omega)} \quad \text{dans} \quad \mathrm{H}^1(\Omega).$$

Ainsi, $H_0^1(\Omega)$ est l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

Les fonctions de l'espace $H_0^1(\Omega)$ forment l'ensemble de toutes les limites possibles des suites de fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ au sens de la topologie de $H^1(\Omega)$ définie précédement. On assume le résultat suivant :

Théorème 3.3.1 On suppose que Ω est borné, de frontière $\partial\Omega$ de classe C^1. Alors, il existe un opérateur linéaire continu

$$\boxed{\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\partial\Omega),}$$

appelé **opérateur trace**, tel que

$$\boxed{H_0^1(\Omega) = Ker\ \gamma_0 = \{u \in H^1(\Omega), \gamma_0 u = 0\}.}$$

L'application $\gamma_0 u$ est appelée la **trace** de u sur $\partial\Omega$.

Ainsi, $H_0^1(\Omega)$ est un fermé de $H^1(\Omega)$.
D'autre part, on note par $H^{-1}(\Omega)$ le dual de $H_0^1(\Omega)$ qui est un espace de Hilbert pour la norme duale. Comme $D(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$, on montre que les fonctions de $H^{-1}(\Omega)$ peuvent être identifiées à des distributions. Ainsi, l'espace $H^{-1}(\Omega)$ est considéré comme un espace de distributions.

3.4 Problème abstrait et lemme de Lax-Milgram

Soit V un espace de Hilbert du produit scalaire $(.,.)_V$ dont la norme associée est $\|.\|_V$. Fixons une forme bilinéaire continue

$$\begin{aligned} a : V \times V &\longmapsto \mathbb{R} \\ (u, v) &\longrightarrow a(u, v). \end{aligned}$$

La bilinéarité signifie la linéarité de a en u et en v, tandis que la continuité suppose l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$\boxed{|a(u, v)| \leq C\|u\|_V.\|v\|_V, \quad \forall u, v \in V}$$

Problème : Considérons le problème abstrait (ou variationnel) suivant

Etant donné $F \in V'$, trouver $u \in V$ solution de l'équation :

$$\boxed{a(u,v) = F(v), \quad \forall v \in V} \qquad (P)$$

Pour l'existence d'une solution à ce problème, la forme a devrait vérifier l'hypothése de la **coercivité** ou la **V-ellipticité** :

On dit que la forme a est V-elliptique ou coercive sur V si et seulement si il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\boxed{|a(u,u)| \geq \alpha \|u\|_V^2, \quad \forall u \in V}.$$

D'autre part, nous avons besoin de la **représentationde de Riez** qui s'énonce comme suit :

Théorème de représentation de Riesz : Désignons par V' l'espace dual de V . Soit $F \in V'$. Alors, il existe un et un seul élément $T_F \in V$ tel que :

$$< F, v >= (T_F, v), \quad \forall v \in V.$$

De plus, on a $\|T_F\| = \|F\|_{V'}$. Autrement dit, l'application T : $V' \longrightarrow V$ définie par $F \longrightarrow T_F$ est un isomorphisme.

Nous maintenant en mesure d'établir le résultat centrale dit **Théorème de Lax-Milgram** suivant :

Théorème 3.4.1 (Lax-Milgram) la forme bilinéaire a est V-elliptique, alors le problème (P) a une solution unique $u \in V$. De plus, on a l'estimation suivante :

$$\boxed{\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|F\|_{V'}.}$$

<u>**Preuve**</u> **3.4.1** Fixons $u \in V$ et considérons l'application

$$A_u : V \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad A_u(v) = a(u,v).$$

Ceci définit une forme linéaire continue sur V c-à-d. que $A_u \in V'$ car

$$|A_u(v)| = |a(u,v)| \leq C\|u\|_V.\|v\|_V, \forall v \in V$$

et en plus on a

$$\|Au\|_{V'} \leq M.\|u\|_V. \quad (*)$$

Pour un paramètre $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, introduisons :

$$\Phi_\varepsilon : V \longrightarrow V \quad \text{tel que} \quad \Phi_\varepsilon(u) = u - \varepsilon T(A_u - F)$$

oùl'application $T : V' \longrightarrow V$ étant définie dans le théorème de représentation de Riesz. pour ε suffisament petit, l'application Φ_ε est une contraction.En effet, par la définition de Φ_ε, la bilinéarité du produit scalaire et grâce aux propriétés de l'application T, on obtient

$$\|\Phi_\varepsilon(u) - \Phi_\varepsilon(v)\|^2 = \|u-v\|_V^2 + \varepsilon^2\|A_u - A_v\|_{V'}^2 - 2\varepsilon a|(u-v, u-v)|.$$

D'aprés $(*)$ et la V -ellipticité, on arrive à l'estimation

$$\|\Phi_\varepsilon(u) - \Phi_\varepsilon(v)\|^2 \leq (1 - 2\varepsilon a + \varepsilon^2 M^2)\|u-v\|_V^2$$

Ainsi, Φ_ε sera une contraction si $1 - 2\varepsilon a + \varepsilon^2 M^2 < 1$ ce qui est équivalent à : $0 < \varepsilon < 2\alpha/M^2$ .Le théoréme du point fixe assure l'existence d'un certain $u_0 \in V$ tel que $\Phi_\varepsilon(u_0) = u_0$ Appliquons l'égalité (P) pour $u = v$ donc $a(u,u) = F(u)$. Ainsi, par la coercivité de a et la continuité de F, l'identité ci-dessus implique

$$\alpha\|u\|_V^2 \leq a(u,u) = F(u) \leq \|F\|_{V'}.\|u\|_V.$$

D'où

$$\|u\|_V^2 \leq \frac{1}{\alpha}\|F\|_{V'}.\|u\|_V. \quad \blacksquare$$

3.5 Application : Problème de Dirichlet en dimension 1

Dans ce qui suit on illutrera par un exemple qui montrent comment écrire Problème de Dirichlet en dimension 1 sous forme variationnelle.

☞ **Exemple 3.5.1 (Problème de Dirichlet en dim 1)** Considérons l'ouvert $\Omega =]-1,1[$ de R . Soit $f \in L^2(\Omega)$, on veut montrer l'existence de la solution u de l'equation différentielle :

$$\begin{cases} -u'' = f \text{dans} \Omega \quad (1.a) \\ \text{et satisfaisant aux conditions aux bords} \\ u(0) = u(1) = 0 \quad (1.b) \end{cases}$$

On peut interpréter cette équation comme représentant l'étant stationnaire d'une corde . La solution u représente le déplacement de cette corde dans la direction perpendiculaire à celle-ci par rapport à la position de repos, f est la densité de la force et les conditions aux bords (1 .a) et (1.b) signifient que la corde est fixée par ses extrémités.

Supposons que la solution de problème (1.a)-(1.b) existe et qu'elle est suffisamment régulière par exemple $u \in H^2(\Omega)$.Alors, en multipliant (1.a) par une fonction test $v \in H^1(\Omega)$, on obtient :

$$-\int_0^1 u''(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

En intégrant par parties dans le premier membre de cette identité, on obtient

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx + u'(0)v(0) - u'(1)v(1) = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

Comme la condition (1.b) signifie que $v \in H_0^1\Omega$ c-à-d que $v/\partial\Omega = 0$, on obtient

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx + u'(0)v(0) - u'(1)v(1) = \int_0^1 f(x)v(x)dx. \quad (p)$$

Le bon choix consiste à prendre :

$$\begin{cases} V = H_0^1\Omega \\ a(u,v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx \\ F(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx. \end{cases}$$

Grâce au lemme de Lax-Milgram, le problème (P) a une solution unique $u \in H_0^1(\Omega)$. Reste à vérifier les hypothèses. La bilinéarité de a et la linéarité de F découle de la linéarité de l'intégrale . Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on vérifie quela forme a et F sont continues, en effet :

$$|F(v)| \leq \|f\|_{0,\Omega}.\|v\|_{0,\Omega}.$$

Comme la norme L^2 est toujours plus petite que la norme H^1, on conclu la continuité de F (On procéde de manière analogue pour a). Reste à vérifer la coercivité de la forme a sur $H_0^1\Omega$.Ceci provient de l'inégalité de Poincaré puisque$a(u,u) = |u|_{1,\Omega}^2$. Comme $D(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$, (p) est vérifiée. En conséquence et au sens des distributions, u satisfait :

$$u'' = -f \quad \text{dans } D'(\Omega)$$

Comme par hypothése $f \in L^2(\Omega)$ on en déduit que :

$$u, u' et u \in L^2(\Omega) \Rightarrow u \in H^2(\Omega).$$

L'équation (1.a) est donc satisfaite au sens $L^2(\Omega)$ ■ .

3.6 Application : Problème de Neumann en dimension 1

Dans ce qui suit on illutrera par un exemple qui montrent comment écrire Problème de Neumann en dimension 1 sous forme variationnelle.

☞ **Exemple 3.6.1** [Problème de Neumann en dim 1] Posons $\Omega =]0,1[$. On considère cette - fois ci le problème suivant :

Soit $f \in L^2(\Omega)$, trouver u solution de

$$\begin{cases} u'' + u = f & \text{dans} \quad \Omega \quad (N_1) \\ u'(0) = u'(1) = 0 & (N_2). \end{cases}$$

Supposons qu'une solution de$(N_1)-(N_2)$ existe et qu'elle appartient à $H^2(\Omega)$. Alors en multipliant (N_1) par une fonction test $v \in H^1(\Omega)$; on obtient :

$$\int_0^1 u''(x)v(x) + u(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

En intégrant par parties dans le premier membre de cette identité, et en tenant compte de (N_2), on obtient

$$\int_0^1 (-u'(x)v'(x) + u(x)v(x))dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx, \forall v \in H^1(\Omega). \quad (N_3)$$

On a ainsi montré que si $u \in H^2(\Omega)$ est solution de $(N_1) - (N_2)$, alors il est solution de (N_3). Ce dernier problème est équivalent au problème (p) en prenant :

$$V = H^1(\Omega), a(u,v) = \int_0^1 u(x)v(x)dx - \int_0^1 u'(x)v'(x)dx \quad et \quad F(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

Grâce au lemme de Lax-Milgram, le problème (N_3) a une solution unique $u \in H^1(\Omega)$.Comme précédemment, montrons que la solution $u \in H^1(\Omega)$ de (N_3) appartient à $H^2(\Omega)$ et satisfait $(N_1) - (N_2)$.En effet, comme $D(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, (N_3) implique u satisfait $-u'' + u = f$ dans $D'(\Omega)$. Mais, par hypothèse, f et $u \in L^2(\Omega)$ alors $u'' = u - f \in L^2(\Omega)$. Donc $u \in H^2(\Omega)$ et satisfait (N_2) . On revient maintenant à (N_3) et en intégrant par parties, on obtient $u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = 0 \quad \forall v \in H^1(\Omega)$. En prenant $v(x) = x$ et $v(x) = 1 - x$, on conclut que $u'(1) = 0$ et $u'(0) = 0$ c-à-d (N_2). ■

3.7 Existence d'une solution au problème de Dirichlet en dimention supérieure

On appelle problème de Dirichlet une équation de Laplace avec conditions aux limites de type Dirichlet. Pour Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\Gamma := \partial\Omega$ le problème deDirichlet s'énonce de la façon suivante :

Déterminer une fonction u dans un certain espace fonctionnel V telle que :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{dans} \quad \Gamma. \end{cases}$$

où f est une fonction donnée dans un certain espace fonctionnel H.

Proposition 3.7.1 Soit $f \in L^2(\Omega)$, alors on a équivalence :

① Trouver $u \in H_0^1$ telle que $-\Delta u = f$ dans $D'(\Omega)$.

② [Formulation Variationnelle (FV)] Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que :

$$\int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx \quad \forall v \in H_0^1.$$

③ [Principe de Dirichlet] Trouver $u \in H_0^1$ qui minimise dans H_0^1 la fonctionnelle :

$$J(v) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx - \int_\Omega f(x)v(x)dx.$$

Dire que les 3 formulations sont équivalentes est equivaut à dire que si u est solution de l'une d'elles le saura pour les 2 autres. Une solution à l'un des problèmesest appelée **solution faible** ou solution variationnelle du problème dc Dirichlct (D).

Preuve 3.7.1 ② $\Longrightarrow$ ① Si u est solution de (FV) alors, puisque $D(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$, on alors pour tout $\varphi \in D(\Omega)$:

$$\int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx = \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)dx.$$

Ce qui donne

$$-\Delta u = f \quad \text{dans} \quad D'(\Omega).$$

① $\Longrightarrow$ ② En remontant les calculs précédents, on obtient

$$\int_\Omega \nabla u(x).\nabla \varphi(x)dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx \quad \varphi \in D(\Omega).$$

Or $D(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$;le résultat s'obtient dans $H_0^1(\Omega)$.

③ $\Longrightarrow$ ② Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ qui minimise la fonctionnelle J et soit $v \in H_0^1(\Omega)$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $J(u) \leq J(u+tv)$; or

$$\begin{aligned} J(u+tv) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(u+tv)(x)|^2 dx - \int_\Omega f(x)(u(x)+v(x))dx \\ &= J(u) + t\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx + \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx \\ &\quad -t\int_\Omega f v dx. \quad (E) \quad (4.1) \end{aligned}$$

Donc

$$t(\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx - \int_\Omega f v dx) + \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx \geq 0.$$

On a deux cas :

1. En divisant par $t > 0$ et en faisant tendre t vers 0, on obtient
$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx - \int_\Omega f v dx \geq 0.$$
2. En divisant par $t < 0$ et en faisant tendre t vers 0, on obtient
$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx - \int_\Omega f v dx \leq 0.$$

D'où u vérifie (FV).

② $\Longrightarrow$ ③ Si u est solution de (FV) alors avec (E), on obtient que, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$:

$$J(u+v) = J(u) + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx \quad (*)$$

ce qui prouve que u réalise le minimum de J sur $H_0^1(\Omega)$. ■.

Corollaire 3.7.2 Si l'un quelconque des problème tous équivalents admet une solution, alors cette solution est unique.

Preuve 3.7.3 *:* Soit u_1 et u_2 sont deux solutions alorsd'après (*) on a

$$J(u_1) = J(u_2) = J(u_1) + \int_\Omega |\nabla(u_1 - u_2)|^2 dx;$$

ceci implique que $\nabla(u_2 - u_1) = 0$ et donc $u_2 = u_1$ dans $H_0^1(\Omega)$. ■

3.8 Existence d'une solution au problème de Neumann en dimension supérieure

Etant donné $f \in L^2(\Omega)$, on veut trouver la solution u du problème

$$\begin{cases} -\Delta u + cu = f & \text{dans } \Omega \\ \gamma_0 \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Preuve 3.8.1 Comme précedemment, on voit qu'il faut prendre :

$$V = H^1(\Omega), \quad a(u,v) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_\Omega c(x)u(x)v(x)dx,$$

et

$$F(v) = \int_\Omega f(x)v(x)dx.$$

La V-ellipticité de la forme a sur $H^1(\Omega)$ découle de l'estimation

$$a(u,u) \geq \|u\|_{1,\Omega}^2 + c_0\|u\|_{0,\Omega}^2 \geq min(1,c_0)\|u\|_{1,\Omega}^2.$$

Par le lemme de Lax-Milgram, il existe une solution unique $u \in H^1(\Omega)$ du problème

$$a(u,v) = F(v), \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Comme $D(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, cette solution vérifie

$$-\Delta u + cu = f \quad dans \quad \Omega.$$

Mais, cette identité ne nous fournit aucune information sur $\dfrac{\partial u}{\partial n}$. Si la solution u appartient à $H^2(\Omega)$, d'après la formule de Green, on obtient

$$\int_\Gamma \gamma_0 \frac{\partial \partial u}{\partial n} \gamma_0 v d\sigma = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Comme l'image de γ_0 est dense dans $L^2(\Omega)$,on conclut que la solution u satisfait la condition de Neumann sur Γ.

Chapitre 4

ESPACES DE SOBOLEV FRACTIONNAIRES

4.1 Introductuion

Dans ce chapitre, on donne la définition des espaces de Sobolev fractionaires, en termes de la transformation de Fourier. Ce qui généralise ceux introduits au deuxième chapitre.

En fait, ce sont des espaces incontournables en équations aux dérivées partielles. Comme on vient de le constater, tout d'abord ils ont une structure d'espace de Hilbert, ceci rend leur utilisation plus commode. Ensuite ils mesurent très finement la régularité d'une distribution. Enfin, ils constitue une chaîne d'espaces faisant le lien entre les distributions à support compact et les fonctions $\mathcal{C}^\infty$, permettant ainsi de passer des solutions faibles (**i.e.** au sens des distributions) aux solutions classiques (**i.e.** $\mathcal{C}^m$) d'équations aux dérivées partielles.

4.2 Les espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$

Définition 4.2.1 Soit s un réel. L'espace $H^s(\mathbb{R}^n)$ est l'espace vectoriel des fonctions $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telles que $\hat{u}$ soit un fonction mesurable et

$$(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

c'est-à-dire

$$\boxed{H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); (1+|\xi|^2)^{s/2}\mathcal{F}(u)(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)\ \}}$$

On munit $H^s(\mathbb{R}^n)$ du produit scalaire

$$\boxed{(u,v)_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^s\hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)}d\xi, \quad u,v \in H^s(\mathbb{R}^n)}$$

La norme correspondante sera notée

$$\boxed{\|u\|^2_{H^s} = \int(1+|\xi|^2)^s|\hat{u}(\xi)|^2d\xi}$$

Les propriétés suivantes renseignent de la richesse des espaces de Sobolev

① Si $s_1 > s_2$ on a $H^{s_1} \subset H^{s_1}$ et l'injection est continue.

② Muni de son produit scalaire, H^s est un espace de Hilbert.

Proposition 4.2.1 *Si $s = m \in \mathbb{N}$, l'espace $H^s(\mathbb{R}^n)$ coïncide avec l'espace de Sobolev classique $W^{m,2}(\mathbb{R}^n)$*

Preuve 4.2.2 En effet, si $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$, la fonction u ainsi que toutes ses dérivées jusqu'a l'ordre m appartiennent à $L^2(\mathbb{R}^n$.
En transformant par Fourier, on obtient que $\mathcal{F}u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et

$$(-2\pi\xi)^\alpha\mathcal{F}u \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

avec α un multi-indice tel que $|\alpha| \leq m$ et $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1}...\xi_n^{\alpha_n}$. Ceci entraîne, en particulier, que

$$(1+|\xi|^2)^{m/2}\mathcal{F}(u) \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

Inversement : Si $\mathcal{F}(u)$ vérifie

$$(1+|\xi|^2)^{m/2}\mathcal{F}(u) \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

on aura aussi

$$(2i\pi\xi)^j\mathcal{F}(u) \in L^2(\mathbb{R}^n) \quad \text{pour tout} \quad j \leq m$$

et donc les dérivées jusqu'à l'ordre m de u sont dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 4.2.2 *L'espace $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ coïncide avec le dual $H^s(\mathbb{R}^n)'$ pour $s > 0$:*

$$\boxed{H^s(\mathbb{R}^n)' \simeq H^{-s}(\mathbb{R}^n),\ \forall s > 0}$$

Preuve 4.2.3 Soit $v \in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ On définit une forme linéaire L_v sur H^s par

$$L_v(u) = \int_{(\mathbb{R}^n)} \hat{v}(\xi)\hat{u}(\xi)d\xi \qquad \forall u \in H^s(\mathbb{R}^n)$$

On établit la continuité de cette forme linéaire par :

$$\begin{aligned} |L_v(u)| &= \left|\int_{(\mathbb{R}^n)} (1+|\xi|^2)^{-s/2}\hat{v}(\xi)(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}(\xi)d\xi\right| \\ &\leq \|(1+|\xi|^2)^{-s/2}\hat{v}\|_2\|(1+|\xi|^2)^{-s/2}\hat{u}\|_2 \\ &\leq C\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

Il est clair que l'application qui à v associe L_v est une injection continue et donc

$$\boxed{\boldsymbol{H^{-s}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^s(\mathbb{R}^n)'}}$$

Inversement : Soit $T \in (H^s)'$, le théorème qui suit établit que l'injection de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $H^s(\mathbb{R}^n)$ est dense et donc $H^s(\mathbb{R}^n)' \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Il en résulte que $T \in \mathcal{S}'$

Notons que si $g \in L^2$, la transformée de $(1+|\xi|^2)^{-s/2}g$ appartient à $H^s(\mathbb{R}^n)$ avec la norme

$$\|\mathcal{F}\left((1+|\xi|^2)^{-s/2}g\right)\|_{H^s} = \|g\|_2$$

En effet, soit $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, par définition de la multplication de $\mathcal{F}(T)$ par la fonction à croissance lente $(1+|\xi|^2)^{-s/2}$ on a :

$$\begin{aligned} \left|\left\langle(1+|\xi|^2)^{-s/2}\mathcal{F}(T), g\right\rangle\right| &= \left|\left\langle\mathcal{F}(T), (1+|\xi|^2)^{-s/2}g\right\rangle\right| \\ &= \left|\left\langle T, \mathcal{F}\left((1+|\xi|^2)^{-s/2}g\right)\right\rangle\right| \\ &\leq\ \leq \|T\|_{(H^s)'}\|\mathcal{F}(1+|\xi|^2)^{-s/2}g\|_{H^s} \\ &= \|T\|_{(H^s)'}\|g\|_2 \end{aligned}$$

Par conséqunet, $(1+|\xi|^2)^{-s/2}\mathcal{F}(T) \in L^2(\mathbb{R}^n)$, puisqu'elle définit une linéaire continue sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. Finalement $T \in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ ■

4.3 Densité des fonctions régulières

Théorème 4.3.1 *Pour tout $s \in \mathbb{R}$, on a*

$$\boxed{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \text{ est dense dans } H^s(\mathbb{R}^n)}$$

Preuve 4.3.1 Notons que l'espace $\mathcal{E}' = (C^\infty(\mathbb{R}^n))'$ est formé par des distributions à support compact sur $(\mathbb{R}^n$. Pour la preuve de ce théorème on procède par étapes en utilisant le procédé de la densite et de la troncature.

- **$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$** : En effet, tout d'abord $L^2(\mathbb{R}^n)\bigcap\mathcal{E}'$ est dense dans L^2. Soit $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 2. \end{cases}$$

Pour $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$, Posons $v_k = \theta\left(\frac{x}{k}\right) v \in L^2(\mathbb{R}^n)$. D'aprés le théoréme de convergence dominée, on a $v_k \to v$. Considérons maintenant $v \in L^2(\mathbb{R}^n)\bigcap\mathcal{E}'$ et $\rho \in C_0^\infty$ telle que

$$\text{supp}\rho \subset \{x : |x| \leq 1\} \quad \text{avec} \quad \int \rho(x)dx = 1.$$

On pose

$$\rho_\epsilon(x) = \varepsilon^{-n}\rho(\frac{x}{\epsilon}) \quad \text{et} \quad v_\epsilon = \rho_\epsilon * v \in C^\infty.$$

Donc on a

$$\begin{aligned} \|v_\epsilon - v\|_{L^2}^2 &= (2\pi)^{-n}\|\hat{v}_\epsilon - \hat{v}\|_{L^2}^2 \\ &= (2\pi)^{-n}\|(\hat{\rho}(\varepsilon\xi) - 1)\hat{v}\|_{L^2}^2 \to 0 \end{aligned}$$

D'après le théorème de la convergence dominée.

- **$\mathcal{S}$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^n)$:** Soit $u \in H^s$, alors d'après la définition, on a :

$$(1 + |\xi|^2)^{s/2}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

D'apres précédemment, il existe une suite $(v_j)_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$v_j \to (1 + |\xi|^2)^{s/2}\hat{u} \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^n)$$

On pose maintenet

$$u_j = \overline{\mathcal{F}}((1+|\xi|^2)^{-s/2}v_j) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

alors

$$\|u_j - u\|_s = \|v_j - (1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}\|_{L^2} \to 0. \quad ■$$

<u>**Corollaire**</u> **4.3.2** *L'espace $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans l'espace de Sobolev fractionnaire $H^s(\mathbb{R}^n)$ pour tout $s \in \mathbb{R}^n$).*

<u>**Preuve**</u> **4.3.3** D'après le théorème précédent, il suffit de démontrer que $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ pour la norme H^s. On prend θ et θ_k comme précédement et soit $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et s_0 tel que $s < s_0$. Posons $u_k = \theta_k u$. Alors

$$\|u_k - u\|_s^2 \leq \|u_k - u\|_{s_0}^2 \leq C \sum_{|alpha| \leq s_0} ||D^\alpha(\theta_k - 1)u||_{L^2}^2.$$

D'après les résultats sur les propriétes de espaces de Soboleve, il suffit d'utiliser la formule de Leibniz et le théorème de la convergence dominée pour montrer que $\|u_k - u\|_s^2 \to 0$. ■

4.4 Théorème des Traces

Rappelons le résultats suivant sur la notions de trace et dont la preuve est très longue et nécéssite plus de préparation mais son application reflète sont efficacité dans plusieurs domaine des EDP.

Dans $\mathbb{R}^n$, on considère l'hyperplan

$$\mathbb{R}^{n-1} = \{x = (x', x_n) : x' \in \mathbb{R}^{n-1}, x_n = 0\}$$

Pour une fonction $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, la fonction $u(x', 0)$ s'appelle :

la trace de u sur l'hyperplan $x_n = 0$.

La question qui se pose est la suivante : Peut-on définir la trace d'un élément de $H^s(\mathbb{R}^n$?

Théorème 4.4.1 *Pour tout $s > \frac{1}{2}$ l'application $u \mapsto u(x',0)$ de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $C^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ se prolonge de maniére unique en une application γ , linéaire, continue, surjective de $H^s(\mathbb{R}^n)$ dans $H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$*

Preuve 4.4.1 Pour $\varphi \in C_0^\infty$ on a

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix.\xi} \hat{\varphi}(\xi) d\xi$$

Notons $\xi = (\xi', \xi_n)$ avec $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $\xi_n \in \mathbb{R}$ donc on a :

$$\begin{aligned}
\varphi(x',0) &= (2\pi)^{-n} \int\int e^{ix'.\xi'} \hat{\varphi}(\xi', \xi_n) d\xi' d\xi_n \\
&= = (2\pi)^{-(n-1)} \int e^{ix'.\xi'} \left(\frac{1}{2\pi} \int \hat{\varphi}(\xi', \xi_n) d\xi_n \right) d\xi' \\
&= \overline{\mathcal{F}}_{\xi'} \left(\frac{1}{2\pi} \int \hat{\varphi}(\xi', \xi_n) d\xi_n \right)
\end{aligned}$$

Nous allons montrer que la dernière expression fournit le prolongement recherché

Lemme 4.4.2 Soit $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ avec $s > \frac{1}{2}$. Alors :

① Presque partout en ξ', la fonction $\xi_n \mapsto \hat{u}(\xi', \xi_n)$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^n)$

② La fonction $\xi' \mapsto \frac{1}{2\pi} \int \hat{u}(\xi', \xi_n) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n-1})$

③ on a

$$\overline{\mathcal{F}}_{\xi'}(\frac{1}{2\pi} \int \hat{u}(\xi', \xi_n) d\xi_n) \in H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$$

si l'on pose

$$\gamma u = \overline{\mathcal{F}}_{\xi'}(\frac{1}{2\pi} \int \hat{u}(\xi', \xi_n) d\xi_n)$$

alors

$$\|\gamma u\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \le C_s \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$$

Preuve 4.4.2 ① Si $u \in H^s$ alors $\hat{u}$ est mesurable et

$$\int\int (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi' d\xi < +\infty$$

donc

$$\int (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}|^2 d\xi_n < +\infty \quad \text{presque partout en } \xi'.$$

On peut écrit alors

$$|\hat{u}(\xi', \xi_n)| = |\hat{u}(\xi)|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}.(1+|\xi|^2)^{\frac{-s}{2}}.$$

On fixe maintenant ξ' et puisque $2s > 1$ la fonction

$$\xi_n \mapsto (1+|\xi|^2)^{\frac{-s}{2}} \in L^2(\mathbb{R}).$$

Si l'on pose aussi $\xi_n = (1+|\xi'|^2)^{\frac{1}{2}} \eta_n$ alors

$$\int \frac{d\xi_n}{(1+|\xi|^2)^s} = (1+|\xi'|^2)^{\frac{1}{2}-s} \int \frac{d\eta_n}{(1+|\eta_n|^2)^s}.$$

D'où

$$\int |\hat{u}(\xi', \xi_n)| d\xi_n = \int |\hat{u}(\xi)|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}.(1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}} d\xi_n$$

et d'apres Cauchy-Schwartz

$$\int |\hat{u}(\xi', \xi_n)| d\xi_n \leq (\int |\hat{u}(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^s d\xi_n)^{\frac{1}{2}} (\int (1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}} d\xi_n)$$

donc

$$\int |\hat{u}(\xi', \xi_n)| d\xi_n \leq |\hat{u}(\xi)|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \left(\int \frac{d\xi_n}{(1+|\xi|^2)^s} (1+|\xi'|^2)^{\frac{1}{2}-s} \int \frac{d\eta_n}{(1+|\eta_n|^2)^s} \right)^{1/2}$$

d'où

$$\int |\hat{u}(\xi', \xi_n)| d\xi_n \leq \left(\int |\hat{u}(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^s d\xi_n \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int \frac{d\eta_n}{(1+|\eta_n|^2)^s} \right)^{\frac{1}{2}} (1+|\xi'|^2)^{\frac{1}{4}-\frac{s}{2}} \quad (Q)$$

Ainsi, la fonction

$$\xi_n \to |\hat{u}(\xi', \xi_n)|$$

est presque partout en ξ' le produit de deux fonctions de $L^2(\mathbb{R})$. Elle est donc L^1

② Comme $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ alors

$$\xi' \mapsto \int (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi_n \in L^1(\mathbb{R}^{n-1})$$

d'apres (Q)

$$\xi' \mapsto (1+|\xi'|)^{\frac{s}{2}-\frac{1}{4}} \int \hat{u}(\xi', \xi_n) d\xi_n \in L^2(\mathbb{R}^{n-1})$$

i.e

$$\int \hat{u}(\xi', \xi_n) d\xi_n = \frac{g(\xi')}{(1+|\xi'|)^{\frac{s}{2}-\frac{1}{4}}} \qquad g \in L^2(\mathbb{R}^{n-1})$$

alors pour $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$

$$\begin{aligned} \left| \int \frac{g(\xi')}{(1+|\xi'|)^{\frac{s}{2}-\frac{1}{4}}} \psi(\xi') d\xi' \right| &\leq \left(\int |g(\xi')|^2 d\xi' \right)^{1/2} \left(\int \frac{|\psi(\xi')|^2 d\xi'}{(1+|\xi'|^2)^{s-\frac{1}{2}}} \right) \\ &\leq CN(\psi) \end{aligned}$$

où $N(\psi)$ est semi-norme de ψ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$.

③ D'après (Q) on a :

$$(1+|\xi'|^2)^{s-\frac{1}{2}} \left| \frac{1}{2\pi} \int \hat{u}(\xi', \xi_n) d\xi_n \right|^2 \leq C_s \int (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi_n$$

Comme le membre de droite appartient à $L^1(\mathbb{R}^{n-1})$ on en déduit (3.) et l'inegalite qui suit. ■

Comme $\gamma u = u(x', 0)$ si $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ le lemme précédent montre que l'application se prolonge en une application linéaire continue

$$\boxed{\gamma : H^s \to H^{s-\frac{1}{2}}.}$$

Il reste montre que γ est surjective, ceci est assuré par le lemme suivant :

Lemme 4.4.3 Soit $s > \frac{1}{2}$. Il existent $n \in \mathbb{N}$, $C_N > 0$, $K_N > 0$ tels que pour tout $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$ si l'on pose

$$u = \overline{\mathcal{F}}(K_n \frac{(1+|\xi'|^2)^n}{(1+|\xi|^2)^{n+\frac{1}{2}}} \hat{v}(\xi'))$$

alors

① $u \in H^s$ et $\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq C_n \|v\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})}$

② $\gamma u = v$

Preuve 4.4.3 ① Montrons tout d'abord que u a bien un sens. En effet , si $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$ la fonction

$$\xi \mapsto K_n \frac{(1+|\xi'|^2)^n}{(1+|\xi|^2)^{n+\frac{1}{2}}} \hat{v}(\xi')$$

appartient à L^∞ donc à $\mathcal{S}'$ alors $\hat{u}$ est une fonction continue et

$$(1+|\xi|)^s |\hat{u}|^2 = (1+|\xi|')^{2n} \frac{K^{2n}}{(1+|\xi|^2)2n+1-s}$$

Fixons n tel que $4n+2-2s > 1$
i.e $n > \frac{s}{2} - \frac{1}{2}$ le membre de droite est intégrable en ξ_n et

$$\int (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi_n \leq K_n^2 \left(\int \frac{d\xi_n}{(1+|\xi|^2)^{2n+1-s}} \right) (1+|\xi'|^2)^{2n} |\hat{v}(\xi')|^2.$$

Posons $\xi_n = (1+|\xi'|^2)^{\frac{1}{2}} \eta_n$ dans l'intégrale du membre de droite donc

$$\int (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi_n \leq C_n^2 (1+|\xi'|^2)^{s-\frac{1}{2}} |\hat{v}(\xi')|^2$$

où

$$C_n^2 = \int \frac{d\eta_n}{(1+|\eta|^2)^{2n+1-s}}$$

donc $u \in H^s$ et

$$\|u\|_{H^s}^2 \leq C_n'^2 \|v\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})}$$

② Puisque $u \in H^s$, on en déduit du lemme que l'on a

$$\gamma u = \overline{\mathcal{F}_{\xi'}}(\frac{1}{2\pi}) \int K_n \frac{d\xi_n}{(1+|\xi|^2)^{n+\frac{1}{2}}} (1+|\xi'|^2)^n \hat{v}(\xi')$$

Or $2n+1 > s+\frac{1}{2} > 1$ et

$$\int \frac{d\xi_n}{(1+|\xi|^2)^n + \frac{1}{2}} = \frac{1}{(1+|\xi'|)^n} \int \frac{d\eta_n^2}{(1+\eta)^{n+\frac{1}{2}}} = A_n (1+|\xi'|^2)^{-n}$$

donc

$$\gamma u = \overline{\mathcal{F}}_{\xi'} \left(\frac{1}{2\pi} K_n A_n (1+|\xi'|^2)^{-n} (1+|\xi'|^2)^n \hat{v}(\xi') = \frac{1}{2\pi} K_n A_n v \right)$$

Il suffit donc de prendre $K_n = \frac{2\pi}{A_n}$

Pour en finir avec la preuve de la démonstration du théoréme, soit $v \in H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ donc il existe une suite $(v_j)_j$ dans $\mathcal{S}$ telle que $v_j \to v$ dans $H^{s-\frac{1}{2}}$ alors avec u_j défini comme au lemme précédent on a

$$\gamma u_j = v_j$$

et

$$\|u_j - u_k\|_{H^s} \leq C_n \|v_j - v_k\|^{H^{s-\frac{1}{2}}}$$

Donc la suite (u_j) est de Cauchy dans H^s et converge vers $u \in H^s$ alors d'aprés le lemme précédent

$$v_j = \gamma u_j \to \gamma u \quad \text{dans} \quad H^{s-\frac{1}{2}}.$$

D'où $\gamma u = v$ et γ est surjective. ■

4.5 Théorème de prolongement de Sobolev

<u>Théorème</u> **4.5.1** *Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $s > \frac{N}{2} + k$, on a*

$$\boxed{H^s(\mathbb{R}^n) \subset C^k(\mathbb{R}^n)}$$

Plus précisément, tout $f \subset H^s(\mathbb{R}^n)$ est égale p.p. à une fonction de $C^k(\mathbb{R}^n)$. De plus, il existe une constante $C_{n,k,s} > 0$ telle que, pour tout $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$,

$$\boxed{max_{|\alpha| \geq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\partial^\alpha f(x)| \leq C_{n,k,s} \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}}$$

<u>Preuve</u> 4.5.1 Soit $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$; on a donc

$$(1 + |\xi|^2)^{s/2} \mathbb{F} f \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Or, comme $s > \frac{n}{2} + k$ et pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}$ tel que $|\alpha| \leq k$, la fonction

$$\xi \mapsto \frac{i^{|\alpha|}\xi^\alpha}{(1 + |\xi|^2)^{s/2}} \quad \text{appartient à} \quad L^2(\mathbb{R}^n)$$

de sorte que

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha f) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R^n} e^{ix.\xi}\mathcal{F}(\partial\alpha)(\xi)d\xi,\ \ pourtoutx \in \mathbb{R}^n$$

appartient à $L^1(\mathbb{R}^n)$ d'après la proposition 3.3.7(a) et l'inégalité de Cauchy-Schwrtz. Par inversion de Fourier,la distribution tempérée $\partial^\alpha f$ est en fait une fonction continue, et on a

$$\partial^\alpha f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi}\mathcal{F}(\partial^\alpha f)(\xi)d\xi, \quad \text{pour tout} x \in \mathbb{R}^n$$

On en déduit que, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq k$, on a

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha f(x)| &\leq \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(\partial^\alpha f)(\xi)|d\xi \\
&\leq C_{n,k,s}\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\|(1+|\xi|^2)^{s/2}\mathcal{F}f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&= C_{n,k,s}\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

avec

$$C_{n,k,s} = (\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{(1+|\xi|)^{2k}}{(1+|\xi|^2)^s})^{1/2} < \infty$$

puisque $2s - 2k > n$. ■

Une conséquence immédiate du théorème de plongement de Sobolev est le fait que

$$\boxed{\bigcap_{s\in\mathbb{R}} \boldsymbol{H}^s(\mathbb{R}^n) \subset \boldsymbol{C}^\infty(\mathbb{R}^n).}$$

Chapitre 5

APPLICATIONS

Nous traiterons deux exemples pour mettre en valeur la puissance du raisonnement variationnel dans la résolution de certaines équations aux dérivées partielles qui représentent les principales familles d'EDP. Il s'agit les équations de Laplace, des ondes, de la chaleur et de Schrödinger.

5.1 Exemple : Le problème de la plaque encastrée

Soit Ω un ouvert borné à bord lipschitzien. Soit $f \in L^2(\Omega)$, on cherche u solution de

$$(Enc)\begin{cases}\Delta^2 u = f & \text{dans } \Omega\\ \gamma_0 u = \gamma_0 \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0. & \text{dans } \Gamma\end{cases}$$

> Ce problème représente l'équation d'une plaque :
>
> $u(x)$ étant le déplacement perpendiculaire à celle-ci au poit x, f est la densité de la force et les conditions au bord signifiant que la plaque est encastrée au bord.

Une formulation variationnelle de ce problème est obtenue en choisissant :

$$\begin{cases} V = H_0^2(\Omega) \\ a(u,v) = \int_\Omega \left[\Delta u \Delta v - (1-\mu) \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right\} \right] dxdy, \\ F(v) = \int_\Omega f(x)v(x)dx, \end{cases}$$

ou $\mu \in]0,1[$ est le coefficient de poisson du matériau de la plaque . ■

5.2 Exemple : Système de L'élasticité linéarisée

Nous appliquons l'approche variationnelle à la résolution du système d'équations de l'élasticité linéarisé. Ces équation modélisent les déformations d'un solide sous l'hypothèse de prtites déformations et de petits déplacements. On considère less équations stationaircs dc l'élasticité c'est à dire indépendantes du temps.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Soit une force $f(x)$, une fonction de Ω dans $\mathbb{R}^n$. L'inconnu u (le déplacement) est aussi une fonction de Ω dans $\mathbb{R}^n$. La modélisation mécanique fait intervenir le tenseur des déformations noté $e(u)$, qui est une fonction à valeurs dans l'ensemble des matrices symétriques

$$e(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^t) = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})_{1<i,j<n}$$

ainsi que le tenseur des contraintes σ (c'est une autre fonction à valeurs dans l'ensemble des matrices symétriques) qui est relié à $e(u)$ par la loi de Hooke

$$\sigma = 2\mu e(u) + \lambda tr(e(u))Id,$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé du matériau homogène isotrope qui occupe Ω. Pour des raisons de thermodynamique les de Lam vérifient

$$\mu > 0 \quad et \quad 2\mu + N\lambda > 0.$$

On ajoute à cette loi constituve le bilan des forces dans le solide

$$-div \quad \sigma = f \quad dans\Omega$$

où, par définition, la divergence de σ est le vecteur de composantes

$$div \quad \sigma = (\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j})_{1<i<n}$$

En utilisant le fait que $tr(e(u)) = div \quad u$, on en déduit les équations pour $1 \leq i \leq n$:

$$\boxed{-\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(\mu(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) + \lambda(div \quad u)\delta_{ij}) = f_i \quad dans \quad \Omega}$$

avec f_i et u_i, pour $1 \leq i \leq n$, les composantes de f et u dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. En ajoutant une condition aux limites considéré est :

$$\begin{cases} -div(2\mu e(u) + \lambda tr(e(u))Id) = f & \text{dans } \Omega \\ \quad u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

On montre, et nous l'admettons, que ce problème admet une unique solution faible $u \in H_0^1(\Omega)^N$, si $f \in L^2(\Omega)^N$. ■

Bibliographie

[1] R. A. ADAMS. *Sobolev spaces.* Academic Press, New-York 1975.

[2] CLAUDE ZUILY. *Éléments de distributions et équations aux dérivées partielles.* Dunod, Paris 2009.

[3] L. DI MENZA. *Analyse numérique des équations aux dérivées partielles.* Cassini, Paris 2009.

[4] S. NICAISE. *Analyse numériques des équations aux dérivées partielles.* Dunod, Paris 2000.

[5] M. WILLEM. *Analyse fonctionnelle.* Cassini, Paris 2003.

[6] M. TUCSNAK. *Distributions et équations fondamentales de la Physique.* Paris, 2005. Editions O'REILLY, Paris 1999.

[7] KENDALL ATKINSON ET ALL. *Theoretical Numerical Analysis.* Springer, 2009.