République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Mathématiques appliquées**

Par :

Melle: ABBOUDI Ahlam

Intitulé

Existence des intégrales premières pour les champs de vecteurs polynômiaux suivant la méthode de Darboux

Dirigé par : **Dr. BADI Sabrina**

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. N. OUNESSE	MCB	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. S. BADI	MCA	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. S. BOUATTIA	MCB	Univ-Guelma

Session Juin 2016

Remerciement

*Mes remerciements vont en premier lieu à **ALLAH** Tout Puissant qui a illuminé mon chemin de la lueur du savoir et de la science et pour la volonté, la santé et la patience qu'il ma prodiguées durant toutes ces années d'études.*
*Je tiens à remercier tout d'abord Madame **BADI Sabrina**, qui m'a encadré, tout au long de ce mémoire. Je lui apporte aussi toute ma reconnaissance pour son attention, ses conseils et son écoute qui ont été nécessaires pour la bonne réussite de ce travail. J'ai pris un grand plaisir à travailler avec elle.*

*Mes sincères remerciements et ma gratitude vont aussi à Madame **OUNESSE Nawel**, pour avoir accepté de juger ce travail etd'en présider le jury de soutenance. Que vous soyez assuré de mon entière reconnaissance.Je remercie aussi vivement Monsieur **BOUATTIA Salah**, pour l'honneur qu'il me fait pour sa participation à mon jury en qualité d'examinateur, Je tiens à l'assurer de ma profonde reconnaissance pour l'intérêtqu'ilporte à ce travail.*

*Mes meilleurs remerciements vont aussi à Monsieur **Segni Sami** et Monsieur **Dida Rida** le chef et l'adjoint chef de département de mathématique pour leurs aides.*

Enfin je remercie chaleureusement mes enseignants du département de mathématique,qui m'ont accompagnée durant toutes mes années d'études.

Merci à tous et à toutes

Dédicaces

C'est avec une très grande émotion et un immense plaisir que je dédie ce modeste travail à :

Mes parents, tous deux ont su m'apprendre le respect, la volonté et tant d'autres valeurs importantes.

Mes frères Mahdi et Aymen est ma sœur Chamess qui m'a aidé et soutenu dans mes études.

A la mémoire de mon beau père celui qui m'a implanté le courage et l'amour du travail.

A tous les membres de ma famille paternelle et maternelle est mes cousines Aya, Houayda et Rahaf.

A mes chères amies Amiraet Nour-el-houdaqui m'ont beaucoup aidé durant ces années d'études sans oublier les bons souvenirs avant le reste du groupe.

Mes collègues de département, je remercie chacun de vous pour le soutien et l'aide qu'il m'a apporté.

A tous qui m'a soutenu tout au long de ce projet.

Ahlam

Table des matières

Résumé

Ce mémoire comporte l'étude de la théorie de Darboux et quelques applications pour déterminer des intégrales premières des systèmes différentiels planaires polynômiaux de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases}$$

où P et Q sont des fonctions polynomiales. Nous étudions la méthode de Darboux, celle-ci demande l'existence des courbes algébriques invariantes avec lesquelles on peut construire une intégrale première ou un facteur intégrant.

Introduction

Depuis une trentaine d'années, un changement profond s'est accompli dans l'orientation des études mathématiques. Darboux a montré que l'on peut construire une intégrale première (ou un facteur intégrant) d'un système différentiel polynômial planaire qui posséde un nombre suffisament des courbes algébriques invariantes. Dans ce mémoire, on étudie l'existence d'intégrale première par la méthode de Darboux. Il a prouvé que si un système polynômial de degré m *a au moins* $m(m+1)/2$ *courbes algébriques invariantes, alors il a une intégrale première. La meilleure amélioration des résultats de Darboux est grâce à Jouanolou en 1979. Jouanolou a montré que si le nombre des courbes algébriques invariantes d'un système polynômial de degré* m *est au moins* $(m(m+1)/2)+2$, *alors le système différentiel a une intégrale première rationnelle, et par conséquent toutes ses solutions sont des courbes algébriques invariantes.*

Ce mémoire comporte trois chapitre. Dans le premier chapitre, on rappel certaines notions préliminaires sur les systèmes différentiels planaires. Le second chapitre est consacré à la recherche des intégrales premières pour des champs de vecteurs polynômiaux. Nous introduisons les notions des courbes algébriques invariantes et les facteurs intégrants. Dans le dernier chapitre on utilise la thèoréme de Darboux pour trouver une intégrale première pour des systèmes différentiels polynômiaux planaires, et on fait quelques applications.

Chapitre 1

Notions préliminaires

Ce chapitre contient quelques notions générales pour l'étude qualitative des systèmes dynamiques et des équations différentielles ordinaires.

1.1 Système dynamique, Système quadratique, Flot d'une équation différentielle

Système dynamique

Définition 1.1.1 *Un système dynamique sur E est une application continuement différentiable*

$$\Phi : \mathbb{R} \times E \to E$$

où E est un sous ensemble ouvert dans $\mathbb{R}^n$, tel que $\Phi_t(x) = \Phi(t, x)$ satisfait

1. $\Phi_0(x) = x \quad \forall x \in E$
2. $\Phi_t \circ \Phi_s(x) = \Phi_{t+s}(x) \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$ *et* $x \in E$.

Remarque 1.1.1 *Un système dynamique sur E est linéaire si*

$$\Phi(t, \alpha x + \beta y) = \alpha\Phi(t, x) + \beta\Phi(t, y) \quad \forall \alpha, \beta, t \in \mathbb{R} \text{ et } x, y \in E.$$

exemple 1.1.1 *Soit l'application*

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

définie par

$$\Phi(t,x) = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} x$$

1. *On a*

$$\Phi(0,x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x = x$$

2. *et*

$$\begin{aligned} \Phi_s \circ \Phi_t(x) &= \begin{pmatrix} e^{3s} & 0 \\ 0 & e^{-2s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} x \\ &= \begin{pmatrix} e^{3s}e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-2s}e^{-2t} \end{pmatrix} x \\ &= \begin{pmatrix} e^{3(s+t)} & 0 \\ 0 & e^{-2(s+t)} \end{pmatrix} x \\ &= \Phi_{s+t}(x). \end{aligned}$$

L'application Φ est un système dynamique dans $\mathbb{R}^2$, et pour $x_0 \in \mathbb{R}^2$, $\Phi(t,x_0)$ est la solution du problème à valeur initiale

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Système quadratique

Un système quadratique dans $\mathbb{R}^2$ est de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{0,0} + a_{1,0}x + a_{0,1}y + a_{2,0}x^2 + a_{1,1}xy + a_{0,2}y^2 \\ \dot{y} = b_{0,0} + b_{1,0}x + b_{0,1}y + b_{2,0}x^2 + b_{1,1}xy + b_{0,2}y^2 \end{cases}$$

Un système quadratique dans $\mathbb{R}^3$ est de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{0,0,0} + a_{1,0,0}x + a_{2,0,0}x^2 + a_{0,1,0}y + a_{1,1,0}xy + a_{0,2,0}y^2 + a_{0,0,1}z + \\ \qquad a_{1,0,1}xz + a_{0,1,1}yz + a_{0,0,2}z^2 \\ \dot{y} = b_{0,0,0} + b_{1,0,0}x + b_{2,0,0}x^2 + b_{0,1,0}y + b_{1,1,0}xy + b_{0,2,0}y^2 + b_{0,0,1}z + \\ \qquad b_{1,0,1}xz + b_{0,1,1}yz + b_{0,0,2}z^2 \\ \dot{z} = c_{0,0,0} + c_{1,0,0}x + c_{2,0,0}x^2 + c_{0,1,0}y + c_{1,1,0}xy + c_{0,2,0}y^2 + c_{0,0,1}z + \\ \qquad c_{1,0,1}xz + c_{0,1,1}yz + c_{0,0,2}z^2 \end{cases}$$

Flot d'une équation différentielle

Définition 1.1.2 *Soit le système différentiel non linéaire*

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.1}$$

avec la condition initiale $x(0) = x_0$, $x_0 \in E$, E *est un sous ensemble ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et* $f \in C^1(E)$ *. soit* $\Phi(t, x_0)$ *la solution de* (1.1) *.*

L'ensemble des applications Φ_t *défini par*

$$\Phi_t(x_0) = \Phi(t, x_0)$$

est appelé le flot de l'équation différentielle (1.1) *.*

Remarque 1.1.2 *Le flot est dit autonôme si* f *ne dépend pas explicitement du temps* t*, sinon il est dit non autonôme.*

1.2 Points critiques, Plan de phase

Points critiques

Définition 1.2.1 *Le point* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *est appelé un point critique ou point d'équilibre du système* (1.1) *s'il vérifie*

$$f(x_0) = 0.$$

Définition 1.2.2 *Le point critique* x_0 *est dit hyperbolique si aucune des valeurs propres de la matrice jacobienne* $Df(x_0)$ *n'a pas de partie réelle nulle.*

Plan de phase

Soit le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \tag{1.2}$$

Le portrait de phase est l'ensemble des trajectoires dans l'espace des phases. En particulier, pour les systèmes autonômes d'équations différentielles ordinaires de deux variables, les solutions $(x(t), y(t))$ *du système* (1.2) *représentent dans le plan* (x, y) *des courbes appelées orbites. Les points critiques de ce système sont des solutions constantes et la figure complète des orbites de ce système ainsi que ces points critiques représentent le portrait de phase, et le plan* $(x \circ y)$ *est dit plan de phase.*

1.3 Linéarisation, Nature des points critiques

Linéarisation

Le système différentiel

$$\dot{x} = Ax$$

où

$$\begin{aligned} A &= Df(x_0) \\ &= \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)\right)_{1\leq i,j\leq n} \end{aligned} \tag{1.3}$$

est appelé le système linéarisé du système (1.1).

exemple 1.3.1 *Soit le système différentiel*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1^2 + x_2^3 - 2 \\ \dot{x}_2 = x_2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1^2 + x_2^3 - 2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Les points critiques sont

$$(1,0) \text{ et } (-1,0).$$

On a

$$Df(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 & 3x_2^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Au point $(1,0)$

$$Df(1,0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

alors le système linéarisé est

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_1 \\ \dot{x}_2 = x_2 \end{cases}$$

2. Au point $(-1,0)$

$$Df(-1,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

alors le système linéarisé est

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -4x_1 \\ \dot{x}_2 = x_2 \end{cases}$$

Remarque 1.3.1 *La linéarisation du système d'équation différentielles nous ramène à l'étude de la nature des points critiques.*

Nature des points critiques

Soit le système différentiel linéaire (1.3) *où* A *est une matrice d'ordre* 2 *et soient* λ_1 *et* λ_2 *les valeurs propres de cette matrice. On distingue les différents cas selon ces valeurs propres*

I) λ_1 *et* λ_2 *sont réelles non nulles et de signe différent, le point critique* $(0,0)$ *est un point selle, il est toujours instable.*

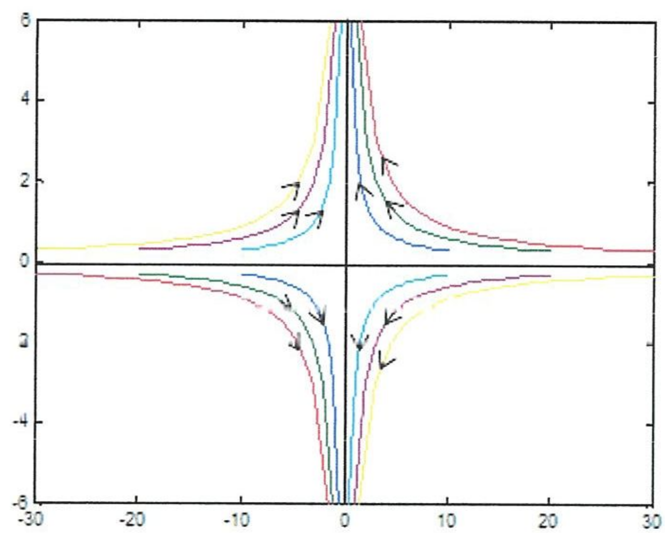

Figure 1 *: Point selle (instable)*

exemple 1.3.2 *Soit le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

Le point critique est $(0,0)$, *la matrice* A *est*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont : $\lambda_1 = 2$ *et* $\lambda_2 = -1$

alors le point critique $(0,0)$ *est un point selle.*

$II)$ λ_1 *et* λ_2 *sont réelles de même signe*

1) Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, *le point critique* $(0,0)$ *est un noeud stable.*

2) Si $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, *le point critique* $(0,0)$ *est un noeud instable.*

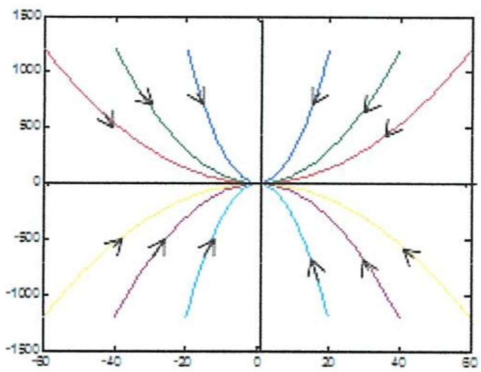

Figure 2 : *Noeud stable*

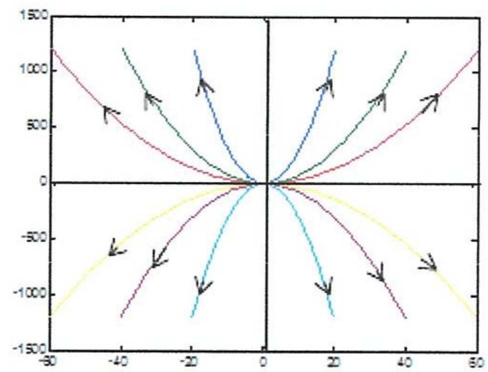

Figure 3 : *Noeud instable*

3) Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, *le point critique* $(0,0)$ *est un noeud propre, il est stable si* $\lambda < 0$ *et instable si* $\lambda > 0$.

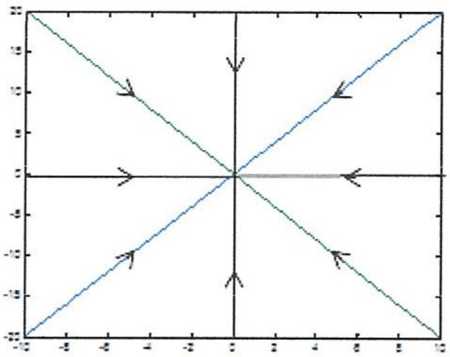

Figure 4 *: Noeud propre stable*

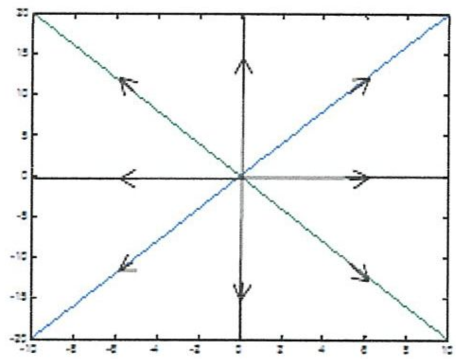

Figure 5 *: Noeud propre instable*

exemple 1.3.3 *a) Soit le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

Les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = \quad 2 \text{ et } \lambda_2 = \quad 1$$

alors le point critique $(0,0)$ *est un noeud stable.*

b) Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x \\ \dot{y} = y \end{cases}$$

Les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = 2 \text{ et } \lambda_2 = 1$$

alors le point critique $(0,0)$ *est un noeud instable.*

c) Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x \\ \dot{y} = -3y \end{cases}$$

Les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -3$$

alors le point critique $(0,0)$ *est un noeud propre stable.*

d) Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x \\ \dot{y} = 3y \end{cases}$$

Les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 3$$

alors le point critique $(0,0)$ *est un noeud propre instable.*

III) λ_1 *et* λ_2 *sont des complexes conjuguées et* $\mathrm{Im}\left(\lambda_{1,2} \neq 0\right)$, *alors le point critique* $(0,0)$ *est un foyer. Il est stable si* $\mathrm{Re}\left(\lambda_{1,2} < 0\right)$ *et instable si* $\mathrm{Re}\left(\lambda_{1,2} > 0\right)$.

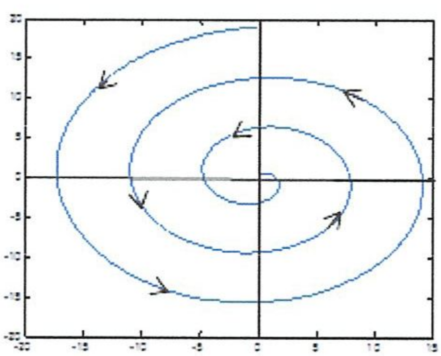

Figure 6 : *Foyer stable*

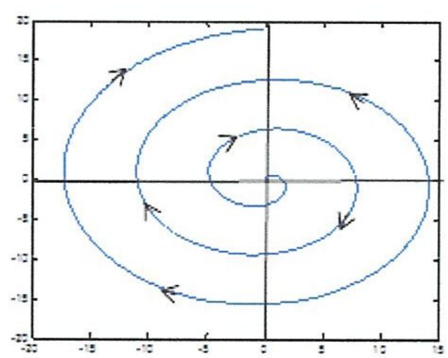

Figure 7 : *Foyer instable.*

exemple 1.3.4 *a) Soit le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - y \end{cases}$$

Les valeurs propres sont

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\mathrm{Re}\left(\lambda_{1,2}\right) < 0$$

alors le point critique $(0,0)$ *est un foyer stable.*

b) Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + y \end{cases}$$

Les valeurs propres sont

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{Re}(\lambda_{1,2}) > 0$$

alors le point critique $(0,0)$ *est un foyer instable.*

IV) λ_1 *et* λ_2 *sont imaginaires pures, alors le point critique* $(0,0)$ *est un centre, il est stable mais n'est pas asymptotiquement stable.*

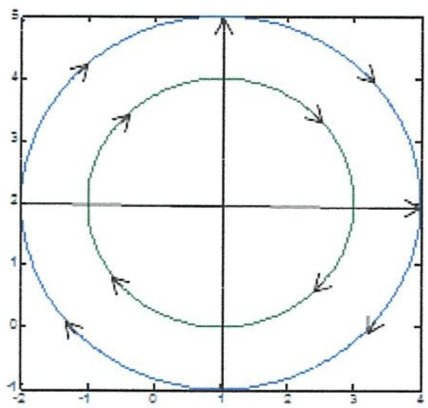

Figure 8 : Centre stable

exemple 1.3.5 *Soit le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = 3y \\ \dot{y} = -2x \end{cases}$$

Les valeurs propres sont

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{6}$$

$$\operatorname{Re}(\lambda_{1,2}) = 0$$

alors le point critique $(0,0)$ *est un centre.*

1.4 Système Hamiltonien, Orbite périodique

Système Hamiltonien

Définition 1.4.1 *Soit E un ouvert de $\mathbb{R}^{2n}$ et $H \in C^2(E)$ tel que*

$$H = H(x, y) \text{ avec } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Un système de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$

où

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \left(\frac{\partial H}{\partial x_1}, \frac{\partial H}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial x_n}\right)^T, \frac{\partial H}{\partial y} = \left(\frac{\partial H}{\partial y_1}, \frac{\partial H}{\partial y_2}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial y_n}\right)^T$$

est appelé système Hamiltonien à n degré de liberté dans E.

exemple 1.4.1 *Soit le système différentiel*

$$\begin{cases} \dot{x} = 4y^3 + x \\ \dot{y} = -(4x^3 + y) \end{cases}$$

Posons $f(x, y) = 4y^3 + x$ et $g(x, y) = 4x^3 + y$. On a $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial y} = 1$, donc il existe une fonction H tel que

$$\left(\frac{\partial H}{\partial y}, \frac{\partial H}{\partial x}\right) = (f(x, y), g(x, y)).$$

Le système s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) = \dfrac{\partial H}{\partial y}(x, y) \\ \dot{y} = -g(x, y) = -\dfrac{\partial H}{\partial x}(x, y) \end{cases}$$

calculons $H(x, y)$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = 4y^3 + x$$

donc

$$H(x,y) = y^4 + xy + u(x)$$

Mais

$$\frac{\partial H}{\partial x} = y + u'(x) = 4x^3 + y$$

$$\Longrightarrow u'(x) = 4x^3 \Longrightarrow u(x) = x^4 + cte.$$

On trouve ainsi

$$H(x,y) = x^4 + y^4 + xy.$$

Orbite périodique

Définition 1.4.2 *On appelle orbite périodique toute trajectoire* $\Phi_t(x)$ *de* (1.1) *telle qu'il existe un nombre* $T > 0$, *vérifiant*

$$\Phi_t(t+T,x) = \Phi_t(t,x).$$

Le plus petit réel $T > 0$ *qui vérifie* (1.5) *est appelé période.*

1.5 Stabilité des solutions

Soit $v(x_1, x_2, ..., x_n)$ *une fonction différentiable*
Soit le système :

$$\frac{dx}{dt} = f_i(x_1, ..., x_n), i = 1, ..., n \tag{1.6}$$

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} f_i(x) \tag{1.7}$$

Définition 1.5.1 *Si pour le système* (1.6), *il existe une fonction* $v(x_1, x_2, ..., x_n)$ *définie positive* (*ou négative*) *telle que :*

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(x_1, ..., x_n)$$

est une fonction semi définie négative (ou positive) ou identiquement nulle.

Alors le point d'équilibre $(0, ..., 0)$ *est stable au sens de lyapunov.*

$v(x_1, x_2, ..., x_n)$ *est dite fonction de lyapunov.*

Preuve. *(Voir [3]).* ■

exemple 1.5.1 *Soit le système non linéaire*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -xy^4 \\ \dfrac{dy}{dt} = yx^4 \end{cases}$$

$(0, 0)$ est le point critique.

Soit $v(x, y) = x^4 + y^4$ *définie positive.*

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial v}{\partial y}\dot{y} = 4x^3\left(-xy^4\right) + 4y^3\left(yx^4\right) = 0$$

$\Longrightarrow \phi(t) = \binom{0}{0}$ *est stable au sens dc lyapunov.*

Les orbites vérifient $x^4(t) + y^4(t) = c, \ (c > 0)$.

Théorème 1.5.1 *Si pour le système (1.6), il existe une fonction de signe définie* $v(x_1, ..., x_n)$ *telle que*

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i-1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(x_1, ..., x_n)$$

est une fonction de signe défini inverse de v *alors le point d'équilibre* $x = (0, ..., 0)$ *est asymptotiquement stable.*

Preuve. *(Voir [3]).* ■

exemple 1.5.2 *Soit le système*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - x^3 \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y^3 \end{cases}$$

Soit $v(x,y) = x^2 + y^2$, *on a*

$$\frac{dv}{dt} = 2x(y - x^3) + 2y\left(-x - 3y^3\right) = -(x^4 + 3y^4) < 0$$

$\Longrightarrow \phi(t) = \binom{0}{0}$ *est asymptotiquement stable.*

Remarque 1.5.1 *Les fonctions de lyapunov sont généralement de la forme :*

$$v(x,y) = ax^2 + by^2, ax^4 + by^4, ax^4 + by^2, ax^2 + by^4, ...$$

Théorème 1.5.2 *Supposons que pour le système (1.6) il existe une fonction* $v(x_1, ..., x_n)$ *différentiable dans un voisinage de l'origine et telle que* $v(0, ..., 0) = 0$, *si* $\dfrac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial v}{\partial x_i} f_i(x_1, ..., x_n)$ *est une fonction définie positive et s'il existe aussi prés que l'on veut de l'origine* $(0, ..., 0)$ *des points en lequels* $v(x_1, ..., x_n) > 0$ *alors le point* $(0, ..., 0)$ *est instable.*

exemple 1.5.3 *Soit le système*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x \\ \dfrac{dy}{dt} = -y \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1 \Longrightarrow (0,0)$ *est instable.*

Maintenant appliquons le théorème (1.5.1), posons $v(x,y) = x^2 - y^2$, $v(x,0) = x^2 > 0, \forall x \neq 0$.

$$\frac{dv}{dt} = 2x^2 + (-2y)(-y) = 2(x^2 + y^2) > 0$$

$\Longrightarrow (0,0)$ *est instable.*

Chapitre 2

Intégrabilité et courbes algèbriques

Pour un champs de vecteurs de dimension deux, l'existence d'intégrale première détermine complètement son portrait de phase. Les champs de vecteurs planaires les plus simples qui ont une intégrale première sont les Hamiltoniens. Les champs de vecteurs planaires intégrables qui ne sont pas Hamiltoniens sont généralement trés difficiles à détecter. Dans ce chapitre on étudie l'existence des intégrales premières pour les champs de vecteurs polynômiaux.

2.1 Définitions et notations

Un système différentiel polynômial complexe bidimensionnel ou simplement un système polynômial planair est un système différentiel de la forme

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x,y) \end{cases}$$

d'autre manière équivalente

$$\frac{dx}{dy} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

tels que P et Q sont des polynômes des variables x, y à coéfficients complexes. Le degré m du système polynômial (2.1) *est le maximum de degré des polynômes P et Q.*

On note

$$m = \max\{\deg P, \deg Q\}.$$

Et on suppose que les polynômes P et Q sont relativement premiers dans l'anneaux des polynômes complexes des variables x, y.

On veut montrer la relation entre l'intégrabilité et l'existence des courbes algébriques invariantes pour un système polynômial.

2.2 Intégrales premières et invariants

On note par F l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et par $F-$polynômial le système polynômial (2.1) des variables x, y à coéfficiens dans F, $F[x, y]$ l'espace des polynômes des variables x, y à coéfficiens dans F.

Définition 2.2.1 *Le champs de vecteurs X associé au système (2.1) est défini par*

$$X = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y}$$

Le système $F-$polynômial (2.1) est intégrable sur un sous ensemble ouvert U de F^2 s'il existe une fonction analytique non constante

$$H : U \to F$$

appelé une intégrale première du système (2.1) sur U et elle est constante sur toutes les courbes intégrals $(x(t), y(t))$ du système (2.1) contenues dans U ; i.e, $H(x(t), y(t)) = cte$ pour toutes les valeurs de t pour lesquelles la solution $(x(t), y(t))$ est définie et appartient à U. Clairement H est une intégrale première du système (2.1) si et seulement si

$$XH = PH_x + QH_y = 0$$

Définition 2.2.2 *Soit U un sous ensemble ouvert de F^2. On dit qu'une fonction analytique*

$$H(x(t), y(t), t) : U \times F \to F$$

est un invariant du champs de vecteurs X sur U si $H(x, y, t) = cte$ pour toutes les valeurs de t telle que la solution $(x(t), y(t))$ est définie et appartient à U.

Remarque 2.2.1 *Si un invariant H est indépendant de t alors elle est une intégrale première.*

2.3 Facteurs intégrants

Soient U un sous ensemble ouvert de F^2 et $R : U \to F$ une fonction analytique n'est pas identiquement nulle sur U.

Définition 2.3.1 *La fonction R est un facteur intégrant du système $F-$polynômial* (2.1) *sur U si au moins une des conditions suivantes est vérifiée :*

i) $\dfrac{\partial (RP)}{\partial x} = -\dfrac{\partial (RQ)}{\partial y}.$

ii) $\operatorname{div}(RP, RQ) = 0.$

iii) $XR = -R \operatorname{div}(P, Q)\,.$

où la divergence du champs du vecteurs X est définie par

$$\operatorname{div}(X) = \operatorname{div}(P, Q) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$$

Proposition 2.3.1 *Les conditions $i), ii), iii)$ sont équivalentes.*

Preuve. $i) \Longrightarrow ii)$

En effet

$$\frac{\partial (RP)}{\partial x} = -\frac{\partial (RQ)}{\partial y} \Longrightarrow \frac{\partial (RP)}{\partial x} + \frac{\partial (RQ)}{\partial y} = 0$$
$$\Longrightarrow \operatorname{div}(RP, RQ) = 0$$

d'où ii).

Maintenant

$ii) \Longrightarrow iii)$

$$\begin{aligned}
\text{car } \operatorname{div}(RP, RQ) &= \frac{\partial (RP)}{\partial x} + \frac{\partial (RQ)}{\partial y} \\
&= P\frac{\partial R}{\partial x} + R\frac{\partial P}{\partial x} + Q\frac{\partial R}{\partial y} + R\frac{\partial Q}{\partial y} \\
&= P\frac{\partial R}{\partial x} + Q\frac{\partial R}{\partial y} + R\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) \\
&= XR + R\operatorname{div}(P, Q) = 0
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow XR = -R\operatorname{div}(P, Q)$

d'où ii).

En fin

$iii) \Longrightarrow i)$

$XR = P\dfrac{\partial R}{\partial x} + Q\dfrac{\partial R}{\partial y}$

$$= -R\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)$$
$$= -R\frac{\partial P}{\partial x} - R\frac{\partial Q}{\partial y}$$
$$\Longrightarrow P\frac{\partial R}{\partial x} + R\frac{\partial P}{\partial x} + Q\frac{\partial R}{\partial y} + R\frac{\partial Q}{\partial y} = 0$$
$$\Longrightarrow \frac{\partial (RP)}{\partial x} + \frac{\partial (RQ)}{\partial y} = 0$$
$$\Longrightarrow \frac{\partial (RP)}{\partial x} = -\frac{\partial (RQ)}{\partial y}$$

d'où i). ■

L'intégrale première H associée au facteur intégrant R est donnée par

$$H(x,y) = \int R(x,y)\, P(x,y)\, dy + h(x) \tag{2.2}$$

où H vérifie

$$\frac{dx}{dt} = RP = \frac{\partial H}{\partial y}, \frac{dy}{dt} = RQ = -\frac{\partial H}{\partial x} \tag{2.3}$$

Inversement, si on se donne une intégrale première H du système (2.1), on peut trouver un facteur intégrant R pour lequel (2.3) est satisfait.

Proposition 2.3.2 *Si le système $F-$polynômial (2.1) a deux facteurs intégrant R_1 et R_2 sur le sous-ensemble ouvert U de F^2, alors dans l'ensemble ouvert $U/\{R_2 = 0\}$ la fonction R_1/R_2 est une intégrale première.*

Preuve. *La fonction R_1/R_2 est une intégrale première, prouvu que R_1/R_2 soit non constant.*

Puisque R_i est un facteur intégrant, il satisfait

$$XR_i = -R_i \operatorname{div}(P,Q) \text{ pour } i = 1, 2.$$

Alors

$$\begin{aligned} X\left(\frac{R_1}{R_2}\right) &= \frac{(XR_1)R_2 - R_1(XR_2)}{R_2^2} \\ &= \frac{-R_1 \operatorname{div}(P,Q) R_2 + R_1R_2 \operatorname{div}(P,Q)}{R_2^2} = 0 \end{aligned}$$

par conséquent la proposition est démontrée. ■

2.4 Courbes algébriques invariantes

Définition 2.4.1 *Soit $f \in \mathbb{C}[x, y]$ une fonction non identiquement nulle.*

La courbe algébrique $f(x, y) = 0$ est une courbes algébrique invariante du système $F-$polynômial (2.1) si pour un polynôme $K \in \mathbb{C}[x, y]$ on a

$$Xf = P\frac{\partial f}{\partial x} + Q\frac{\partial f}{\partial y} = Kf. \tag{2.4}$$

Le polynôme K est appelé le cofacteur de la courbe algébrique invariante $f = 0$.

On trouve que, si le système polynômial a un degré m, le cofacteur K a un degré $m - 1$ au plus.

Remarque 2.4.1 *Dans la définition de la courbe algébrique invariante, on suppose que cette courbe $f = 0$ soit complexe, c'est-à-dire $f \in \mathbb{C}[x, y]$ même dans le cas d'un système polynômial réel. Car on verra c'est du au fait que parfois pour les système réels l'existence d'intégrale première réelle peut être produit par l'existence des courbes algébriques invariantes complexes. Quand on voit pour la courbe algébrique invariante d'un système réel, on pense au système polynômial complexe.*

Proposition 2.4.1 *Pour le système (2.3), $f = 0$ est une courbe algébrique invariante avec le cofacteur K si et seulement si $\overline{f}$ est une courbe algébrique invariante avec le cofacteur $\overline{K}$.*

Preuve. *On suppose que $f = 0$ est une courbe algébrique invariante avec le cofacteur K du système polynômial réel (2.1). Puisque P et Q sont des polynômes réels, en prenant le conjuqué de (2.4), on obtient*

$$P\frac{\partial \overline{f}}{\partial x} + Q\frac{\partial \overline{f}}{\partial y} = \overline{Kf}.$$

Par conséquent, $\overline{f} = 0$ est une courbe algébrique invariante avec le cofacteur $\overline{K}$ du système (2.3).

La réciproque est similaire. ■

Lemme 2.4.1 *Soient $f, g \in \mathbb{C}[x, y]$. On suppose que f et g sont premiers dans l'anneaux $\mathbb{C}[x, y]$. Alors pour un système polynômial (2.1), $fg = 0$ est une courbe algébrique invariante avec le cofacteur K_{fg} si et seulement si $f = 0$ et $g = 0$ sont des courbes algébriques invariantes avec les cofacteurs K_f et K_g respectivement. Et $K_{fg} = K_f + K_g$.*

Preuve. *On a*

$$X(fg) = (Xf)\,g + f\,(Xg)\,. \tag{2.5}$$

On suppose que $fg = 0$ *est une courbe algébrique invariante du système* (2.1) *avec le cofacteur* K_{fg}.

Alors $X(fg) = K_{fg}fg$ *et par l'égalité* (2.5), *nous obtenons*

$$K_{fg}fg = (Xf)\,g + f\,(Xg)$$

puisque f *et* g *sont premiers entre eux, on obtient que* f *divise* Xf *et* g *divise* Xg.*On a*

$$(K_f + K_g)\,fg = (Xf)\,g + f\,(Xg) \Longrightarrow K_ffg + K_gfg = (Xf)\,g + f\,(Xg)\,.$$

Divisons la derniere égalité par f, *on obtient*

$$K_fg + K_gg = \left(\frac{Xf}{f}\right)g + Xg$$

si on note par K_f *le quotient* $\dfrac{Xf}{f}$ *et* K_g *le quotient* $\dfrac{Xg}{g}$ *alors on obtient*

$$K_fg + K_gg = K_fg + Xg \Longrightarrow K_gg = Xg$$

alors $g = 0$ *est une courbe algébrique invariante avec le cofacteur* K_g, *on fait la même chose on trouve aussi que* $f = 0$ *est une courbe algébrique invariante du système* (2.1) *avec le cofacteur* K_f, $K_{fg} = K_f + K_g$. *On suppose que* $f = 0$ *et* $g = 0$ *sont des courbes algébriques invariantes du système* (2.1) *avec les cofacteurs* K_f *et* K_g *respectivement, alors* $Xf = K_ff$ *et* $Xg = K_gg$ *d'aprés l'égalité* (2.5) *on a*

$$X(fg) = K_ffg + fK_gg = (K_f + K_g)\,fg$$

on pose $K_f + K_g = K_{fg}$ *alors* $X(fg) = K_{fg}fg$.

Par conséquent, $fg = 0$ *est une courbe algébrique invariante du système* (2.1) *avec le cofacteur* K_{fg}. ■

Proposition 2.4.2 *Supposons que* $f \in \mathbb{C}[x,y]$ *et soit* $f = f_1^{n_1}...f_r^{n_r}$ *sa factorisation en des facteurs irréductibles sur* $\mathbb{C}[x,y]$. *Alors pour le système* (2.1), $f = 0$ *est une courbe algébrique invariante avec le cofacteur* K_f *si et seulement si* $f_i = 0$ *est une courbe algébrique invariante pour* $i = 1, ..., r$ *avec le cofacteur* K_{f_i}. *De plus,* $K_f = n_1K_{f_1} + ... + n_rK_{f_r}$.

Preuve. *D'aprés le lemme* (2.4.1), *on sait que* $f = 0$ *est une courbe algébrique invariante avec le cofacteur* K_f *si et seulement si* $f_i^{n_i} = 0$ *est une courbe algébrique invariante pour* $i = 1, ..., r$ *avec le cofacteur* $K_{f_i^{n_i}}$, *on outre*

$$K_f = K_{f_i^{n_i}} + ... + K_{f_r^{n_r}}.$$

Il suffit de montrer que, pour $i = 1, ..., r$, $f_i^{n_i} = 0$ *est une courbe algébrique invariante avec le cofacteur* $K_{f_i^{n_i}}$ *si et seulement si* $f_i = 0$ *est une courbe algébrique invariante avec le cofacteur* K_{f_i} *et que* $K_{f_i^{n_i}} = n_i K_{f_i}$.

On suppose que $f_i^{n_i} = 0$ *est une courbe algébrique invariante avec le cofacteur* $K_{f_i^{n_i}}$ *alors*

$$K_{f_i^{n_i}} f_i^{n_i} = X\left(f_i^{n_i}\right) = n_i f_i^{n_i - 1} X\left(f_i\right)$$

qui est équivalente à

$$X\left(f_i\right) = \frac{1}{n_i} K_{f_i^{n_i}} f_i.$$

Donc on définit $K_{f_i} = K_{f_i^{n_i}} / n_i$, *on obtient que* $f_i = 0$ *est une courbe algébrique invariante avec le cofacteur* K_{f_i} *tel que* $K_{f_i^{n_i}} = n_i K_{f_i}$.

La réciproque est similaire. ■

2.5 Facteurs exponentiels

Le facteur exponentiel joue le même rôle que les courbes algébrique invariantes pour obtenir l'intégrale première du système (2.1). *Avant de définir sa formule, on explique comment la notion apparait naturellement.*

Supposons qu'on a des courbes algébriques invariantes

$$h_\varepsilon = h + \varepsilon g + O\left(\varepsilon^2\right) = 0$$

avec le cofacteur K_{h_ε} *pour* $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ *avec* ε_0 *suffisament petit. En utilisant le fait que* $X\left(h_\varepsilon\right) = K_{h_\varepsilon} h_\varepsilon$, *si on développe le cofacteur* K_{h_ε} *comme une série entière de* ε, *on obtient que* $K_{h_\varepsilon} = K_h + \varepsilon K + O\left(\varepsilon^2\right)$ *où* K *est un polynôme de degré* $m - 1$ *au plus. On peut maintenant faire une étude locale au voisinage d'un point où* h *est non nulle.*

Puisque

$$\begin{aligned}
X\left(\frac{h_\varepsilon}{h}\right) &= \left(\frac{X(h\varepsilon)\,h - X(h)\,h_\varepsilon}{h^2}\right) \\
&= \frac{K_{h_\varepsilon}(h_\varepsilon)\,h - (h_\varepsilon)\,K_h h}{h^2} \\
&= \frac{(K_h + \varepsilon K + O(\varepsilon^2))(h + \varepsilon g + O(\varepsilon^2))\,h - (h + \varepsilon g + O(\varepsilon^2))\,K_h h}{h^2} \\
&= \frac{K_h(h^2) + \varepsilon K_h g h + \varepsilon K(h^2) + h^2 O(\varepsilon^2) + K_h h O(\varepsilon^2) -}{h^2} \\
&\quad \frac{K_h(h^2) - \varepsilon g K_h h - K_h h O(\varepsilon^2)}{h^2} \\
&= \varepsilon K + O\left(\varepsilon^2\right)
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
X\left(\left(\frac{h_\varepsilon}{h}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\right) &= \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{h_\varepsilon}{h}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\left(\frac{h_\varepsilon}{h}\right)^{-1} X\left(\frac{h_\varepsilon}{h}\right) \\
&= \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{h_\varepsilon}{h}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}(1 + O(\varepsilon))\left(\varepsilon K + O\left(\varepsilon^2\right)\right) \\
&= (K + O(\varepsilon))\left(\frac{h_\varepsilon}{h}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}
\end{aligned}$$

Par conséquent la fonction

$$\left(\frac{h + \varepsilon g + O(\varepsilon^2)}{h}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}$$

a le cofacteur $K + O(\varepsilon)$. *quand* ε *tend vers zéro, l'expression ci-dessus tend vers*

$$\exp\left(\frac{g}{h}\right) \tag{2.6}$$

et d'aprés (2.6), *on obtient que*

$$X\left(\exp\left(\frac{g}{h}\right)\right) = K\exp\left(\frac{g}{h}\right) \tag{2.7}$$

Par conséquent, la fonction (2.6) *satisfait l'équation* (2.4). *De même que la courbe algébrique invariante, la fonction* (2.6) *posséde un cofacteur de degré au plus* $m - 1$.

Définition 2.5.1 *Soient $h, g \in \mathbb{C}[x, y]$, supposons que h, g sont premiers entre eux dans $\mathbb{C}[x, y]$ ou que $h \equiv 1$. Alors la fonction $\exp(g/h)$ est appelée un facteur exponentiel du système $F-$polynômial (2.1) si pour un polynôme $K \in \mathbb{C}[x, y]$ de degré au plus $m-1$ satisfait l'équation (2.7). Comme avant on dit que K est le cofacteur du facteur exponentiel $\exp(g/h)$.*

Remarque 2.5.1 1) *On note que le facteur exponentiel ne définissent pas des courbes algébriques pour le flot du système (2.1), parce qu'ils ne sont jamais nuls.*

2) *On remarque que dans la définition du facteur exponentiel $\exp(g/h)$, nous supposons que cette fonction soit complexe, c'est-à-dire $h, g \in \mathbb{C}[x, y]$ même dans le cas d'un système polynômial réel. La raison est la même que dans le cas des courbes algébriques invariantes c'est-à-dire, parfois pour des système polynômiaux réels l'existence d'intégrale première peut être déduite par l'existence des facteurs exponentiels complexes. Encore, en voyant pour un facteur exponentiel d'un système polynômial réel, on considère le système polynômial comme étant en $\mathbb{C}^2$.*

Proposition 2.5.1 *Pour un système polynômial réel (2.1) la fonction $\exp(g/h)$ est un facteur exponentiel avec le cofacteur K si et seulement si la fonction $\exp\left(\overline{g}/\overline{h}\right)$ est un facteur exponentiel avec le cofacteur $\overline{K}$.*

Preuve. *On suppose que $\exp(g/h)$ est un facteur exponentiel du système polynômial réel (2.1) avec le cofacteur K. Alors l'égalité (2.7) est vérifiée. Puisque P et Q sont des polynômes réels, on prend le conjugué de(2.7), on obtient qu*

$$P\frac{\partial \exp\left(\overline{g}/\overline{h}\right)}{\partial x} + Q\frac{\partial \exp\left(\overline{g}/\overline{h}\right)}{\partial y} = \overline{K}\exp\left(\overline{g}/\overline{h}\right)$$

par conséquent, $\exp\left(\overline{g}/\overline{h}\right)$ est un facteur exponentiel du système (2.1) avec le cofacteur $\overline{K}$.

La preuve de la réciproque est similaire. ■

Proposition 2.5.2 *Si $F = \exp(g/h)$ est un facteur exponentiel du système (2.1), alors $h = 0$ est une courbe algébrique invariante et g satisfait l'équation*

$$Xg = gK_h + hK_F \tag{2.8}$$

où K_h et K_F sont respectivement les cofacteurs de h et F.

Preuve. *Puisque* $F = \exp(g/h)$ *est un facteur exponentiel avec le cofacteur* K_F, *on a* $Xg = gK_h + hK_F$

$$\begin{aligned} K_F \exp(g/h) &= X(\exp(g/h)) \\ &= \exp(g/h)\, X(g/h) \\ &= \exp(g/h)\, \frac{(Xg)\,h - g\,(Xh)}{h^2} \end{aligned}$$

Ce qui est équivalent à

$$(Xg)\,h - g\,(Xh) = h^2 K_F \tag{2.9}$$

Par conséquet, puisque h *et* g *sont premiers entre eux, on obtient que* h *divise* Xh. *On a*

$$\begin{aligned} Xg - gK_h &= hK_F \\ &= h\frac{XF}{F} \\ &= h\left[\frac{\frac{h\,(Xg) - g\,(Xh)}{h^2}F}{F}\right] \\ &= \frac{h\,(Xg) - g\,(Xh)}{h} \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow h\,(Xg) - ghK_h = h\,(Xg) - gXh$$

Comme h *divise* Xh *on trouve* $Xh = K_h h$. *Donc* $h = 0$ *est une courbe algébrique invariante avec le cofacteur* $K_h = X_h/h$.

Maintenant remplaçant Xh *par* $K_h h$ *dans* (2.9) ,*on a*
$(Xg)\,h - gK_h h = h^2 K_F \Longrightarrow Xg = gK_h + hK_F$. ■

Chapitre 3

La méthode de Darboux

Avant d'énoncer les principaux résultats du théorème de Darboux, on a besoin de quelques définitions.

3.1 Définitions

Définition 3.1.1 *Soit* $S(x,y) = \sum_{i+j}^{m-1} a_{ij}x^iy^j$ *un polynôme de degré* $m-1$ *avec* $m(m+1)/2$ *coefficients dans* F*, alors on écrit* $S \in F_{m-1}[x,y]$*. On identifie l'espace vectoriel linéaire* $F_{m-1}[x,y]$ *avec* $F^{m(m+1)/2}$ *par l'isomorphisme*

$$S \longrightarrow (a_{00}, a_{10}, a_{01}, ..., a_{m-1,0}, a_{m-2,0}, ..., a_{0,m-1})$$

Définition 3.1.2 *On dit que les* r *points* $(x_k, y_k) \in F^2, k = 1, ..., r$*, sont indépendants si l'intersection des* r *hyperplans*

$$\left\{ (a_{ij}) \in F^{m(m+1)/2} : \sum_{i+j=0}^{m-1} a_{ij}x_k^iy_k^j = 0, k = 1, ..., r \right\}$$

est un sous espace linéaire de dimension $(m(m+1)/2) - r$.

Définition 3.1.3 *un point singulier* (x_0, y_0) *du système* (2.1) *est dit faible si la divergence* $\operatorname{div}(P, Q)$ *du système* (2.1) *en* (x_0, y_0) *est nulle.*

Remarque 3.1.1 *D'aprés le théorème de Bézout, le nombre maximum des points singuliers isolés du système polynômial* (2.1) *est* m^2*. Le nombre maximum des points singuliers independants du système* (2.1) *est* $m(m+1)/2$ *et* $m(m+1)/2 < m^2$ *pour* $m > 2$.

Théorème 3.1.1 *(Théorie d'intégrabilité de Darboux)*

On suppose que le système (2.1) de degré m admet p courbes algébriques invariantes irréductibles $f_i = 0$ avec les cofacteurs K_i pour $i = 1, ..., p$, q facteurs exponentiels $\exp(g_i/h_i)$ avec les cofacteurs L_j pour $j = 1, ..., q$ et r points singuliers indépendants $(x_k, y_k) \in \mathbb{C}^2$ tel que $f_i(x_k, y_k) \neq 0$ pour $i = 1, ..., p$ et pour $k = 1, ..., r$.

1. Ils existent $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$ non tous nuls tels que

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j L_j = 0$$

si et seulement si la fonction

$$f_1^{\lambda_1} ... f_p^{\lambda_p} \left(\exp\left(\frac{g_1}{h_1}\right)\right)^{\mu_1} ... \left(\exp\left(\frac{g_q}{h_q}\right)\right)^{\mu_q} \tag{3.1}$$

est une intégrale première du système (2.1).

2. Si $p + q + r \geq [m(m+1)/2] + 1$, alors il existe $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$ non tous nuls tel que

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j L_j = 0$$

3. Si $p+q+r \geq [m(m+1)/2]+2$, alors le système (2.1) a une intégrale première rationnelle et par conséquent toutes les trajectoires du système sont contenues dans les courbes algébriques invariantes.

4. Ils existent $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$ non tous nuls tels que

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j L_j = -\operatorname{div}(P, Q)$$

si et seulement si la fonction (3.1) est un facteur intégrant du système (2.1).

5. Si $p+q+r = m(m+1)/2$ et les r points singuliers indépendants sont faibles, alors la fonction (3.1) est une intégrale première si

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j L_j = 0$$

où est un facteur intégrant si

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j L_j = -\operatorname{div}(P, Q)$$

avec $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$ *sont non tous nuls.*

6. *S'ils existent* $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$ *non tous nuls tels que*

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j L_j \quad = \quad -s, \text{ pour } s \in \mathbb{C}/\{0\} \text{ alors la fonction}$$

$$f_1^{\lambda_1} ... f_p^{\lambda_p} \left(\exp\left(\frac{g_1}{h_1}\right)\right)^{\mu_1} ... \left(\exp\left(\frac{g_q}{h_q}\right)\right)^{\mu_q} \exp(st)$$

est un invariant du système (2.1).

Preuve. *(Voir [2]).* ■

Remarque 3.1.2 *Une fonction de la forme* (3.1) *est appelé fonction Darbouxienne*

Maintenant, nous allons voir que si le système différentiel est réel, alors l'intégrale première fournie par le théorème de Darboux est réelle aussi.

Cela découle du fait suivant, puisque le système différentiel polynômial (2.1) *est réel, il est bien connu que si une courbe algébrique invariante ou un facteur exponentiel apparait, alors son conjuguée doit apparaitre simultanément* (voir proposition (2.4.1) et (2.4.2)). *Si parmi les courbes algébriques invariantes du système réel* (2.1), *une paire complexe* $f = 0$ *et* $\overline{f}$ *existe, alors la fonction* (3.1) *a un facteur réel de la forme* $f^{\lambda} \overline{f}^{\overline{\lambda}}$ *laquelle est une fonction réelle*

$$\left[(\operatorname{Re} f)^2 + (\operatorname{Im} f)^2\right]^{\operatorname{Re}\lambda} \exp\left(-2 \operatorname{Im}\lambda \arg\left(\operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f\right)\right),$$

avec $\operatorname{Im}(\lambda)\operatorname{Im}(f) \neq 0$. *Si parmi les facteurs exponentiels du système réel* (2.1), *une paire complexe* $F = \exp(g/h)$ *et* $\overline{F} = \exp(\overline{g}/\overline{h})$ *existe, alors l'intégrale première* (3.1) *possède un facteur intégrant de la forme*

$$\left(\exp\left(\frac{g}{h}\right)\right)^{\mu} \left(\exp\left(\frac{\overline{g}}{\overline{h}}\right)\right)^{\overline{\mu}} = \exp\left(2 \operatorname{Re}\left(\mu \frac{g}{h}\right)\right).$$

On résume que la fonction (3.1) *est réelle quand le système différentiel* (2.1) *est réel.*

3.2 Quelques applications de la théorie de Darboux

Dans ce qui suit, on présente des applications du théorème de Darboux pour des systèmes quadratiques, on a $m(m+1)/2 = 3$.

Exemple *Soit le système quadratique suivant avec* $abc \neq 0$

$$\begin{cases} \dot{x} = x(ax+c) \\ \dot{y} = y(2ax+by+c) \end{cases} \tag{3.2}$$

Ce système a cinq lignes invariantes (i.e solutions algébriques de degré 1).
En effet, soient $f = \alpha x + \beta y + \gamma$ *la courbe algébrique invariante et*
$K = \delta x + \eta y + \sigma$ *le cofacteur de* f.
Alors on a

$$\begin{aligned} Xf &= P\frac{\partial f}{\partial x} + Q\frac{\partial f}{\partial y} = Kf \\ Xf &= \alpha x(ax+c) + \beta y(2ax+by+c) \\ Kf &= (\delta x + \eta y + \sigma)(\alpha x + \beta y + \gamma). \end{aligned}$$

On développe l'équation précédente, on trouve
$Xf = \alpha a x^2 + b\beta y^2 + 2a\beta xy + \alpha c x + \beta c y$
$Kf = \delta\alpha x^2 + \beta\eta y^2 + (\delta\beta + \eta\alpha)xy + (\sigma\alpha + \delta\gamma)x + (\sigma\beta + \gamma\eta)y + \sigma\gamma$
On obtient alors le système

$$\begin{cases} \delta\alpha = \alpha a \\ \beta\eta = b\beta \\ \delta\beta + \eta\alpha = 2a\beta \\ \sigma\alpha + \delta\gamma = \alpha c \\ \sigma\beta + \gamma\eta = \beta c \\ \sigma\gamma = 0 \end{cases}$$

Si $\gamma = 0, \sigma \neq 0, \beta = 0, \alpha \neq 0$ *on a*
$\{\sigma = c, \eta = 0, \delta = a\}$
alors $f_1 = \alpha x = 0$, *d'où* $f_1 = x = 0$ *est une ligne invariante avec le cofacteur* $K_1 = ax + c$.
Si $\gamma \neq 0, \sigma = 0, \beta = 0, \alpha \neq 0$ *on a*
$\left\{\eta = 0, \delta = a, \gamma = \frac{c}{a}\alpha\right\}$

alors $f_2 = \alpha x + \frac{c}{a}\alpha = 0$, *d'où* $f = ax + c = 0$ *est une ligne invariante avec le cofacteur* $K_2 = ax$.

Si $\gamma = 0, \sigma \neq 0, \beta \neq 0, \alpha = 0$ *on a*

$\{\sigma = c, \delta = 2a, \eta = b\}$

alors $f_3 = \beta y = 0$, *d'où* $f_3 = y = 0$ *est une ligne invariante avec le cofacteur* $K_3 = 2ax + by + c$.

Si $\gamma = 0, \sigma \neq 0, \beta \neq 0, \alpha \neq 0$ *on a*

$\left\{\sigma = c, \eta = b, \delta = a, \alpha = \frac{a}{b}\beta\right\}$

alors $f_4 = \frac{a}{b}\beta x + \beta y = 0$, *d'où* $f_4 = ax + by = 0$ *est une ligne invariante avec le cofacteur* $K_4 = ax + by + c$.

Si $\gamma \neq 0, \sigma = 0, \beta \neq 0, \alpha \neq 0$ *on a*

$\left\{\delta = a, \eta = b, \alpha = \frac{a}{b}\beta, \gamma = \frac{c}{b}\beta\right\}$

alors $f_5 = \frac{a}{b}\beta x + \beta y + \frac{c}{b}\beta = 0$, *d'où* $f_5 = ax + by + c = 0$ *est une ligne invariante avec le cofacteur* $K_5 = ax + by$.

D'aprés le théorème de Darboux $\left(2^{éme}cas\right)$, *le système* (3.2) *a une intégrale première*

$$H = f_1^{\lambda_1} f_2^{\lambda_2} f_3^{\lambda_3} f_4^{\lambda_4} f_5^{\lambda_5}$$

avec $\lambda_i \in \mathbb{C}$ *qui satisfont*

$$\sum_{i=1}^{5} \lambda_i K_i = 0.$$

Alors, on a

$$\begin{aligned}
\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 + \lambda_3 K_3 + \lambda_4 K_4 + \lambda_5 K_5 &= \lambda_1 (ax + c) + \lambda_2 ax + \lambda_3 (2ax + by + c) \\
&\quad + \lambda_4 (ax + by + c) + \lambda_5 (ax + by) \\
&= a (\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5) x + \\
&\quad b (\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5) y + c (\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ce qui conduit au système suivant

$$\left\{ \begin{array}{c} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 0 \\ \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{array} \right.$$

Si on pose $\lambda_3 = 0, \lambda_1 = -1$, *alors on a* $\lambda_5 = -1, \lambda_2 = \lambda_4 = 1$.
Par conséquent, l'intégrale première est

$$H = \frac{(ax+c)(ax+by)}{x(ax+by+c)}.$$

Remarque 3.2.1 *D'aprés le théorème de Darboux* $\left(3^{éme}cas\right)$, *le système* (3.2) *a 5 courbes algébriques invariantes, on a une intégrale première rationnelle, c'est ce qu'on a trouvé.*

Exemple *Soit le système quadratique*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - b\left(x^2+y^2\right) = P \\ \dot{y} = x = Q \end{cases} \tag{3.3}$$

soient $f = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy + \lambda x + \mu y + \nu$ *la courbe algébrique invariante et* $K = \delta x + \eta y + \sigma$ *le cofacteur de* f. *Alors on a*

$$\begin{aligned} Xf &= P\frac{\partial f}{\partial x} + Q\frac{\partial f}{\partial y} = Kf \\ Xf &= \left[-y\left(-b\left(x^2+y^2\right)\right)\right](2\alpha x + \gamma y + \lambda) + x(2\beta y + \gamma x + \mu) \\ Kf &= (\delta x + \eta y + \sigma)\left(\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy + \lambda x + \mu y + \nu\right). \end{aligned}$$

On développe l'équation précédente, on trouve
$Xf = -2b\alpha x^3 - b\gamma y^3 - b\gamma x^2 y - 2b\alpha xy^2 + (\gamma - b\lambda)x^2 + (-\gamma - b\lambda)y^2 + (-2\alpha + 2\beta)xy + \mu x - \lambda y$
$Kf = \delta\alpha x^3 + \eta\beta y^3 + (\delta\gamma + \eta\alpha)x^2 y + (\delta\beta + \eta\gamma)xy^2 + (\delta\lambda + \sigma\alpha)x^2 + (\eta\mu + \sigma\beta)y^2 + (\delta\mu + \eta\lambda + \sigma\gamma)xy + (\delta\nu + \sigma\lambda)x + (\eta\nu + \sigma\mu)y + \sigma\nu$
ceci conduit au système suivant

$$\begin{cases} \sigma\nu = 0 \\ \eta\nu + \sigma\mu = -\lambda \\ \delta\nu + \sigma\lambda = \mu \\ \delta\mu + \eta\lambda + \sigma\gamma = -2\alpha + 2\beta \\ \eta\mu + \sigma\beta = -\gamma - b\lambda \\ \delta\lambda + \sigma\alpha = \gamma - b\lambda \\ \delta\beta + \eta\gamma = -2b\alpha \\ \delta\gamma + \eta\alpha = -b\gamma \\ \eta\beta = -b\gamma \\ \delta\alpha = -2b\alpha \end{cases}$$

On utilise Maple, on trouve les solutions de ce système
$\{\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0, \delta = -b, \eta = ib, \lambda = \lambda, \mu = i\lambda, \nu = 0, \sigma = i\}$
$\{\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0, \delta = -b, \eta = -ib, \lambda = \lambda, \mu = -i\lambda, \nu = 0, \sigma = -i\}$
alors, on a deux courbes algébriques invariantes
$f_1 = \lambda x + i\lambda y = 0$, *d'où* $f_1 = x + iy = 0$, *avec le cofacteur*
$K_1 = -bx + iby + i$
et $f_2 = \lambda x - i\lambda y = 0$, *alors* $f_2 = x - iy = 0$, *avec le cofacteur*
$K_2 = -bx - iby - i.$
Donc on a

$$f = f_1 f_2 = x^2 + y^2 = 0$$

est une courbe algébrique invariante avec le cofacteur

$$K = K_1 + K_2 = -2bx.$$

Puisque $\operatorname{div}(p, q) = -2bx = K$, *d'aprés le théorème de Darboux* $\left(4^{éme} cas\right)$, *on a* $R = f^{-1} = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ *est un facteur intégrant, par conséquent*

$$\begin{aligned} -\frac{\partial H}{\partial x} &= RQ = \frac{x}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial H}{\partial x} &= -\frac{x}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

alors $H = \displaystyle\int -\frac{x}{x^2 + y^2} dx = -\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + h(y) \ldots\ldots (*)$

$h(y)$ *est calculé d'aprés l'équation* $\dfrac{\partial H}{\partial y} = RP = \dfrac{-y - b(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$
d'aprés $(*)$ $\dfrac{\partial H}{\partial y} = -\dfrac{y}{x^2 + y^2} + h'(y)$
D'où

$$\begin{aligned} h'(y) &= -b \\ h(y) &= -by \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} H &= -\frac{1}{2} \ln\left(x^2 + y^2\right) - by \\ H &= \left(x^2 + y^2\right) \exp(2by) \end{aligned}$$

est une intégrale première du système (3.3).