République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Mathématiques appliquées**

Par :

DALI Soumia

Intitulé

Closed Fredholm and semi-Fredholm operators, Essential Spectra and perturbations

Dirigé par : DEBBAR Rabah

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. BENARIOUA KHadir	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. DEBBAR Rabah	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. BENDJAZIA Nassima	Univ-Guelma

Session Juin 2016

Remerciement

Je tiens tout d'abord à remercier ALLAH qui m'a donné le courage, la santé, et la volonté pour réaliser ce modeste travail tout au long de mes années d'études.

A : Dr. DEBBAR Rabeh , que je remercie de m'avoir inspiré le choix de ce sujet, pour son encadrement et pour ses précieux et judicieux conseils qu'il n'a cessé de me prodiguer tout au long de ce travail.

Je suis très honoré que Dr. BENARIOUA Khadir ait accepté de rapporter mon travail et de présider mon jury de soutenance, je le remercie pour ses conseils et ses précieuses remarques.

Je remercie Dr. BENDJAZIA Nassima d'avoir accepté d'examiner mon travail, je suis très heureuse de le voir participer à mon jury.

Mes remerciements vont également à tous mes enseignants de l'université de Guelma qui m'ont aidé pendant mes années d'étude.

Je remercie tous ceux qui ont participé de loin ou de près à la réalisation de ce travail.

A mes collèges pour tous les moments qu'on a passé ensemble.

Dédicace

Je remercie dieu qui m'a aidé et ma donné la volonté et le courage pour réussir dans ma vie et mes études. Ce modeste travaille est dédié :

A ma plus chère mère « Farida » la seul qui ma aidé à réussir dans mes études, que dieu la protégé et la garde pour moi.

A mon père qui mon top aidé pour arriver a ce que je suis maintenant.

A mes chères sœurs : « Sameh » et son mari « Rabah » et « Sabrina » et son mari « Adel ».

A mes frères : « Mohamed » et son épouse « Imen » et «Aymen ».

A mon mari : « Hamza ».

A ma nièce : « yassmine ».

A mes neveux : « Nadjmi », « Ahmed » et « Zaki ».

A toute ma famille et tous mes amies surtout : « Wassila », « Hanane », « Loubna », « Asma », « Rima », « Sara », « Fifi »et « Missou ».

Et la section math 2016 et tous ceux qui me son chers .

Qui Dieu vous garde !

SOUMIA

Résumé

Dans ce mémoire , nous fournissons plutôt vastes caractérisations de fermeture densément défini Fredholm et les opérateurs de semi - Fredholm sur un espace de Banach , et leur les classes de perturbation. Nous utilisons les notions de mesure de noncompactness , égalités de normes particulières , et certains "pseudo " concepts d'algèbre de Banach comme ils se rapportent aux opérateurs fermés . Classes de perturbations de Fredholm et fermé opérateurs semi- Fredholm sont effectivement identifiés , respectivement , avec des classes des perturbations du Loup , Schechter et Gustafson - Weidman essentiel Les spectres pour les opérateurs fermés. Un sous-produit de cette identification est une généralisation du théorème de Weyl célèbre qui caractérise le spectre essentiel d'un opérateur auto-adjoint compact sur un espace de Hilbert . On obtient spectral théorèmes de cartographie pour certains spectres particulier essentiel Wolf et Schechter . Fredholm

Table des matières

Introduction

Ce la théorie de l'opérateur Fredholm a joué un rôle de plus en plus dans enquêtes sur les différentes classes d' équations intégrales singulières , en la théorie de la perturbation des opérateurs hermitiens par hermitienne et summands non hermitiennes , dans la théorie des opérateurs dans les espaces avec métrique indéfinie , et à obtenir des estimations a priori pour déterminer propriétés de certains opérateurs différentiels . En effet , les opérateurs linéaires qui résultent de différentiel ordinaire expressions de la forme

$$T = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0$$

où $D = d/dt$ et les coefficients sont a_k fonctions complexes d'une valeur d'une variable réelle , donner des exemples significatifs de fermeture densément opérateurs de Fredholm sans bornes defini sur les espaces de Banach Familar de les fonctions. Dans ces notes, nous fournissons plutôt vastes caractérisations de fermeture densément défini Fredholm et semi-Fredholm opérateurs sur un espace de Banach, et leurs classes de perturbation. Nous utilisons la notions de mesure de noncompactness, égalités de normes particulières, et certains "pseudo" concepts d'algèbre de Banach comme ils se rapportent à fermé les opérateurs. Classes de perturbations de Fredholm fermé et semi Opérateur de Fredholm sont efficacement identifiés, respectivement, par le classes de perturbations du Schechter, Wolf et Gustafson- spectres essentiels Weidman pour les opérateurs fermés. Un sous-produit de cette identification est une généralisation du théorème de Weyl célèbre qui caractérise le spectre essentiel d'un auto-adjoint compact opérateur sur un espace de Hilbert. Nous obtenons des théorèmes de cartographie spectrale pour certains spectres particulier essentiel Wolf et Schechter.

Chapitre 1

Opérateurs fermé de fredholm et semi fredholm

Soit X un espace de Banach. Par un opérateur A sur X, nous entendons un linéaire opérateur de domaine $D(A) \subset X$ et de l'image $R(A) \subset X$. Le null l'espace d'un opérateur A à X est représenté par N (A). La nullité de A, qui est la dimension de N (A), est désignée par $a(A)$, alors que $b(A)$ représente le défaut de A, soit la codimension de $R(A)$ dans X. Lorsque $a(A)$ ou $b(A)$ est fini, l'indice $i(A)$ est donnée par : $i(A) = a(A) - b(A)$. Un opérateur fermé au domaine danse A sur X est dit être un opérateur de fredholm si elle satisfait à la suivante

.

(i) a(A) est fini ,

(ii) b(A) est fini ,

(iii) R(A) est fermée dans X .

opérateurs fermés Densément définis sur X vérifiant (i) et (iii) ci-dessus sont dits opérateurs supérieurs semi- Fredholm , et ceux qui satisfont (ii) et (iii) sont appelés opérateurs semi Fredholm inférieurs. Soit $\Phi(X)$ désignent l'ensemble des opérateurs de Fredholm , $\Phi_+(X)$ l'ensemble des semi- supérieure opérateurs de Fredholm , et $\Phi_-(X)$ l'ensemble des bas semi- Fredholm les opérateurs. Observez que si X est de dimension finie , chaque densément opérateur défini sur X est trivialement un membre de chacun de ce qui précède les classes , donc ci-après nous supposons que X est de dimension infinie . Etant donné un sous-ensemble Q de X , la mesure noncompactness de $q(Q)$ est Défini par

$$q(Q) = \begin{cases} \infty \quad \text{Si Q est illimitée ,} \\ \inf\{r|Q \text{ peut être recouvert par un nombre fini de sphères de rayon r}\}, \\ \text{si Q est borné.} \end{cases}$$

Nous observons qu'un sous-ensemble Q de X est totalement bornée si et seulement si $q(Q) = 0$, et par conséquent la fermeture $\overline{Q}$ de Q est compact si et seulement si $q(Q) = 0$. Il est également clair que, compte tenu des sous-ensembles Q_1, Q_2 de X, $q(Q_1+Q_2) \leq q(Q_1)+q(Q_2)$ autre avis que si Q est un sous-ensemble de X et $A \in B(X)$, qui est, A est un opérateur linéaire bornée sur X avec $D(A) = X$, alors $q(A(Q)) \leq \|A\| q(Q)$. Soit A un opérateur sur X. Alors une suite singulière dans X par rapport à A est la suite $\{x_k\}$, $k = 1,2,\cdots dans D(A)$ de telle sorte que

(i) $\|x_k\| = 1$, $k = 1,2,\cdots$;

(ii) $\{x_k\}, k = 1,2,\cdots$,n'a pas de sous-suite convergente dans X;

(iii) Ax_k converge vers 0 lorsque k tend vers l'infini.

Soit A un opérateur sur X. Soit U la collecte de sous-espace fermé W de X avec codimension finie de telle sorte que $W \cap D(A) \neq \{0\}$. Définir $v(A)$

$$v(A) = \sup_{W\in U}\{ \inf_{\substack{x \in W \cap D(A) \\ \|x\| = 1}} \|Ax\|\}$$

Lemme 1.1. *(Kato [1, 31). Soit K (X) l'ensemble des opérateurs compacts sur X avec des domaines tout l'espace X. Supposons $A \in \Phi_+(X) \cup \Phi_-(X)$ et $K \in K(X)$. alors*

(i) $A + K$ a image fermé dans X, $(D(A+K) = D(A))$.

(ii) $i(A+K) = i(A)$.

(iii) Pour scalaires c, $a(A+cK)$ *et* $b(A+cK)$ *ont constant les valeurs* m, n, *respectivement, à l'exception peut-être des points isolés. Au points isolés* $a(A+cK) > m$ *et* $b(A+cK) > n$.

Une conséquence immédiate du lemme ci-dessus est le suivant.

(i) Pour $A \in \Phi(X)$, *et* $K \in K(X)$, $A+K \in \Phi(X)$ *avec* $i(A+K) = i(A)$.

(ii) Pour$A \in \Phi_+(X)$ *et*$K \in K(X)$, $A+K \in \Phi_+(X)$ *avec* $i(A+K) = i(A)$.

(iii) Pour $A \in \Phi_-(x)$ *et*$K \in K(X)$, $A+K \in \Phi_-(X)$ *avec* $i(A+K) = i(A)$.

Lemme 1.2. *(Yood [2, 41]). Supposons* $A \in \Phi(X)$. *Alors il existe* $A_0 \in B(X)$*et des opérateurs à image de dimension fini* F_1,F_2 *dans* $K(X)$ *de telle sorte que*

(i) $A_0 A = I - F_1$ *sur D(A).*

(ii) $AA_0 = I - F_2$ *sur X.*

de plus, si $A \in \Phi(X) \cap B(X)$, $A_0 \in \Phi(X)$ *avec* $i(A) = -i(A_0)$. *A l'inverse si A est un opérateur fermé à domaine dense dans X et il existe* A_0*dans* $B(X)$ *et de* K_1, K_2 *dans* $K(X)$ *satisfaisant* $A_0 A = I - K_1$ *dans D (A), et* $AA_0 = I - K_2$ *dans X,alors* $A \in \Phi(X)$.

Lemme 1.3. *Soit A un opérateur fermé densément defini sur X. Alors* $A \in \Phi_+(X)$ *avec* $i(A) \leq 0$ *si et seulement si* $A = A_0 + F$ *dans D (A), où* $A_0 \in \Phi_+(X)$ *avec* $a(A_0) = 0$ *et F est un opérateur de rang fini sur X.*

Preuve . Supposons $A = A_0 + F$ avec A_0 et F comme précédemment. Alors c'est clair du lemme 1.1 que $A \in \Phi_+(X)$ avec $i(A) = i(A_0+F) = i(A_0) \leq 0$. Supposons maintenant que $A \in \Phi_+(X)$ et $i(A) \leq 0$. Soit $a(A) = n$. Si $n = 0$, le résultat est clair avec F considéré comme l'opérateur zéro. Supposons que $n > 0$. $i(A) \leq 0$. Par conséquent $b(A) > n$. Par conséquent, Il existe n éléments $y_1, y_2, ..., y_n$ en X qui sont linéairement indépendants module R(A). Soit

$\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ une base de $N(A)$. Soit $x_i^{'}$dans l'espace dual $X^{'}$ de$X$, $i = 1,2,\cdots,n$ est choisi de telle sorte que

$$x_i^{'}(x_j) = \begin{cases} 1 & pour\ i = j \\ o & pour\ i \neq j \end{cases} \qquad (i,j = 1,2,\cdots,n).$$

Définir $F \in B(X)$ par

$$Fx = \sum_{i=1}^{n} x_i^{'}(x) y_i \quad pour\ chaque\ x \in X.$$

F est clairement un opérateur de rang fini. Défini A_0 sur $D(A)$ par $A_0x = Ax - Fx$ pour $x \in D(A)$, $A_0 \in \Phi_+(X)$ par le lemme 1.1 que $a(A_0) = 0$. En effet, supposons $x \in N(A_0)$. alors

$$Ax = Fx = \sum_{i=1}^{n} x_i^{'}(x) y_i$$

. Le y_i sont module R(A) linéairement indépendants. Par conséquent, $x_i^{'}(x) = 0$ pour $i = 1,2,\cdots,n$. Par conséquent,$Ax = 0$. Par conséquent, $x \in N(A)$. Ainsi

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i,$$

où le c_i sont scalaires. Maintenant $x_i^{'}(x) = 0$ pour tout i et $x_i^{'}(x_j) = \delta_{ij}$. Ainsi $c_i = 0$ pour tout i. D'où $x = 0$.

Théorème 1.1. *Soit A un opérateur fermé à domaine danse sur X. Ensuite, les équivalentes suivantes sont :*

(i) $A \in \Phi_+(X)$.

(ii) Il existe constante positive C telle que pour chaque bornée sous-ensemble Q de $D(A)$,$q(Q) \leq Cq(A(Q))$.

(iii) A n'a pas une séquence unique.

(iv) $\nu(A) \neq 0$.

(v) Pour chaque $K \in K(X)$, $a(A-K)$ *est fini.*

Preuve Nous montrons d'abord que (i) implique (ii) implique (iii) implique (i) et ensuite : (i) si et seulement si (iv) et (i) si et seulement si (v). (i) implique (ii). Soit $A \in \Phi_+(X)$ et Q est supposons partie bornée de $D(A)$. Non plus $A \in \Phi(X)$ ou $i(A) \leq 0$. Supposons $A \in \Phi(X)$. Ensuite, par le lemme 1.2, il existe $F \in K(X)$ et $A_0 \in B(X)$, tel que $A_0 A = I - F$ sur $D(A)$. Ainsi,

$$q(Q) = q((A_0 A + F)Q) \leq q(A_0 A(Q)) + q(F(Q)) = q(A_0 A(Q)) \leq \| A_0 \| \, q(A(Q)).$$

Supposons maintenant que $i(A) \leq 0$. Supposons Q une partie bornée de $D(A)$. Si $q(A(Q)) = \infty$, le résultat est clair. Supposons alors que $q(A(Q)) < \infty$. D'après le lemme 3 il existe $A_0 \in \Phi_+(X)$ avec $a(A_0) = 0$ et $F \in K(X)$ de telle sorte que $A_0 = A - F$ sur $D(A)$. Ainsi,

$$q(A_0(Q)) = q((A - F)Q) \leq q(A(Q)) < \infty.$$

En conséquence de la théorème de l'image fermé l'opérateur fermé injectif dans un espace de Banach, il existe $M > 0$ tel que pour chaque $x \in D(A)$,

$$\| x \| \leq M \| A_0 x \| . \tag{1.1}$$

Soit $y_1, y_2, \cdots, y_n$ être un $\epsilon - net$ $A_0(Q)$. Pour chaque y_k dont $\epsilon - sphère$ a intersection non vide avec $A_0(Q)$, considérer l'ensemble des x dans Q de telle sorte que $\| A_0 x - y_k \| < \epsilon$. Choisissez l'une et l'étiqueter x_k, maintenant Soit x un point quelconque de Q et soit y_k être telle que $\| A_0 x - y_k \| < \epsilon$. Ensuite, il y a un x_k de mentionné ci-dessus définie de telle sorte que $\| A_0 x_k - y_k \| < \epsilon$. Ainsi

$$\| A_0(x - x_k) \| \leq \| A_0 x - y_k \| + \| y_k - A_0 x_k \| < 2\epsilon.$$

Par inégalité (1.1), $\| x - x_k \| < 2M\epsilon$. Ainsi, le x_k forme a $2M\epsilon - net$ pour Q. Par conséquent

$$q(Q) \leq 2Mq(A_0(Q)) = 2Mq((A - F)Q) \leq 2Mq(A(Q)).$$

(ii) implique (iii). Supposons que A a une suite singulier x_k, $k = 1, 2, \cdots$. Soit Q l'ensemble des points de la suite $\overline{Q}$,alors Q sous ensemble bornée dans $D(A)$ satisfaisant et n'est pas compact. cependant, par (ii), $q(Q) \leq Mq(A(Q))$ ou un $M > 0$. Il est clair que $A(Q) = \{0\}$. Ainsi $q(Q) = 0$. Donc $\overline{Q}$ est compact. (Contradiction). (iii) implique (i). Supposons que A ne soit pas un membre de $\Phi_+(X)$. alors soit $a(A) = \infty$ ou $a(A) < \infty$ et$R(A)$ ne sont pas fermés. Supposer $a(A) = \infty$. Par l'utilisation répétée du lemme de Riesz, on obtient facilement un suite $\{x_k\}$, $k = 1, 2, \cdots$ dans $N(A)$ de telle sorte que $\| x_k \| = 1$ avec $k = 1, 2, \cdots$, et $\| x_i - x_j \| \geq \frac{1}{2}$ pour$i \neq j$ Il est clair que la suite $\{Ax_k\}$, $k = 1, 2, \cdots$, converge vers 0 lorsque K tend vers l'infini. Par conséquent $\{x_k\}$, $k = 1, 2, \cdots$, est une suite singulière pour A et par (iii) nous avons une contradiction. Supposons maintenant que $a(A) < \infty$ et $R(A)$ ne sont pas fermés. $N(A)$ a dimension finie ; par conséquent, il existe sous-espace fermé X_0de X tel que $X = N(A) \bigoplus X_0$,. La restriction de A à Banach l'espace X_0 est un opérateur fermée injectif de X_0 à X avec l'image $R(A)$. Ainsi, par théorème à image fermé $R(A)$ est fermée dans X si et seulement s'il existe $C > 0$ tel que pour chaque $x \in X_0 \cap D(A)$, $\| x \| \leq c \| Ax \|$.Par conséquent pour chaque entier positif K il existe $x_k \in D(A)$ tel que

$$\| x_k \| = 1 \quad and \quad \| x_k \| > k \| Ax_k \|$$

Il est clair que $\{Ax_k\}$ converge vers 0 lorsque R tend vers l'infini. De plus, $\{x_k\}$ n'a pas sous-suite convergente. Pour supposer que $\{x_n\}$ est un suite de $\{x_k\}$ qui converge vers x comme n tend vers l'infini. Maintenant $\{Ax_n\}$ converge vers 0 quand n tend vers l'infini et A est un opérateur fermé sur X_0. Par conséquent $x \in D(A) \cap X_0$et $Ax = 0$. Ainsi $x \in N(A) \cap X_0$ qui est une contradiction puisque $\| x \| = 1$ et $N(A) \cap X_0 = \{0\}$. Ainsi $\{x_k\}$ est une suite singulière de A qui contredit notre hypothèse (iii). (I) implique (iv). Soit A membre du $\Phi_+(X)$. Alors, la dimension $N(A)$ est finie. Par conséquent, il existe un sous-espace fermé W de X tel que $X = N(A) \bigoplus W$. L'opérateur A a domaine dense dans une espace de banach X. Ainsi

$W \cap D(A) \neq 0$. La restriction de A l'espace de Banach W est un opérateur fermé et injectif de W à X avec l'image $R(A)$ fermée . Ainsi, il existe $M > 0$ de telle sorte que pour chaque $x \in D(A) \cap W$, $\| x \| \leq M \| Ax \|$. En particulier, pour $x \in D(A) \cap W$ satisfaisant $\| x \| = 1$,$\| Ax \| \geq 1/M > 0$. Ainsi,

$$\inf_{\substack{x \in W \cap D(A) \\ \| x \| = 1}} \| Ax \| \geq 1/M$$

Par conséquent, $\nu(A) > 0$. (iv) implique (i). Supposons que A ne soit pas un membre de $\Phi_+(X)$. alors soit la dimension de $N(A)$ est fini et $R(A)$ ne soit pas fermé ou la dimension $N(A)$ est infinie. Supposons que $a(A)$ est finie et $R(A)$ ne sont pas fermées. Soit W un sous-espace fermé de X avec codimension finie X tel que $W \cap D(A) \neq 0$.Alors il existe alors de dimension finie sous-espace X_1 de$X$ tel que $X = X_1 \bigoplus W$. Il existe également fermé sous-espace X_0, X tels que $X = X_0 \bigoplus N(A)$. Clairement,

$$W \cap D(A) = (W \cap N(A)) \bigoplus ((W \cap (X_0 \cap D(A)))$$

Par conséquent,

$$A(W \cap D(A)) = A(W \cap X_0 \cap D(A))$$

et

$$R(A) = A(X_1 \cap D(A)) + A(W \cap X_0 \cap D(A))$$

. Maintenant $R(A)$ ne soit pas fermé dans X et$A(X_1 \cap D(A))$ est de dimension finie ; donc $A(W \cap X_0 \cap D(A))$ n'est pas un sous-espace fermé de X. L'opérateur A restriction à l'espace de Banach $W \cap X_0$, est un-à-un opérateur fermé de $W \cap X_0$, à X avec la gamme $A(W \cap X_0 \cap D(A))$ pas fermé dans X. Par conséquent, nous concluons que plus tôt dans des situations similaires il existe une suite $\{x_k\}$, $k = 1, 2, \cdots$, dans $W \cap X_0 \cap D(A)$ de telle sorte que $\| x_k \| = 1$,

$k = 1,2,\cdots$ et $\{Ax_k\}$ converge vers 0 à k de l'approche infini. Ainsi,

$$\inf_{\substack{x \in W \cap D(A) \\ \| x \| = 1}} \| Ax \| = 0$$

W était arbitraire . Par conséquent , $\upsilon(A) = 0$. Supposons maintenant que la dimension $N(A)$ est infinie. Soit W donnée ci-dessus. W a codimension finie ; par conséquent, la dimension X/W est fini. Nous allons montrer que $W \cap N(A) \neq \{0\}$ et il suit comme ci-dessus que$\upsilon(A) = 0$. Supposons au contraire que $W \cap N(A) = \{0\}$. Soit $\{x_1, x_2, \cdots\}$ un dénombrable linéairement indépendant sous-ensemble de $N(A)$. Suppose

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \overline{x_i} = \overline{0} \{ \overline{x} = x/W$$

alors

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \quad \text{est membre de } W.$$

Maintenant $W \cap N(A) = \{0\}$. Ainsi,

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i = 0$$

Ainsi, $c_i = 0$ pour $i = 1,2,\cdots,n$. Ainsi X/W est de dimension infinie (contradiction). (i) implique (v). Etant donné que A est un membre du $\Phi_+(X)$ et K est un membre de $K(X)$, puis $A - K$ est un membre du $\Phi_+(X)$ par le lemme 1.1. Ainsi, $a(A-K)$ est fini. (v) implique (i). Supposons que A ne soit pas un membre de $\Phi_+(X)$. (iii) implique (i). Par conséquent, A une suite singulière. Ainsi, il est clair qu'il existe x_1 dans X tel que $\| x_1 \| = 1$et $\| Ax_1 \| < 2^{-l}$. Par théorème de Hahn- Banach il existe $x_1^{'}$ dans $X^{'}$ tel que $\| x_1^{'} \| = 1$ et $x_1^{'}(x_1) = 1$. Supposons maintenant que les ensembles $\{x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots, x_{n-1}\}$, $x_k \in X$, et $\{x_1^{'}, x_2^{'}, \cdots, x_k^{'}, \cdots, x_{n-1}^{'}\}$, $x_k^{'} \in X^{'}$, avec $K = 1,2,\cdots,n-1$, ont été construit de telle sorte que $\| x_k \| = 1$, $\| Ax_k \| < 2^{1-2k}$, $\| x_k^{'} \| < 2^{k-1}$, et $x_i^{'}(x_j) = \delta_{ij}$, $1 = i, j = n-1$. Soit M_k l'espace nul de $x_k^{'}$ pour

$K = 1, 2, \cdots, n-1$. Soit

$$M = \bigcap_{k=1}^{n-1} M_k$$

. Chaque M_k a codimension un dans X ; ainsi, M a codimension finie dans X. A a une suite singulier dans X. Ainsi, il existe x_n en M de telle sorte que $\| x_n \| = 1$ et $\| Ax_n \| < 2^{1-2n}$. Soit $x^{'}$ dans $X^{'}$ de telle sorte que $\| x^{'} \| = 1$ et $x^{'}(x_n) = 1$. Ensuite, la fonction linéaire

$$x_n^{'} = x^{'} - \sum_{k=1}^{n-1} x^{'}(x_k) x_k^{'}$$

satisfait $x_n^{'}(x_k) = \delta_{nk}$, $K = 1, 2, \cdots, n$, et $\| x_n^{'} \| \leq 2^{n-1}$. ainsi, par l'induction, il est possible de construire des ensembles

$$\{x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots\} \quad et \quad \{x_1^{'}, x_2^{'}, \cdots, x_k^{'}, \cdots\},$$

où $\| x_k \| = 1$, $\| x_k^{'} \| \leq 2^{k-1}$, $\| Ax_k \| < 2^{1-2k}$, et $x_i^{'}(x_i) = \delta_{ij}$. Définie K_n dans $K(X)$ par

$$K_n x = \sum_{k-1}^{n} x_k^{'}(x) A x_k, \ pourchaque \ xdansX.$$

Pour m, n entiers positifs (disons $m < n$),

$$\| (K_n - K_m) x \| \leq \left(\sum_{k=m+1}^{n} 2^{k-1} 2^{1-2k} \right) \| x \| \leq 2^{-m} \| x \| .$$

Ainsi, il existe K en $K(X)$ tel que K_n, converge vers Kdans $B(X)$ en tant que n tend vers l'infini. L'ensemble dénombrable $\{x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots\}$ est clairement linéairement indépendants et satisfait $K(x_k) = Ax_k$, $k = 1, 2, \cdots$. Ainsi $a(A - K)$ est infini.

Définition 1.1. *Soit A un opérateur sur X. Soit V la collection de sous-espaces de dimension infinie W de X tel que $W \cap D(A) \neq \{0\}$. Soit $t(A)$ être défini par*

$$t(A) = \sup_{W \subset V} \{ \inf_{\substack{x \in W \cap D(A) \\ \| x \| = 1}} \| Ax \| \}$$

Lemme 1.4. *(Lacey [5, 31]). Suppose B est un élément de $B(X)$. alors B est précompact si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un sous-espace N ayant une déficience limite dans X tel que B limité à N est de norme ne dépassant pas ϵ.*

Théorème 1.2. *Soit A un membre du $\Phi_+(X)$. Supposons que E est un opérateur sur X telle que*

(i) $D(A) \subset D(E)$.

(ii) $A+E$ est un opérateur fermé sur X.

(iii) $t(E) < v(A)$.

Alors $A+E$ est un élément de $\Phi_+(X)$.

Preuve Il est clair que $A+E$ est un opérateur fermé au domaine danse sur X. D'où le théorème 1.1, il suffit de montrer que $a(A+E+K)$ est finie pour chacun des K dans $K(X)$. En effet, supposons qu'il existe Kdans $K(X)$ de telle sorte que $a(A+E+K)$ est infini. $A+E+K$ est un opérateur fermé sur X. Ainsi $N(A+E+K)$ est un sous-espace de dimension infinie fermée de X. Soit W une quelconque sous-espace fermé de X avec codimension finie tel que $W \cap D(A) \neq \{0\}$. Soit $\epsilon > 0$ être donné. Par le lemme 1.4 ci-dessus il existe sous espace de dimension infini M de X avec codimension fini tel que K la restriction sur M a norme ne dépassant pas ϵ. Soit $Q = W \cap M \cap N(A+E+K)$. Il est clair que Q est un sous-espace de dimension infini de X satisfaisant $Q \cap D(A) \neq \{0\} \neq Q \cap D(E)$. Pour chaque x dans

Q, de telle sorte que $\| x \|= 1$, $\| Ex \| = \| (A+K)x \| > \| Ax \| - \epsilon$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\inf_{\substack{x \in Q \cap D(E) \\ \| x \| = 1}} \| Ex \| &\geq \inf_{\substack{x \in Q \cap D(E) \\ \| x \| = 1}} (\| Ax \| - \epsilon) \\
&= \{ \inf_{\substack{x \in Q \cap D(E) \\ \| x \| = 1}} \| Ax \| \} - \epsilon \\
&\geq \{ \inf_{\substack{x \in Q \cap D(E) \\ \| x \| = 1}} \| Ax \| \} - \epsilon
\end{aligned}$$

Maintenant W était un sous-espace fermé arbitraire de X avec codimension finie de telle sorte que $W \cap D(A) \neq \{O\}$. Ainsi

$$inf_{\substack{x \in Q \cap D(E) \\ \| x \| = 1}} \| Ex \| \geq v(A) - \epsilon$$

Par conséquent $t(E) \geq v(A) - \epsilon$. Ainsi, $t(E) \geq v(A)$, puisque ϵ est arbitraire (contradiction).

Définition 1.2. *Soit A un opérateur sur X. Supposons $N(A)$ est fermé. Ensuite, le module minimum de A, $y(A)$ est définie par*

$$y(A) = \inf_{x \in D(A)} \| Ax \| / d(x, N(A)).$$

où $0/0$ est défini comme ∞.

Lemme 1.5. *(Kato et Sz.-Nagy [I, 3, 61]. Supposons que A est un membre $\Phi_+(X) \cup \Phi_-(X)$. Soit E un opérateur sur X avec $D(A) \subset D(E)$ pour lesquels il existe des nombres positifs a, b satisfaisant* *(i)* $\| Ex \| \leq a \| x \| + b \| Ax \|$ *pour chaque* x *dans* $D(A)$*,*

(ii) $a + by(A) < y(A)$

. alors

(i) $A + E$ *est un opérateur fermé à image fermée dans* X*.*

(ii) $a(A+E) \leq a(A)$ *et* $b(A+E) \leq b(A)$*.*

(iii) $i(A+E) = i(A)$*.*

Corollaire 1.1. *Soit* A *un membre de* $\Phi_+(X)$*. Soit* E *un membre de* $B(X)$ *et supposons* $t(E)$ *est inférieure à* $v(A)$*. Ensuite,* $A+E$ *est un membre* $\Phi_+(X)$ *et* $i(A+E) = i(A)$*.*

Preuve Il est clair que $D(A) \subset D(E)$ et $A+E$ est fermé. ainsi, par Théorème 1.2, $A+E$ est un membre du $\Phi_+(X)$. Nous procédons à que $i(A+E) = i(A)$. Il est une conséquence immédiate de la définition de $t(E)$ pour c dans l'intervalle fermé entre 0 et 1, $t(cE) = ct(E)$. Ainsi, pour chacun de ces c, $t(cE) < v(A)$ et $A + cE \in \Phi_+(X)$. l'application f de l'intervalle fermé entre 0 et 1 dans l'ensemble étendu des entiers définis par : $f(c) = i(A+cE)$ est continue par rapport à la topologie habituelle sur $[0,1]$ et de la topologie discrète sur la jeu étendu de nombres entiers. Pour suppose c_0 est dans $[0,1]$. Alors $A + c_0E$ est en $\Phi_+(X)$. Ainsi $y(A+c_0E) > 0$. Supposons maintenant c dans $[0,l]$ satisfait $| c - c_0 | \| E \| < y(A+c_0E)$. Ensuite, par le lemme 5 nous concluons que $(c-c_0)E + A + c_0E$ est un élément de $\Phi_+(X)$. De plus, $i((c-c_0)E + (A+c_0E)) = i(A+c_0E)$. Ainsi

$$f(c) = i(A+cE) = i((c-c_0)E + (A+c_0E)) = i(A+c_0E) = f(c_0)$$

. Continuité of f est donc établie. Par conséquent, f est constante. Par conséquent $i(A) = f(0) = f(1) = i(A+E)$.

Définition 1.3. *Un espace de Banach X est appelé subprojective si pour chaque sous espace de dimension infinie V de X il y a sous espace fermé de dimension infinie $W \subset V$ et une projection bornée T de X sur W.*

Remarque 1.1. *Il est clair que chaque espace de Hilbert est subprojective. De plus, les espaces $c_0, l_p, l \leq p < \infty$, et $L_p(O,1), 2 \leq p < \infty$, sont également subprojective [7].*

Définition 1.4. *Un opérateur fermé A sur X est un diviseur gauche de zéro Module $K(X)$ s'il existe un opérateur noncompact T dans $B(X)$ de telle sorte que $R(T) \subset D(A)$ et $AT = K$ dans X sur un certain K en $K(X)$.*

Théorème 1.3. *Soit X subprojective. Soit A un opérateur fermé à domaine danse sur X. Alors, si A n'est pas diviseur gauche de zéro module $K(X)$, A est un élément de $\Phi_+(X)$.*

Preuve Supposons que A ne soit pas un membre de $\Phi_+(X)$. Ensuite, par le théorème 1.1 il existe K en $K(X)$ de telle sorte que la dimension de $N(A-K)$ infini. X est subprojective. Ainsi, il existe une sous espace fermé de dimension infinie $N(A-K)$ et une projection bornée T de X sur W. Il est clair que $T(X) \subset D(A)$. T est non compact, pour une telle hypothèse implique clairement en particulier que la sphère unité fermée en W est compact et donc W est de dimension finie. Nous observons par ailleurs que $(A-K)T = 0$ sur X. Ainsi $AT = KT$. KT est bien sûr compact. Ainsi, A est un diviseur à gauche de zéro modulo $K(X)$. Étant donné un opérateur fermé densément défini A sur X, on note A' l'adjoint ou le conjugué de A défini sur X'. Compte tenu de $M \subset D(A)$, M° désigne l'ensemble des x' de X' satisfaisant $x'(x) = 0$ pour chaque x dans M. Compte tenu $S \subset D(A')$,S représente donc l'ensemble des x dans $D(A)$ de telle sorte que $x'(x) = 0$ pour chaque x' dans S.

Lemme 1.6. *(résultat standard [4]). Soit A un densément dejined fermé opérateur linéaire sur X. Alors,*

(i) si $R(A)$ est fermé dans X, $R(A^{'}) = N(A)^0$ par conséquent est fermé dans $X^{'}$.

(ii) Si $R(A^{'})$ est fermé dans $X^{'}$, alors $R(A) = N(A^{'})^0$ et est donc fermé dans X.

Théorème 1.4. *A est un membre de $\Phi_-(X)$ si et seulement $b(A-K)$ fini pour chaque K dans $K(X)$.*

Preuve Supposons que A est un membre du $\Phi_-(X)$. Alors , $b(A-K)$ est finie pour chaque K dans $K(X)$ par le lemme 1. Supposons maintenant que A est pas un membre $\Phi_-(X)$. Alors, soit $b(A)$ est infini ou $b(A)$ est fini et $R(A)$ ne soit pas fermé dans X. Si $b(A)$ est infini, nous sommes finis, puisque $K = 0$ est compact. Supposons que $b(A)$ est fini et $R(A)$ ne soit pas fermé dans X. Nous montrons d'abord qu'il existe une suite $\{x_k^{'}\}$ avec $x_k^{'}$, un Membre de $D(A^{'})$, $k = 1, 2, \cdots$, et une suite $\{x_k\}$ avec x_k dans X, $k = 1, 2, \cdots$, de telle sorte que

(i) $\| x_k \| \leq (k+l)^k$, $k = 1, 2, \cdots$;

(ii) $\| x_k^{'} \| = 1$;

(iii) $\| A^{'} x_k^{'} \| < 1/2^k (k+1)^k$;

(iv) $x_i^{'}(x_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, \cdots$.

Par hypothèse, $R(A)$ ne soit pas fermé dans X. Ainsi le lemme 6, $R(A^{'})$ est pas fermé dans $X^{'}$. Ainsi par le théorème de l'image fermé, il existe $x_1^{'}$ à $D(A^{'})$ de telle sorte que $\| x_1^{'} \| = 1$ et $\| A^{'} x_l^{'} \| < \frac{1}{4}$. Par définition de norme, il existe x_1 dans X tel que $\| x_1 \| < 2$ et $x_1^{'}(x_1) = 1$. Supposons maintenant que $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ et $x_1^{'}, x_2^{'}, \cdots, x_{n-1}^{'}$ ont été trouvés satisfaisant (i) à (iv). Remarquez que $R(A^{'})$ non fermé dans X implique que $A^{'}(D(A^{'}) \cap \{x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}\}^0$ n'a pas été fermée en $X^{'}$. Il existe donc $x_n^{'}$ dans $D(A^{'}) \cap x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}{}^0$ telle que $\| x_n^{'} \| = 1$

et $\| A^{'}x_{n}^{'} \| < 1/2^{n}(n+1)^{n}$. Il existe aussi x dans X tel que $x_{n}^{'}(x) = 1$ et $\| x \| < 2$. Soit

$$x_n = x - \sum_{k=1}^{n-1} x_{k}^{'}(x) x_k$$

. Alors,

$$\| x_n \| \leq \| x \| \, (1 + \sum_{k=1}^{n-1} \| x_k \|) \leq 2(1 + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)^{k}) \leq (n+1)^{n}$$

. $x_{n}^{'}(x_n) = 1$ et $x_{n}^{'}(x_k) = 0$ pour $k = 1, 2, \cdots, n-1$. Ensuite, $x_{k}^{'}(x_n) = x_{k}^{'}(x) - x_{k}^{'}(x) = 0$ pour $k = 1, 2, \cdots, n-1$. l'existence de notre paire de biorthogonal suites est établie par induction. Nous définissons maintenant rang fini opérateurs Kn par

$$K_n x = \sum_{k=1}^{n} A^{'} x_{k}^{'}(x) x_k$$

pour x in X ,$n = 1, 2, \cdots$. Soit n, m soit des nombres entiers positifs arbitraires avec $m < n$. alors

$$\begin{aligned}
\| K_n x - k_m x \| &\leq \sum_{m+1}^{n} \| A^{'} x_{k}^{'} \| \| x \| \| x_k \| \\
&\leq (\sum_{m+1}^{n} 2^{-k}) \| x \| \\
&\leq (1/2^{m}) \| x \|
\end{aligned}$$

pour x dans X Ainsi, la suite $\{K_n\}$ convergent dans $B(X)$ pour un opérateur compact K où K est donné par

$$kx = \sum_{k=1}^{\infty} A^{'} x_{k}^{'}(x) x_k$$

Il est clair que pour x dans $D(A)$ et pour chaque k, $x_{k}^{'}(K(x)) = A^{'} x_{k}^{'}(x) = x_{k}^{'}(Ax)$. Ainsi, chacun des $x_{k}^{'}$annihile $R(A-K)$. Le $x_{k}^{'}$sont linéairement indépendant. Par conséquent $b(A-K)$ est infini.

Théorème 1.5. *Soit X un espace de Banach réflexif. Soit A un dense defini opérateur fermé sur X. Alors,*

(i) A est un membre du $\Phi_-(X)$ si et seulement si A' est un membre $\Phi_+(X')$.

(ii) A est un élément de $\Phi_+(X)$ si et seulement si A' est un membre $\Phi_-(X)$.

Preuve Il est immédiat que A' est un opérateur fermé bien défini sur X'. Par ailleurs, $D(A')$ est dense dans X'. Pour y'' suppose "en X'' satisfait $y''(x') = 0$ pour tout x' dans $D(A')$. Alors $y'' = 0$. Supposons que X n'est pas réfléxif. Ainsi, il existe x_0 dans X tel que $y''(x') = x'(x_0)$ pour chaque x' dans X'. Il est clair que $x_0 \neq 0$. A est un opérateur fermé. D'où son graphe $G_A = \{(x, Ax) \mid x \in D(A)\}$ est un sous-espace fermé de $X \times X$. $(0, x_0)$ est pas membre de G_A. Il existe z' dans $(X \times X)'$ de telle sorte que $z'(G_A) = \{0\}$ et $z'(0, x_0) \neq 0$. Définir x' dans X' et y' dans X' par

$$x'(x) = z'(x, 0) \quad \text{pour chaque x dans X,}$$

$$y'(x) = z'(0, x) \quad \text{pour chaque x dans X.}$$

Maintenant, $z'(x, Ax) = 0$ pour chaque x dans $D(A)$. Ainsi, pour chaque x dans $D(A)$, $y'(Ax) = -x'(x)$. D'où y' est un membre de $D(A')$. Donc $y''(y') = 0$. Mais $y'(x_0) \neq 0$. Ainsi $y''(y') \neq 0$ (contradictoire). Supposons maintenant que A est un membre de $\Phi_+(X) \cup \Phi_-(X)$ ou A' est un membre du $\Phi_+(X') \cup \Phi_-(X')$. Ensuite, par le lemme 6,

(i) $R(A)$ est fermé en X,

(ii) $R(A')$ est fermé dans X',

(iii) $R(A) = N(A')^0$,

(iv) $R(A') = N(A)^0$.

Ainsi, si A est un membre $\Phi_-(X)$ ou A' est un membre du $\Phi_+(X')$, $b(A) = dimension X/R(A) = dimension X/N(A')^0 = dimension(X/N(A')^0)' = dimension(N(A')^0)^0 = dimension N(A') =$

$a(A^{'})$. D'où A est un membre du $\Phi_{-}(X)$ si et seulement si $A^{'}$ est un membre $\Phi_{+}(X^{'})$. Maintenant, si A est un élément de $\Phi_{+}(X)$ ou $A^{'}$ est un membre du $\Phi_{-}(X^{'})$, $a(A) = dimensionN(A) = dimensionN(A)^{'} = dimensionX^{'}/D(A)^{0} = dimensionX^{'}/R(A^{'}) = b(A^{'})$. D'où A est un membre $\Phi_{+}(X)$ si et seulement si $A^{'}$ est un membre du $\Phi_{-}(X^{'})$.

Corollaire 1.2. *Soit X reflexive et soit A une opérateur fermé à domaine danse sur X. Alors, les suivantes sont équivalentes.*

(i) *A est un élément de $k(X)$.*

(ii) *Il existe $C > 0$ tels que $q(Q) < C(A^{'}(Q))$ pour chaque Q de sous-ensemble borné $D(A^{'})$.*

(iii) *$v(A^{'}) \neq 0$.*

(iv) *$A^{'}$ n'a pas de suite singulier dans $X^{'}$.*

(v) *$a(A^{'} - K)$ pour chaque fini K dans $K(X^{'})$.*

Preuve Ceci est une conséquence immédiate de théorèmes 1.1 et 1.5.

Corollaire 1.3. *Soit X réflexive. A est un membre du $\Phi_{+}(X)$ si et seulement si $b(A^{'} - K)$ est fini pour chaque K dans $K(X^{'})$.*

Preuve Conséquence immédiate de théorèmes 1.4 et 1.5.

Définition 1.5. *Soit A un opérateur fermé sur X. A est un droit diviseur de zéro module $K(X)$ s'il existe un opérateur T noncompact en $B(X)$ et opérateur compact K dans $K(X)$ telle que $TA = K$ sur $D(A)$. L'opérateur A est le module inversible $K(X)$ s'il existe T dans $B(X)$ et K_l, K_2 dans $K(X)$ tels que $AT = I + K_2$, sur X et $TA = I + K_2$ dans $D(A)$. Un espace de Banach X est superprojective si chaque sous-espace V ayant codimension infinie dans*

X est contenu dans un sous-espace fermé W ayant codimension infinie en X et il y a une projection P de X bornée sur W. Exemples d'espaces superprojective sont l_p, $1 < p < \infty$, et $L_p(O,1)$, $1 < p \leq 2$[9].

Théorème 1.6. *Soit X super projective et supposons A est une opérateur fermé à domaine danse sur X qui est pas un diviseur droit de modulo zéro $K(X)$.Alors A est un membre du $\Phi_-(X)$.*

Preuve Supposons que A ne soit pas un élément de $\Phi_-(X)$. Alors, par le théorème 1.4 il existe K dans $K(X)$ tel que $b(A-K)$ est infini. X est superprojective. Il existe donc sous-espace fermé W de X qui contient $R(A-K)$, et a codimension infinie dans X. Par addition, il existe une projection bornée P de X sur W. Maintenant $I-P$ est un non-compact Membre de $B(X)$ satisfaisant $(I-P)(A-K)x = 0$ pour tout x en $D(A)$. Ainsi $(I-P)A = (I-P)K$ sur $D(A)$. D'où A est un droit diviseur de zéro module $K(X)$.

Théorème 1.7. *Soit A un opérateur densément defini fermé sur X. alors*

(i) A est un membre de $\Phi(X)$ si et seulement si $a(A-K)$ est fini et $b(A-K)$ est fini pour chaque K dans $K(X)$.

(ii) A est un élément de $\Phi(X)$ si et seulement si A est le module inversible $K(X)$.

(iii) si X est reflexive, A est un élément de $\Phi(X)$, f et seulement si A' est un membre de $\Phi(X')$, auquel cas $i(A) = -i(A')$.

(iv) Si X est un espace de Hilbert et A est autoadjoint, alors A est un membre de $\Phi(X)$ si et seulement si A est un élément de $\Phi_+(X) \cup \Phi_-(X)$, auquel cas $i(A) = 0$.

Preuve

(i) est une conséquence immédiate de théorèmes 1.1 et 1.4.

(ii) est une conséquence immédiate du lemme 1.2.

(iii) est immédiat conséquence du théorème 1.5 et sa preuve. Depuis un espace de Hilbert est réflexive et en plus peut être identifié avec son espace dual, (iv) est une conséquence de (iii) .

Corollaire 1.4. *Si X est à la fois subprojective et superprojective et A est un opérateur fermé densément défini sur X qui est ni un diviseur à droite Module de zéro $K(X)$, ni un diviseur gauche du module zéro $K(X)$, alors A est le module inversible $K(X)$.*

Preuve . Conséquence immédiate de théorèmes 1.3, 1.6, et une partie (ii) du théorème 1.7.

Lemme 1.7. *(Gokhberg et Krein [lo, 41). Supposons que A et B sont des membres de $\Phi(X)$. alors*

(i) AB est un membre de $\Phi(X)$. (Avec $D(AB)$ de defini dans l'habituel façon).

(ii) $i(AB) = i(A) + i(B)$.

Remarque 1.2. *Une relation d'équivalence est définie sur $\Phi(X)$, par le relation, pour A, B dans $\Phi(X)$ A est équivalent à B si $i(A) = i(B)$. Maintenant l'ensemble $\overline{\Phi(X)}$ des classes d'équivalence par rapport à cette relation est comme un résultat du lemme 7 ci-dessus, un semigroupe commutatif avec l'identité sous l'opération binaire $\overline{A} \cdot \overline{B} = \overline{AB}$.*

Définition 1.6. *Un espace de Banach de dimension infini est un shift-espace si les conditions suivantes sont remplies.*

(i) Il a une base de Schauder. Autrement dit, il existe un dénombrable ensemble $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ d' éléments de X tel que pour chaque x dans X il existe une suite

singulier a_k, $k = 1, 2, \cdots$, des scalaires satisfaisant

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$$

.

(ii) *Il existe une fonction f application de l'ensemble des suites de scalaires dans l'ensemble des réels positifs qui satisfait :*

(a) *des séquences Compte tenu de scalaires $\{a_k\}$ $\{b_k\}$ telle que pour chaque occurrence d'un scalaire non nul au c dans $\{a_k\}$, il y a aussi un événement de c dans $\{b_k\}$, alors $f(\{a_k\}) \leq f(\{b_k\})$.*

(b) *Compte tenu de x dans X, si*

$$x = \sum_{k=1}^{m} a_k x_k$$

, alors $\| x \| = f(\{a_k\}$.

Remarque 1.3. *Chaque espace de Hilbert séparable est un espace de shift est en effet l_p, $1 \leq p \leq \infty$.*

Théorème 1.8. *Soit X un espace de shift. Alors $\overline{\Phi(X)}$ est un groupe abélien qui est isomorphe au groupe additif Z des entiers.*

Preuve Il est clair par le lemme 1.7 que l'application g de $\overline{\Phi(X)}$ dans Z définie par $g(\overline{A}) = i(A)$ pour chaque A dans $\Phi(X)$ est un monomorphism. Nous allons montrer que g est sur et notre preuve est terminée. Rappel que X est un espace de shift. Ainsi X a une base de Schauder $\{x_1, x_2, \cdots\}$ par rapport à laquelle la mise en correspondance $x_k \longrightarrow x_{k+1}$, $k = 1, 2, \cdots$, Étend clairement à un opérateur fermé à domaine dense que défini une position fermée A dans $\Phi(X)$ tel que $i(A) = -1$. Soit x_0 représentent le vecteur zéro dans X. Alors, observer que l'application $x_k \longrightarrow x_{k-l}$, $k = 1, 2, \cdots$, se prolonge à un opérateur B dans $\Phi(X)$ vérifiant $i(B) = 1$. Soit n un entier positif arbitraire, puis par le lemme 1.7, $\overline{A^n}$ et $\overline{B^n}$ sont membres de $\overline{\Phi(X)}$ avec $g(\overline{A^n}) = i(A^n) = -n$, $g(\overline{B^n}) = i(B^n) = n$ et $g(\overline{A^n} \cdot \overline{B^n}) = i(A^n) + i(B^n) = 0$. Ainsi g est surjective.

Chapitre 2

Spectre Essential et perturbations

2.1 Perturbation

Définition 2.1. *(i) E dans $B(X)$ est une perturbation de Fredholm si $A+E$ est un membre de $\Phi(X)$ pour chaque A dans $\Phi(X)$. On note l'ensemble des perturbations de Fredholm par $F(X)$.*

(ii) E dans $B(X)$ est une perturbation supérieure de semi-Fredholm si $A+E$ est un membre de $\Phi_+(X)$ pour chaque A dans $\Phi_+(X)$. $F_+(X)$ désigne la collection des perturbations supérieures de semi Fredholm.

(iii) E dans $B(X)$ est une perturbation inférieure de semi-Fredholm si $A+E$ est un membre de $\Phi_-(X)$ pour A dans $\Phi_-(X)$. L'ensemble des semi-bas des perturbations de Fredholm est indiquée par $F_-(X)$.

Théorème 2.1. *Soit E un membre de $B(X)$. alors*

(i) E est un membre de $F_-(X)$ si et seulement si $b(A-E)$ est fini pour chaque A dans $\Phi_-(X)$.

(ii) E est un membre de $F_+(X)$ si et seulement si $a(A-E)$ est fini pour chaque A dans

$\Phi_+(X)$.

(iii) E est un membre de $F(X)$ si et seulement si soit $b(A-E)$ est fini pour chaque A dans $\Phi(X)$.

Preuve On suppose que E est un membre $F_-(X)$ et A est un membre des $\Phi_-(X)$. Il est clair que $A-E$ est un membre du $\Phi_-(X)$. Ainsi $b(A-E)$ est fini. Supposons maintenant que E est pas membre de $F_-(X)$. Ensuite, il existe A dans $\Phi_-(X)$ tel que $A-E$ ne fait pas partie de $\Phi_-(X)$. D'où le théorème 1.4, il existe K dans $K(X)$ tel que $b(A-E-K)$ est infinie. Maintenant, $A-K$ est un membre de $\Phi_-(X)$ par le lemme 1 ; Ainsi $b(A-E-K)$ est fini. Contradiction, et la preuve de (i) est terminée. (ii) est prouvée d'une manière utilisant le théorème tout à fait analogue Je plutôt que le théorème 1.4. La validité de (iii) est considéré comme suit. On suppose que E est un élément de $F(X)$. Il est clair que pour chaque A dans $\Phi(X)$, $A-E$ est également un élément de $\Phi(X)$. Ainsi, $a(A-E)$ est fini et $b(A-E)$ est fini. Supposons maintenant que $b(A-E)$ est fini pour chaque A dans $\Phi(X)$. Compte tenu de A dans $\Phi(X)$ et arbitraire scalaire $c \neq 0$, puis pour chaque K dans $K(X)$, $(A-K)/c$ est un membre de $\Phi(X)$ par le lemme 1.1. Ainsi $b(A-cE-K)$ est fini pour tous les scalaires c. Ainsi $A-cE$ est un membre de $\Phi_-(X)$ par le théorème 1.4. Maintenant, en raison de la compacité de l'intervalle fermé entre 0 et 1, et le lemme 1.5, $u(A-E) \preceq u(A).u(A)$ est fini et donc est donc $a(A-E)$. $A-E$ est bien sûr un opérateur densément défini fermé sur X. Ainsi $A-E$ est un membre des $\Phi(X)$. Par conséquent E est un élément de $F(X)$. On montre dans un tout à fait de manière similaire en utilisant le théorème 1.1 et Lemme 1.5 que $(A-E)$ est finie pour chaque A dans $\Phi(X)$ implique que E est un élément de $F(X)$.

Corollaire 2.1. *(i)* $K(X) \subset F_+(X) \subset F(X)$.

(ii) $K(X) \subset F_-(X) \subset F(X)$.

Preuve Les premières inclusions dans (i) et (ii) sont des conséquences immédiates du lemme 1.1. Les deuxièmes inclusions suivent directement le théorème ci-dessus.

Remarque 2.1. *Soit $X = L_1[0,1]$. Définir E application X dans X par*

$$(Ef)t = \int_0^1 k(s,t)f(s)ds$$

pour chaque f en $L_1[0,1]$, et $k(s,t)$ est défini sur $[0,1]\times[0,1]$ par

$$k(s,t) = \begin{cases} 0 & (s,t) \in [1/2^n, 1/2^{n-1}] \times [2j/2^n, 2j+1/2^n], \quad j = 0,1,\cdots,2^{n-1}-1. \\ 2, & (s,t) \in [1/2^n, 1/2^{n-1}] \times [2j+1/2^n, 2j+2/2^n], \quad j = 0,1,\cdots,2^{n-1}-1. \\ 0 & lorsque \quad s=0 \quad ou \quad t=0. \quad n=1,2,\cdots. \end{cases}$$

E est un élément de $F_+(X) \cap F_-(x)$ et E ne fait pas partie $K(X)$. (Voir [3].)

Remarque 2.2. *Soit $X = l_q \times L_p(-1,1)$, avec $1 < p < q < 2$. Alors,*

(i) $F(X) \neq F_+(X)$.

(ii) $F_-(X) \neq K(X)$.

(iii) $F_+(X^{'}) \neq F_-(X^{'})$.

(iv) $F(X^{'}) \neq F_-(X^{'})$.

(Voir [11].)

Théorème 2.2. *(i) Chacune des $F_-(X)$, $F_+(X)$ et $F(X)$ est un sous-espace fermé de $B(X)$. Par conséquant, $F(X)$ est un idéal à deux faces en $B(X)$.*

(ii) chacun des éléments suivants est valide.

(a) Pour A dans $\Phi(X)$ et E dans $F(X)$, $i(A+E) = i(A)$.

(b) Pour A dans $\Phi_+(X)$ et E dans $F_+(X)$, $i(A+E) = i(A)$.

(c) pour A dans $\Phi_-(X)$ et E dans $F_-(x)$, $i(A+E) = i(A)$.

Preuve $E = 0$ est un élément de $F(X)$. Il est clair que $\Phi(X)$ est fermé sous multiplication par scalaires nonzéro ; où $F(X)$ est fermé sous multiplication scalaire. E_1 et E_2 dans $F(X)$ et A dans $\Phi(X)$, $A+(E_1+E_2) = (A+E_1)+E_2$, qui est dans $\Phi(X)$, ainsi E_1+E_2, est un membre de $F(X)$. Maintenant, nous allons E_n soit une suite dans $F(X)$ converge vers E en $B(X)$ en tant que n tend vers l'infini. Soit A un arbitraire membre de $\Phi(X)$. Pour n suffisamment grand, $\| E_n - E \| < y(A)$. Ainsi lemme 1.5, $A+(E-E_n)+E_n = A+E$ est un membre d'un $\Phi(X)$. Par conséquent $F(X)$ est un sous-espace fermé de $B(X)$. Dans un tout à fait analogue manière, on montre que $F_+(X)$ et $F_-(X)$ sont également fermés sous-espaces $B(X)$. Nous allons maintenant montrer que $F(X)$ est un idéal à deux faces $B(X)$.

(1) Soit E un membre de $F(X)$ et A, A_1 les membres de $\Phi(X) \cap B(X)$. On a $AE + A_1$ est un élément de $\Phi(X)$. Nous voyons cela ci-après. D'après le lemme 1.2, il existe A_0 dans $\Phi(X) \cap B(X)$ et K_1, K_2 dans $K(X)$ telle que $AA_0 = I - K_1$ et $A_0A = I - K_2$. A_0A_1 est un membre de $\Phi(X)$ par le lemme 1.7. Ainsi $E + A_0A_l$, est membre de $\Phi(X)$. Par conséquent

$$A(E + A_0A_1) = AE + (I - K_1)A_1 = AE + A_1 - K_1A_1,$$

est un membre de $\Phi(X)$. Ainsi

$$AE + A = (AE + A_1 - K_1A_1) + K_1A_1$$

est membre de $\Phi(X)$, par le lemme 1.1.

(2) Soit E un membre de $F(X)$, B un membre de $B(X)$, et A membre de $\Phi(X) \cap B(X)$, puis $BE + A$ est un membre de $\Phi(X)$. Car il est clair que, étant donné c scalaires suffisamment grandes en valeur absolue, chacun de $B - cl$ et cl est un élément de $\Phi(X) \cap B(X)$. Ainsi

$$BE + A = ((B - cl) + cl) + A = (B - cl) + (cI + A)$$

est un membre de $\Phi(X)$ par (1). Enfin, on suppose que E est un élément de $F(X)$, B est un membre $B(X)$, et A est un membre $\Phi(X)$. D'après le lemme 2, il existe A_0 dans $B(X)$, K_l, K_2dans $K(X)$ de telle sorte que $AA_0 = I - K_1$ dans X et $A_0A = I - K_2$ dans $D(A)$. $I + A_0BE$ est un membre de $\Phi(X)$ par (2). Par conséquent

$$A(I + A_0BE) = A + (I - K_1)BE = A + BE - K_1BE$$

est un membre de $\Phi(X)$. Ainsi

$$A + BE = (A + BE - K_1BE) + K_1BE$$

est un membre de $\Phi(X)$. Ainsi BE est un membre de $F(X)$ et $F(X)$ est un idéal à gauche en $B(X)$. En apportant des changements évidents dans le développement ci-dessus, on montre que $F(X)$ est également un idéal en plein $B(X)$. Il résulte du lemme 5 que l'application de f dans $[0, 1]$ en $\mathbf{Z} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ défini by $f(c) = i(A+cE)$, respectivement, pour A dans $\Phi(X)$, E dans $F(X)$; A dans $\Phi_+(X)$, E dans $F_+(X)$; et A dans $\Phi_-(X)$, E dans $F_-(X)$ est continue. Ainsi $i(A + E) = i(A)$ pour A,E pris dans chaque des trois situations ci-dessus.

2.2 Spectra Essential

Définition 2.2. *Soit A un opérateur fermé densément défini sur X. Soit C l'ensemble des nombres complexes. Soit*

$$e_1(A) = C - \{c \mid A - c \in \Phi_+(X)\},$$

$$e_2(A) = C - \{c \mid A - c \in \Phi_-(X)\},$$

$$e_3(A) = C - \{c \mid A - c \in \Phi(X)\},$$

$$e_4(A) = C - \{C \mid A - c \in \Phi(X) \quad et \quad i(A - c) = O\}.$$

$e_1(A)$ et $e_2(A)$ sont les spectres essentiels Gustafson et Weidman A [8]. $e_3(A)$ est le spectre essentiel Wolf A [12]. $e_4(A)$ est le Schechter spectre essentiel de A [13]. Les classes de perturbation $P_i(X)$, $i = 1, 2, 3, 4$, prémentionné Les spectres essentiels sont définis comme suit. $P_i(X)$ est l'ensemble de tous les E en $B(X)$ tel que $e_i(A) = e_i(A + E)$ pour chaque densément défini opérateur fermé A sur X.

Remarque 2.3. *Dans le cas particulier où A est un auto-adjoint borné opérateur sur un espace de Hilbert, pour chaque i, $e_i(A)$ est l'ensemble des points limites du spectre A (avec des valeurs propres ont été comptabilisés en fonction de leur multiplicités). Un théorème célèbre par Weyl [14] indique que $e_i(A) = e_i(A + K)$ pour chaque opérateur compact autoadjoint K. Rappelant que $K(X) \subset F_+(X) \cap F_-(X)$, on observe que le théorème suivant le lemme indiqué ci-dessous est une extension du résultat Weyl.*

Lemme 2.1. *Supposons que A est un élément de $B(X)$, B est un membre de la $B(X)$ et BA est un élément de $\Phi(X)$. A est un membre de $\Phi(X)$ si et seulement si B est un membre du $\Phi(X)$ [4].*

Théorème 2.3. *(i)* $P_1(X) = F_+(X)$,

(ii) $P_2(X) = F_-(X)$,

(iii) $P_3(X) = F(X)$,

(iv) $P_4(X) = F(X)$.

Preuve (i) Supposons que E est un membre de la $P_1(X)$. Soit A un membre $\Phi_+(X)$. 0 est ensuite pas membre de $e_1(A)$. Par conséquent 0 est pas un Membre de $e_1(A+E)$. Ainsi,

$A+E$ est un membre du $\Phi_+(X)$. Par conséquent E est un élément de $F_+(X)$. A l'inverse, supposons que E est un membre $F_+(X)$. Soit A un opérateur fermé densément défini sur X. Supposons c ne fait pas partie de $e_1(A)$. Alors $A-c$ est un membre de $\Phi_+(X)$. Ainsi $(A+E)-c$ est un membre de $\Phi_+(X)$. D'où c est pas membre de $e_1(A+E)$. Ainsi $e_1(A+E) \subset e_1(A)$. Etant donné que l'inclusion est valable pour E arbitraire et A du type ci-dessus, nous concluons que $e_1(A) = e_1(A+E+(-E)) \subset e_1(A+E)$. Par conséquent E est un membre du $P_1(X)$. (ii) et (iii) sont établies d'une manière tout à fait analogue. Nous procédons à déterminer (iv). Soit E un membre de $F(X)$. Soit A être un opérateur fermé densément défini sur X. Supposons c est pas membre de $e_4(A)$. Alors $A-c$ est un membre de $\Phi(X)$ avec $i(A-c)=0$. Ainsi $A-C+E$ est un élément de $\Phi(X)$ avec $i(A-C+E)=0$ par Théorème X. Par conséquent c ne fait pas partie de $e_4(A+E)$. Ainsi $e_4(A+E) \subset e_4(A)$. Cette inclusion est valable pour arbitraire A et E du type ci-dessus. Par conséquent $e_4(A) = e_4(A+E+(-E)) \subset e_4(A+E)$. Par conséquent E est un membre de $P_4(X)$. Inversement, supposons que E est un membre de $P_4(X)$. Soit A un membre de $\Phi(X)$. D'après le lemme 2, il existe $A_0 \in B(X)$ et $K_1 dans K(X)$ de telle sorte que $AA_0 = I-K_1$ dans X.Pour $c>0$ suffisamment grand, il est clair que $A_0 - c1$ est membre de $\Phi(X)$ avec $i(A_0-cl)=0$. Nous remarquons aussi que cl et $(1/c)I$ sont membres de $\Phi(X)$ avec $i(cl)=0$ et $i((l/c)I)=0$. Ainsi 0 est pas membre $e_4((l/c)I)$. Ainsi 0 est pas un membre $e_4((l/c)I+E)$. Par conséquent $(l/c)I+E$ est un membre de $\Phi(X)$ avec $i((l/c)I+E)=0$. Ainsi le lemme 7, $I+cE = cI((l/c)I+E)$ est un membre de $\Phi(X)\cap B(X)$ avec $i(I+cE)=0$. A_0-cl est un élément de $B(X)\cap\Phi(X)$. Ainsi le lemme 2, il existe B_0 dans $\Phi(X)\cap B(X)$, et K_2 dans $K(X)$ telle que $B_0(A_0-cl) = I-K_2$ sur X avec $i(B_0) = -i(A_0-cl) = 0$. Ainsi $B_0(I+cE)$ est un Membre de $\Phi(X)$ avec $i(B_0(I+cE))=0$. Donc 0 est pas membre de $e_4(B_0(I+cE))$. Par conséquent 0 est pas membre $e_4(B_0(I+cE)+E)$. Par conséquent $B_0(I+cE)+E$ est un membre de $\Phi(X)$ avec $i(B_0(I+cE)+E)=0$.

Maintenant

$$\begin{aligned} B_0(I+A_0E)-(B_0(I+cE)+E) &= B_0(I+((A_0-cl)+cl)E)-B_0-cB_0E-E \\ &= B_0+(I-K_2)E+cB_0E-B_0-cB_0E-E \\ &= -K_2E. \end{aligned}$$

Ainsi

$$B_0(I+A_0E)=(B_0(I+cE)+E)-K_2E$$

. Ainsi $B_0(I+A_0E)$ est un membre de $\Phi(X)$, par le lemme 1. Rappelons que chacun de B_0 et $I+A_0E$ est un élément de $B(X)$. Ainsi, par le lemme 8, $I+A_0E$ est un élément de $\Phi(X)$. Par conséquent,$A(I+A_0E)=A+(I-K_1)E=(A+E)-K_1E$ est un élément de $\Phi(X)$. Par conséquent, $A+E=((A+E)-K_1E)+K_1E$ est un élément de $\Phi(X)$. Par conséquent E est un membre $F(X)$.

Théorème 2.4. *Soit X un espace de Banach complexe. Soit A un Membre de $B(X)$. Soit f une fonction de valeur complexe qui est analytique dans un voisinage de $\sigma(A)$, le spectre de A. Ensuite, l'opérateur $f(A)$ dans $B(X)$ est bien defini par le calcul fonctionnel complexe [15]. Supposons maintenant que $e_3(A)=\sigma(A)$, alors*

(i) $f(e_3(A))=e_3(f(A))$,

(ii) $e_3(f(A))=\sigma(f(A))$,

(iii) $f(e_4(A))=e_4(f(A))$,

(iv) $e_4(f(A))=\sigma(f(A))$.

Preuve Soit d un nombre complexe quelconque. Supposons que pour chaque c de $e_3(A)$, $f(c)\neq d$. Puis $f(z)-d$ est une fonction analytique à un voisinage de $\sigma(A)$ qui ne disparaît pas sur $\sigma(A)$. ainsi, par le complexe de calcul fonctionnelle $f(A)-dI$ a un inverse borné sur X. Ainsi d est dans la ensemble résolvante de A. En particulier, d est pas un membre $e_3(f(A))$. Ainsi $e_3(f(A)) \subset f(e_3(A))$. Supposons maintenant que $d = f(c)$, où c est un membre de $e_3(A)$. Ensemble

$$g(z) = \begin{cases} (f(z)-d)/(z-c), & si \quad z \neq c; \\ f'(c), \quad si \quad z = c. \end{cases}$$

Alors $g(z)$ est analytique dans un voisinage de $\sigma(A)$ et $g(z)(z-c) = f(x) - d$. Ainsi, par le calcul fonctionnel $g(A)(A-cI) = f(A) - dI = (A-cI)g(A)$. Supposons que d soit pas un membre $e_3 f(A))$. Puis $f(A) - d$ est un membre de $\Phi(X)$. Notez que comme conséquence des égalités ci-dessus, $N(A-c) \subset N(f(A)-d)$, et $R(f(A)-d) \subset R(A-c)$. Ainsi, $a(A-c) \leq a(f(A)-d) < \infty$ et $b(A-c) \leq b(f(A)-d) < \infty$. $R(f(A)-d)$ est fermé dans X et $X = R(f(A-D)) \bigoplus N$, où N est un sous-espace de dimension finie de X. D'où $R(A-c)$ est fermé en vue de l'inscription ci-dessus. Ainsi $A-c$ est un membre de $\Phi(X)$. Par conséquent c ne fait pas partie de $e_3(A)$. Par conséquent $f(e_3(A)) \subset e_3(f(A))$, et la preuve de (i) est terminée. Par le théorème de l'application spectrale standard, $f(\sigma(A)) = \sigma(f(A))$. Observer en outre que, pour un opérateur arbitraire A, $e_3(A) \subset e_4(A) \subset \sigma(A)$, et en utilisant (i), on obtient (ii), (iii) et (iv) immédiatement.

Corollaire 2.2. *Soient X et A sont comme ci-dessus. Supposons $e_3(A)$ est un spectre ensemble de A. Autrement dit, il existe des ensembles ouverts disjoints U, V tel que $e_3(A) \subset U$ et $\sigma(A) - e_3(A) \subset V$. Soit*

$$P = l/2\pi i \int_\Gamma (z-A)^{-l} dz$$

la projection spectrale de A, où Γ se compose d'un certain nombre fini de simple couverture fermée et est la limite d'un ouvert W de telle sorte que $e_3(A) \subset W \subset \overline{W} \subset U$. Comme est bien connu, A est complètement réduit par $R(P)$ et $N(P)$. Supposons que $N(P)$ est de dimension finie et définir $A_1 : R(P) \longrightarrow R(P)$ et $A_1 = A \mid R(P)$. Ensuite, pour chaque f analytique dans *un voisinage de* $e_3(A)$, $f(e_3(A)) = e_3(f(A_1))$.

Preuve Comme cela est bien connu, $e_3(A) = \sigma(A_1)$. Nous montrons maintenant que $e_3(A) = e_3(A_1)$. On suppose que c ne fait pas partie de $e_3(A_1)$. Alors $c - A_1$, est un membre de $\Phi(R(P))$. Il est clair que $a(c-A) \leq a(c-A_1) + dimension\ N(P) < \infty$ et $b(c-A) \leq b(c-A_1) + dimension N(P) < \infty$. En outre, $R(c-A) = (c-A_1)R(P) + (c-A)N(P)$. Maintenant $(c-A_1)R(P)$ est fermé en position $R(P)$ et $R(P)$ est fermée dans X, où $(c-A_1)R(P)$ est fermé dans X. $(c-A)N(P)$ est de dimension finie. Ainsi, $R(c-A)$ est fermé dans X. Par conséquent $c-A$ est un élément de $\Phi(X)$ et c ne fait pas partie de $e_3(A)$. Supposons maintenant que c ne fait pas partie de $e_3(A)$. Puis $c-A$ est un élément de $\Phi(X)$. Clairement et $< a(c-A_1) \leq a(c-A) < \infty$

$$\begin{aligned}
b(c-A_1) &= dimension R(P)/((c-A)R(P)) \\
&\leq Dim R(P)/((c-A)R(P) + (c-A)N(P)) + dim N(P) \\
&\leq Dim(R(A) + N(P))/((c-A)R(P) + (c-A)N(P)) + dim N(P) \\
&= b(c-A) + dim N(P) < \infty.
\end{aligned}$$

$R(c-A_1)$ est fermé dans $R(P)$. Pour $\{x_n\}$ une suite dans $R(P)$. Supposons $(c-A_1)x_n \longrightarrow y$ dans $R(P)$ $n \longrightarrow \infty$ Maintenant $R(c-A)$ est fermé en X. Ainsi $y = (c-A)(x+z)$ avec x dans $R(P)$ et z en $N(P)$. Maintenant $(c-A)x$ est un membre de $R(P)$ et $(c-A)z$ est un membre $N(P)$. Ainsi $y-(c-A)x = 0$. Par conséquent $y = (c-A)x$. Ainsi y est un élément de $R(c-A_1)$ et $R(c-A_1)$ est fermé dans $R(P)$. Par conséquent $c-A_1$ est un membre de $\Phi(R(P))$ et c ne soit pas un membre de $e_3(A_1)$. l'égalité $e_3(A) = e_3(A_1)$ est ainsi établie. Rappelons qu'un $\sigma(A_1) = e_3(A)$; clairement $\sigma(A_l) = e_3(A_1)$ et il est une conséquence immédiate du théorème ci-dessus que $f(e_3(A_1)) = e_3(f(A_1))$. Ainsi $f(e_3(A)) = e_3(f(A_1)$.

Bibliographie

[1] T. KATO, Perturbation theory for nullity, deficiency and other quantities of linear operators, J. Anal. Math. 6 (1958), 273-322.

[2] BERTRAM YOOD, Properties of linear transformations preserved under addition of a completely continuous transformation, Duke Math. 1. 18 (1951), 599-612.

[3] S. GOLDBERG, Unbounded Linear Operators, McGraw-Hill, New York, 1966.

[4] M. SCHECHTER, Principles of Functional Analysis, Academic Press, New York, 1971.

[5] E. LACEY, Generalizations of compact operators in locally convex topological linear spaces, Thesis, New Mexico State University, 1963.

[6] B. SZ.-NAGY, Perturbations des transformations lineaires fermbes, Acta Sci. Math. (Szeged) 14 (1951), 125-137.

[7] A. PELCZYNSKI, Projections in certain Banach spaces, Studio Math. 19 (1960), 209-229.

[8] K. GUSTAFSON AND J. WEIDMANN, On the essential spectrum, to appear.

[9] R. J. WHITLEY, Strictly singular operators and their conjugates, Trans. Amer. Math. Sot. 13 (1964), 252-261.

[10] I. G. GOHBERG AND M. G. KREIN, Fundamental aspects of defect numbers, root numbers and indices of linear operators, Uspehi Mat. Nuuk. 12 (1957), 43-l 18 ; Amer. Math. Sot. Trunsl. 13 (1960), 185-284.

[11] I. A. FELDMAN, I. C. GOHBERG, AND A. S. MARKUS, Normally solvable operators and ideals associated with them, Izv. Molduv. Fil. Akad. Nauk. SSSR 10 (1960), 51-69 ; Amer. Math. Sot. Trunsl. 61 (1967), 63-84.

[12] F. WOLF, On the invariance of the essential spectrum under a change of boundary conditions of partial differential operators, Indug. Math. 21 (1959), 142-315.

[13] M. SCHECHTER, On perturbations of essential spectra, J. London Math. Sot. 1 (1969), 343-347.

[14] H. WEYL, Uber Beschdnkte Quadratische Formen, deren Differenz Vollstetig ist, Rend. Circ. Mat. Pulermo 27 (1909), 373-392,

[15] A. E. TAYLOR, Introduction to Functional Analysis, Wiley, New York, 1958.

[16] A. LEBOW AND M. SCHECHTER, Semigroups of operators and measures of noncompactness, J. Functional Anal. 7 (1971).

[17] M. SCHECHTER, Quantities related to strictly singular operators, to appear.

[18] M. SCHECHTER, Riesz operators and Fredholm perturbations, Bull. Amer. Math. Sot. 74 (1968), 1139-1144.

99