République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Mathématiques Appliquées**

Par :

Mlle. TAOUTAOU ZEYNEB

Intitulé

Modèle mathématique de la précipitation et l'humidité

Dirigé par : Pr. Hisao Fujita Yashima

Devant le jury

PRESIDENT	**Dr. Merad Meriem**	**Univ-Guelma**
RAPPORTEUR	**Pr. Hisao Fujita Yashima**	**Univ-Guelma**
EXAMINATEUR	**Pr. Aissaoui Med Zine**	**Univ-Guelma**

Session Juin 2016

Remerciements

En premier lieu et avant je tiens à exprimer mes

remerciements au bon dieu qui nous a

entouré de sa bienveuillance et nous a renforcé avec le

courage et la force pour avoir

enfin mené à lieu ce travail

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon encadreur

Pr : HISAO FUJITA YASHIMA

qui m'a suivi tout au long de mon travail, et mes plus vifs remerciements pour son soutien, sa patience, ses conseils judicieux et sa sympathie dont il m'a fait preuve tout au long de lélaboration de ce travail.

Je remercie très sincèrement, les membres de jury « Pr. Aissaoui Med Zine » et « Mme. Merad Meriem » pour m'avoir fait l'honneur d'évaluer mon travail

Finalement, je remercie « Mlle. Ayachi Asma » qui m'a aider tous au long de mon travail.

Dédicace

A l'aide de dieu j'espère avoir complir ce modeste travail que je dédie à :

Ceux qui sont les plus chère au monde

Ma grande mère «MAMA KHADRA »

Ma mère et Mon père

Mes très chères frères : Salah & Bilal & Djamel Eddine (et sa femme « NEZHA »)

Mes deux sœurs : Samia & Selma

Mon fiancé : « SALAH EDDINE » et sa famille

Mes nièces : NOUR & les jolies NADA et ROUDEYNA & mon ange « MARIA »

Et à toutes mes AMIS

Tous qui me connaissent, surtout tous qui

m'aime

Modèle mathématique de la précipitation et l'humidité

Taoutaou Zeyneb
Mémoire de Master en mathématiques
Université 8 Mai 1945 Guelma

15 juin 2016

Table des matières

Résumé

Dans ce mémoire, on considère le mouvement de l'air qui passe sur une montagne en formant des nuages de gouttelettes d'eau et de mourceaux de glace. On étudie en particulier le système d'équations monodimensionnelles du mouvement stationnaire d'un gaz visqueux et calorifère en coordonnées euclériennes, avec de petits coefficients de viscosité et de conductibilité thermique. Nous prenons en examen ce système d'équations avec les conditions aux limites et nous examinons la possibilité de démontré du l'existence d'une solution de l'équation avec viscosité et thermoconductibilité dans un voisinage de la solution de l'équation sans viscosité et thermoconductibilité.

Introduction

La précipitation est un phénomène naturel qui intéresse la société humaine depuis l'antiquité. Elle a été observée et documentée pendant des siècles. On sait également que la présence des montagnes cause des précipitations abondantes. Le cas de la précipitation dans l'Atlas marocain nous intéresse de manière pariculière pour la proximité géographique à l'Algérie et pour la similitude des conditions climatiques générales. Parmi les chercheures qui ont étudié la précipitation sur l'Atlas, en particulier la chute de la neige, nous citons M. Peyron, qui dans son article *Les chutes de neige dans l'Atlas marocain* [14], a décrit d'une manière suffisamment détaillée la précipitation sur l'Atlas. Selon sa description, l'Atlas marocain bénéficie d'importantes précipitations nivales pendant la saison humide. Cet enneigement est assez irrégulièrement réparti, dans le temps comme dans l'espace, mais se répercute principalement sur le versant Nord. Le manteau nival ainsi constitué obéit à des influences thermo-climatique dont les actions solaires et éoliennes sont les plus marquantes. Des névés garnissent les creux de la montagne jusqu'en été, mais les neiges permanentes sont rarissimes.

Retournons à la genèse de la précipitation, l'atmosphère contient une certaine de quantité d'eau à l'état gazeux. A la déffirence des autres molécules comme N_2 et O_2, qui reste toujours en état gazeux dans les conditions ordinaires de l'atmosphère, H_2O peut avoir trois état : gazeux, liquide et solide.

Aux températures supérieures à 0^0C, si la pression de la vapeur devient supérieure à la pression de la vapeur saturée (relative à l'état liquide), alors il y aura la condensation ; d'autre part, si la pression de la vapeur devient inférieure à 0^0C et si les gouttelettes sont présentes, alors il y aura l'évaporation. Dans l'autre côté c'est-à-dire aux températures inférieures à 0^0C, si la pression de la vapeur est supérieure à la pression de la vapeur saturée, alors il y aura la sublimation inverse (de gaz en solide) ; d'autre part, si la pression de la vapeur est inférieure à la pression de la vapeur saturée alors il y aura la sublimation (de solide en gaz).

Nous désirons alors donner notre contribution à la recherche des modèles mathématiques des phénomènes atmosphériques et météorologiques et climatiques avec l'étude des équations du mouvement de l'air avec éventuelle condensation de la vapeur d'eau et donc avec éventuelle formation de nuages et une éventuelle sublimation inverse (de gaz en solide) et donc éventuelle formation de neiges.

Comme phénomène physique, la transition de phase de l'eau se réalise selon des conditions physiques bien précises. Pour la définition des conditions pour la transition de phase de l'eau dans l'air, joue le rôle fondamental la quantité appelé *pression de la vapeur saturée*, qui est essentiellement déterminée par la température. D'autre part, les processus de transition de phase contribue de manière appréciable à la variation de la température. Ce phénomène est connu sous le nom de *chaleur latente*. La chaleur latente donné ou retirée par la transition de phase de l'eau constitue un facteur important dans les phénomènes métérologiques.

Dans ce mémoire nous allons étudier le phénomène de la chute de neige et celle de précipitation dans une chaine de montagnes (des lieux élevés) qui dépend de la température, ainsi quand la température $T > 0^0C$ il y aura la condensation de la vapeur d'eau et quand la température $T < 0^0C$ il y aura la sublimation (inverse). Cette dernière transition de phase de l'eau cause les chutes de neiges.

Les quantités physiques que nous devrions considérer dans un modèle complet (voir par exemple [17]) sont

$\varrho = \varrho(t, x)$, la densité de l'air sec

$\pi = \pi(t, x)$, la densité de H_2O en état gazeux

$\sigma_l(m) = \sigma_l(m, t, x)$, la densité de H_2O en état liquide, contenue dans des gouttelettes de masse m

$\sigma_s(m) = \sigma_s(m, t, x)$, la densité de l'eau solide (glace), contenue dans les morceaux de glace de masse m

$v = v(t, x) = (v_1, v_2, v_3) = ((v_1(t, x), v_2(t, x), v_3(t, x)))$, la vitesse de l'air composé par l'air sec et la vapeur d'eau

$u(m) = u(m, t, x) = (u_1, u_2, u_3) = ((u_1(m, t, x), u_2(m, t, x), u_3(m, t, x)))$, la vitesse des gouttelettes de masse m

$w(m) = w(m, t, x) = (w_1, w_2, w_3) = ((w_1(m, t, x), w_2(m, t, x), w_3(m, t, x)))$, la vitesse des morceaux de cristal de masse m,

$T = T(t, x)$ et $p = p(t, x)$ sont respectivement la température de l'air et la pression, comme $\sigma_l(m)$ et $\sigma_s(m)$ désignent la densité dans le sens de la masse dans l'unité de volume de l'air, le nombre des gouttelettes et des morceaux de cristal de H_2O de masse m se trouvant dans l'unité de volume est donnée par $\frac{\sigma_l(m)}{m}$ et $\frac{\sigma_s(m)}{m}$ respectivement.

Toutefois dans la présente étude, nous allons utiliser un modèle simplifié, où nous considérerons les quantités $\varrho+\pi$ et v, tandis que $\sigma_l+\sigma_s$ sera considérée d'une maniène implicite.

On rappelle que dans les conditions usuelles de l'atmosphère, le comportement de l'air sec, ainsi que celui de la vapeur d'eau au regard de la relation entre la pression, la densité et la température n'est pas beaucoup différente de celui du gaz idéal, ce qui implique que la pression partielle de l'air sec et celle de la vapeur d'eau sont représentées respectivement par $R\frac{\varrho}{\mu_a}T$ et $R\frac{\pi}{\mu_h}T$, la pression de l'air composée par l'air sec et la vapeur d'eau est la somme de la pression partielle de l'air sec et de celle de la vapeur d'eau. Donc la pression p de l'air est donnée par

$$p = R(\frac{\varrho}{\mu_a} + \frac{\pi}{\mu_h})T,$$

où R, μ_a et μ_h sont respectivement, la constante universelle des gaz, la masse molaire moyenne de l'air et celle de l'eau.

Dans [9] les auteurs ont étudié la solution numérique de l'équation similaire (seulement avec condensation sans sublimation inverse) ; le résultat de calcul numérique illustré dans [9] montre en particulier le comportement de la température : la dérivé de cette fonction par rapport à x a une discontinuité à cause du début de condensation. Dans [2] l'auteur donné quelques idées pour l'éventuelle démonstration d'existence d'une solution de cette équation sont toutefois compléter la démonstration.

Rappelons aussi dans [3] les auteurs ont démontré l'existence d'une solution de l'équation sans condensation, la technique développée dans [3] reste fondamentale pour la recherche de solution de l'équation même avec condensation et éventuellement sublimation (inverse).

L'objectif de notre travail est de montrer la pssibilité de la résolution,en développant des techniques pour la résolution de l'équation avec condensation et sublimation (inverse). En effet, même si n'avons pas réussi à démontrer l'existence d'une solution de cette équation, nous avons fait quelques progré dans cette direction, en particulier nous avons montré un schéma de l'application du théorème de point fixe de Schauder sous une hypothèse, qui nous semble vraisemblable mais pour le moument reste encore une hyphothèse.

Chapitre 1

Présentation des équations du mouvement de l'air

1.1 Equation de la conservation de la masse

Comme il n'y a pas de possibilité de transformation de l'air sec à H_2O ou de H_2O à un des élément de l'air sec, la loi de conservation de la masse s'applique séparément à l'air sec et à H_2O est exprumée par l'équation

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla.(\varrho v) = 0 \tag{1.1}$$

Le principe de la conservation de la masse et la desciption de la transition de phase de l'eau impliquent que la densité de la vapeur d'eau $\pi(t, x)$ doit vérifier l'équation

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + \nabla.(\pi v) = -H_{gl}(T, \pi, \sigma_l(.)) - H_{gs}(T, \pi, \sigma_s(.)) \tag{1.2}$$

où H_{gl}(resp. H_{gs}) sont la quantité totale de la condensation et celle de la sublimation (inverse).

D'autre part, pour l'eau liquide contenue dans les gouttelettes de masse m est exprimé par l'équation suivante

$$\frac{\partial \sigma_l(m)}{\partial t} + \nabla(\sigma_l(m)u(m)) = -\frac{\partial(mh_{gl}(m)\sigma_l(m))}{\partial m} + h_{gl}(m)\sigma_l(m) + \tag{1.3}$$

$$\frac{1}{2}\int_0^m \beta_l(m-m')\sigma_l(m')\sigma_l(m-m')dm' - \int_0^\infty \beta_l(m,m')\sigma_l(m)\sigma_l(m')$$

Pour l'eau solide contenue dans les morceaux de cristal de masse m est exprimé par l'équation suivante

$$\frac{\partial \sigma_s(m)}{\partial t} + \nabla(\sigma_s(m)w(m)) = -\frac{\partial(mh_{gs}(m)\sigma_s(m))}{\partial m} + h_{gs}(m)\sigma_s(m) + \tag{1.4}$$

$$\frac{1}{2}\int_0^m \beta_s(m-m')\sigma_s(m')\sigma_s(m-m')dm' - \int_0^\infty \beta_s(m,m')\sigma_s(m)\sigma_s(m')$$

où $\beta_l(m,m')$(resp. $\beta_s(m,m')$) sont la probabilité de rencontre entre une gouttelette de masse m et une de masse m' et la probabilité de rencontre entre un morceau de cristal de masse m et un de masse m'.

h_{gl} et h_{gs} sont respectivement la quantité de H_2O qui se transforme de gaz en liquide (par unité de masse) sur les gouttelettes de masse m et celle qui se transforme de gaz en solide (par unité de masse) sur les morceaux de cristal de masse m.

1.2 Equations de quantité de mouvement des gouttelettes et des morceaux de cristal

L'équation qui exprime la loi de la conservation de la quantité de mouvement aura la forme

$$(\varrho+\pi)\Big(\frac{\partial v}{\partial t}+(v.\nabla)v\Big)=\eta\Delta v+(\zeta+\frac{\eta}{3})\nabla(\nabla.v)-R\nabla((\frac{\varrho}{\mu_a}+\frac{\pi}{\mu_h})T)- \quad (1.5)$$

$$-\Big[\int_0^\infty(\sigma_l(m)+\sigma_s(m))dm+\varrho+\pi\Big]\nabla\Phi-2(\varrho+\pi)\omega\times v,$$

En outre, pour les vitesses des gouttelettes d'eau u et des morceaux de cristal w nous adoptons les approximations

$$u(m,t,x)=v(t,x)-\frac{1}{\alpha_l(m)}\nabla\Phi,$$

$$w(m,t,x)=v(t,x)-\frac{1}{\alpha_s(m)}\nabla\Phi,$$

où $\alpha_l(m)$ (resp. $\alpha_s(m)$) est le coefficient de friction entre une gouttelettes (resp. morceau de glace) de masse m, tandis que Φ est le potentiel d'où dérive la force extérieure (comme la force gravitationnelle) et ω est la vitesse angulaire de la rotation de la terre. Si on néglige la force de coriolis, l'équation (1.5) se réduit à

$$(\varrho+\pi)\Big(\frac{\partial v}{\partial t}+(v.\nabla)v\Big)=\eta\Delta v+(\zeta+\frac{\eta}{3})\nabla(\nabla.v)-R\nabla((\frac{\varrho}{\mu_a}+\frac{\pi}{\mu_h})T)- \quad (1.6)$$

$$-\Big[\int_0^\infty(\sigma_l(m)+\sigma_s(m))dm+\varrho+\pi\Big]\nabla\Phi$$

avec η et ζ les coéfficients de viscosité,

Le terme $\int_0^\infty(\sigma_l(m)+\sigma_s(m))dm\nabla\Phi$ correspond par le principe de l'action-réaction, aux effets de friction décrits dans la définition de la vitesse u des gouttelettes et de la vitesse w des morceaux de cristal de H_2O.

Dans les conditions usuelles de l'atmosphère, le comportement de l'air n'est pas beaucoup différent de celui du gaz idéal, donc nous permet de supposer que la pression p est donnée par

$$p = \frac{R}{\mu_m}\varrho T = R_1\varrho T \tag{1.7}$$

où T la température, R la constante universelle des gaz et μ_m la masse molaire moyenne de l'air.

1.3 Equation de bilan de l'énergie de l'air

Désignons par $H_{gl} = H_{gl}(T,\pi,\sigma_l(.))$(resp. $H_{gs} = H_{gs}(T,\pi,\sigma_s(.))$) la quantité totale (dans l'unité de volume et de temps) de H_2O qui se transforme du gaz au liquide et celle (dans l'unité de volume et de temps) de H_2O qui se transforme du gaz au solide et par L_{gl}(resp. L_{gs}) : la chaleur latente de condensation et celle de sublimation inverse.
On note par χ la fonction caractéristique dans les conditions ordinaires de l'atmosphère. Si la température T est supérieure à $\overline{T}_f = 273,15K$ ($T \geq 0^0C$), alors il y aura la condensation de la vapeur d'eau et si la température T est inférieure à $\overline{T}_f = 273,15K$ ($T < 0^0C$), alors il y aura la sublimation (inverse), ainsi l'équation de bilan de l'énergie est exprimée par

$$(\varrho + \pi)c_v(\frac{\partial T}{\partial t} + v.\nabla T) = \kappa\Delta T - R(\frac{\varrho}{\mu_a} + \frac{\pi}{\mu_h})T\nabla.v+ \tag{1.8}$$

$$+\eta \sum_{i,j=1}^{3}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla.v)\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \zeta(\nabla.v)^2$$

$$+E_{rad} + \chi_{T\geq\overline{T}_f}L_{gl}(T)H_{gl}(T,\pi,\sigma_l(.)) + \chi_{T<\overline{T}_f}L_{gs}(T)H_{gs}(T,\pi,\sigma_s(.)),$$

où E_{rad} désigne la source de la chaleur (par exemple celle due à la radiation), T la température, c_v la chaleur spésifique et κ le coéfficient de conductibilité thermique. Si on néglige la contribution de la chaleur latente de $L_{gl}(T)H_{gl}$ et de $L_{gl}(T)H_{gl}$, l'équation de bilan de l'énergie sera écrite sous la forme

$$(\varrho + \pi)c_v(\frac{\partial T}{\partial t} + v.\nabla T) = \kappa\Delta T - R(\frac{\varrho}{\mu_a} + \frac{\pi}{\mu_h})T\nabla.v+ \tag{1.9}$$

$$+\eta \sum_{i,j=1}^{3}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla.v)\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \zeta(\nabla.v)^2 + E_{rad},$$

1.4 Sublimation inverse et condensation de la vapeur d'eau dans l'air

On rappelle que la sublimation inverse et la condensation de la vapeur d'eau dans l'atmosphère fournissent la chaleur latente à l'air. La quantité de la chaleur donnée à(ou retiré de) l'air, peut être exprimée par le produit de la chaleur latente L_{gl} et de la quantité de condensation H_{gl}(de même le produit

de la chaleur latente L_{gs} et de la quantité de la sublimation inverse H_{gs}).
La chaleur latente L_{gl}(resp. L_{gs}) sont exprimée par :

$$L_{gl} = L_{gl}(T) \approx (3244 - 2,72T)10^3(J/Kg) \tag{1.10}$$

$$L_{gs} = L_{gs}(T) = L_{gl} + L_{ls} \tag{1.11}$$

avec

$$L_{ls} \approx 332.10^3(J/Kg)$$

D'autre part, la quantité de condensation et celle de sublimation inverse sont déterminées respectivement par la relation entre la pression de la vapeur saturée (relative à l'état liquide) $\overline{p}_{vs}(T)$ et la quantité de H_2O présente en état gazeux et par la relation entre la pression de la vapeur saturée (relative à l'état solide) et la quantité de H_2O présente en état liquide.

La valeur de la vapeur saturée $\overline{p}_{vs}(T)$ relative à l'état liquide(resp. solide) dépend de la température T, donnée approximativement par

$$\overline{p}_{vs}(T) \approx E_0.10^{\frac{7,63(T-273,15)}{T-31,25}}, E_0 = 6,108(mbar) \tag{1.12}$$

$$\overline{p}_{vs}(T) \approx E_0.10^{\frac{9,5(T-273,15)}{T-7,65}}, E_0 = 6,108(mbar) \tag{1.13}$$

Pour la commodité de calcul, on utilise la densité de la vapeur saturée au lieu de la pression de la vapeur saturée.
Désignons par $\rho_{vs(l)}(T)$ et $\rho_{vs(s)}(T)$ la densité de la vapeur saturée relative à l'état liquide et celle relative à l'état solide respectivement, qui sont données

par :

$$\overline{\pi}_{vs(l)}(T) = \frac{\mu_a \overline{p}_{vs(l)}(T)}{RT} \tag{1.14}$$

$$\overline{\pi}_{vs(l)}(T) = \frac{\mu_h \overline{p}_{vs(s)}(T)}{RT} \tag{1.15}$$

où R, μ_a et μ_h sont respectivement la constante universelle des gaz, la masse molaire moyenne de l'air sec et la masse molaire de H_2O.
avec

$$R = 8,314(j/mole)$$

$$\mu_h = 18,01(g/mole)$$

La quantité de condensation et celle de sublimation inverse sont donnée respectivement par

$$H_{gl} = K_1[\pi(x) - \overline{\pi}_{vs(l)}(T)]^+ \tag{1.16}$$

$$H_{gs} = K_2[\pi(x) - \overline{\pi}_{vs(s)}(T)]^+ \tag{1.17}$$

où $[]^+$ désigne la partie positive et K (resp. k_2) est le coéfficient associé à la vitesse de condensation et celle de sublimation inverse.

1.5 Equation de mouvement stationnaire

Quand la vitesse, la densité et la température ne varient pas dans le temps et le mouvement reste constant au cours du temps, on considérons les équations stationnaire du système, on posons

$$\partial_t \varrho = 0, \qquad \partial_t v = 0, \qquad \partial_t T = 0$$

Les équations de conservation de la masse et de quantité de mouvement, ainsi de bilan de l'énergie à l'état stationnaire s'écrivent respectivement par

$$\nabla.(\varrho v) = 0 \tag{1.18}$$

$$\varrho(v.\nabla)v = \eta\Delta v + (\zeta + \frac{\eta}{3})\nabla(\nabla.v) - \frac{R}{\mu_m}\nabla(\varrho T) - \varrho\nabla\Phi \tag{1.19}$$

$$\varrho c_v(v.\nabla T) = \kappa\Delta T - \frac{R}{\mu_m}\varrho T\nabla.v + \eta\sum_{i,j=1}^{3}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla.v)\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \tag{1.20}$$

$$\zeta(\nabla.v)^2 + \chi_{\{T\geq\overline{T}_f\}}L_{gl}H_{gl} + \chi_{\{T<\overline{T}_f\}}L_{gs}H_{gs}.$$

Les équations (1.19)-(1.20) sont du type elliptique, on va procéder à leur résolution dans le cas monodimentionnelle une méthode différente.

1.6 Modèle du mouvement stationnaire de l'air en une dimention spatiale

Pour décrire le modèle de l'écoulement de l'air qui passe sur une montagne, on désigne par $h(x_1)$ une fonction suffisamment régulière représentant la hauteur. soit $\{x_3 > h(x_1)\}$ la surface sur laquel l'air passe. On va considérer une approximation en une dimension spatiale, dont le domaine correspondrait dans la considération physique, a une couche

$$\Omega = \{x = (x_1, x_3) \in \mathbb{R}^2 | x_3 > h(x_1)\},$$

En utilisant toutefois les nouvelles coordonnées (y_1, y_3) et le nouveau vecteur (w_1, w_3).

En effet, introduisons les coordonnées (y_1, y_3) par les relations :

$$y_1 = x_1, \qquad y_3 = x_3 - h(x_1),$$

On remarque que si on utilise (y_1, y_3), le domaine Ω, définit au-dessus se transforme en :

$$\{(y_1, y_3) \in \mathbb{R}^2 | y_3 > 0\},$$

on sait que

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial y_3}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial y_3}, \\ \frac{\partial}{\partial x_3} = \frac{\partial y_1}{\partial x_3}\frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial y_3}{\partial x_3}\frac{\partial}{\partial y_3}, \end{cases}$$

Donc on a

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial y_1}\frac{dh}{dy_1}\frac{\partial}{\partial y_3}, \\ \frac{\partial}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial y_3}, \end{cases} \tag{1.21}$$

Nous introduisons maintenant les composantes w_1, w_3 du vecteur vitesse v de telle sorte que

$$\begin{cases} w_1 = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{dh}{dy_1})^2}} v_1 + \frac{\frac{dh}{dy_1}}{\sqrt{1+(\frac{dh}{dy_1})^2}} v_3, \\ w_3 = v_3, \end{cases}$$

Comme v_1 et v_3 sont exprimés par

$$\begin{cases} v_1 = \sqrt{1 + (\frac{dh}{dy_1})^2} w_1 - \frac{dh}{dy_1} w_3, \\ v_3 = w_3, \end{cases} \tag{1.22}$$

Comme on le voit aisément, la valeur w_1 est la composante du vecteur vitesse dans la direction du vecteur

$$\vec{\zeta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{dh}{dy_1})^2}} \\ 0 \\ \frac{\frac{dh}{dy_1}}{\sqrt{1+(\frac{dh}{dy_1})^2}} \end{pmatrix}$$

Dans la suite nous allons transformer les équations de notre modèle du mouvement de l'air en fonction de w_1, w_3, ϱ et T en les coordonnées (y_1, y_3), en utilisant les relations (1.21) et (1.22)

En outre, on a besoin d'introduire la "section du courant", qui n'est pas définie a priori et l'effet de la friction avec la surface terrestre. Pour que la "section du courant", ou l'épaisseur de la couche, soit déterminée de manière cohérante à la déscription du mouvement de l'air en dimension trois représenté par le système d'équations (1.18)-(1.20), il faut qu'elle soit déterminée de sorte que la pression soit fonction de la densité et de la température à l'intérieur de l'écoulement dans la couche considérée coïncide avec celle de l'extérieur.

Pour déduire les équations des mouvement de l'air en une dimension spatiale, nous supposons que

$$\varrho, w_1, w_3 \quad et \quad T \text{ ne dépend pas de } y_3,$$

et nous posons

$$w_3 = \frac{dh}{\sqrt{1+(\frac{dh}{dy_1})}} w_1,$$

Dans la suite nous écrivons simplement x au lieu de y_1 et considérons le mouvement stationnaire de l'air dans une couche de la surface (ce qui est équivalent mais plus facile à imaginer, dans un tuyau que nous construisons dans notre esprit). Désignons donc par $S(x)$ la "section du courant" (ou du tuyau). Alors, en tenant compte des relations entre la longueur dans la direction $\vec{\zeta}$ et la dérivée par rapport à x, pour l'écoulement stationnaire de (1.18), on déduit l'équation de continuité -en tuyau-.

$$\frac{d}{dx}\Big(\frac{\varrho S w}{\sqrt{1+h'^2}}\Big) = 0, \tag{1.23}$$

Pour obtenir l'équation de quantité de mouvement en une dimension, on considère l'équation (1.19) multipliée par $\vec{\zeta}$; on y introduit le terme de la friction avec la surface $-\alpha w$ et le gradient de la pression de base γ,

En acceptant l'hypothèse qu'en peut écrire approximativement, avec $g > 0$

$$-\nabla\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix},$$

nous posons, en outre

$$g = \partial_{y_3}\Phi = \partial_{x_3}\Phi,$$

Aprés des calculs et des simplifications, l'équation de quantité de mouvement écrite sous la forme

$$\frac{\varrho S w}{\sqrt{1+h'^2}}\frac{d}{dx}w = f_1\frac{d^2 w}{dx^2} + f_2 w + \frac{R_1}{\sqrt{1+h'^2}}\frac{d}{dx}(\varrho S w) - \tag{1.24}$$

$$-\frac{\varrho S}{\sqrt{1+h'^2}}h' g - \alpha w + \gamma,$$

où

$$f_1 = \frac{1}{1+h'^2}[\frac{\eta}{3}(3h'^2+4)+\zeta],$$

$$f_2 = \frac{1}{1+h'^2}h''^2[-\frac{\eta}{3}(h'^2+4)+\zeta(2h'^2-1)] - h'(\zeta+\frac{\eta}{3}h'''),$$

$(h'' = \frac{d^2}{dx^2}h(x), h''' = \frac{d^3}{dx^3}h(x))$.

L'expression des coefficients de f_1, f_2 de (1.24) résulte des calculs assez longs mais élémentaires.

Pour l'équation du bilan de l'énergie, les calculs des coefficients de (1.20) effectués en tenant compte des relations entre la longueur dans la direction de $\vec{\zeta}$ et la dérivée $\frac{d}{dx}$, donc nous conduisons à

$$\frac{\varrho S w}{\sqrt{1+h'^2}}c_v\frac{dT}{dx} = \kappa\frac{d^2T}{dx^2} - R_1\varrho T\frac{d}{dx}(\frac{wS}{\sqrt{1+h'^2}})+ \tag{1.25}$$

$$+g_1(\frac{d}{dx}w)^2 + g_2 w\frac{d}{dx}w + g_3 w^2,$$

où

$$g_1 = \frac{1}{1+h'^2}(\eta(\frac{4}{3}+h'^2)+\zeta),$$

$$g_2 = \frac{-2h'}{(1+h'^2)^2}h''(\frac{\eta}{3}+\zeta),$$

$$g_3 = \frac{1}{(1+h'^2)^3}h''^2(\eta(1+\frac{4}{3}h'^2)+\zeta h'^2).$$

En vertu de l'équation (1.23), la fonction $\frac{\varrho S w}{\sqrt{1+h'(x)^2}}$ demeure constante.

Nous écrivons k_ϱ pour désigner cette constante, c'est-à-dire on a

$$\frac{\varrho S w}{\sqrt{1+h'^2}} = k_\varrho \tag{1.26}$$

Si la fonction est connue, l'équation (1.26) nous permet de réduire l'inconnue ϱ comme fonction de w ou w comme fonction de ϱ. Dans notre calcul nous allons utiliser l'égalité

$$\varrho = \frac{k_\varrho \sqrt{1+h'^2}}{Sw}. \tag{1.27}$$

Nous substituons la relation (1.7) et (1.27) dans les équations (1.24) et (1.25), alors nous avons un système d'équations de deux équations avec deux inconnues : la vitesse w et la température T

$$K_\varrho \frac{d}{dx} w = f_1 \frac{d^2 w}{dx^2} + f_2 w - \frac{R_1 K_\varrho}{\sqrt{1+h'^2}} \frac{d}{dx} (\sqrt{1+h'^2} \frac{T}{w}) - h' \frac{K_\varrho}{w} g - \alpha w + \gamma \tag{1.28}$$

$$k_\varrho c_v \frac{dT}{dx} = \kappa \frac{d^2 T}{dx^2} - R_1 \frac{k_\varrho \sqrt{1+h'^2}}{w} T \frac{d}{dx} (\frac{w}{\sqrt{1+h'^2}}) + \tag{1.29}$$

$$+ g_1 (\frac{d}{dx} w)^2 + g_2 w \frac{d}{dx} w + g_3 w^2,$$

Chapitre 2

Etude d'un système d'équations différentiels ordinaires

2.1 Equation différentielle du second ordre

Dans ce chapitre, on va s'occuper du système d'équations monodimensionnelles du mouvement stationnaire d'un gaz visqueux et calorifère (1.28)-(1.29).

Avant tout, on va donner un résultat pour un cas plus général, cas d'équation différentielle du second ordre à valeur dans $\mathbb{R}^n$. Nous considérons l'équation différentielle ordinaire du second ordre pour la fonction inconnue $u(x) \in \mathbb{R}^n$

$$\varepsilon u''(x) + \beta(x, u(x), u'(x)) = g(x), \qquad 0 < x < 1, \tag{2.1}$$

avec les conditions aux limites

$$u(0) = u(1) = 0 \tag{2.2}$$

où ε est une constante telle que $0 < \varepsilon \leq 1$ et $g(x)$ est une fonction donnée à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. On suppose que la fonction $\beta(x, u, u') : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

est continûment dérivable par rapport à u et u' et que

$$\beta(x, 0, 0) = 0 \tag{2.3}$$

La condition (2.3) ne restreint pas la généralité. En effet, si $\beta(x, 0, 0) \neq 0$, alors il nous suffit de considérer $\beta(x, u, u') - \beta(x, 0, 0)$ au lieu de $\beta(x, u, u')$ et $g(x) - \beta(x, 0, 0)$ au lieu de $g(x)$ dans l'équation (2.1).

Avec la condition (2.3) sur $\beta(x, u, u')$, l'équation (2.1) aura la forme

$$\varepsilon u''(x) + B(x)u'(x) + C(x)u(x) = g(x) - R(x, u(x), u'(x)), \tag{2.4}$$

où

$$B(x) = (B_{ij}(x))_{i,j=1,\cdots,n}, \qquad B_{ij}(x) = \frac{\partial \beta_i(x, u, u')}{\partial u'_j} |_{u=0,u'=0},$$

$$C(x) = (C_{ij}(x))_{i,j=1,\cdots,n}, \qquad C_{ij}(x) = \frac{\partial \beta_i(x, u, u')}{\partial u_j} |_{u=0,u'=0},$$

$$R_i(x, u(x), u'(x)) = \beta_i(x, u(x), u'(x)) - \sum_{j=1}^{n} B_{ij}(x)u'_j(x) - \sum_{j=1}^{n} C_{ij}(x)u_j(x).$$

Pour les matrices $B(x)$ et $C(x)$ nous supposons qu'il existe une matrice définie positive $D(x)$, une matrice Γ indépendante de $x \in [0, 1]$ et une constante $k_0 > 0$ telles que

$$D(x)\tilde{B}(x) \qquad \text{soit symétrique pour tout} \quad x \in [0, 1], \tag{2.5}$$

$$u \cdot D(x)\tilde{C}(x)u \leq -k_0|u|^2 \qquad \forall u \in \mathbb{R}^n, \qquad \forall x \in [0, 1], \tag{2.6}$$

$$\varepsilon\|D'\|^2_{L^\infty} < 4m_D(k_0 - \|D\tilde{B}\|_{L^\infty}\|E'\|_{L^\infty}\frac{1}{2}\max_k\|\lambda'_k\|_{L^\infty}), \tag{2.7}$$

où

$$m_D = \inf\{u^T Du \mid u \in \mathbb{R}^n, |u| = 1\},$$

$$\tilde{B}(x) = e^{\Gamma x}(B(x) - 2\varepsilon\Gamma)e^{-\Gamma x},$$

$$\tilde{C}(x) = e^{\Gamma x}(C(x) - B(x)\Gamma + \varepsilon\Gamma^2)e^{-\Gamma x},$$

$$\lambda_k, k = 1, \cdots, n, \text{ sont les valeurs propres de } D(x)\tilde{B}(x),$$

E est une matrice unitaire telle que $ED\tilde{B}E^{-1}$ soit une matrice diagonale.

D'autre part, on suppose pour les fonctions $g(x)$ et $R(x, u, u')$ que :
(i) Il existe un R_0 tel que, si $|u| \leq R_0$, alors on ait

$$|R(x, u, u')| \leq c_R(|u|^2 + |u||u'| + \varepsilon|u'|^2), \qquad \forall x \in [0, 1], \tag{2.8}$$

où c_R est une constante indépendante de $x \in [0, 1]$.
(ii) Il existe $R_1 > 0$ tel que l'application $u \mapsto R(\cdot, u(\cdot), u'(\cdot))$, application de H^1_0 dans H^{-1}, soit continue dans

$$\{u \in H^1_0 | \|u\|_{H^1_0} \leq R_1\}.$$

Maintenant on va étudier l'équation (2.4), mais avant cette étude, nous la transformons en une équation pour la fonction inconnue

$$\tilde{u}(x) = e^{\Gamma x}u(x).$$

En effet, en substituant

$$u(x) = e^{-\Gamma x}\tilde{u}(x),$$

dans l'équation (2.4), on obtient

$$\varepsilon(e^{-\Gamma x}\tilde{u}(x))'' + B(x)(e^{-\Gamma x}\tilde{u}(x))' + C(x)e^{-\Gamma x}\tilde{u}(x) = g(x) - R(x, u(x), u'(x)),$$

On rappelle que

$$e^{A} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!},$$

Or, comme

$$\frac{d}{dx}(e^{-\Gamma x}\tilde{u}(x)) = -\Gamma e^{-\Gamma x}\tilde{u}(x) + e^{-\Gamma x}\tilde{u}'(x),$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(e^{-\Gamma x}\tilde{u}(x)) = \Gamma^2 e^{-\Gamma x}\tilde{u}(x) - 2\Gamma e^{-\Gamma x}\tilde{u}'(x) + e^{-\Gamma x}\tilde{u}''(x),$$

en utilisant les notations $\tilde{B}(x)$ et $\tilde{C}(x)$ introduites ci-dessus, on transforme l'équation (2.4) en

$$\varepsilon\tilde{u}''(x) + \tilde{B}(x)\tilde{u}'(x) + \tilde{C}(x)\tilde{u}(x) = \tilde{g}(x) - \tilde{R}(x, \tilde{u}, \tilde{u}'), \tag{2.9}$$

où

$$\tilde{g}(x) = e^{\Gamma x}g(x),$$

$$\tilde{R}(x, \ddot{u}, \ddot{u}') = e^{\Gamma x}R(x, u, u')$$

Les conditions aux limites (2.2) se réduit à

$$\tilde{u}(0) = \tilde{u}(1) = 0 \tag{2.10}$$

Il est clair que l'existence d'une solution $\tilde{u}(x)$ de l'équation (2.9) avec la condition (2.10) équivaut à celle d'une solution $u(x)$ de l'équation (2.4) avec la condition (2.2). Pour cette raison, pour simplifier les notations, nous allons écrire (2.9) sans " ~ ", c'est-à-dire dans la forme

$$\varepsilon u''(x) + B(x)u'(x) + C(x)u(x) = g(x) - R(x, u, u') \tag{2.11}$$

avec les conditions

$$D(x)B(x) \qquad \text{soit symétrique pour tout } x \in [0,1] \tag{2.12}$$

$$u \cdot D(x)C(x)u \leq -k_0|u|^2 \qquad \forall u \in \mathbb{R}^n, \qquad \forall x \in [0,1], \tag{2.13}$$

$$\varepsilon\|D'\|^2_{L^\infty} < 4m_D(k_0 - \|DB\|_{L^\infty}\|E'\|_{L^\infty} - \frac{1}{2}\max_k \|\lambda'_k\|_{L^\infty}). \tag{2.14}$$

L'expression de la condition (2.8) et l'hypothèse (ii) restent invariantes.

2.2 Equation linéarisée et estimations de sa solution

L'existence d'une solution de l'équation (2.11) sera obtenue à l'aide du théorème du point fixe de Schauder. L'idée générale qui nous adoptons est celle d'examiner d'abord les équations linéarisées et puis de chercher un point fixe d'un opérateur défini par la solution des équations linéarisées.

On considère l'équation linéarisée de (2.11)

$$\varepsilon u''(x) + B(x)u'(x) + C(x)u(x) = \gamma(x), \qquad 0 < x < 1, \tag{2.15}$$

où γ est une fonction appartenant à la classe $L^2(0,1;\mathbb{R}^n)$. L'équation (2.15) doit être envisagée avec les conditions aux limites

$$u(0) = u(1) = 0. \tag{2.16}$$

On rappelle en premier lieu l'estimation de la solution du problème (2.15)-(2.16) dans $H_0^1(0,1;\mathbb{R}^n)$.

Lemme 2.2.1 *Le problème* (2.15)-(2.16) *admet une solution* $u \in H_0^1(0,1;\mathbb{R}^n)$ *et une seule et on a*

$$\varepsilon\alpha_1\|u'\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2 \leq c_1\|\gamma\|_{L^2}^2, \tag{2.17}$$

où α_1 *et* c_1 *sont deux constantes strictement positives indépendantes de* ε.

DÉMONSRATION. On désigne par ${}^tA$ la matrice transposée de A, de sorte que ${}^tu$ sera le vecteur ligne u. En multipliant l'équation (2.15) par ${}^tuD$ et en faisant l'intégrale sur $[0,1]$, on a

$$\varepsilon\int_0^1 {}^tu(x)D(x)u''(x)dx + \int_0^1 {}^tu(x)D(x)B(x)u'(x)dx +$$

$$+\int_0^1 {}^tu(x)D(x)C(x)u(x)dx = \int_0^1 {}^tu(x)D(x)\gamma(x)dx.$$

En appliquant l'intégration par partie et en utilisant la condition (2.16), on obtient

$$-\varepsilon\int_0^1 ({}^tu(x))'D(x)u'(x)dx - \varepsilon\int_0^1 {}^tu(x)D'(x)u'(x)dx +$$

$$+\int_0^1 {}^tu(x)D(x)B(x)u'(x)dx + \int_0^1 {}^tu(x)D(x)C(x)u(x)dx =$$

$$= \int_0^1 {}^t u(x) D(x) \gamma(x) dx.$$

Comme DB est une matrice symétrique, il existe une matrice unitaire E telle que $EDBE^{-1}$ soit une matrice diagonale, dont nous désignons par $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les éléments diagonaux, on a donc

$${}^t uDBu' = {}^t uE^{-1}EDBE^{-1}Eu' = {}^t(Eu)EDBE^{-1}Eu'$$

$$= {}^t(Eu)EDBE^{-1}(Eu)' - {}^t uDBE^{-1}E'u,$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dx}(\lambda_k v_k^2) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \lambda' v_k^2 - {}^t uDBE^{-1}E'u,$$

où $v_k = (Eu)_k$. Donc compte tenu de la relation

$$\int_0^1 \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k v_k^2) dx = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k v_k^2)\Big|_0^1 = 0,$$

(qui résulte de la condition (2.16) et de la définition $v_k = (Eu)_k$), on obtient

$$-\varepsilon\int_0^1 ({}^t u)' Du' dx - \varepsilon\int_0^1 {}^t uD'u' dx - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_0^1 \lambda_k' v_k^2 dx - \int_0^1 {}^t uDBE^{-1}E'u dx +$$

$$+ \int_0^1 {}^t uDCu dx = \int_0^1 {}^t uD\gamma dx.$$

Il s'ensuit que

$$\varepsilon m_D \|u'\|_{L^2}^2 - \varepsilon \|D'\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2} \|u'\|_{L^2} + \tag{2.18}$$

$$+(k_0 - \frac{1}{2}\max_k \|\lambda_k'\|_{L^\infty} - \|DB\|_{L^\infty}\|E'\|_{L^\infty})\|u\|_{L^2}^2 \leq$$

$$\leq \|D\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2}\|\gamma\|_{L^2}.$$

Or, d'après (2.14) il existe un nombre $0 < \beta \leq 1$ tel que

$$\varepsilon\|D'\|_{L^\infty}^2 = 4(1-\beta)m_D(k_0 - \frac{1}{2}\max_k \|\lambda_k'\|_{L^\infty} - \|DB\|_{L^\infty}\|E'\|_{L^\infty}),$$

ce qui nous donne

$$\varepsilon\|D'\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2}\|u'\|_{L^2} \leq$$

$$\leq \sqrt{1-\beta}\varepsilon m_D\|u'\|_{L^2}^2 + \sqrt{1-\beta}(k_0 - \frac{1}{2}\max_k \|\lambda_k'\|_{L^\infty} - \|DB\|_{L^\infty}\|E'\|_{L^\infty})\|u\|_{L^2}^2.$$

Donc, compte tenu des relations

$$1 - \sqrt{1-\beta} > 0,$$

$$\|D\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2}\|\gamma\|_{L^2} \leq \nu\|u\|_{L^2}^2 + \frac{\|D\|_{L^\infty}^2}{4\nu}\|\gamma\|_{L^2}^2, \qquad \forall \nu > 0,$$

on déduit de (2.18) qu'il existe deux constantes α_1 et c_1 telles que l'inégalité (2.17) soit vérifiée.

L'inégalité (2.17) étant démontrée, en l'utilisant on peut démontrer aussi l'existence et l'unicité de la solution $u \in H_0^1(0,1;\mathbb{R}^n)$ (d'une manière analogue au traitement d'un problème similaire illustré, par exemple, dans [6], pp. 138-139).

Chapitre 3

Mouvement de l'air qui passe sur une montagne en formant des nuages de gouttelettes d'eau et de morceaux de glace

3.1 Système d'équations

Dans ce chapitre nous allons examiner le système d'équations qui représente le mouvement en une dimension de l'air qui passe sur une montagne en formant des nuages de gouttelettes d'eau et de morceaux de glace.

En ce qui concerne l'équation de la quantité de mouvement, nous povons considérer la même équation

$$K_\varrho \frac{d}{dx} w = f_1 \frac{d^2 w}{dx^2} + f_2 w - \frac{R_1 K_\varrho}{\sqrt{1+h'^2}} \frac{d}{dx}(\sqrt{1+h'^2}\frac{T}{w}) - h' \frac{K_\varrho}{w} g - \alpha w + \gamma, \quad (1.28)$$

D'autre part, pour l'équation du bilan de l'énergie, outre les éléments ordinaires déjà formulés dans l'équation (1.29), nous devons prendre en considération l'effet de la chaleur latente de la condensation de la vapeur d'eau et celle de sublimation inverse. Donc, en désignant respectivement par T, L_{gl}, L_{gs}, H_{gl} et H_{gs} la température, la chaleur latente de la condensation (transition de phase de H_2O de l'état gazeux à l'état liquide), la chaleur latente de la sublimation inverse (transition de phase de H_2O de l'état gazeux à l'état solide), la quantité de condensation et la quantité de sublimation inverse et en désignant aussi par χ_A la fonction caractéristique de l'ensemble A (c'est-à-dire, $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\chi_A(x) = 0$ si $x \notin A$), l'équation que nous devons considérer aura la forme

$$k_{\varrho}c_v\frac{dT}{dx} = \kappa\frac{d^2T}{dx^2} - R_1\frac{k_{\varrho}\sqrt{1+h'^2}}{w}T\frac{d}{dx}\left(\frac{w}{\sqrt{1+h'^2}}\right) + g_1\left(\frac{d}{dx}w\right)^2 + \tag{3.1}$$

$$g_2 w\frac{d}{dx}w + g_3 w^2 + \chi_{\{T\geq\overline{T}_f\}}L_{gl}H_{gl} + \chi_{\{T<\overline{T}_f\}}L_{gs}H_{gs},$$

où g_1, g_2 et g_3 sont des fonctions dérivant des coefficient de viscosité définies précédemment d'aprés (1.25), tandis que $\overline{T}_f$ est la température de fusion de l'eau, avec $\overline{T}_f = 273,15K$.

Les équations du type (1.28)-(3.1) sont usuellement considérées avec les conditions aux limites. Toutefois à cause de la présence du terme représentant le gradient de la pression $\frac{R_1 K_{\varrho}}{\sqrt{1+h'^2}}\frac{d}{dx}(\sqrt{1+h'^2}\frac{T}{w})$ avec un coefficient assez grand R_1, il n'est pas facile de les considérer comme problème avec les conditions aux limites. De plus, dans l'équation (3.1) il y a aussi des termes dûs à la condensation de la vapeur d'eau et à la sublimation inverse, qui ne sont pas suffisamment réguliers. Pour cette raison dans [9] les auteurs ont calculé la solution d'un système d'équations similaire avec les conditions initiales

$$T(0) = T_0, \quad w(0) = w_0, \quad \frac{dw(x)}{dx}\mid_{x=0} = w_1, \quad \frac{dT(x)}{dx}\mid_{x=0} = T_1,$$

et ensuite ils ont choisi une solution qui s'approche mieux la condition aux limites

$$T(1) = \tilde{T}_0, \quad w(1) = \tilde{w}_0,$$

$\tilde{T}_0$ et $\tilde{w}_0$ étant deux valeurs données.

En ce qui concerne la quantité de condensation et de sublimation inverse, nous rappelons que leur expression H_{gl} et H_{gs} ont été définie dans (1.16)-(1.17). Toutefois, dans notre modèle en une dimension spatiale où l'écoulement de l'air en une seule direction détermine le comportement des phénomènes physiques en considération, il nous est utile d'utiliser l'approximation adoptée dans [3] et [9]. Plus précisément, si la densité de la vapeur au début de l'écoulement est π_0, alors la densité de H_2O au point x sera

$$\pi(x) = \frac{\pi_0}{\varrho_0}\varrho(x)$$

(ϱ_0 étant la densité de l'air au début de l'écoulement). Donc, si on pose

$$q_0 = \frac{\pi_0}{\varrho_0},$$

la quantité par unité de volume de l'excédent de H_2O par rapport à la densité de la vapeur saturée $\overline{\pi}_{vs(l)}(T)$ (relative à l'eau liquide) est donnée par

$$F_l' = \max[0, q_0\varrho(x) - \overline{\pi}_{vs(l)}(T)] = [q_0\varrho(x) - \overline{\pi}_{vs(l)}(T)]^+,$$

tandis que la quantité par unité de volume de l'excédent de H_2O par rapport à la densité de la vapeur saturée $\overline{\pi}_{vs(s)}(T)$ (relative à l'eau solide) est donnée par

$$E_s = \max[0, q_0\varrho(x) - \overline{\pi}_{vs(s)}(T)] = [q_0\varrho(x) - \overline{\pi}_{vs(s)}(T)]^+,$$

où $[]^+$ désigne la partie positive. Nous supposons que la quantité E_l sera la quantité totale de l'eau liquide et E_s sera la quantité totale de l'eau solide dans l'air, et que donc la quantité (par unité de temps) de condensation est donné par la dérivée de E_l et la quantité (par unité de temps) de sublimation inverse est donnée par la dérivée de E_s ; c'est-à-dire la quantité de condensation et de sublimation inverse est donnée respectivement par la variation de l'excédent de H_2O dans l'air par rapport à la densité de la vapeur saturée $\overline{\pi}_{vs(l)}(T)$ (relative à l'eau liquide) et par la variation de l'excédent de H_2O dans l'air par rapport à la densité de la vapeur saturée $\overline{\pi}_{vs(s)}(T)$ (relative à l'eau solide). Comme, suivant l'écoulement, x est une fonction de t, c'est-à-dire $x = x(t)$, et que

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{w}{\sqrt{1+h'^2}},$$

on a

$$H_{gl} = \frac{d}{dt}[q_0\varrho(x) - \overline{\pi}_{vs(l)}(T(x))]^+ = \frac{w}{\sqrt{1+h'^2}}\frac{d}{dt}[q_0\varrho(x) - \overline{\pi}_{vs(l)}(T(x))]^+, \quad (3.2)$$

$$H_{gs} = \frac{d}{dt}[q_0\varrho(x) - \overline{\pi}_{vs(s)}(T(x))]^+ = \frac{w}{\sqrt{1+h'^2}}\frac{d}{dt}[q_0\varrho(x) - \overline{\pi}_{vs(s)}(T(x))]^+, \quad (3.3)$$

où $\frac{d}{dt}$ désigne la dérivée matérielle.

3.2 Position du problème

Notre objectif est de démontrer l'existence d'une solution dans le voisinage de la solution sans viscosité et sans conductivité thermique. Pour cela, avant tout nous prenons en considération les équations (1.28) et (3.1) avec $\eta = \zeta = \kappa = 0$; c'est-à-dire, en écrivant $\overline{w}$ au lieu de w et $\overline{T}$ au lieu de T, nous considérons les équations :

$$k_\varrho \frac{d}{dx}\overline{w} + \frac{R_1 k_\varrho}{\sqrt{1+h'^2}} \frac{d}{dx}(\sqrt{1+h'^2}\frac{\overline{T}}{\overline{w}}) = -k_\varrho \frac{h'}{\overline{w}} g - \alpha \overline{w} + \gamma \tag{3.4}$$

$$k_\varrho c_v \frac{d\overline{T}}{dx} + R_1 k_\varrho \sqrt{1+h'^2}\frac{\overline{T}}{\overline{w}} \frac{d}{dx}(\frac{\overline{w}}{\sqrt{1+h'^2}}) = \tag{3.5}$$

$$= \chi_{\{T \geq \overline{T}_f\}} L_{gl} \frac{\overline{w}}{\sqrt{1+h'^2}} \frac{d}{dx}[\max(0, \frac{\pi_0 k_\varrho \sqrt{1+h'^2}}{\varrho_0 \overline{w}} - \overline{\pi}_{vs(l)}(\overline{T}))] +$$

$$+ \chi_{\{T < \overline{T}_f\}} L_{gs} \frac{\overline{w}}{\sqrt{1+h'^2}} \frac{d}{dx}[\max(0, \frac{\pi_0 k_\varrho \sqrt{1+h'^2}}{\varrho_0 \overline{w}} - \overline{\pi}_{vs(s)}(\overline{T}))],$$

Nous supposons que le système d'équations (3.4)-(3.5) avec les conditions initiales

$$\overline{w}(0) = \overline{w}_0, \qquad \overline{T}(0) = \overline{T}_0,$$

admet dans l'intervalle $[0,1]$ une solution $(\overline{w}, \overline{T})$ et que $\overline{w}$ et $\overline{T}$ appartiennent à $H^1(0,1)$ et vérifient les relations

$$\inf_{0 \leq x \leq 1} \overline{T}(x) > 0, \qquad \inf_{0 \leq x \leq 1} w(x) > 0, \tag{3.6}$$

En revenant aux équations (1.28) et (3.1), nous les considérons avec les conditions aux limites

$$w(0) = \overline{w}(0) = \overline{w}_0, \qquad w(1) = \overline{w}(1) = \overline{w}_1, \tag{3.7}$$

$$T(0) = \overline{T}(0) = \overline{T}_0, \qquad T(1) = \overline{T}_1.$$

3.3 Transformation des équations

On considère le système d'équations (1.28) et (3.1) dans le domaine en une dimension [0,1], aux extrémités duquel nous posons les conditions aux limites non-homogènes (3.7). Il nous est commode de transformer les équations (1.28) et (3.1) en des équations pour les fonctions inconnues

$$u = w - \overline{w}, \qquad \vartheta = T - \overline{T}. \tag{3.8}$$

En effet, les conditions aux limites (3.7) se réduisent en les conditions homogènes

$$u(0) = u(1) = 0, \qquad \vartheta(0) = \vartheta(1) = 0. \tag{3.9}$$

Maintenant nous écrivons les équations (1.28) et (3.1) dans une forme relative aux nouvelles fonctions inconnues u et ϑ. Pour simplifier la notation, nous posons

$$\sigma(x) = \sqrt{1 + (h'(x))^2} \tag{3.10}$$

Ainsi nous pouvons les écrire dans la forme

$$J_1 u'' + D_{11} u' + C_{11} u + C_{12} \vartheta = N_1(\overline{w}, \overline{T}, u, \vartheta), \tag{3.11}$$

$$\kappa \vartheta'' + B_{21} u' + B_{22} \vartheta' + C_{21} u + C_{22} \vartheta = N_2(\overline{w}, \overline{T}, u, \vartheta) + \Psi(u, \vartheta), \tag{3.12}$$

où

$$B_{11} = -k_\varrho + R_1 k_\varrho \frac{\overline{T}}{\overline{w}^2}, \qquad B_{12} = -R_1 \frac{k_\varrho}{\overline{w}},$$

$$B_{21} = -R_1 k_\varrho \frac{\overline{T}}{\overline{w}} + 2g_1 \overline{w}' + g_2 \overline{w}, \qquad B_{22} = -k_\varrho c_v,$$

$$C_{11} = R_1 k_\varrho \frac{\sigma'}{\sigma} \frac{\overline{T}}{\overline{w}^2} + R_1 k \varrho \frac{\overline{T}'}{\overline{w}^2} + f_2 - k_\varrho \frac{h'}{\overline{w}^2} g, \qquad C_{12} = R_1 k_\varrho \frac{\overline{w}'}{\overline{w}^2} - \frac{R_1 k_\varrho}{\overline{w}} \frac{\sigma'}{\sigma},$$

$$C_{21} = R_1 k_\varrho \overline{T} \frac{\overline{w}'}{\overline{w}^2} + g_2 \overline{w}' + 2g_3 \overline{w},$$

$$C_{22} = R_1 k_\varrho \frac{\overline{w}'}{\overline{w}} - R_1 k_\varrho \sigma (\frac{1}{\sigma})',$$

$$\Psi(u, \vartheta) = \chi_{\{T \geq \overline{T}_f\}} (-L_{gl}) \frac{u + \overline{w}}{\sigma} \frac{d}{dx} [\max(0, \frac{\pi_0 k_\varrho \sigma}{\varrho_0 (u + \overline{w})} - \overline{\pi}_{vs(l)} (\vartheta + \overline{T}))] +$$

$$+ \chi_{\{T \geq \overline{T}_f\}} L_{gl} \frac{\overline{w}}{\sigma} \frac{d}{dx} [\max(0, \frac{\pi_0 k_\varrho \sigma}{\varrho_0 \overline{w}} - \overline{\pi}_{vs(l)} (\overline{T}))] +$$

$$+ \chi_{\{T < \overline{T}_f\}} (-L_{gs}) \frac{u + \overline{w}}{\sigma} \frac{d}{dx} [\max(0, \frac{\pi_0 k_\varrho \sigma}{\varrho_0 (u + \overline{w})} - \overline{\pi}_{vs(s)} (\vartheta + \overline{T}))] +$$

$$+ \chi_{\{T < \overline{T}_f\}} L_{gs} \frac{\overline{w}}{\sigma} \frac{d}{dx} [\max(0, \frac{\pi_0 k_\varrho \sigma}{\varrho_0 \overline{w}} - \overline{\pi}_{vs(s)} (\overline{T}))],$$

$$N_1(\overline{w}, \overline{T}, u, \vartheta) = \frac{R_1 k_\varrho}{\sigma} \Big[\sigma' \vartheta \Big(\frac{1}{u + \overline{w}} - \frac{1}{\overline{w}} \Big) + \sigma' \overline{T} \frac{u}{\overline{w}} \Big(\frac{1}{\overline{w}} - \frac{1}{\overline{w} + u} \Big) + \sigma \vartheta' \Big(\frac{1}{u + \overline{w}} - \frac{1}{\overline{w}} \Big) + \tag{3.13}$$

$$+\sigma\overline{T}'\frac{u}{\overline{w}}\Big(\frac{1}{\overline{w}}-\frac{1}{\overline{w}+u}\Big)-\sigma\vartheta u'\Big(\frac{1}{\overline{w}^2}+(\frac{1}{(u+\overline{w})^2}-\frac{1}{\overline{w}^2})\Big)-\sigma\vartheta\overline{w}'\Big(\frac{1}{(u+\overline{w})^2}-\frac{1}{\overline{w}^2}\Big)$$

$$-\sigma\overline{T}u'\Big(\frac{1}{(u+\overline{w})^2}-\frac{1}{\overline{w}^2}\Big)-\sigma\overline{T}\overline{w}'\Big(\frac{1}{(u+\overline{w})^2}-\frac{1}{\overline{w}^2}\Big)\Big]$$

$$-f_1\overline{w}''-f_2\overline{w}+k_\varrho h'g\frac{u}{\overline{w}}\Big(\frac{1}{\overline{w}}-\frac{1}{\overline{w}+u}\Big),$$

$$N_2(\overline{w},\overline{T},u,\vartheta)=R_1k_\varrho\sigma\Big[\vartheta(\frac{1}{u+\overline{w}}-\frac{1}{\overline{w}})(\frac{\overline{w}'}{\sigma}+(\frac{1}{\sigma})'\overline{w}) \tag{3.14}$$

$$+\vartheta\Big(\frac{1}{\overline{w}}+(\frac{1}{u+\overline{w}}-\frac{1}{\overline{w}})\Big)(\frac{u'}{\sigma}+(\frac{1}{\sigma})'u)+\overline{T}(\frac{1}{u+\overline{w}}-\frac{1}{\overline{w}})(\frac{u'}{\sigma}+(\frac{1}{\sigma})'u)+$$

$$+\overline{T}\frac{u}{w}\Big(\frac{1}{w}-\frac{1}{w+u}\Big)(\frac{\overline{w}'}{\sigma}+\overline{w}(\frac{1}{\sigma})')\Big]-\kappa\overline{T}''-g_1(u'^2+\overline{w}'^2)-g_2(uu'+\overline{w}\overline{w}')-g_3(u^2+\overline{w}^2).$$

3.4 Estimations des termes non linéaires

Maintenant nous voulons donner des estimations des termes non linéaires dans les équations (3.11)-(3.12), en particulier les termes $N_1(\overline{w},\overline{T},u,\vartheta)$ et $N_2(\overline{w},\overline{T},u,\vartheta)$. Ces estimations seront différentes de celles que les auteurs de [3] ont utilisées dans leur travail pour le cas où il n'y a pas de condensation de la vapeur d'eau. Pour établir nos estimations, nous utilisons l'idée suggérée dans [2]. Ces estimations, qui seront utilisées pour démontrer l'existence d'une solution du système d'équations non linéaires avec le terme $\Psi(u,\vartheta)=$

$\Psi(\overline{u}, \overline{\vartheta})$ donné, sont établies dans la forme de majoration du produit scalaire de (N_1, N_2) avec une fonction $U \in H_0^1(0,1;\mathbb{R}^2)$. Pour cela nous écrivons $z = (z_1, z_2)$ au lieu de (u, ϑ) et donc $N_1(\overline{w}, \overline{T}, z_1, z_2)$ et $N_2(\overline{w}, \overline{T}, z_1, z_2)$ au lieu de $N_1(\overline{w}, \overline{T}, u, \vartheta)$ et $N_2(\overline{w}, \overline{T}, u, \vartheta)$.

Lemme 1. *On pose*

$$\varepsilon = \max(|f_1|, |f_2|, \kappa, |g_1|, |g_2|, |g_3|).$$

Alors on a

$$|\langle g_1 {z_1'}^2, U_2 \rangle| \leq \varepsilon^{3/4} \|z_1'\|_{L^2}^2 (\varepsilon^{1/2} \|U_2'\|_{L^2} + \|U_2\|_{L^2}). \tag{3.15}$$

DÉMONSTRATION. On a immédiatement

$$|\langle g_1 {z_1'}^2, U_2 \rangle| \leq \varepsilon |\langle {z_1'}^2, U_2 \rangle| \leq \varepsilon \|z_1'\|_{L^2}^2 \|U_2\|_{L^\infty} \leq$$

$$\leq \varepsilon^{3/4} \|z_1'\|_{L^2}^2 (\varepsilon^{1/4} \|U_2'\|_{L^2}^{1/2}) \|U_2\|_{L^2}^{1/2} \leq \frac{1}{2} \varepsilon^{3/4} \|z_1'\|_{L^2}^2 (\varepsilon^{1/2} \|U_2'\|_{L^2} + \|U_2\|_{L^2}),$$

ce qui entraîne (3.15). □

Lemme 2. *On pose*

$$\varepsilon = \max(|f_1|, |f_2|, \kappa, |g_1|, |g_2|, |g_3|),$$

et on suppose que $\overline{T} = \overline{T}(x)$ est une fonction continue dans $[0,1]$ et deux fois continûment dérivable par morceaux dans $[0,1]$. Alors on a

$$|\langle \kappa \overline{T}'', U_2 \rangle| \leq \varepsilon^{3/4} C_{(\overline{T})} (\varepsilon^{1/2} \|U'\|_{L^2} + \|U\|_{L^2}), \tag{3.16}$$

où $\overline{T}''$ est conçu dans le sens de distribution.

Démonstration. On rappelle que

$$\sup_{x\in[0,1]} |U_2(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \left| \int_0^x \frac{d}{dx'}(U_2(x'))^2 dx' \right|^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{2} \sup_{x\in[0,1]} \left| \int_0^x U_2(x') \frac{d}{dx'}(U_2(x'))dx' \right|^{1/2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \left| \int_0^1 |U_2(x)U_2'(x))dx \right|^{1/2} \leq \|U_2'\|_{L^2}^{1/2} \|U_2\|_{L^2}^{1/2}.$$

D'autre part, si $\overline{T} = \overline{T}(x)$ est une fonction continue dans $[0,1]$ et deux fois continûment dérivable par morceaux dans $[0,1]$, alors $\overline{T}''$ est la somme d'une fonction continue et d'une distribution ayant la forme

$$\sum_{j=1}^{n^*} \alpha_j(x_j)\delta(x - x_j).$$

On remarque que

$$|\langle \delta(x - x_j), U_2 \rangle| \leq \sup_{x\in[0,1]} |U_2(x)|.$$

En utilisant ces relations, on a

$$|\langle \kappa \overline{T}'', U_2 \rangle| \leq \varepsilon |\langle \overline{T}'', U_2 \rangle| \leq \varepsilon C_{(\overline{T})} \sup_{0\leq x\leq 1} |U_2(x)| \leq$$

$$\leq \varepsilon^{3/4} C_{(\overline{T})} \varepsilon^{1/4} \|U_2'\|_{L^2}^{1/2} \|U_2\|_{L^2}^{1/2} \leq \varepsilon^{3/4} C_{(\overline{T})} (\varepsilon^{1/2} \|U'\|_{L^2} + \|U\|_{L^2}).$$

Le lemme est démontré. $\square$

Lemme 3. *On a*

$$\Big|\int_0^1 z_i z_j' U_k dx\Big| \leq \frac{1}{\varepsilon^{3/4}}(\varepsilon^{1/2}\|z_j'\|_{L^2(0,1)})\big(\frac{1}{4}\varepsilon^{1/2}\|z_i'\|_{L^2(0,1)} + \frac{3}{4}\|z_i\|_{L^2(0,1)}\big)\times \tag{3.17}$$
$$\times\big(\frac{1}{4}\varepsilon^{1/2}\|U_k'\|_{L^2(0,1)} + \frac{3}{4}\|U_k\|_{L^2(0,1)}\big),$$

$$\Big|\int_0^1 z_i z_j U_k dx\Big| \leq \frac{1}{\varepsilon^{1/4}}\|z_j\|_{L^2(0,1)}\big(\frac{1}{4}\varepsilon^{1/2}\|z_j'\|_{L^2(0,1)} + \frac{3}{4}\|z_j\|_{L^2(0,1)}\big)\times \tag{3.18}$$
$$\times\big(\frac{1}{4}\varepsilon^{1/2}\|U_k'\|_{L^2(0,1)} + \frac{3}{4}\|U_k\|_{L^2(0,1)}\big) \leq$$
$$\leq \frac{1}{\varepsilon^{3/4}}\|z_j\|_{L^2(0,1)}\big(\frac{1}{4}\varepsilon^{1/2}\|z_i'\|_{L^2(0,1)} + \frac{3}{4}\|z_i\|_{L^2(0,1)}\big)\times$$
$$\times\big(\frac{1}{4}\varepsilon^{1/2}\|U_k'\|_{L^2(0,1)} + \frac{3}{4}\|U_k\|_{L^2(0,1)}\big)$$

pour $i, j, k = 1, 2$ *et* $0 < \varepsilon \leq 1$.

Démonstration. Comme

$$\|u\|_{L^4(0,1)} \leq \|u\|^{1/2}_{L^\infty(0,1)}\|u\|^{1/2}_{L^2(0,1)}, \qquad \|u\|_{L^\infty(0,1)} \leq \|u\|^{1/2}_{L^2(0,1)}\|u'\|^{1/2}_{L^2(0,1)}$$

pour tout $u \in H_0^1(0,1)$, on a

$$\Big|\int_0^1 z_i z_j' U_k dx\Big| \leq \|z_j'\|_{L^2(0,1)}\|z_i\|_{L^4(0,1)}\|U_k\|_{L^4(0,1)} \leq$$

$$\leq \|z_j'\|_{L^2(0,1)}\|z_i\|^{1/2}_{L^\infty(0,1)}\|z_i\|^{1/2}_{L^2(0,1)}\|U_k\|^{1/2}_{L^\infty(0,1)}\|U_k\|^{1/2}_{L^2(0,1)} \leq$$

$$\leq \|z_j'\|_{L^2(0,1)}\|z_i'\|_{L^2(0,1)}^{1/4}\|z_i\|_{L^2(0,1)}^{3/4}\|U_k'\|_{L^2(0,1)}^{1/4}\|U_k\|_{L^2(0,1)}^{3/4} \leq$$

$$\leq \varepsilon^{-3/4}(\varepsilon^{1/2}\|z_j'\|_{L^2(0,1)})(\varepsilon^{1/8}\|z_i'\|_{L^2(0,1)}^{1/4})\|z_i\|_{L^2(0,1)}^{3/4}(\varepsilon^{1/8}\|U_k'\|_{L^2(0,1)}^{1/4})\|U_k\|_{L^2(0,1)}^{3/4} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^{3/4}}(\varepsilon^{1/2}\|z_j'\|_{L^2(0,1)})\big(\frac{1}{4}\varepsilon^{1/2}\|z_i'\|_{L^2(0,1)} + \frac{3}{4}\|z_i\|_{L^2(0,1)}\big)\times$$

$$\times\big(\frac{1}{4}\varepsilon^{1/2}\|U_k'\|_{L^2(0,1)} + \frac{3}{4}\|U_k\|_{L^2(0,1)}\big).$$

Analoguement on a aussi

$$\Big|\int_0^1 z_i z_j U_k dx\Big| \leq \|z_j\|_{L^2(0,1)}\|z_i\|_{L^4(0,1)}\|U_k\|_{L^4(0,1)} \leq$$

$$\leq \|z_j\|_{L^2(0,1)}\|z_i\|_{L^\infty(0,1)}^{1/2}\|z_i\|_{L^2(0,1)}^{1/2}\|U_k\|_{L^\infty(0,1)}^{1/2}\|U_k\|_{L^2(0,1)}^{1/2} \leq$$

$$\leq \|z_j\|_{L^2(0,1)}\|z_i'\|_{L^2(0,1)}^{1/4}\|z_i\|_{L^2(0,1)}^{3/4}\|U_k'\|_{L^2(0,1)}^{1/4}\|U_k\|_{L^2(0,1)}^{3/4} \leq$$

$$\leq \varepsilon^{-1/4}\|z_j\|_{L^2(0,1)}(\varepsilon^{1/8}\|z_i'\|_{L^2(0,1)}^{1/4})\|z_i\|_{L^2(0,1)}^{3/4}(\varepsilon^{1/8}\|U_k'\|_{L^2(0,1)}^{1/4})\|U_k\|_{L^2(0,1)}^{3/4} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^{1/4}}\|z_j\|_{L^2(0,1)}\big(\frac{1}{4}\varepsilon^{1/2}\|z_i'\|_{L^2(0,1)} + \frac{3}{4}\|z_i\|_{L^2(0,1)}\big)\times$$

$$\times\big(\frac{1}{4}\varepsilon^{1/2}\|U_k'\|_{L^2(0,1)} + \frac{3}{4}\|U_k\|_{L^2(0,1)},$$

ce qui démontre (3.18). □

Lemme 4. *On pose*

$$\varepsilon = \max(|f_1|, |f_2|, \kappa, |g_1|, |g_2|, |g_3|),$$

$$N_2^*(\overline{w}, \overline{T}, z_1, z_2) = N_2(\overline{w}, \overline{T}, z_1, z_2) + \kappa\overline{T}'' + g_1 {z_1'}^2, \tag{3.19}$$

Alors on a

$$|\langle N_1(\overline{w}, \overline{T}, z_1, z_2), U_1\rangle| \leq C\big[\varepsilon^{-3/4}(\|z\|_{L^2} + \varepsilon^{1/2}\|z'\|_{L^2})^2 \times \tag{3.20}$$

$$\times(\varepsilon^{1/2}\|U_1'\|_{L^2} + \|U_1\|_{L^2}) + \varepsilon\|U_1\|_{L^2}\big],$$

$$|\langle N_2^*(\overline{w}, \overline{T}, z_1, z_2), U_2\rangle| \leq C\big[\varepsilon^{-3/4}(\|z\|_{L^2} + \varepsilon^{1/2}\|z'\|_{L^2})^2 \times \tag{3.21}$$

$$\times(\varepsilon^{1/2}\|U_2'\|_{L^2} + \|U_2\|_{L^2}) + \varepsilon\|U_2\|_{L^2}\big],$$

Démonstration. Considérons par exemple le terme

$$\frac{R_1 k_\varrho \sigma'}{\sigma} z_2\Big(\frac{1}{z_1 + \overline{w}} - \frac{1}{\overline{w}}\Big)$$

de $N_1(\overline{w}, \overline{T}, z_1, z_2)$. Alors on voit aisément qu'il existe une constante C telle que

$$\Big|\frac{R_1 k_\varrho \sigma'}{\sigma}\int_0^1 z_2\Big(\frac{1}{z_1 + \overline{w}} - \frac{1}{\overline{w}}\Big)U_1 dx\Big| \leq C\Big|\int_0^1 z_2 z_1 U_1 dx\Big|,$$

pourvu que z_1 soit suffisamment petit. Donc d'après (3.18) on a

$$\Big|\langle\frac{R_1k_\varrho\sigma'}{\sigma}z_2\Big(\frac{1}{z_1+\overline{w}}-\frac{1}{\overline{w}}\Big),U_1\rangle\Big|\le C\Big|\int_0^1 z_2z_1U_1dx\Big|\le$$

$$\le C\varepsilon^{-3/4}\|z_2\|_{L^2}(\varepsilon^{1/2}\|z_1'\|_{L_2}+\|z_1\|_{L^2})(\varepsilon^{1/2}\|U_1'\|_{L^2}+\|U_1\|_{L^2}).$$

Prenons maintenant en considération le terme

$$R_1k_\varrho z_2'\Big(\frac{1}{z_1+\overline{w}}-\frac{1}{\overline{w}}\Big),$$

qui se trouve lui aussi dans $N_1(\overline{w},\overline{T},z_1,z_2)$. Comme sous la condition de la petitesse de z_1 on a

$$\Big|R_1k_\varrho\int_0^1 z_2'\Big(\frac{1}{z_1+\overline{w}}-\frac{1}{\overline{w}}\Big)U_1dx\Big|\le C\Big|\int_0^1 z_2'z_1U_1dx\Big|$$

avec une constante C, à l'aide de (3.17) on obtient

$$\Big|\langle R_1k_\varrho z_2'\Big(\frac{1}{z_1+\overline{w}}-\frac{1}{\overline{w}}\Big),U_1\rangle\Big|\le C\Big|\int_0^1 z_2'z_1U_1dx\Big|\le$$

$$\le C\varepsilon^{-3/4}(\varepsilon^{1/2}\|z_2'\|_{L^2})(\varepsilon^{1/2}\|z_1'\|_{L_2}+\|z_1\|_{L^2})(\varepsilon^{1/2}\|U_1'\|_{L^2}+\|U_1\|_{L^2}).$$

Prenons en examen également le terme

$$\overline{w}''f_1.$$

Il est clair que l'on a

$$\Big|\langle f_1w'',U_1\rangle\Big|-\Big|\int_0^1 f_1\overline{w}''U_1dx\Big|\le C\varepsilon\|U_1\|_{L^2}.$$

En examinant l'expression de $N_1(\overline{w}, \overline{T}, z_1, z_2)$ et celle de $N_2^*(\overline{w}, \overline{T}, z_1, z_2)$ (voir (3.13), (3.14), (3.19)), on constate sans difficulté que tous les termes de $N_1(\overline{w}, \overline{T}, z_1, z_2)$ et de $N_2^*(\overline{w}, \overline{T}, z_1, z_2)$ sont du même type que les trois termes examinés ci-dessus. Donc en faisant la somme d'inégalités de ces trois types, on obtient immédiatement les inégalités (3.20) et (3.21). □

Lemme 5. *On a*

$$|\langle N_2(\overline{w}, \overline{T}, z_1, z_2), U_2\rangle| \leq \tag{3.22}$$

$$\leq \Big(C_1\varepsilon^{3/4} + C_2\varepsilon^{-3/4}(\varepsilon^{1/2}\|z'\|_{L^2(0,1)} + \|z\|_{L^2(0,1)})^2\Big)(\varepsilon^{1/2}\|U_2'\|_{L^2} + \|U_2\|_{L^2}).$$

DÉMONSTRATION. Comme on a

$$N_2(\overline{w}, \overline{T}, z_1, z_2) = N_2^*(\overline{w}, \overline{T}, z_1, z_2) - \kappa\overline{T}'' - g_1 {z_1'}^2,$$

des inégalités (3.15), (3.16) et (3.21) on déduit (3.22). □

3.5 Idée pour la résolution des équations avec la condensation et la sublimation inverse données

Ayant analysé l'équation différentielle ordinaire linéaire et ayant examiné les termes non linéaires, nous pourrions espérer de résoudre le système d'équations non linéaires (3.11)-(3.12) avec le remplacement de $\Psi(u, \vartheta)$ par une fonction donnée $\tilde{\Psi} = \Psi(\tilde{u}, \tilde{\vartheta})$, en suivant l'idée exposée dans le chapitre de *Perspectives* de [2]. Mais en réalité pour résoudre effectivement le problème en suivant l'idée de [2] il y a encore beaucoup de détails à résoudre. En particulier, dans [3] les auteurs ont posé par erreur les conditions analogues à (2.5)-(2.7) avec

$$\tilde{B}(x) = B(x) - 2\varepsilon\Gamma$$

au lieu de

$$\tilde{B}(x) = e^{\Gamma x}(B(x) - 2\varepsilon\Gamma)e^{-\Gamma x}$$

et

$$\tilde{C}(x) = C(x) - B(x)\Gamma + \varepsilon\Gamma^2$$

au lieu de

$$\tilde{C}(x) = e^{\Gamma x}(C(x) - B(x)\Gamma + \varepsilon\Gamma^2)e^{-\Gamma x}.$$

Pour corriger cette erreur et appliquer l'idée de [3] et de [2] à notre problème, il faudrait en particulier estimer la différence

$$B(x) - e^{\Gamma x}B(x)e^{-\Gamma x}$$

pour B défini dans (3.11)-(3.12). Il est vrai qu'on peut imaginer que cette différence est petite et que l'idée principale de [2] marche pour le système d'équations (3.11)-(3.12). Mais on peut comprendre aussi que pour le démontrer d'une manière formelle et rigoureuse il faudra un travail considérable. Pour cette raison, en renvoyant à la recherche future la démonstration rigoureuse de l'existence d'une solution du système d'équations (3.11)-(3.12) avec le remplacement de $\Psi(u,\vartheta)$ par une fonction donnée $\tilde{\Psi} = \Psi(\tilde{u},\tilde{\vartheta})$, dans ce mémoire nous nous limitons à donner des idées pour cette résolution.

Ceci dit, nous devons maintenant formuler le problème d'une manière explicite. Soit $(u,\tilde{\vartheta})$ un élément de $H_0^1(0,1) \times H_0^1(0,1)$ appartenant à un voisinage de $(0,0)$, voisinage dont le sens sera précisé dans la suite. Nous allons considérer le système d'équations obtenu du système (3.11)-(3.12) en y remplaçant $\Psi(u,\vartheta)$ par

$$\tilde{\Psi} = \Psi(\tilde{u}, \tilde{\vartheta}),$$

c'est-à-dire le système d'équations

$$f_1 u'' + B_{11}u' + B_{12}\vartheta' + C_{11}u + C_{12}\vartheta = N_1(\overline{w}, \overline{T}, u, \vartheta), \tag{3.23}$$

$$\kappa\vartheta'' + B_{21}u' + B_{22}\vartheta' + C_{21}u + C_{22}\vartheta = N_2(\overline{w}, \overline{T}, u, \vartheta) + \tilde{\Psi}. \tag{3.24}$$

On considère le système d'équations linéaires qui corresponde à la linéarisation du système (3.23)-(3.24). Plus précisément on considère le système d'équations

$$f_1 u'' + B_{11}u' + B_{12}\vartheta' + C_{11}u + C_{12}\vartheta = N_1(\overline{w}, \overline{T}, z_1, z_2), \tag{3.25}$$

$$\kappa\vartheta'' + B_{21}u' + B_{22}\vartheta' + C_{21}u + C_{22}\vartheta = N_2(\overline{w}, \overline{T}, z_1, z_2) + \tilde{\Psi}, \tag{3.26}$$

où (z_1, z_2) est un couple de fonctions données appartenant à $H_0^1(0,1)$ avec

$$\|z_1\|^2_{H_0^1(0,1)} + \|z_2\|^2_{H_0^1(0,1)} \leq K_z$$

avec une constante (suffisamment petite) K_z.

On suppose que la dérivée $\frac{d}{dx}f_1(x)$ est suffiamment petite et que les matrices

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

vérifient les conditions (2.5)-(2.7). Comme nous l'avons remarqué ci-dessus, pour vérifier cette condition on peut suivre l'idée de [3] et [2], il faudra aussi un nouveau raisonnement bien élaboré.

Dans cette hypothèse, en raisonnant d'une manière analogue à la démonstration du lemme 2.2.1 et en utilisant les lemmes 4 et 5 (voir (3.20) et (3.22)), on pourra obtenir l'inégalité

$$\varepsilon \|U_2'\|^2_{L^2(0,1)} + \|U_2\|^2_{L^2(0,1)} \leq \tag{3.27}$$

$$\leq C_0'\|\tilde{\Psi}\|^2_{L^2(0,1)} + C_1'\varepsilon^{3/2} + C_2'\varepsilon^{-3/2}\big(\varepsilon\|z_i'\|^2_{L^2(0,1)} + \|z_i\|^2_{L^2(0,1)}\big)^2.$$

Pour tire une conclusion de cette inégalité, considérons l'inégalité

$$V \geq C_0'\|\tilde{\Psi}\|^2_{L^2(0,1)} + C_1'\varepsilon^{3/2} + C_2'\varepsilon^{-3/2}V^2. \tag{3.28}$$

Il est clair que l'inégalité (3.28) peut être vérifiée seulement si l'équation algégrique de second ordre en V

$$C_2'\varepsilon^{-3/2}V^2 - V + C_0'\|\tilde{\Psi}\|^2_{L^2(0,1)} + C_1'\varepsilon^{3/2} = 0 \tag{3.29}$$

admet les racines réelles et seulement pour les nombres réels V se trouvant entre ces deux racines. Comme on le connaît bien, les deux racines de l'équation (3.29) sont

$$V = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \varepsilon^{-3/2} C_2' C_0' \|\tilde{\Psi}\|^2_{L^2(0,1)} - C_1' C_2'}}{2C_2' \varepsilon^{-3/2}}.$$

Donc, si

$$\varepsilon^{-3/2} C_2' C_0' \|\tilde{\Psi}\|^2_{L^2(0,1)} + C_1' C_2' \leq 1, \tag{3.30}$$

alors linégalité (3.28) est vérifiée pour

$$\varepsilon^{3/2} \frac{1 - \sqrt{1 - \varepsilon^{-3/2} C_2' C_0' \|\tilde{\Psi}\|^2_{L^2(0,1)} - C_1' C_2'}}{2C_2'} \leq V \leq$$

$$\leq \varepsilon^{3/2} \frac{1 + \sqrt{1 - \varepsilon^{-3/2} C_2' C_0' \|\tilde{\Psi}\|^2_{L^2(0,1)} - C_1' C_2'}}{2C_2'}.$$

On en déduit aussi que, si on pose

$$\overline{V} = \varepsilon^{3/2} \frac{1 + \sqrt{1 - \varepsilon^{-3/2} C_2' C_0' \|\tilde{\Psi}\|^2_{L^2(0,1)} - C_1' C_2'}}{2C_2'}, \tag{3.31}$$

on a

$$C_0' \|\tilde{\Psi}\|^2_{L^2(0,1)} + C_1' \varepsilon^{3/2} + C_2' \varepsilon^{-3/2} V^2 \leq \overline{V} = C_0' \|\tilde{\Psi}\|^2_{L^2(0,1)} + C_1' \varepsilon^{3/2} + C_2' \varepsilon^{-3/2} \overline{V}^2 \tag{3.32}$$

$$\text{pour} \quad 0 \leq V \leq \overline{V}.$$

La relation (3.32) impliquera que, si on pose

$$W_\varepsilon = \{ U \in H_0^1(0,1) \,|\, \varepsilon \|U'\|^2_{L^2} + \|U\|^2_{L^2} \leq \overline{V} \}, \tag{3.33}$$

et si on définit l'opérateur G qui à (z_1, z_2) associe la solution $U = (u, \vartheta)$ du système d'équations (3.25)-(3.26), alors on a la relation

$$G(W_\varepsilon) \subset W_\varepsilon. \tag{3.34}$$

La relation (3.34) est une des conditions nécessaires essentielles pour qu'il existe un point fixe de l'opérateur G, qui sera une solution du système d'équations (3.23)-(3.24).

Bibliographie

[1] Antontsev, S. N., Kazhikhov, A. V., Monakhov, V. N. : *Boundary value problems in mechanics of non homogeneous fluids* (translated from Russian). North-Holland, 1990.

[2] Ayachi, A. : Etude numérique des équations d'un gaz visqueux. Thèse de doctorat, Univ. Guelma, 2016.

[3] Ayachi, A., Aissaoui, M. Z., Guebai, H., Fujita Yashima, H. : Système d'équations décrivant certains mouvements stationnaires en une dimension d'un gaz visqueux et calorifère. A paraître sur *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova.*

[4] Belhireche, H., Aissaoui, M.Z., Fujita Yashima, H. : Equations monodimensionnelles du mouvement de l'air avec la transition de phase de l'eau. A paraître sur *Sciences et Technologie, Univ. Constantine.*

[5] Benabidallah, R., Taleb, L., Fujita Yashima, H. : Existence d'une solution stationnaire d'un système d'équations d'un fluide visqueux compressible et calorifère modélisant la convection. *Bollettino U.M.I.* vol (8) 10-B (2007), pp. 1101-1124

[6] Brézis, H. : *Analyse fonctionnelle.* Masson, Paris, 1987.

[7] Fujita Yashima, H., Campana, V., Aissaoui, M. Z. : Systeme d'equations d'un modele du mouvement de l'air impliquant la transition de phase de l'eau dans l'atmosphere. A paraître sur *Annales Math. Africaines.*

[8] Fujita Yashima, H. : Modelación matemática del movimiento de la atmósfera con la transición de fase del agua. Rev. Invest. Operac., vol. 34 (2013), pp. 93-104.

[9] Fujita Yashima, H., Ayachi, A. Aissaoui, M. Z. : Ecuaciones del movimiento del aire en una dimensión y cálculo para la formación de ubes por un viento. *Investigación Operacional*, vol. **36** (2015), pp. 133-139.

[10] Kantorovitch, L. V., Akilov, G. P. : *Analyse fonctionnelle, tome 2* (traduit du russe). Mir, Moscou, 1981.

[11] Ladyzhenskaya, O. A., Solonnikov, V. A., Ural'tseva, N. N. : *Linear and quasi-linear equations of parabolic type* (translated from Russian). Amer. Math. Soc., 1968.

[12] Landau, L. L., Lifchitz, E. M. : *Mécanique des fluides (Physique théorique, tome 6)* (traduit du russe). Mir, Moscou, 1989.

[13] Matveev, L. T. : *Fisica dell'atmosfera* (in russo). Gidrometeoizdat, Leningrad-S. Peterburg, 1965, 1984, 2000.

[14] Peyron, M. : Les chutes de neige dans l'Atlas marocain. *Revue Géogr. Alpine*, vol. **68** (1980), pp. 237-254.

[15] Prodi, E, Battaglia, A. : Meteoroligia - Parte II, Microfisica. Grafica Pucci, Roma, 2004.

[16] Rozhdestvenskii, B. L., Yanenko, N. N. : *Systèmes d'équations quasi-linéaires et leur applications à la dynamique des gaz.* Nauka (Moscou), 1978.

[17] Selvaduray, S., Fujita Yashima, H. : Equazioni del moto dell'aria con la transizione di fase dell'acqua nei tre stati : gassoso, liquido e solido. *Quaderno Dip. Mat. Univ. Torino*, No. 16 (2010).

[18] Sheng, P.-X., Mao, J.-T., Li, J.-G., Zhang, A.-C., Sang, J.-G., Pan, N.-X. : *Fisica dell'atmosfera* (in cinese). Publ. Univ. Beijing, Beijing, 2003.