

510, 206

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques



Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master Académique en Mathématiques
Option : **Mathématiques Appliquées**

Par :

Melle. BENKAMOUCHE SARA

Intitulé

**Systeme différentiel de Liénard et la
méthode de Melnicov**

Dirigé par : **Dr. OUNESSE NAWEL**

Devant le jury

**PRESIDENT
RAPPORTEUR
EXAMINATEUR**

**Dr. AISSAOUI Fatima
Dr. OUNESSE Nawel
Dr. MENACEUR Amor**

**Univ-Guelma
Univ-Guelma
Univ-Guelma**

Session Juin 2016

Table des matières

0.1	Résumé	4
0.2	Introduction	5
1	Notions préliminaires	10
1.1	Introduction	10
1.2	Plan de phase d'un système différentiel linéaire	12
1.3	<i>Le théorème de Hartman – Grobman</i>	15
1.3.1	Les cycles limites	16
1.3.2	Bifurcation des trajectoires périodiques	17
2	Théorie de Melnikov du premier ordre	21
3	Application de Théorie de Melnikov du premier ordre	26
3.1	Introduction	26
3.2	Perturbation d'un centre linéaire	26
3.3	Quelques exemples	28

Remerciements

En premier lieu et avant je tiens à exprimer mes remerciements au bon dieu qui nous a entouré de sa bienveillance et nous a renforcé avec le courage et la force pour avoir enfin mené à lieu ce travail

Ensuite, je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon encadreur

Dr : OUNESSE NAWEL

qui m'a suivi tout au long de mon travail.

Et finalement à tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin à accomplir ce travail

je leur dis merci.

Dédicace

A l'aide de dieu j'espère avoir accomplir ce modeste travail que je dédie à :

Ceux qui sont les plus chère au monde

Ma mère et mon père

*Ma chère sœur **NADA***

*Mes deux frères **ABD-ENOUR** & le petit **ANIS***

Toute ma famille et mes amis.

0.1 Résumé

Le travail de ce mémoire consiste en l'étude des cycles limites de quelques classes des équations de Liénard perturbées qui peuvent être considérées comme des perturbations particulières de l'oscillateur harmonique en utilisant la théorie de Melnikov. Cette étude est illustrée par des applications.

Le grand partie concerne l'étude du nombre maximal de cycles limites des systèmes Hamiltoniens généralisés de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} + \varepsilon f(x, \mu, \varepsilon), \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} + \varepsilon g(x, \mu, \varepsilon) \end{cases} .$$

où $H(x, y)$ est la fonction Hamiltonienne, f, g sont des fonctions dépendant de $x, y, \mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$, ε est un petit paramètre.

Mots clé : Cycle limite, Méthode de Melnikov , équation de Liénard, système de Liénard généralisés, bifurcation, perturbation.

Classification AMS : 34C25 – 58F21

0.2 Introduction

Un système dynamique, c'est quoi au juste ? Disons que c'est essentiellement la donnée de deux choses : un espace des phases représentant l'ensemble des états possibles du système considéré et une loi d'évolution décrivant le changement infinitésimal (temps continu) de l'état du système, ou une loi d'évolution donnant l'état du système au temps $t + 1$ en fonction de l'état au temps t (temps discret). Le but principal de la théorie est alors de comprendre l'évolution à long terme du système, en particulier ses propriétés statistiques et asymptotiques. D'une certaine façon, on cherche à passer du court terme au long terme.

La théorie des systèmes dynamiques est relativement récente puisque le père fondateur en est certainement Henri Poincaré. Ce dernier était particulièrement intéressé par la mécanique céleste et le problème dit des « *n corps* ». Les corps en question, ce sont par exemple les planètes du système solaire, les satellites de ces planètes... et le Soleil bien sûr.

Beaucoup de systèmes, notamment physiques, sont décrits par des équations différentielles. Parfois, leurs solutions évoluent vers des cycles limites dont le nombre est l'enjeu du 16^{ième} problème de Hilbert. En 114 ans, on a maintes fois cru sa solution à portée de main... avant qu'elle ne s'échappe. L'histoire de ce problème est néanmoins jalonnée de progrès en mathématiques et d'enseignements sur cette discipline.

Dans les années 1920, le statisticien Alfred Lotka et le mathématicien Vito Volterra élaborent un modèle qui décrit la dynamique de systèmes écologiques où cohabitent un prédateur et sa proie. De façon emblématique, il est souvent appliqué aux lynx et aux lièvres des neiges dont les recensements précis ont été établis par la Compagnie de la baie d'Hudson au *XIXe* siècle. Ce modèle est constitué d'une équation différentielle qui traduit l'évolution des populations de chaque animal. Ainsi, quand les lynx sont nombreux, la population de lièvres décroît, ce qui entraîne la diminution du nombre de lynx (ils ont moins à manger), puis l'augmentation de celui de lièvres, libérés de la pression des prédateurs... Ce type d'équations n'est pas réservé à la biologie et il est

également pertinent notamment en physique : au début du *XXe* siècle, Balthazar Van der Pol décrit de cette façon les oscillations d'un circuit électrique doté d'une lampe dont la résistance dépend de l'intensité du courant qui y passe.

Dans les deux exemples, à mesure que le temps croît, le comportement du système a tendance à devenir périodique. Graphiquement, les courbes qui représentent les solutions s'approchent d'un cycle : on parle de cycle limite. Rigoureusement, le modèle de Lotka-Volterra n'admet un cycle limite que dans une version modifiée par l'écologiste canadien Crawford Holling, mais nous n'entrerons pas dans les détails. D'autres systèmes, plus complexes, peuvent avoir plusieurs cycles limites. Le comportement asymptotique sera encore périodique, mais la convergence aura lieu vers tel ou tel cycle limite selon la position initiale. Il est important de pouvoir déterminer le nombre de ces cycles limites.

Ce problème, ouvert depuis plus d'un siècle, a été au centre de nombreux développements dans les équations différentielles. La principale difficulté du problème de Hilbert est que, même si un champ de vecteurs polynômial est un objet algébrique, ses trajectoires ne sont pas algébriques. Un cycle limite est algébrique s'il est obtenu par une équation algébrique $f(x, y) = 0$. Le cycle limite de l'équation de Van der Pol n'est pas algébrique.

La deuxième partie du 16^{ième} problème de Hilbert, est complètement ouverte. Elle consiste en la recherche du nombre maximum et les dispositions relatives des cycles limites du champ de vecteurs polynômial planaire :

$$\dot{x} = P_n(x, y), \quad \dot{y} = Q_n(x, y), \quad (1)$$

où P_n et Q_n sont des polynômes de degré n . Même si le problème a été posé en 1900, c'est en 1987 que Ecalle et Ilyashenko ont prouvé que le champ de vecteurs polynômial possède un nombre fini de cycles limites. Les deux épreuves ont un véritable «tour de force» et chacune nécessite un volume de 300 pages. Bien que le résultat de Ecalle et Ilyashenko montre que chaque champ de vecteurs polynômial individuel a un nombre fini de cycles limites, il est impossible d'en tirer une estimation uniforme sur le nombre de cycles limites.

Ainsi, on sait qu'il y a un nombre fini de cycles limites, mais on n'a pas de majoration. Les chercheurs considèrent une classe spéciale pour laquelle il est facile de prouver la finitude, mais pour laquelle aucune majoration n'est actuellement connue. C'est la classe des équations de Liénard [Hirsch-Smale, 1974], elle s'écrit sous la forme

$$\dot{x} = y - F(x), \quad \dot{y} = -x, \quad (2)$$

où $F(x) = \sum_{i=1}^{2n+1} a_i x^i$, qui vérifie $F(0) = 0$. Le problème de Hilbert affaibli consiste à trouver une borne supérieure pour le nombre de cycles limites (2) qui ne dépend que de n .

Les résultats suivants sont connus :

Théorème A . Système (2) avec $F(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ et $a_1 a_3 < 0$ a exactement un cycle limite. Il est stable pour $a_1 < 0$ et instable pour $a_1 > 0$.

Remarquant que si $F(x) = x^3 - x$ alors (2) est l'équation de van der Pol avec un cycle limite.

Théorème B . Système (2) avec $F(x) = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5$ a au plus deux cycles limites.

Théorème C . Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, le système (2) avec $F(x) = \varepsilon \sum_{i=1}^{2n+1} a_i x^i$, a au plus n cycles limites. Il a exactement n cycles limites si et seulement si l'équation de degré n

$$\frac{a_1}{2} + \frac{3a_3}{8}\rho + \frac{5a_5}{128}\rho^3 + \dots + \binom{2n+2}{n+1} \frac{a_{2n+1}}{2^{2n+1}}\rho^n = 0,$$

a n racines positives $\rho_j = r_j^2$, $j = \overline{1, n}$. Dans ce cas, les cycles limites tendent vers les cercles de rayons r_j , $j = \overline{1, n}$, centrés à l'origine quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Nous tenons à mentionner que S. Lynch a calculé la cyclicité de l'origine du système de Liénard généralisé de la forme

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -g(x) - f(x)y, \quad (3)$$

pour différents degrés n et m respectivement des polynômes f et g à l'aide de *Maple* par une approche algébrique.

Il y a beaucoup de résultats concernant l'existence de cycles limites de faible amplitude pour (3). Notons par $\widehat{H}(n, m)$ le nombre maximum de cycles limites de faible amplitudes de (3), Blows et Lloyd (1984), Lloyd et Lynch (1988) et Lynch (1995) ont prouvé les résultats suivants :

- 1) Si g est impair, alors $\widehat{H}(m, n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
- 2) Si f est pair, alors $\widehat{H}(m, n) = n$, quelque soit g .
- 3) Si f est impair, alors $\widehat{H}(m, 2n + 1) = \lfloor \frac{m-2}{2} \rfloor + n$.
- 4) Si $g(x) = x + g_e(x)$, où g_e est impair, alors $\widehat{H}(2m, 2) = m$.

En 1998, Gasull et Torregrosa (1998) ont obtenu des bornes supérieures pour $\widehat{H}(7, 6)$, $\widehat{H}(6, 7)$, $\widehat{H}(7, 7)$ et $\widehat{H}(4, 20)$.

Christopher et Lynch (1999), Lynch (1998, 1999) et Lynch et Christopher (1999) ont développé une nouvelle méthode algébrique permettant de déterminer les constantes de Liapunov du système (3). Ils ont obtenu les résultats suivants :

- 1) $\widehat{H}(m, 2) = \lfloor \frac{2m+1}{3} \rfloor$,
- 2) $\widehat{H}(2, n) = \lfloor \frac{2n+1}{3} \rfloor$,
- 3) $\widehat{H}(m, 3) = 2 \lfloor \frac{3m+2}{8} \rfloor$, pour tous $1 < m \leq 50$,
- 4) $\widehat{H}(3, n) = 2 \lfloor \frac{3n+2}{8} \rfloor$, pour tous $1 < n \leq 50$,
- 5) $\widehat{H}(4, k) = \widehat{H}(k, 4)$, $k = 6, 7, 8, 9$ et $\widehat{H}(5, 6) = \widehat{H}(6, 5)$.

En 2006, Yu et Han (2006) ont donné des valeurs précises de $\widehat{H}(m, n) = \widehat{H}(n, m)$ pour $\{n = 4, m = 10, 11, 12, 13\}$, $\{n = 5, m = 6, 7, 8, 9\}$ et $\{n = 6, m = 5, 6\}$, voir aussi Llibre et al. (2010) pour un tableau avec toutes les valeurs spécifiques.

On note, par $H(n, m)$, le nombre maximum de cycles limites que peut avoir ce système. Maintenant nous allons décrire brièvement les principaux résultats concernant les cycles limites de (3).

- 1) En 1990, 1996, Dumortier, Li et Rousseau ont prouvé que $H(3, 1) = 1$
- 2) En 1997, Dumortier et Chengzhi ont prouvé que $H(2, 2) = 1$.

3) En 1998, Coppel a prouvé que $H(2, 1) = 1$.

4) En 2010, Chengzhi Li et Llibre ont prouvé que $H(1, 3) = 1$.

En utilisant des techniques différentes (intégrales abéliennes, méthodes de la moyennisation, la méthode de Melnikov,...) on a les bornes inférieurs suivantes des nombres de Hilbert. On a $H(2) \geq 4$, $H(3) \geq 13$, $H(4) \geq 22$, $H(5) \geq 28$, $H(6) \geq 35$, $H(7) \geq 50$, $H(n) \geq kn^2 \ln n$, et

$$H(n) \geq 4(n+1)^2 \left(1.442695 \ln(n+1) - \frac{1}{6} \right) + n - \frac{2}{3} .$$

Chapitre 1

Notions préliminaires

1.1 Introduction

Ce chapitre contient quelques notions générales et préliminaires pour l'étude qualitative des systèmes dynamiques et des équations différentielle ordinaire

Définition 1.1 *Un système dynamique sur \mathbb{R}^n est une application $\mu : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que*

$$\begin{aligned}\mu(t, x) &: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ est continue} \\ \mu(0, x) &= x \\ \mu(s+t, x) &= \mu(t, U(s, x)) \text{ pour } t, s \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

Exemple 1.1 *Soit le système différentiel*

$$\dot{r} = Br, \quad r(0) = r_0 \tag{1.1}$$

où B est une matrice constante, $x \in \mathbb{R}^n$. la solution de (1.1) est

$$x(t) = x_0 e^{Bt}$$

le système (1.1) engendre un système dynamique

Définition 1.2 Soit le système non linéaire

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.2}$$

avec la condition initiale $x(0) = x_0$, $x_0 \in E$, E est un sous ensemble ouvert de \mathbb{R}^n et $f \in C^1(E)$. Soit $\Phi(t, x_0)$ la solution de (1.2). L'ensemble des applications Φ_t défini par

$$\phi_t(x_0) = \phi(t, x_0)$$

est appelé le **flot de l'équation différentielle** (1.2).

Définition 1.3 On appelle **orbite périodique** toute trajectoire $\phi_t(x)$ de (1.2) telle qu'il existe un nombre $T > 0$, vérifiant

$$\Phi(t + T, x) = \Phi(t, x)$$

Le plus petit réel $T > 0$ qui vérifie cette égalité est appelé **période**.

Définition 1.4 Le point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est appelé **un point d'équilibre**, **point critique**, **point singulier** ou **point fixe** du système (1.2) s'il vérifie

$$f(x_0) = 0$$

Un point qui n'est pas singulier est dit **régulier**.

Définition 1.5 Le point d'équilibre x_0 est dit **hyperbolique** si aucune des valeurs propres de la matrice jacobienne $Df(x_0)$ n'a pas de partie réelle nulle.

Définition 1.6 Soit le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \tag{1.3}$$

où P et Q sont des polynômes à coefficients réels de degré n . **Le portrait de phase** est l'ensemble des trajectoires dans l'espace des phases. En particulier, pour les systèmes autonomes d'équations différentielles ordinaires de deux variables. Les solutions $(x(t), y(t))$ du système (1.3) représentent dans le plan (x, y) des courbes appelées orbites. Les points d'équilibres de ce système sont des solutions constantes et la figure complète des orbites de ce système ainsi que ces points critiques représentent le portrait de phase et le plan (xoy) est le plan de phase.

1.2 Plan de phase d'un système différentiel linéaire

Dans cette section, nous étudions différents types des points d'équilibres dans un système linéaire dont la matrice est inversible. Pour ce faire, nous considérons un système linéaire dans \mathbb{R}^2 .

Soit :

$$\dot{X} = AX, \quad (1.4)$$

où $X \in \mathbb{R}^2$ et A est une matrice 2×2 . Nous nous intéressons alors au portrait de phase de $\dot{X} = CX$, où $B = P^{-1}AP$ et C est sous forme de Jordan réelle.

Regardons les quatre cas suivants qui résument tous les cas où les valeurs propres sont différentes de 0.

$$(1) C = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \text{ où } \lambda < 0 < \mu.$$

Nous sommes alors en présence d'un point de selle et nous pouvons représenter le portrait de phase de cette singularité par la figure 1.1.

$$(2) C = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \text{ où } \lambda\mu < 0.$$

Si $\lambda\mu < 0$, nous sommes alors en présence d'un noeud stable. Il y a deux cas différents selon les diverses valeurs que μ et λ peuvent prendre. On retrouve un autre cas de noeud faible lorsque nous avons une matrice de la forme : $C = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $\lambda < 0$. Voyons les illustrations des portraits de phase respectifs à la figure 1.2, à l'inverse, nous retrouvons un noeud, cette fois instable, lorsque $\lambda \geq \mu > 0$

$$(3) C = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ où } a, b \neq 0.$$

Si $a < 0$, nous avons alors un foyer stable avec des trajectoires tournant dans le sens donné par b . Regardons la figure 1.3 pour avoir une idée des trajectoires. à l'inverse, notons que si $a > 0$, nous avons alors un foyer instable.

$$(4) C = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} \text{ où } b \neq 0.$$

Le système $\dot{X} = CX$ possède alors un centre à l'origine et cela peut être représenté par la figure 1.4. Encore une fois, le sens des trajectoires est donné par b . En effet, nous pouvons écrire ce système en coordonnées polaires, soit

$$\begin{cases} \dot{r} = ar \\ \dot{\theta} = b. \end{cases} \quad (1.4)$$

Par la proposition 1.1.1 provenant de [16], nous pouvons conclure sur la nature d'un point singulier à l'origine pour un système linéaire ayant deux valeurs propres non-nulles.

Proposition 1.1 *Le système linéaire (1.3) est dit avoir un point de selle, un noeud, un foyer ou un centre à l'origine si la matrice A est similaire à une des matrices C dans les cas 1 à 4 énumérés ci-haut.*

Cette proposition peut s'expliquer si la matrice A possède une paire de valeurs propres imaginaires pures $\pm i\omega$, alors le portrait de phase du système linéaire est linéairement équivalent à un des deux portraits de phases illustrés à la figure 1.4.

Pour déterminer le plan de phase il faut savoir la nature des points critiques.

Définition 1.7 (Linéarisation) Le système

$$\dot{x} = Ax \text{ où } A = dDf(x_0) \quad (1.5)$$

x_0 le point d'équilibre de (1.2), le système (1.5) est appelé le système linéarisé du système (1.2).

Ax est une bonne approximation de (1.4) au voisinage de x_0

Un point critique x_0 est dit hyperbolique si aucune des valeurs propres de A n'a de partie réelle nulle.

Exemple 1.2 Soit le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1^2 + x_2^3 - 2 \\ \dot{x}_2 = x_2 \end{cases} .$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1^2 + x_2^3 - 2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Les points d'équilibres sont

$$(0, -1) \text{ et } (0, 1).$$

On a

$$Df(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 & 3x_2^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le système linéarisé au voisinage de chaque point d'équilibre est donné respectivement

par

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = -4x_1 \\ \dot{x}_2 = x_2 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = 4x_1 \\ \dot{x}_2 = x_2 \end{array} \right\}.$$

1.3 Le théorème de Hartman – Grobman

Le théorème de Hartman-Grobman nous permettra d'en dire un peu plus sur les points d'équilibres du système (1.2). Ce théorème permet de comprendre l'organisation des trajectoires au voisinage d'un point d'équilibre. En fait, nous regarderons la partie linéaire du système (1.2). De façon intuitive, ce théorème montre, qu'au voisinage d'un point d'équilibre hyperbolique x_0 , le système non-linéaire (1.2) a la même structure qualitative des trajectoires que le système linéaire (1.5) où A est la Jacobienne au voisinage de point singulier x_0 ; cela signifie que le système non linéaire (1.2) est topologiquement orbitalement équivalent au système linéaire (1.5) au voisinage de x_0 .

La notion d'équivalence topologique orbitale sera donnée plus bas.

Définition 1.8 *Deux équations différentielles ordinaires autonomes $\dot{X} = v_1(X)$ et $\dot{Y} = v_2(Y)$ où $X \in U \subset \mathbb{R}^n$ et $Y \in V \subset \mathbb{R}^n$ sont dites topologiquement orbitalement équivalentes c'est-à-dire qu'ils ont la même organisation topologique des trajectoires s'il existe un homéomorphisme H envoyant U sur V tel que les trajectoires de $\dot{X} = v_1(X)$ dans U sont envoyées sur les trajectoires de $\dot{Y} = v_2(Y)$ dans V en préservant l'orientation des trajectoires mais pas nécessairement la paramétrisation. Si l'homéomorphisme préserve la paramétrisation on parle alors d'équivalence topologique.*

Théorème 1.1 *(de Hartman-Grobman) Soit $\dot{X} = v_1(X)$, une équation différentielle ordinaire (EDO) de classe C^1 sur un ouvert U de \mathbb{R}^n et X_0 un point singulier hyperbolique. Soit A la Jacobienne au voisinage de X_0 . Alors, $\dot{X} = v_1(X)$ est topologiquement équivalent au champ linéaire $\dot{Y} = AY$ sur un voisinage V de X_0 .*

Définition 1.9 *Une fonction différentiable $(x, y) \rightarrow h(x, y)$ est une intégrale première*

du système différentiel si :

$$P(x, y) \frac{\partial h}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial h}{\partial y} = 0. \quad (1.6)$$

Définition 1.10 Les systèmes Hamiltoniens constituent une classe particulière de systèmes conservatifs. Ce sont les systèmes pour lesquels il existe une fonction $H(x, y)$ pour laquelle le système s'écrit :

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (1.7)$$

Il est facile de vérifier que le système possède la fonction $H(x, y)$ comme intégrale première.

Définition 1.11 On dit que le système différentiel (1.2) est intégrable sur un ouvert U du plan, s'il admet une intégrale première sur U .

1.3.1 Les cycles limites

Définition 1.12 Un cycle limite γ d'un système (1.2) est une orbite périodique qui est isolée dans l'ensemble des orbites périodiques, c'est à dire au voisinage de cette orbite on ne peut pas avoir une autre orbite

Remarque 1.1 Les cycles limites sont des phénomènes non linéaires. Ils ne peuvent apparaître dans des systèmes linéaires.

Remarque 1.2 La stabilité du cycle limite est liée au comportement des trajectoires de son voisinage. Si toutes les trajectoires voisines s'approchent du cycle limite, le cycle est dit stable, sinon il est dit instable ou, semi-stable.

La notion de cycle limite stable est très importante car elle modélise des systèmes à oscillations auto-entretenues, c'est à dire qui oscillent sans être soumis à une force extérieure périodique, par exemple les battements du cœur.

Exemple 1.3 Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - y - \alpha x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x + \alpha y - \alpha y(x^2 + y^2). \end{cases}$$

tel que $\alpha \in \mathbb{R}$ est un paramètre. En coordonnées polaires $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ le système précédent devient

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \alpha r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} &= 1 \end{aligned}$$

d'où

$$\dot{r} = 0 \Rightarrow r = 0 \text{ où } r = 1$$

Pour $r = 1$, on a l'orbite périodique $(x(t), y(t)) = (\cos(\theta + \theta_0), \sin(\theta + \theta_0))$ avec $\theta(0) = \theta_0$.

Définition 1.13 L'amplitude du cycle limite est la valeur maximale de la variable x du cycle limite

Remarque 1.3 Pour un cycle limite, la somme des indices des points critiques à l'intérieur de ce cycle limite est égale à 1.

1.3.2 Bifurcation des trajectoires périodiques

Le terme de bifurcation a été introduit par Poincaré pour décrire les transformations des points d'équilibres d'une famille de système, obtenue en faisant varier un paramètre. Si la nature de point d'équilibre subit un changement soudain lorsque le paramètre varie, on dit que le système subit une bifurcation.

Définition 1.14 (*Bifurcation de Hopf*) Soit le système d'équations

$$\begin{cases} \dot{x} = J(x, y, \mu) \\ \dot{y} = g(x, y, \mu) \end{cases} \quad (1.8)$$

où μ est un paramètre réel qui varie. Les points fixes sont les solutions du système

$$\begin{cases} f(x, y, \mu) = 0 \\ g(x, y, \mu) = 0 \end{cases}$$

sont $(x, y) = (x(\mu), y(\mu))$

Le théorème de bifurcation de Hopf prédit l'apparition de cycle limite autour du point fixe quand la stabilité du point fixe change quand le paramètre change. Ce théorème donne les conditions pour lesquelles un cycle limite existe pour ce système.

Théorème 1.2 *Considérons le système (1.8), on suppose que f et g sont continues par rapport à (x, y, μ) et ont des dérivées partielles continues par rapport à ces variables. Supposons qu'on a le point fixe $(\bar{x}(\mu), \bar{y}(\mu))$ qui dépend de μ . Soit la matrice jacobienne*

$$J(\mu) = \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{array} \right) \Bigg|_{(\bar{x}(\mu), \bar{y}(\mu))}$$

Soient les valeurs propres de cette matrice

$$\lambda_{1,2}(\mu) = a(\mu) \pm ib(\mu)$$

Soit $\mu = \mu^*$, appelée valeur de bifurcation telle que

$$a(\mu^*) = 0, b(\mu^*) \neq 0$$

et quand μ varie à travers μ^* , les parties réelles de ces valeurs propres changent de signe c'est à dire

$$\frac{\partial a}{\partial \mu} \Big|_{\mu=\mu^*} \neq 0$$

Sous ces conditions, on a les deux possibilités.

(1) Il existe un ouvert de valeurs de μ

$$\mu^* < \mu < \mu_1$$

tel qu'une seule orbite fermée entoure le point fixe $(\bar{x}(\mu), \bar{y}(\mu))$. cette orbite fermée est un cycle limite. Quand μ varie, l'amplitude du cycle limite varie selon

$$R(\mu) \simeq |\mu - \mu^*|^{\frac{1}{2}}$$

Il n'existe pas d'autres orbites fermées près de $(\bar{x}(\mu), \bar{y}(\mu))$. Ce cas s'appelle "bifurcation supercritique". (2) Il existe un ouvert de valeurs de μ

$$\mu_2 < \mu < \mu^*$$

tel qu'une seule orbite fermée entoure le point fixe $(\bar{x}(\mu), \bar{y}(\mu))$. On a les mêmes conclusions que le cas (1). Ce cas s'appelle "bifurcation souscritique".

Exemple 1.4 Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(\mu - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = x + y(\mu - x^2 - y^2) \end{cases}$$

En coordonnées polaires $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, ce système s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(\mu - r^2) \\ \dot{\theta} &= 1 \end{aligned}$$

La matrice jacobienne au voisinage du point critique $(0, 0)$ est

$$J(\mu) = Df(0, 0, \mu) = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}$$

Ses valeurs propres sont $\lambda_{1,2} = \mu \pm i$. $\mu^* = 0$ est alors la valeurs de bifurcation. Pour $\mu \preceq 0$, $\dot{r} < 0$ $(x, y) = (0, 0)$ est un foyer stable sinon $\dot{r} > 0$ $(x, y) = (0, 0)$ est un foyer instable. Il y a un changement de stabilité du point critique $(0, 0)$. Or $(x, y) = (\sqrt{\mu} \cos \theta, \sqrt{\mu} \sin \theta)$ est un cycle limite.

Chapitre 2

Théorie de Melnikov du premier ordre

La méthode de Melnikov (1963) est dans la lignée des méthodes perturbatives. Elle permet d'étudier les perturbations des orbites homoclines des systèmes dynamiques de la forme

$$\dot{x} = F(x) + \varepsilon G(x, t, \mu) \quad (2.1)$$

où $0 < \varepsilon \ll 1$, $x \in \mathbb{R}^{2n}$ avec $\mu \in \mathbb{R}^{2m}$.

Notons que $F(x)$ est le champ de vecteur déduit du hamiltonien $H(x)$.

La méthode de Melnikov peut être aussi utiliser pour établir l'existence descycles limites des systèmes planaires perturbés (2.1) avec $x \in \mathbb{R}^2$. c'est à dire les systèmes de la formes :

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(x, t, \mu) \quad (2.2)$$

où $0 < \varepsilon \ll 1$, $x \in \mathbb{R}^2$ avec μ est un paramètre réel. $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ et $g \in C^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$; périodique en t de période T .

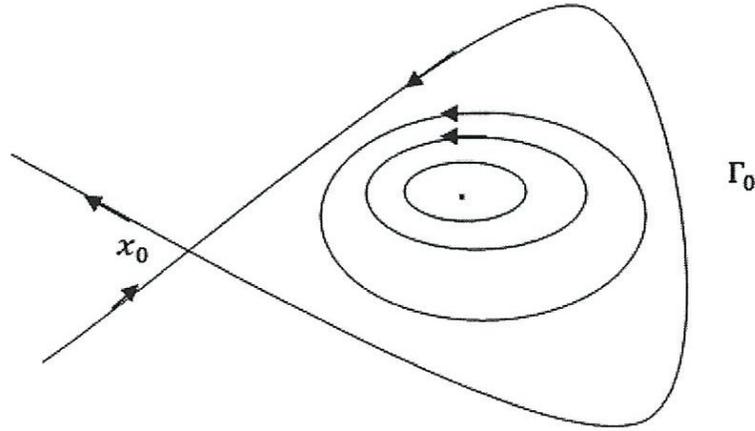
Supposons que :

(A.1) Pour $\varepsilon = 0$, le système (2.2) a une orbite homocline

$$\Gamma_h : x = \gamma_h(t), -\infty < t < +\infty$$

au point d'équilibre hyperbolique x_0 .

(A.2) Pour $\varepsilon = 0$, le système (2.2) possède une famille à un paramètre d'orbites périodiques γ_α de période T à l'intérieur de Γ_h avec $\frac{\partial}{\partial h}\gamma_h(0) \neq 0$, Voir gure ci-dessous.



On s'intéresse aux solutions périodiques qui se produisent après perturbations des orbites périodiques du système(2.2), c'est-à-dire lorsque $\varepsilon \neq 0$. Pour ce la, nous considérons la courbe normale Σ des orbites Γ_h , nous calculons l'application de retour de Poincaré $P(h, \varepsilon, \mu)$ alors la fonction de déplacement est donné par

$$d(h, \varepsilon, \mu) = P(h, \varepsilon, \mu) - h$$

Les zéros (racines) de la la fonction de déplacement correspond au solutions périodiques de (2.2).

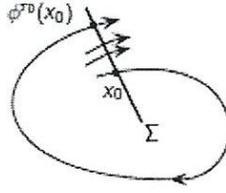


FIGURE: L'application de Poincaré : $P(x_0) = \phi^{T_0}(x_0)$

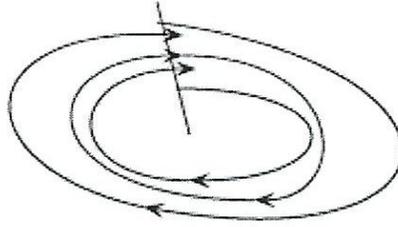


FIGURE: Orbite périodique attractive

Soit $\Gamma_{h,\varepsilon,\mu} : \gamma_{h,\varepsilon,\mu}(t) = (x_{h,\varepsilon,\mu}(t), y_{h,\varepsilon,\mu}(t))$ un trajectoire de système (2.2), alors

$$\begin{aligned}
 d(h, \varepsilon, \mu) &= \int_{\Gamma_{h,\varepsilon,\mu}} \dot{H} dt \\
 &= \int_{\Gamma_{h,\varepsilon,\mu}} \left[\frac{\partial H}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y} \dot{y} \right] dt \\
 &= \int_{\Gamma_{h,\varepsilon,\mu}} \left[\frac{\partial H}{\partial x} \left(\frac{\partial H}{\partial y} + \varepsilon f(x, \mu, \varepsilon) \right) + \frac{\partial H}{\partial y} \left(-\frac{\partial H}{\partial x} + \varepsilon g(x, \mu, \varepsilon) \right) \right] dt \\
 &= \varepsilon \int_{\Gamma_{h,\varepsilon,\mu}} \left[f(x, y, 0, \mu) \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) + g(x, y, 0, \mu) \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) \right] dt + O(\varepsilon^2) \\
 &= \varepsilon \int_0^{T_{h,\varepsilon,\mu}} (f(x_{h,\varepsilon,\mu}(t), y_{h,\varepsilon,\mu}(t), 0, \mu) \frac{\partial H}{\partial x}(x_{h,\varepsilon,\mu}(t), y_{h,\varepsilon,\mu}(t)) \\
 &\quad + g(x_{h,\varepsilon,\mu}(t), y_{h,\varepsilon,\mu}(t), 0, \mu) \frac{\partial H}{\partial y}(x_{h,\varepsilon,\mu}(t), y_{h,\varepsilon,\mu}(t))) dt + O(\varepsilon^2)
 \end{aligned}$$

Pour une orbite ferme du système Hamiltonien perturbé (2.2), nous avons

$$d(h, \varepsilon, \mu) = \varepsilon \oint_{\Gamma_h} g(x, y, 0, \mu) dx - f(x, y, 0, \mu) dy + O(\varepsilon^2)$$

Ce résultat mène à la définition suivante de la fonction de Melnikov du premier ordre

Définition 2.1 *Sous l'hypothèse (A.2), pour $h \in I$; la fonction de déplacement est définie par*

$$d(h, \varepsilon, \mu) = \varepsilon \oint_{\Gamma_h} M(h, \mu) + O(\varepsilon^2) \quad (2.3)$$

quand $\varepsilon \rightarrow 0$, où $M(h, \mu)$ est la fonction de Melnikov du premier ordre de système (2.2) donnée par

$$M(h, \mu) = \oint_{\Gamma_h} g(x, y, 0, \mu) dx - f(x, y, 0, \mu) dy \quad (2.4)$$

Remarque 2.1 *Nous savons que les cycles limites correspondent aux racines de la fonction de déplacement, de plus la dérivée de la fonction de Melnikov donne autre informations sur le cycle limite s'il existe comme l'hyperbolicité et la multiplicité.*

Définition 2.2 *Un cycle limite Γ_h est dite hyperbolique si $\frac{\partial P}{\partial h}(h, \varepsilon, \mu) \neq 1$, si non il est non-hyperbolique, l'hyperbolicité du cycle limite est importante car elle indique la stabilité ou l'instabilité du cycle limite. de plus si $\frac{\partial P}{\partial h}(h, \varepsilon, \mu) \in]0, 1[$, alors Γ_h est stable, et lorsque $\frac{\partial P}{\partial h}(h, \varepsilon, \mu) > 1$ Γ_h est instable*

Définition 2.3 *Un cycle limite Γ_h est dite multiple de multiplicité k si*

$$d(h, \varepsilon, \mu) = \frac{\partial d}{\partial h}(h, \varepsilon, \mu) = \dots = \frac{\partial^{(k-1)} d}{\partial h^{(k-1)}}(h, \varepsilon, \mu) = 0 \text{ et } \frac{\partial^{(k)} d}{\partial h^{(k)}}(h, \varepsilon, \mu) \neq 0.$$

Si $k = 1$, le cycle limite Γ_h est dite simple.

Dans ce qui suit, nous citons quelques Théorèmes qui sont importants dans la distinction des cycles limites du système (2.2).

Théorème 2.1 *Sous l'hypothèse (A.2), s'il existe $h_0 \in I, \mu_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que*

$$M(h_0, \mu_0) = 0 \text{ et } \frac{\partial M}{\partial h}(h_0, \mu_0) \neq 0$$

alors, pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit, le système (2.2) a un unique cycle limite hyperbolique Γ_ε tel que $\Gamma_\varepsilon \rightarrow \Gamma_{h_0}$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Théorème 2.2 *Sous l'hypothèse (A.2), s'il existe $h_0 \in I, \mu_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que*

$$M(h_0, \mu_0) = \frac{\partial M}{\partial h}(h_0, \mu_0) = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 M}{\partial h^2}(h_0, \mu_0) \neq 0, \frac{\partial M}{\partial \mu_j}(h_0, \mu_0) \neq 0, j = \overline{1, n}$$

alors, pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit, ils existent deux fonctions

$$h(\varepsilon) = h_0 + O(\varepsilon)$$

$$\mu(\varepsilon) = \mu_0 + O(\varepsilon)$$

tel que le système (2.2) a un unique cycle limite non-hyperbolique de multiplicité 2 tel que $\Gamma_h \rightarrow \Gamma_{h_0}$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Théorème 2.3 *Sous l'hypothèse (A.1), s'il existe $\mu_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que*

$$M(\mu_0) = 0 \text{ et } \frac{\partial M}{\partial \mu_1}(\mu_0) \neq 0$$

alors, pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit, le système (2.2) a une orbite homoclinique Γ_ε tel que $\Gamma_\varepsilon \rightarrow \Gamma_{h_0}$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Chapitre 3

Application de Théorie de Melnikov du premier ordre

3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous donnons quelques exemples pour illustrer l'utilité de la théorie Melnikov développée dans le chapitre 2. Les exemples consistent à la détermination de nombre maximal des cycles limites d'une perturbation d'un centre linéaire non hyperbolique par des polynomes de degré $(2n + 1)$.

3.2 Perturbation d'un centre linéaire

On s'intéresse tout d'abord à un système différentiel de type Lienard :

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x. \end{cases} \quad (3.1)$$

pour lequel

$$H(x, y) = \frac{1}{2} (x^2 + y^2)$$

est un Hamiltonien. Le système (3.1) admet une famille des orbites periodiques

$$x_h(t) = \sqrt{2h} \cos t, \quad y_h(t) = \sqrt{2h} \sin t$$

Son comportement sous une perturbation quadratique est complètement connu. Ce système correspond a l'équation de Liénard symétrique de plus bas degré, étudiée dans différents contextes. Il joue un rôle crucial pour l'étude de l'équation de Van der Pol et de ses généralisation

Cependant, considerons un système le Liénard perturbée pour $f(x, y, \varepsilon)$ de degré impair et contenant toutes les puissance de x .

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \varepsilon [\mu_1 x + \mu_3 x^3 + \dots + \mu_{2n+1} x^{2n+1}], \\ \dot{y} = -x. \end{cases} \quad (3.2)$$

où $\mu = (\mu_1, \mu_3, \dots, \mu_{2n+1}) \in \mathbb{R}^{2n+1}$, la fonction de Melnikov est donnée par

$$M(h, \mu) = 2h \int_0^{2\pi} \left[\mu_1 \cos t + \mu_3 \cos^3 t + \dots + \mu_{2n+1} \binom{2n+2}{n+1} \cos^{2n+1} t \right] d\tau$$

comme $h = \frac{\alpha^2}{2}$,

$$M(\alpha, \mu) = 2\pi\alpha^2 \left[\frac{\mu_1}{2} + \frac{3}{8}\mu_3\alpha^2 + \dots + \frac{\mu_{2n+1}}{2^{2n+1}} \binom{2n+2}{n+1} \alpha^{2n} \right] \quad (3.3)$$

On utilisant le Théorème 1, en aura la proposition suivante

Proposition 3.1 *Le système (3.1), pour ε suffisamment petit, possède au plus n cycles limites, ils possède exactement n cycles limites hyperboliques asymptotiques aux cercles*

de rayon $r_j, j = \overline{1, n}$ si et seulement si le polynome

$$P(r^2, n) = \frac{\mu_1}{2} + \frac{3}{8}\mu_3\alpha^2 + \dots + \frac{\mu_{2n+1}}{2^{2n+1}} \binom{2n+2}{n+1} \alpha^{2n}$$

possède n racines positives $r^2 = \alpha_j^2, j = \overline{1, n}$.

3.3 Quelques exemples

Exemple 3.1 Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \varepsilon [\mu_1 x - 2x^3 + 3x^5], \\ \dot{y} = -x. \end{cases} \quad (3.4)$$

La fonction de Melnikov du premier ordre est donnée par

$$M(\alpha, \mu) = 2\pi\alpha^2 \left[\frac{\mu_1}{2} - \left(\frac{4}{3}\right)\alpha^2 + \frac{15}{16}\alpha^4 \right]$$

On utilisant la Proposition 1, on aura les racines

$$r_{1,2} = \frac{2}{5} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{10}{3}\mu_1} \right)$$

Donc on a les résultats suivants

Proposition 3.2 1. Si $0 < \mu_1 < 0.3$ et $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit, le système (3.4) a exactement deux cycles limites hyperboliques d'amplitudes $r_{1,2} = \frac{2}{5} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{10}{3}\mu_1} \right)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

2. Pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit, il existe une fonction $\mu_1(\varepsilon) = 0.3 + o(\varepsilon)$ tel que le système (3.4) a un unique cycle limite de multiplicité deux d'amplitude $r = \frac{2}{5}$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

3. Si $\mu_1 > 0.3$ et $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit, le système (3.4) n'admet pas de cycle limite.

Exemple 3.2 *Considérons le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \left[0.8x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{8}{25}x^5\right], \\ \dot{y} = -x. \end{cases} \quad (3.5)$$

Pour $\varepsilon = 0$, (3.5) est un système hamiltonien avec $H(x, y) = \frac{x^2+y^2}{2}$, il a une seule famille des solutions périodiques

$$x_h(t) = \sqrt{2h} \cos t, \quad y_h(t) = \sqrt{2h} \sin t$$

La fonction de Melnikov du premier ordre est donnée par (selon 3.3)

$$M(\alpha, \mu) = 2\pi\alpha^2 \left[-\frac{0.8}{2} + \frac{3}{8} \left(\frac{4}{3}\right) \alpha^2 + \frac{5}{2^4} \left(-\frac{8}{25}\right) \alpha^4 \right]$$

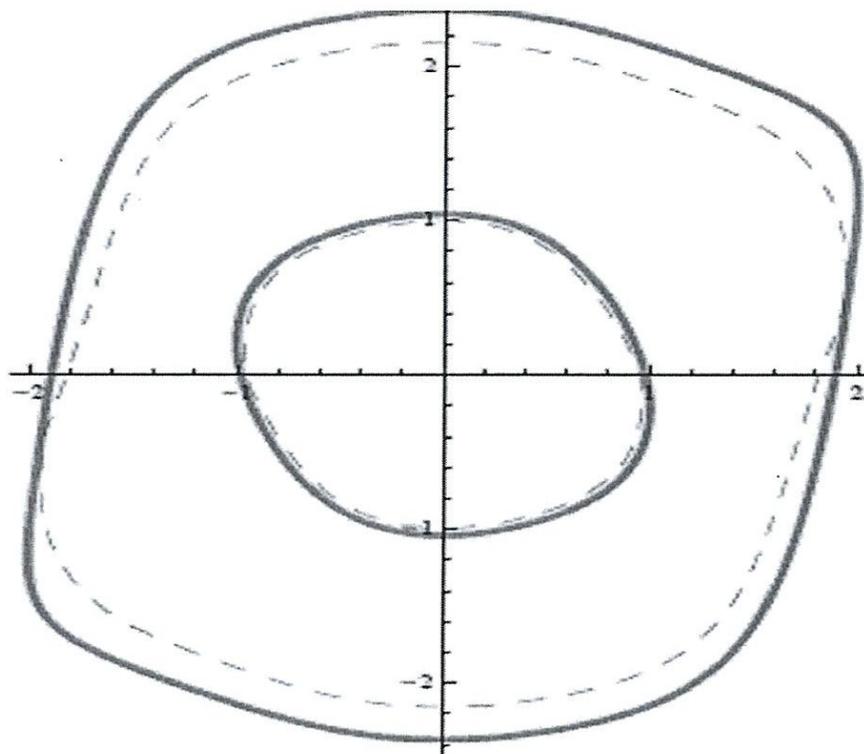
On utilisant la Proposition 1, on aura

$$P(r^2, 2) = -\frac{0.8}{2} + \frac{3}{8} \left(\frac{4}{3}\right) \alpha^2 + \frac{5}{2^4} \left(-\frac{8}{25}\right) \alpha^4$$

Les racines sont données par

$$r_1 = 1.003, r_2 = 1.999$$

Les deux cycles limites du système (3.5) avec l'amplitude respectivement 1.000, 1.999.



Exemple 3.3 Prenons par exemple le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \varepsilon \left[\frac{32}{875}x^7 - \frac{56}{125}x^5 + \frac{98}{75}x^3 - \frac{18}{25}x \right] \\ \dot{y} = -x. \end{cases} \quad (3.6)$$

Pour $\varepsilon = 0$, (3.6) est un système hamiltonien avec $H(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2}$, il a une seule famille des solutions périodiques

$$x_h(t) = \sqrt{2h} \cos t, \quad y_h(t) = \sqrt{2h} \sin t$$

La fonction de Melnikov du premier ordre est donnée par (selon 3.3)

$$M(\alpha, \mu) = 2\pi\alpha^2 \left[-\frac{0.8}{2} + \frac{3}{8} \left(\frac{4}{3} \right) \alpha^2 + \frac{5}{24} \left(-\frac{8}{25} \right) \alpha^4 \right]$$

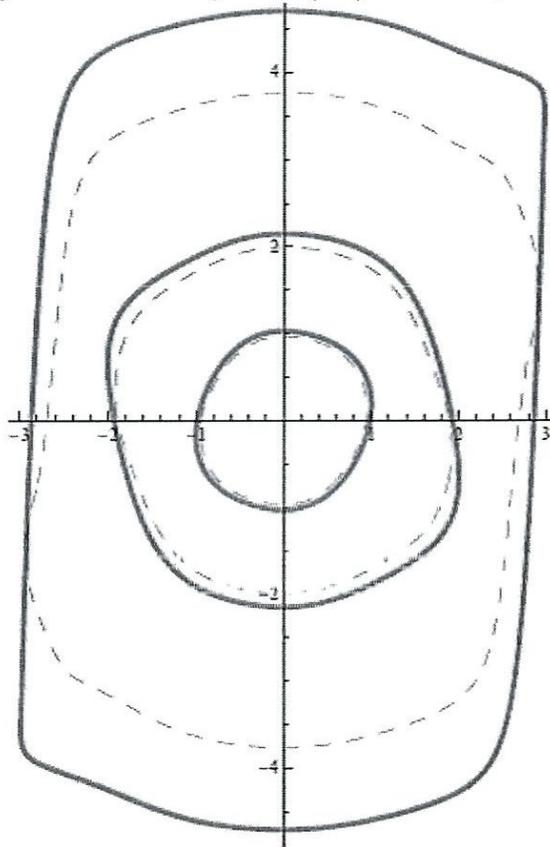
On utilisant la Proposition 1, on aura

$$P(r^2, 2) = -\frac{0.8}{2} + \frac{3}{8} \left(\frac{4}{3} \right) \alpha^2 + \frac{5}{24} \left(-\frac{8}{25} \right) \alpha^4$$

Les racines sont données par

$$r_1 = 1.000, r_2 = 1.989, r_3 = 2.956$$

Les trois cycles limites du système (3.6) avec l'amplitude respectivement 1.000, 1.989, 2.956.



conclusion

La recherche des cycles limites des équations différentielles dépendant d'un petit paramètre peut être étudiée au moyen de la méthode de Melnikov. Elle permet aussi de donner une borne inférieure pour le nombre de cycles limites que peut avoir l'équation différentielle perturbée. Ceci est justement la seconde partie du seizième problème de Hilbert, on note qu'il existe autre méthode nous citons par exemple la méthode de moyennisation, l'intégrale abélien ...ect, mais cette méthode provoque quelques problèmes comme le calcul de l'intégrale, le calcul des racines des fois on n'est pas besoin d'utiliser des méthodes numériques.

Bibliographie

- [1] Differential Equations an Dynamical System, Lawrence P 1991.
- [2] A. Lins, W.de Melo, C.C.Pugh. On Liénard's equation. Lecture Notes in Math., Vol. 597, Springer, Berlin, (1977) 335 – 357.
- [3] A. Buica, J. P. Francoise and J. Llibre, Periodic Solutions of Nonlinear periodic Differential Systems with a Small Parameter, Comm. Pure Appl. Anal. 6 N 1 (2007), pp. 103 – 111.
- [4] Thèse Doctorat Boulfoul A, 2012/2013
- [5] Thèse Doctorat Sellami N, 2012/2013
- [6] Thèse Doctorat Ouanas N, 2013/2014