

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques



Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master Académique en Mathématiques
Option : **Mathématiques Appliquées**

Par :

Mr. Boucceredj Hassen

Intitulé

***Équation du mouvement d'un gaz dans un
tuyau fermé avec la condensation de la vapeur***

Dirigé par : Dr. Belhireche Hanane

Devant le jury

**PRESIDENT
RAPORTEUR
EXAMINATEUR**

**Mr. N. BENDJAZIA
Mr. H. BELHIRECHE
Mr. H. GUEBBEI**

**MCB Univ-Guelma
MCB Univ-Guelma
MCA Univ-Guelma**

Session Juin 2016

Équation du mouvement d'un gaz dans un
tuyau fermé avec la condensation de la vapeur

Boucceredj Hassen
Mémoire de master en mathématiques
Université de Guelma

15 juin 2016

Table des matières

1	Modèle général de l'atmosphère	3
1.1	Equations du mouvement de l'air	3
1.2	Condensation de la vapeur d'eau dans l'air	5
2	Position de problème	8
2.1	Domaine	8
2.2	Question de la condensation	10
2.3	Système d'équations	12
3	Étude numérique de la solution stationnaire	14
3.1	Schéma numérique	15
3.2	Résultat du calcul numérique	19

Remerciements

Avec une rigueur et un intérêt constant, Mes remerciements les plus respectueux s'adressent a Madame : Belhireche Hanane qui m'a fait l'honneur de m'encadrer, je tiens à lui exprimer mes reconnaissances et profonds attachements. Ainsi que les enseignements : H.F.Yashima, Ellaggoune Fateh, Guebbai Hamza, Dida Rida, Benrabeh Abderafik, Benarioua Khadir et Boussetila Nadjib pour ses aides et précieux conseils.

Un grand merci aux profs qui nous ont suivie pendant notre parcours universitaire, qui nous ont donné les bonnes directions pour réussir dans la vie professionnelle.

Dédicace

Merci à notre Dieu, merci seigneur de nous avoir donné tant de force exemplaire, lucide. Merci car nous n'aurons assez de mots à exprimer le bonheur reçue dans le profond de nos cœurs, Dieu le miséricordieux merci.

Je dédis se mémoire de fin d'étude universitaire, tout d'abord et en premier lieu à mes chers parents, ainsi que tout l'entourage encadreur, qui ont tenu me faciliter la tache des études dans l'université de Guelma.

En particulier je le dédis à ma mère adoptive chérie, qui des le début de ma vie estudiantine n'a pas lésiné un seul instant à venir en aide, moralement et financièrement, à accompagner dans mes plus pénibles moments de faiblesse et qui s'inquiète sporadiquement sur ma santé, me soutient m'encourage durant toutes les journées. Je le dédis aussi à mon père adoptif, qui n'a pas hésité à recourir m'aider et m'encourager.

Résumé

On considère le système d'équations qui décrit le mouvement de l'air et l'éventuel processus de condensation de la vapeur d'eau contenue dans l'air et ses conséquences dans un tuyau fermé bien régulier dans une forme rectangulaire et qu'on peut le considérer comme une variété de dimension 1.

On a construit la solution numérique des équations stationnaires en utilisant la méthode de différences finis. Notre résultat montre les aspects physiques fondamentaux du mouvement ascendant et descendant de l'air ; en effet un mouvement ascendant de l'air croît rapidement dans la partie verticale du tuyau si on réchauffe la partie inférieure du tuyau, mais il sera ralenti par l'effet de la friction avec les gouttelettes, ce qui lui permet de reprendre l'état initial.

Introduction

Le mouvement convectif d'un gaz joue un rôle essentiel dans beaucoup de phénomènes de notre environnement, comme dans le réchauffement de l'air par un chauffage. Or, même si on peut étudier certains aspects mécanique et thermodynamique du mouvement de l'air, la question de la convection dans l'atmosphère demeure peu explorée du point de vue mathématique (voir [5]).

Ces circonstances nous suggèrent que l'étude des équations du mouvement d'un gaz visqueux dans un tuyau, conçu comme une variété de dimension 1, pourra être le premier pas dans l'étude de la convection du gaz. Pour cela nous proposons l'étude du mouvement d'un gaz dans un tuyau. Plus précisément, on considère un tuyau circulaire fermé, c'est-à-dire un tuyau dont le centre de la section forme une courbe fermée dans \mathbb{R}^3 . Nous supposons que le tuyau est placé dans le champ de la force gravitationnelle $-\nabla\phi = (0, 0, -g)^T$ avec une constante $g > 0$ (accélération de pesanteur). Nous considérons les équations fondamentales du mouvement d'un gaz (voir [9], [1]); dont la viscosité, la thermoconductibilité et la pression sont exprimés de manière analogue au cas d'un gaz idéal. L'objectif de notre étude est d'analyser le mouvement du gaz à l'intérieur du tuyau circulaire, mouvement qui se crée lorsque on réchauffe une partie du tuyau. Pour mieux caractériser ce mouvement, nous considérons un tuyau circulaire et homogène, c'est-à-dire la section se présente presque identique pour tout le long du tuyau. Ces conditions nous permettront de le considérer comme une variété de dimension 1. Pour modéliser le phénomène, il est utile de considérer le tuyau avec un paramètre $s \in \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$.

Si on réchauffe une partie du tuyau, on peut prévoir (et on sait par expérience) que le gaz qui se trouve à l'intérieur du tuyau fait un mouvement ; ce mouvement est dû à la variation de la densité causée par la chaleur et au champ de la force gravitationnelle.

Comme il est bien connu, souvent l'ascension de l'air est provoqué par l'effet de la condensation de la vapeur, elle joue un rôle très important dans quelques phénomènes de l'atmosphère comme la formation des cyclones tropicaux. Dans [7], les auteurs ont proposé un système d'équation qui modélise le mouvement vertical de l'air dans un domaine cylindrique comme une cheminée, dont sa hauteur doit correspondre à celle d'un "Cumulonimbus" de sorte que le modèle est intéressant pour les phénomènes météorologiques comme les cyclone tropicaux.

Le terme cyclone est un terme de météorologie, il se présente sous la forme d'un énorme système nuageux de "Cumulonimbus" (nuage d'orage), alimenté par l'évaporation de H_2O à partir de la surface de la mer, le mouvement de giration du cyclone est donné par la force de Coriolis dû à la rotation de la Terre. Les cyclones tournent ainsi dans le sens des aiguilles d'une montre dans l'hémisphère Sud, dans le sens contraire dans l'hémisphère Nord.

Dans le present travail nous proposons l'étude du mouvement de l'air dans un tuyau fermé de telle sorte que le modèle a une caractéristique similaire avec le mouvement de l'air dans un typhon.

Le résultat principale de notre étude est de trouver une solution stationnaire du système d'équations de mouvement du l'air avec la condensation de la vapeur dans un tuyau. L'obtention de la solution stationnaire est difficile pour ce type des équations pour cela nous utilisons le cadre numérique.

Chapitre 1

Modèle général de l'atmosphère

1.1 Equations du mouvement de l'air

Dans ce chapitre nous rappelons les équations aux dérivées partielles qui décrivent le mouvement de l'air et l'éventuel processus de condensation de la vapeur d'eau contenue dans l'air et ses conséquences. Pour le mouvement de l'air la description fondamentale est donnée par exemple dans [9] (voir aussi [1]). D'autre part, pour les équations qui décrivent la transition de phase de l'eau dans l'atmosphère nous avons suivi des modèles développés dans une série de travaux [3], [4], [6], etc..., qui à leur tour se sont basés sur les descriptions des phénomènes physiques données dans [10], [13], [16]. Avant de décrire les équations, nous introduisons les grandeurs physiques :

$\varrho = \varrho(x, t)$: la densité de l'air sec ;

$\pi = \pi(x, t)$: la densité de la vapeur d'eau ,

$v = v(x, t) = (v_1(x, t), v_2(x, t), v_3(x, t))$: la vitesse du fluide ;

$T = T(x, t)$: la température ;

$p = p(x, t)$: la pression.

Les lois fondamentales du mouvement de l'air sont celles de la conserva-

tion de la masse, de la conservation de la quantité de mouvement et de la conservation de l'énergie, auxquelles il faut ajouter la loi constitutive de la pression. Ces lois de conservation sont exprimées dans la forme d'équations aux dérivées partielles, tandis que la loi constitutive de la pression est donnée par une équation de la forme $p = p(\varrho, T)$.

Commençons par l'équation qui détermine la pression. Pour notre étude nous admettons que la pression p est donnée par l'équation

$$p(x, t) = R_1 \varrho(x, t) T(x, t), \quad R_1 = \frac{R}{\mu_a}, \quad (1.1)$$

où R est la constante universelle des gaz ($R \approx 8.31 \cdot 10^7 \text{ erg/mol} \cdot K$), tandis que μ_a est la masse molaire moyenne de l'air ($\mu_a \approx 28.96 \text{ g/mole}$). Le choix de cette équation (1.1) est motivée par le fait que le comportement de la pression de l'air dans l'atmosphère est assez similaire à celui d'un gaz idéal.

Pour la loi de la conservation de la masse pour un modèle précis, il nous faut distinguer celle de la masse de l'air sec (partie de l'air formée par toutes les composantes de l'air sauf H_2O) et celle de la masse de la vapeur d'eau, ainsi on a **loi de la conservation de la masse de l'air sec** :

$$\partial_t \varrho = -\nabla \cdot (\varrho v), \quad (1.2)$$

et la **loi de la conservation de la masse de la vapeur d'eau** :

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + \nabla \cdot (\pi v) = -H_{tr}. \quad (1.3)$$

Ici π est la densité de la vapeur d'eau et H_{tr} représente la quantité totale (dans l'unité de volume et de temps) de H_2O , qui se transforme du gaz au liquide ou solide.

En ce qui concerne la conservation de la quantité de mouvement, nous précisons que l'accélération de la pesanteur sera désignée par g , tandis que η et ζ seront les coefficients de viscosités d'écoulement et volumique de l'air ; on utilisera également la notation $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)^T$, on considère alors :

Equation de la quantité de mouvement

$$\begin{aligned} (\varrho + \pi) \left(\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v \right) &= \eta \Delta v + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla(\nabla \cdot v) + \\ &- \nabla p - g[\Sigma + \varrho + \pi] \vec{e}_3. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Ici Σ est la densité de l'eau liquide ou solide suspendue dans l'atmosphère.

Pour la loi de la conservation de l'énergie, il nous sera commode de l'écrire dans la forme relative à la chaleur exprimée par la température, on a

Equation du bilan d'énergie

$$\varrho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \Delta T - p \nabla \cdot v + \eta \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \nabla \cdot v \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \zeta (\nabla \cdot v)^2 - \varrho c_v v \cdot \nabla T + L_{tr} H_{tr}. \quad (1.5)$$

Ici c_v est la chaleur spécifique, L_{tr} la chaleur latente et κ le coefficient de thermoconductibilité. Pour les détails des équations (1.1)-(1.5), on peut consulter par exemple le livre de Landau et Lifchitz [9].

1.2 Condensation de la vapeur d'eau dans l'air

Comme il est communément connu, la condensation de la vapeur d'eau joue un rôle très important dans les phénomènes météorologiques et dans notre étude nous allons tenir compte de ses effets dans le mouvement de l'air. Rappelons d'abord les aspects principaux de la transition de phase de H_2O dans l'atmosphère (voir [10], [13]).

On rappelle d'abord que la condensation de la vapeur d'eau dans l'atmosphère, fournit la chaleur à l'air (chaleur latente); la quantité de la chaleur donnée (ou retirée) peut être exprimée par le produit de la chaleur latente L_{gl} et de la quantité de condensation H_{gl} . La chaleur latente L_{gl} est donnée approximativement par

$$L_{gl}(T) \approx (3244 - 2,72 T)10^3 \quad (J/kg), \quad (1.6)$$

(voir par exemple [10]).

La condensation de la vapeur d'eau aura lieu quand la densité saturée de la vapeur d'eau dépasse celle de la vapeur réelle. Sur la vitesse de la condensation dans la situation dans laquelle la densité réelle de la vapeur d'eau dépasse celle de la vapeur saturée, il y a diverses études et considérations (voir [13]), mais dans tous les cas, on peut constater qu'elle est assez rapide de sorte que dans certains modèles, on considère que la vapeur excédante par rapport à la densité de la saturation se condense immédiatement (comme nous l'adoptons dans la suite).

Dans la littérature de la physique de l'atmosphère on, préfère donner la pression de la vapeur saturée. Pour être précis, il faut distinguer celle relative à la surface de l'eau liquide et celle relative à la surface de l'eau solidifiée (glace). Mais aux températures supérieures à $0^\circ C$, seulement celle relative à la surface de l'eau liquide aura son effet et la majorité du domaine de notre considération se trouve dans cette situation. Donc pour faciliter notre étude nous considérons seulement la pression de la vapeur saturée relative à la surface de l'eau liquide, que nous notons $\bar{p}_{vs}(T)$. La valeur de $\bar{p}_{vs}(T)$ dépend

fortement de la température T , et est donnée approximativement par

$$\bar{p}_{vs}(T) \approx E_0 \cdot 10^{\frac{7,63(T-273,15)}{T-31,25}}, \quad E_0 = 6,107 \quad (mbar) \quad (1.7)$$

(voir par exemple [10]). Si on traduit cette valeur dans la valeur de la densité de la vapeur saturée en utilisant la loi constitutive de la pression appliquée à la pression partielle relative à la vapeur d'eau, la densité de la vapeur saturée $\bar{\pi}_{vs}(T)$ doit être donnée approximativement par

$$\bar{\pi}_{vs}(T) = \frac{\mu_h}{RT} \bar{p}_{vs}(T), \quad (1.8)$$

où μ_h est la masse molaire de H_2O (voir [6], [15]).

Chapitre 2

Position de problème

2.1 Domaine

Nous allons étudier le système d'équations qui décrit le mouvement de l'air avec l'effet de la condensation de la vapeur d'eau, dans un domaine qui est un tuyau fermé de longueur (et de hauteur) considérable, par rapport à la hauteur de l'atmosphère (plus précisément, la troposphère).

Désignons par $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, le domaine que nous allons définir. En effet, nous considérons une courbe fermée γ dans l'espace \mathbb{R}^3 et supposons que

$$\gamma \in \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = 0\}.$$

On désigne par L la longueur de la courbe et on introduit un paramètre s décrivant la courbe γ , de manière que

$$\gamma = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x = \gamma(s), s \in [0, L]\}$$

avec la condition

$$\gamma(0) = \gamma(L).$$

De manière plus cohérente du point de vue mathématique, il faudrait considérer s comme élément du corps réel quotienté par $L\mathbb{Z}$, c'est-à-dire $s \in$

$\mathbb{R}/L\mathbb{Z}$. Toutefois, dans les calculs, souvent il est commode de considérer s comme élément de l'intervalle $[0, L]$, ce qui ne causera pas d'équivoque.

On définit Ω par

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \text{dist}(x, \gamma) < \varepsilon\},$$

où ε est une constante strictement positive et relativement petite. On suppose que la fonction $\gamma(s)$ est dérivable, alors nous pouvons choisir la paramétrisation de γ par s de telle manière que l'on ait

$$\left| \frac{d\gamma(s)}{ds} \right| = 1.$$

Dans ce cas ds sera l'élément de longueur de la courbe γ .

On suppose que le tuyau est régulier et avec sectionnement constante, non seulement pour la dérivabilité de la fonction $\gamma(s)$, mais aussi pour sa structure spatiale. C'est-à-dire, on suppose que les parties du tuyau ne se touchent pas et que la courbure de la fonction $\gamma(s)$ est suffisamment petite. Pour garantir cette condition, on suppose que le diamètre de la section du tuyau ne dépasse pas un nombre $\delta > 0$ et que

$$|\gamma(s_1) - \gamma(s_2)| \geq \min(c|s_2 - s_1|, 2\delta) \quad \forall s \in \mathbb{R}/L\mathbb{Z},$$

où c c'est une constante telle que $0 < c < 1$. Nous devons imposer, outre la condition mentionnée en haut

$$\gamma(0) = \gamma(L),$$

aussi la condition

$$\left. \frac{d\gamma(s)}{ds} \right|_{s=0} = \left. \frac{d\gamma(s)}{ds} \right|_{s=L}.$$

Dans notre étude nous allons considérer un cas particulier d'une courbe fermée et régulière : nous considérons la courbe $\gamma = \gamma(s)$ ayant la caractéristique suivante :

la courbe γ a deux parties verticales et deux parties horizontales, mises dans les quatre segments latéraux d'un rectangle dont les quatre angles sont remplacés par des arcs ; soient l_v , l_h , l_c trois nombres strictement positifs, l_v représentant la longueur de la partie verticale, l_h la longueur de la partie horizontale et l_c la longueur de chaque arc contenu dans la courbe. On a :

$$\text{si } l_c \leq s \leq l_c + l_v, \text{ alors } \frac{d\gamma(s)}{ds} = (0, 0, 1)^T,$$

$$\text{si } 2l_c + l_v \leq s \leq 2l_c + l_v + l_h, \text{ alors on a } \frac{d\gamma(s)}{ds} = (1, 0, 0)^T,$$

$$\text{si } 3l_c + l_v + l_h \leq s \leq 3l_c + 2l_v + l_h, \text{ alors on a } \frac{d\gamma(s)}{ds} = (0, 0, -1)^T,$$

$$\text{si } 4l_c + 2l_v + l_h \leq s \leq 4l_c + 2l_v + 2l_h = L, \text{ alors on a } \frac{d\gamma(s)}{ds} = (-1, 0, 0)^T.$$

Comme nous supposons que le diamètre 2ε de la section du tuyau Ω est petit, nous allons adopter l'approximation qui considère le tuyau Ω comme un domaine d'une dimension. Notre choix de la variable s , qui fait de ds l'élément de longueur, nous permettra de traduire la dérivée en x_1 et x_3 (nous avons supposé que γ se trouve sur le plan $\{x_2 = 0\}$) en dérivée par rapport à s de manière suffisamment simple.

2.2 Question de la condensation

Désignons par $\bar{\pi}_{vs}(T)$ la densité de la vapeur saturée. Rappelons que l'air peut contenir au maximum la quantité $\bar{\pi}_{vs}(T)$ de la vapeur par unité de volume à chaque température déterminée T . Lorsque la densité de la vapeur, que l'on désigne par π , dépasse la densité de la vapeur saturée $\bar{\pi}_{vs}(T)$, la

partie de la vapeur, qui excède $\bar{\pi}_{vs}(T)$, ne peut pas rester en état gazeux et si la température de l'air est supérieure à celle de la fusion on aura la condensation de la vapeur d'eau.

Dans la suite, nous allons considérer la quantité de la condensation dans la partie verticale ascendante de tuyau, c'est-à-dire dans la partie où la troisième composante de $\frac{d\gamma(s)}{ds}$ est positive. Pour cela on va déterminer la quantité (par unité de temps et de volume) de H_2O en état gazeux qui se transforme en liquide ou solide. Nous allons la désigner par

$$H_{tr} = H_{tr}(t, s).$$

Dans notre étude nous adoptons l'expression de H_{tr} proposée dans [7]. Notons la hauteur z , c'est-à-dire $z = x_3$ et supposons que H_{tr} est déterminé par

$$H_{tr} = (\bar{\pi}_{vs}(T) \frac{d}{dz} \log \varrho - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T))v. \quad (2.1)$$

En effet, si on désigne par $\pi(z)$ la densité de vapeur en z , et si on suppose que la quantité de H_2O qui dépasse $\pi_{vs}(z)$ devient immédiatement liquide ou solide, on aura

$$\pi(z) = \bar{\pi}_{vs}(T(z)).$$

Lorsque l'air monte de Δz , la quantité de H_2O contenue dans l'air sera

$$\pi(z) \frac{\varrho(z + \Delta z)}{\varrho(z)} - \bar{\pi}_{vs}(T(z)) \frac{\varrho(z + \Delta z)}{\varrho(z)},$$

tandis que la densité de la vapeur saturée sera $\bar{\pi}_{vs}(T(z + \Delta z))$, d'où

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} [\pi_{vs}(z) \frac{\varrho(z + \Delta z)}{\varrho(z)} - \bar{\pi}_{vs}(T(z + \Delta z))] = \bar{\pi}_{vs}(T) \frac{d}{dz} \log \varrho - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T).$$

Par conséquent, en tenant compte de la relation $\frac{dz}{dt} = \frac{dx_3(t)}{dt} = v_3$, on aura

$$H_{tr} = (\bar{\pi}_{vs}(T)) \frac{d}{dz} \log \varrho - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T) v_3. \quad (2.2)$$

En outre nous désignons la chaleur latente par L_{tr} .

2.3 Système d'équations

Comme nous l'avons signalé, nous utilisons l'approximation selon laquelle le domaine est réduit à la courbe γ ou à $\mathbb{R}/L\mathbb{Z}$. Nous devons donc considérer dans un domaine monodimensionnel $\mathbb{R}/L\mathbb{Z}$ ou, d'une manière plus pratique, pour $0 \leq s \leq L$ les équations du mouvement du gaz (1.3)-(1.5), en y associant des termes qui résultent de la condensation de la vapeur. Puisque le domaine dans lequel nous considérons les équations est d'une dimension spatiale, les équations doivent être transformées en des équations en une variable spatiale s et en une variable du temporelle t .

Comme notre objectif est d'examiner le mouvement de l'air avec l'effet de la condensation, due à l'écoulement ascendant de ce dernier, nous distinguons la partie du domaine où la troisième composante de la dérivée de $\gamma(s)$ est strictement positive et celle où la troisième composante de la dérivée de $\gamma(s)$ est inférieure ou égale à 0.

Maintenant nous proposons le système d'équations à envisager. On considère

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}(\varrho v) = -H_{tr} - \beta(\varrho - \bar{\varrho}_0), \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \varrho \partial_t v + \frac{\varrho}{2} \partial_s |v|^2 &= \\ &= \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right) \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - R_1 \frac{\partial(\varrho T)}{\partial s} - \varrho g \frac{d\gamma_3(s)}{ds} - g \Sigma \max\left(0, \frac{d\gamma_3(s)}{ds}\right), \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \rho c_v(\partial_t T + v\partial_s T) + R_{v1}\rho T(\partial_s v) &= \\ &= \kappa\partial_s^2 T + \left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right)(\partial_s v)^2 + L_{tr}H_{tr} - \alpha(T - \bar{T}_0), \end{aligned} \quad (2.5)$$

où

$$\alpha = \begin{cases} \alpha_0 > 0 & \text{si } \gamma_3 = 0; \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

$$\beta = \begin{cases} \beta_0 > 0 & \text{si } \gamma_3 = 0; \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Le système d'équations (2.3)-(2.5), résulte de la réduction des équations (1.3)-(1.5) à une dimension spatiale (pour cette réduction, voir par exemple [1], [7]) et de quelques modifications introduites pour rendre le modèle plus cohérent du point de vue mathématique et physique. Le terme $-g\Sigma \max(0, \frac{d\gamma_3(s)}{ds})$ (rappelons que Σ est la densité de l'eau liquide ou solide) représente l'effet de la friction entre les gouttelettes et l'air ; on suppose ici que les gouttelettes se trouvent seulement dans la partie où l'air monte, ce qui est exprimé par le facteur $\max(0, \frac{d\gamma_3(s)}{ds})$.

Dans le système d'équations (2.3)-(2.5) nous introduisons également des termes de "relaxation" ou "dissipation". En effet, le terme $-\alpha(T - \bar{T}_0)$ représente le retour de la température vers celle d'équilibre global \bar{T}_0 , tandis que le terme $-\beta(\rho - \bar{\rho}_0)$ représente le retour de la densité vers celle d'équilibre global $\bar{\rho}_0$. Il nous semble raisonnable de supposer que cette "relaxation" se réalise en contact avec la surface d'eau de la mer. Pour cette raison, nous proposons ces termes exclusivement sur la partie où $\gamma_3(s) = 0$ (la partie inférieure de γ).

Chapitre 3

Étude numérique de la solution stationnaire

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'étude de la solution stationnaire. Pour cela, on considère le cas stationnaire relatif aux équations (2.3)-(2.5), où toutes les quantités sont indépendantes du temps et leur dérivées par rapport au temps sont nulles (c'est-à-dire : $\partial_t \cdot = 0$) on obtient alors le système suivant :

$$\frac{\partial}{\partial s}(\varrho v) = -H_{tr} - \beta(\varrho - \bar{\varrho}_0), \quad (3.1)$$

$$\frac{\varrho}{2} \partial_s |v|^2 - \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right) \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - R_1 \frac{\partial(\varrho T)}{\partial s} - \varrho g \frac{d\gamma_3(s)}{ds} = g \Sigma \max \left(0, \frac{d\gamma_3(s)}{ds} \right), \quad (3.2)$$

$$\varrho c_v v \partial_s T + R_1 \varrho T \partial_s v = \kappa \partial_s^2 T + \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right) (\partial_s v)^2 + L_{tr} H_{tr} - \alpha(T - \bar{T}_0), \quad (3.3)$$

complété par les conditions aux limites suivantes :

$$\varrho(0) = \varrho_0, \quad (3.4)$$

$$v(0) = v(L) = v_0, \quad (3.5)$$

$$T(0) = T(L) = T_0, \quad (3.6)$$

où L est la longueur de la courbe γ .

Comme il est difficile de résoudre les équations (3.1)-(3.3) avec les conditions aux limites (3.4)-(3.6), nous allons utiliser la méthode de tir ("shooting method"), c'est-à-dire nous proposons de considérer le système (3.1)-(3.3) avec les conditions initiales suivantes :

$$\varrho(0) = \varrho_0, \quad (3.7)$$

$$v(0) = v_0, \quad (3.8)$$

$$\left. \frac{v(s)}{ds} \right|_{s=0} = v_1, \quad (3.9)$$

$$T(0) = T_0, \quad (3.10)$$

$$\left. \frac{T(s)}{ds} \right|_{s=0} = T_1. \quad (3.11)$$

La méthode de tir est un algorithme pour déterminer (v_1, T_1) tel que $v_{v_1}(L) \approx v_0$ et $T_{T_1}(L) \approx T_0$

3.1 Schéma numérique

Pour effectuer le calcul, nous utilisons la **méthode de différence finie**¹ sur la courbe γ avec un maillage uniforme.

— Pour la dérivée première on utilise une approximation par la "dérivée pondérée", qui a la forme suivante :

$$\left. \frac{\partial U}{\partial s} \right|_{s=s_i} = \frac{\frac{7}{12}U_{i+1} - \frac{1}{4}(U_i + U_{i-1}) + \frac{1}{3}U_{i-2}}{h},$$

1. Pour les généralités de la méthode de différences finies et ses applications aux équations de ce type, voir par exemple [17], [14]

— Pour la dérivé deuxième on utilise la forme centrée suivante :

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} \right|_{s=s_i} = \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2},$$

pour $i = 1, \dots, N-1$, tandis que $h = \frac{L}{N}$, $s_i = i * h$ et $U_i \simeq U(s_i)$.

La version discrétisée des équations (3.1)-(3.3) avec ses approximations des dérivées est la suivante :

$$v_i \frac{\frac{7}{12} \varrho_{i+1} - \frac{1}{4} (\varrho_i + \varrho_{i-1} + \frac{1}{3} \varrho_{i-2})}{h} + \varrho_i \frac{\frac{7}{12} v_{i+1} - \frac{1}{4} (v_i + v_{i-1} + \frac{1}{3} v_{i-2})}{h} = \quad (3.12)$$

$$= - \left(\frac{\bar{\pi}_{vs}(T_i) \frac{7}{12} \varrho_{i+1} - \frac{1}{4h} (\varrho_i + \varrho_{i-1} + \frac{1}{3} \varrho_{i-2})}{\varrho_i} + \right. \\ \left. - \frac{d\bar{\pi}_{vs}(T_i) \frac{7}{12} T_{i+1} - \frac{1}{4} (T_i + T_{i-1} + \frac{1}{3} T_{i-2})}{dT} \right) v_i - \beta (\varrho_i - \varrho_0), \\ \varrho_i v_i \frac{\frac{7}{12} v_{i+1} - \frac{1}{4} (v_i + v_{i-1} + \frac{1}{3} v_{i-2})}{h} = \quad (3.13)$$

$$= \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right) \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2} - R_1 \varrho_i \frac{\frac{7}{12} T_{i+1} - \frac{1}{4} (T_i + T_{i-1} + \frac{1}{3} T_{i-2})}{h} + \\ - R_1 T_i \frac{\frac{7}{12} \varrho_{i+1} - \frac{1}{4} (\varrho_i + \varrho_{i-1} + \frac{1}{3} \varrho_{i-2})}{h} - \varrho_i g \frac{d\gamma_3(s)}{ds} - g \Sigma \max \left(0, \frac{d\gamma_3(s)}{ds} \right), \\ \varrho_i C_v v_i \frac{\frac{7}{12} T_{i+1} - \frac{1}{4} (T_i + T_{i-1} + \frac{1}{3} T_{i-2})}{h} + \quad (3.14)$$

$$+ R_1 \varrho_i T_i \frac{\frac{7}{12} v_{i+1} - \frac{1}{4} (v_i + v_{i-1} + \frac{1}{3} v_{i-2})}{h} = \kappa \frac{T_{i+1} - 3T_i + T_{i-1}}{h^2} + \\ + \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right) \frac{\frac{7}{12} v_{i+1} - \frac{1}{4} (v_i + v_{i-1} + \frac{1}{3} v_{i-2})}{h} \left(\frac{v_i - v_{i-1}}{h} \right) + \\ + L_{tr}(T_i) \left(\frac{\bar{\pi}_{vs}(T_i) \frac{7}{12} \varrho_{i+1} - \frac{1}{4} (\varrho_i + \varrho_{i-1} + \frac{1}{3} \varrho_{i-2})}{\varrho_i} + \right. \\ \left. - \frac{d\bar{\pi}_{vs}(T_i) \frac{7}{12} T_{i+1} - \frac{1}{4} (T_i + T_{i-1} + \frac{1}{3} T_{i-2})}{dT} \right) v_i - \alpha (T_i - T_0).$$

✂ Ici nous avons adopté l'approximation :

$$(\partial_s v|_{s=s_i})^2 \approx \frac{\frac{7}{12}v_{i+1} - \frac{1}{4}(v_i + v_{i-1} + \frac{1}{3}v_{i-2})}{h} \left(\frac{v_i - v_{i-1}}{h} \right)$$

du terme non linéaire pour rendre explicite le schéma numérique.

Pour la commodité de calcul nous réécrivons les équations (3.12)-(3.14) dans la forme :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{7}{12h} + \frac{7}{12h} \left(\frac{\bar{\pi}_{vs}(T_i)}{\varrho_i} \right) \right) v_i \varrho_{i+1} + \frac{7}{12h} \varrho_i v_{i+1} + \quad (3.15) \\ & - \left(\frac{7}{12h} \frac{d\bar{\pi}_{vs}(T_i)}{dT} \right) v_i T_{i+1} = -\beta (\varrho_i - \varrho_0) + v_i \frac{\frac{1}{4} (\varrho_i + \varrho_{i-1} + \frac{1}{3} \varrho_{i-2})}{h} + \\ & + \varrho_i \frac{\frac{1}{4} (v_i + v_{i-1} + \frac{1}{3} v_{i-2})}{h} + \frac{\bar{\pi}_{vs}(T_i)}{\varrho_i} \frac{\frac{1}{4} (\varrho_i + \varrho_{i-1} + \frac{1}{3} \varrho_{i-2})}{h} v_i + \\ & - \left(\frac{d\bar{\pi}_{vs}(T_i)}{dT} \frac{\frac{1}{4} (T_i + T_{i-1} + \frac{1}{3} T_{i-2})}{h} \right) v_i, \\ & \frac{7R_1 T_i}{12h} \varrho_{i+1} + \left(\frac{7\varrho_i v_i}{12h} - \frac{1}{h^2} \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right) \right) v_{i+1} + \frac{7R_1 \varrho_i T_{i+1}}{12h} = \quad (3.16) \\ & = \varrho_i v_i \frac{\frac{1}{4} (v_i + v_{i-1} + \frac{1}{3} v_{i-2})}{h} + \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right) \frac{-2v_i + v_{i-1}}{h^2} + \\ & + R_1 \varrho_i \frac{\frac{1}{4} (T_i + T_{i-1} + \frac{1}{3} T_{i-2})}{h} + R_1 T_i \frac{\frac{1}{4} (\varrho_i + \varrho_{i-1} + \frac{1}{3} \varrho_{i-2})}{h} + \\ & - \varrho_i g \frac{d\gamma_3(s)}{ds} - g \Sigma \max \left(0, \frac{d\gamma_3(s)}{ds} \right), \\ & - \frac{7L_{tr}(T_i)}{12h} \left(\frac{\bar{\pi}_{vs}(T_i)}{\varrho_i} \right) v_i \varrho_{i+1} + \quad (3.17) \\ & + \left(\frac{7R_1 \varrho_i T_i}{12h} - \frac{7}{12h} \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right) \left(\frac{v_i - v_{i-1}}{h} \right) \right) v_{i+1} + \\ & + \left(\frac{7\varrho_i C_v v_i}{12h} - \frac{\kappa}{h^2} + \frac{7L_{tr}(T_i)}{12h} \left(\frac{d\bar{\pi}_{vs}(T_i)}{dT} v_i \right) \right) T_{i+1} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= R_i \varrho_i T_i \frac{\frac{1}{4}(v_i + v_{i-1} + \frac{1}{3}v_{i-2})}{h} + \varrho(i) C_v v_i \frac{\frac{1}{4}(T_i + T_{i-1} + \frac{1}{3}T_{i-2})}{h} + \\
&- \left(\frac{4}{3}\eta + \zeta \right) \frac{\frac{1}{4}(v_i + v_{i-1} + \frac{1}{3}v_{i-2})}{h} \left(\frac{v_i - v_{i-1}}{h} \right) + \kappa \frac{-2T_i + T_{i-1}}{h^2} + \\
&+ L_{tr}(T_i) \left(\frac{\bar{\pi}_{vs}(T_i)}{\varrho_i} \left(-\frac{\frac{1}{4}(\varrho_i + \varrho_{i-1} + \frac{1}{3}\varrho_{i-2})}{h} \right) + \frac{d\bar{\pi}_{vs}(T_i)}{dT} \frac{\frac{1}{4}(T_i + T_{i-1} + \frac{1}{3}T_{i-2})}{h} \right) v_i + \\
&- \alpha (T_i - T_0).
\end{aligned}$$

Le système (3.15)-(3.17) est équivalent au système :

$$A_i U_{i+1} = F_i, \text{ pour } i = 1, \dots, N-1,$$

où A_i est la matrice des colonnes : A_1^i, A_2^i, A_3^i

$$A_i = (A_1^i A_2^i A_3^i)$$

telle que

$$\begin{aligned}
A_1^i &= \begin{pmatrix} \left(\frac{7}{12h} + \frac{7}{12h} \left(\frac{\bar{\pi}_{vs}(T_i)}{\varrho_i} \right) \right) v_i \\ \frac{7R_1 T_i}{12h} \\ -\frac{7}{12h} \left(\frac{\bar{\pi}_{vs}(T_i)}{\varrho_i} \right) v_i \end{pmatrix}, \\
A_2^i &= \begin{pmatrix} \frac{7}{12h} \varrho_i v_i - \frac{1}{h^2} \left(\frac{4}{3}\eta + \zeta \right) \\ \frac{7R_1 \varrho_i T_i}{12h} - \frac{7}{12h} \left(\frac{4}{3}\eta + \zeta \right) \left(\frac{v_i - v_{i-1}}{h} \right) \end{pmatrix}, \\
A_3^i &= \begin{pmatrix} -\left(\frac{7}{12h} \frac{d\bar{\pi}_{vs}(T_i)}{dT} \right) v_i \\ \frac{7R_1 \varrho_i}{12h} \\ \left(\frac{7\varrho_i C_v v_i}{12h} - \frac{\kappa}{h^2} + \frac{7L_{tr}(T_i)}{12h} \left(\frac{d\bar{\pi}_{vs}(T_i)}{dT} v_i \right) \right) \end{pmatrix}, \\
U_{i+1} &= \begin{pmatrix} \varrho_{i+1} \\ v_{i+1} \\ T_{i+1} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$F_i = \left(\begin{array}{l} -\beta (\varrho_i - \varrho_0) + v_i \frac{\frac{1}{4}(\varrho_i + \varrho_{i-1} + \frac{1}{3}\varrho_{i-2})}{h} + \varrho_i \frac{\frac{1}{4}(v_i + v_{i-1} + \frac{1}{3}v_{i-2})}{h} + \\ + \left(\frac{\bar{\pi}_{vs}(T_i)}{\varrho_i} \frac{\frac{1}{4}(\varrho_i + \varrho_{i-1} + \frac{1}{3}\varrho_{i-2})}{h} - \left(\frac{d\bar{\pi}_{vs}(T_i)}{dT} \right) \frac{\frac{1}{4}(T_i + T_{i-1} + \frac{1}{3}T_{i-2})}{h} \right) v_i \\ \\ \varrho_i v_i \frac{\frac{1}{4}(v_i + v_{i-1} + \frac{1}{3}v_{i-2})}{h} + \left(\frac{4}{3}\eta + \zeta \right) \frac{-2v_i + v_{i-1}}{h^2} + R_1 \varrho_i \frac{\frac{1}{4}(T_i + T_{i-1} + \frac{1}{3}T_{i-2})}{h} + \\ + R_1 T_i \frac{\frac{1}{4}(\varrho_i + \varrho_{i-1} + \frac{1}{3}\varrho_{i-2})}{h} - \varrho_i g \frac{d\gamma_3(s)}{ds} - g \Sigma \max \left(0, \frac{d\gamma_3(s)}{ds} \right) \\ \\ R_1 \varrho(i) T_i \frac{\frac{1}{4}(\varrho_i + \varrho_{i-1} + \frac{1}{3}\varrho_{i-2})}{h} + \varrho_i C_v v_i \frac{\frac{1}{4}(T_i + T_{i-1} + \frac{1}{3}T_{i-2})}{h} + \\ + \left(\frac{4}{3}\eta + \zeta \right) \frac{\frac{1}{4}(v_i + v_{i-1} + \frac{1}{3}v_{i-2})}{h} \left(\frac{v_i + v_{i-1}}{h} \right) + \kappa \frac{-2T_i + T_{i-1}}{h^2} - \alpha (T_i - T_0) + \\ + L_{tr}(T_i) \left(\frac{\bar{\pi}_{vs}(T_i)}{\varrho_i} \frac{\frac{1}{4}(\varrho_i + \varrho_{i-1} + \frac{1}{3}\varrho_{i-2})}{h} - \frac{d\bar{\pi}_{vs}(T_i)}{dT} \frac{\frac{1}{4}(T_i + T_{i-1} + \frac{1}{3}T_{i-2})}{h} \right) v_i \end{array} \right).$$

3.2 Résultat du calcul numérique

Pour effectuer les calculs nous devons clarifier certains paramètres qui interviennent dans les équations. En effet les paramètres physiques g , R_1 et C_v sont :

$$g = 9.8 \text{ gm}^2/\text{s}^2, \quad R_1 = \frac{R}{\mu_u}, \quad C_v = \frac{5}{2} \frac{R}{\mu_a},$$

$$R = 8.31 \cdot 10^7 \text{ erg/mole et } \mu_a = 28.96 \text{ g/mole.}$$

D'autre part, on choisit :

$$\eta = 120, \quad \zeta = 40, \quad \kappa = 100, \quad \Sigma = 3, \quad \alpha = 0.1 \text{ et } \beta = 0.1.$$

On a considéré le tuyau de longueur $L = 68 \text{ Km}$ tel que : $l_v = 10 \text{ Km}$, $l_h = 20 \text{ Km}$ et $l_c = 2 \text{ Km}$ et avec une subdivision du pas $h = 0.1 \text{ Km}$

Pour les conditions initiales on pose :

$$\varrho_0 = 1204 \text{ g/m}^3, \quad (3.18)$$

$$v_1 = v_0 = 16 \text{ m/s}, \quad (3.19)$$

$$T_1 = T_0 = 293.15 \text{ }^\circ\text{K}. \quad (3.20)$$

Les figures présentées ci-dessous représentent la distribution du densité, celle de la vitesse ainsi celle de la température obtenues en effectuant le calcul avec matlab.

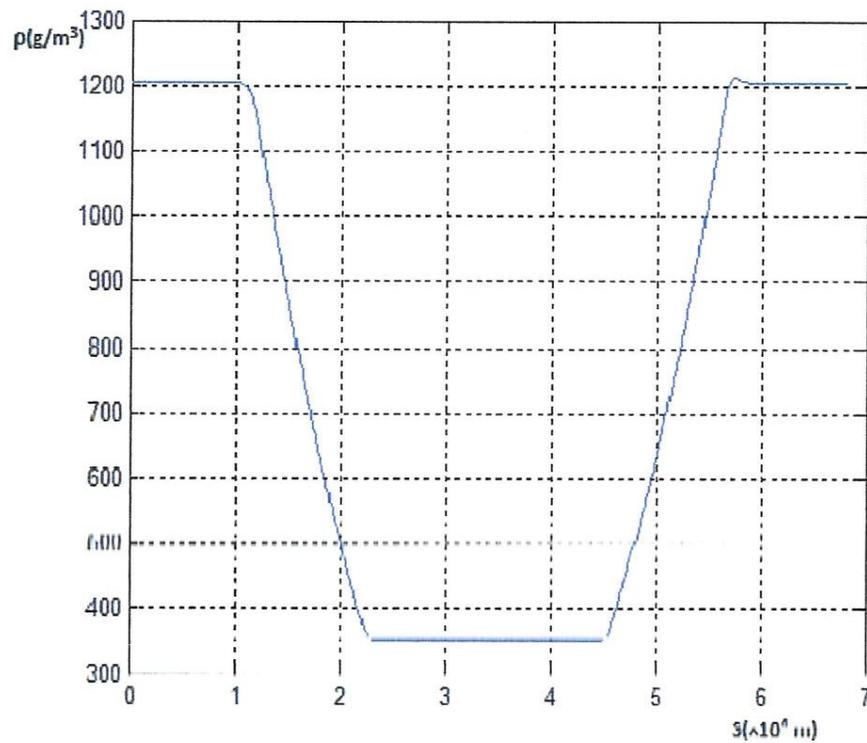


FIGURE 3.1 – Graphe de la densité

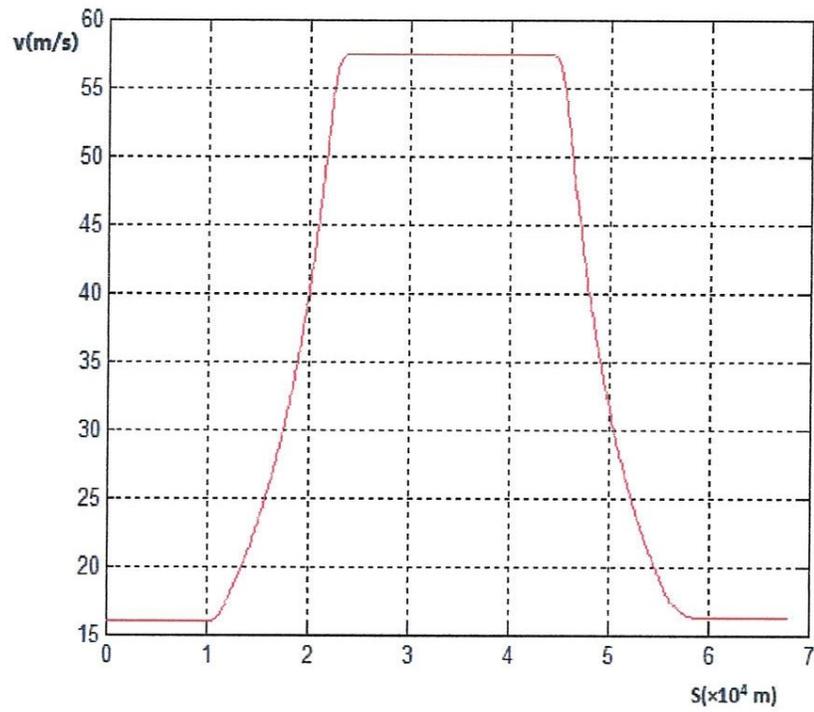


FIGURE 3.2 – Graphe de la vitesse

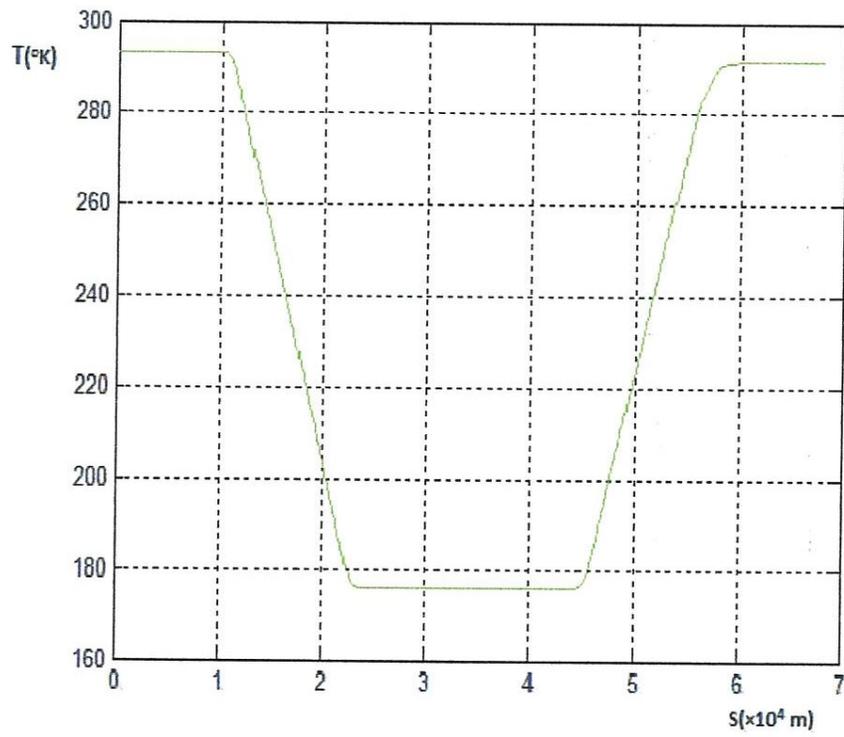


FIGURE 3.3 – Graphe de la température

Perspectives

La perspective naturelle de cette étude serait celle de montrer l'existence et l'unicité de la solution stationnaire. Toutefois on sait que cette étude rencontre des difficultés pour le moment insurmontable, cette difficulté revient au type de ces équations.

Bibliographie

- [1] Antontsev, M., Khazhikhov, A.V., Monakhov, V.N. : Boundary value problems in mechanics of nonhomogeneous fluids. Elsevier, 1990
- [2] Ayachi, A., Aissaoui, M. Z., Guebbai, H., Fujita Yashima, H. :Système d'équations décrivant certains mouvements stationnaires en une dimension d'un gaz visqueux et calorifère. *A paraître sur Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova.*
- [3] Belhireche, H., Aissaoui, M. Z., Fujita Yashima, H. : Equations monodimensionnelles du mouvement de l'air avec la transition de phase de l'eau. *Sci. Techn. Univ.Constantine - A*, vol. **31** (2011), pp. 9-17
- [4] Fujita Yashima, H. : Modelación matemática del movimiento de la atmósfera con la transición de fase del agua. *Rev. Invest. Operac.*, vol. **34** (2013), pp. 93-104.
- [5] Fujita Yashima.H : Modélisation de la physique des fluides, cours de l'université de Guelma, 2010-2011
- [6] Fujita Yashima, H., Campana, V., Aissaoui, M. Z. : Système d'équations d'un modèle du mouvement de l'air impliquant la transition de phase de l'eau dans l'atmosphère. *Ann. Math. Afr.*, vol. **2** (2011), pp. 66-92.

- [7] Ghomrani, S., Marín Antuña, J., Fujita Yashima, H. : Un modelo de la subida del aire ocasionada por la condensación del vapor y su cálculo numérico. A paraître sur *Revista Física Cubanai*.
- [8] KANTOROVITCH, L., AKILOV, G. : *Analyse fonctionnelle*, Tome 2 (traduit de russe.). Mir, Moscou.
- [9] Landau, L., Lifchitz, E. : *Mécanique des fluides* (Physique théorique, Tome 6) Mir, Moscou, 1989.
- [10] Matveev. L. T : *Physique de l'atmosphère* (en russe). Gidrometeoizdat, Leningrad-S. Peterburg, 1965, 1984, 2000.
- [11] Merchela Wassim, Hisao Fujita Yashima : *Equations du mouvement de l'air dans un tuyau avec la condensation de la vapeur*, mémoire de master 2015.
- [12] Maikhilov, V. P. : *Equations aux dérivées partielles* (traduit du russe). Mir, 1980.
- [13] Prodi, F., Battaglia, A. : *Meteorologia - Parte II, Microfisica*. Grafica Pucci, Roma, 2004.
- [14] Samarskii, A. A. : *Théorie des schémas de différences finies* (en russe), Nauka (Moscou) ,(2011).
- [15] Selvaduray.S, Fujita Yashima.H : *Equazioni del moto dell'aria con la transizione di fase dell'acqua nei tre stati : gassoso, liquido e solido. Accad. Sci. Torino, Memorie Cl. Sci. Fis., Serie V, vol. 35 (2011), pp.37-69.*

- [16] Sheng, P.-X., Mao, J.-T., Li, J.-G., Zhang, A.-C., Sang, J.-G., Pan, N.-X. : *Physique de l'atmosphère* (en chinois). Publ. Univ. Pékin, Pékin, 2003.
- [17] Samarskii, A. A., Vabishchevich : *Méthodes numériques pour la résolution des problèmes de convection-diffusion*, 4 éd. (en russe), Librokom (Moscou), 2009.