République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Mathématiques Appliquées**

Par :

Chaoui Mebarka

Intitulé

Etude De La Méthode De Newton Modifiée Dans $\mathbb{R}$ Et $\mathbb{R}^n$

Dirigé par :

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. Hamlaoui Hamid	MCA	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. Guebbai Hamza	MCA	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. Merad Meriem	MCB	Univ-Guelma

Session Juin 2016

Étude De La Méthode De Newton Modifiée Dans $\mathbb{R}$ Et $\mathbb{R}^n$

Chaoui Mebarka

Mémoire De Master En Mathématiques Appliquées

Encadreur: **Dr. Guebbai Hamza**

Université 08 Mai 1945 Guelma

13 juin 2016

****Dédicace****

Je tends grâce à dieu de m'avoir donné le courage,
la volonté, la santé et la patience ainsi que la conscience
d'avoir pu terminer mes études.
A mes chers parents pour toute sa tendresse et assistance
nécessaire pendant les moments plus critiques
et qui ce s'est sacrifiée jour après jour
pour notre bonheur.
A mes très chers frères :
Soufiane, Imed et Youcef.
A mes chères sœurs :
Alima et Meryem.
Et à mon arc de ciel Assila,

Abd-elnour, Aya, Chamss-eddine,
Djawad, Abd-Erahmane et à toute ma grande famille.
A mes chères amies,
sans oublier mes collèges dans
la spécialité Mathématique Appliquée promotion 2016.
A tous mes enseignants depuis 1ère année Scolaire jusqu'à 2ème année

Master.

Table des matières

Résumé

Une simple modification de la méthode de Newton classique pour l'approximation de la racine d'une fonction d'une ou plusieurs variables est décrite et analysée. Contrairement à ce qui a été affirmé dans [1] la méthode modifiée n'est pas plus rapide que la classique, et on n'obtient pas l'ordre de convergence égale à $1 + \sqrt{2} \approx 2.4$. Des exemples numériques illustrent ce résultat. Nous allons essayer de construire cette méthode dans des dimensions plus élevées ($\mathbb{R}^n$; $n \geq 2$)

Introduction

La méthode de Newton, pour déterminer une racine d'une équation non linéaire $f(x) = 0$, a longtemps été privilégiée pour sa simplicité et sa vitesse rapide de convergence. En utilisant seulement la fonction et sa dérivée première, la méthode de Newton produit une suite itérative qui converge de façon quadratique à une racine simple. Dans ces dernières années ; de nouvelles méthodes sont construites. Ces méthodes sont basées sur la prédiction correction, elles nécessitent un calcul double mais elles donnent un meilleur ordre de convergence comme c'est déclaré dans [1]. Une méthode de Newton modifiée est construite théoriquement et numériquement. Nous allons essayer de reproduire les résultats déclarés.

Cette méthode consiste à calculer deux suites itératives reliées l'une à l'autre pour approcher la racine d'un problème $f(x) = 0$ dans $\mathbb{R}$. [1] nous promet qu'elle a un ordre égale à $1 + \sqrt{2}$, bien supérieurs à celui de la méthode classique, qui est égale à 2.

En plus, nous allons essayer de généraliser la méthode de Newton modifiée pour obtenir une plus efficace dans $\mathbb{R}^n$.

Chapitre 1

Rappels et Outils

Dans notre travail on a besoin de quelques résultats, plus ou moins classiques, à fin de démontrer la convergence des techniques numériques qu'on va construire dans la suite. Ce chapitre, est dédié à ces résultats. On va les cités et les démontrer sans entrer dans les détails et dans le sens dans lequel on va les utilisés aprés.

1.1 La formule de Taylor avec reste intégrale

1.1.1 La formule de Taylor avec une variable

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathbb{C}^{k+1}$, définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$.

Théorème 1. *Si f est dérivable $k+1$ fois sur $U = [a, b]$, alors au voisinage de a on a :*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \ldots + f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + \int_a^x f(t)^{(k+1)}\frac{(x-t)^k}{k!}dt \\ &= f(a) + \ldots + f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + \frac{(x-a)^{k+1}}{k!}\int_0^1 f^{(k)}((x-a)u+a)(1-u)^k du \end{aligned}$$

Démonstration. On a par définition de l'intégrale $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$. La formule est donc vraie pour $k = 0$. Puis par intégration par parties, où à x fixé on pose $u'(t) = 1, v(t) = f'(t)$ puis $u(t) = t - x$ et $v'(t) = f''(t)$.

$$\begin{aligned}\int_{t=a}^{x} f'(t)dt &= [(t-x)f'(t)]_{t=a}^{x} - \int_{y=a}^{x}(t-x)f''(t) \\ &= (x-a)f'(t) + \int_{t=a}^{x}(x-t)f''(t)dt.\end{aligned}$$

D'où au second ordre :

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \int_a^x f''(t)dt$$

Puis, par intégration par parties successives, où à x fixé on pose :

$$u'(t) = \frac{(x-t)^k}{k!},\ v(t) = f^{(k+1)}(t).$$

Puis, $u(t) = -\dfrac{(x-t)^{k+1}}{(k+1)!}$ et $v'(t) = f^{(k+2)}(t)$.

$$\begin{aligned}\int_{t=a}^{x} f^{(k+1)}(t)\frac{(x-t)^k}{k!}dt &= [-\frac{(x-t)^{k+1}}{(k+1)!}f^{(k+1)}(t)]_a^x - \int_{t=a}^{x} f^{(k+2)}(t) - \frac{(x-t)^{k+1}}{(k+1)!}dt \\ &- \frac{(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}f^{(k+1)}(a) + \int_{t=a}^{x} f^{(k+2)}(t)\frac{(x-t)^{k+1}}{(k+1)!}dt.\end{aligned}$$

D'où le résultat par réccurence.

Pour obtenir le second résultat, on utilise le changement de variable :

$$u = \frac{t-a}{x-a} \in [0,1].$$

Avec : $t = a + (x-a)u$ et $dt = (x-a)du$, puis $x - t = (x-a)(1-u)$.

D'où,

$$(x-t)^k = (x-a)^k(1-u)^k,$$

D'où, le résultat. $\square$

1.1.2 La formule de Taylor avec plusieurs variables

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathbb{C}^p$, définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$.

Théorème 2. *Soient a et $b \in U$ tels que :*

$$[a, b] = \{a + t(b - a) : 0 \leq t \leq 1\} \subset U.$$

Alors :

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{D^k f(a)}{k!}(b-a)^k + \int_0^1 \frac{(1-t)^{p-1}}{(p-1)!} D^p f(a + t(b-a))(b-a)^p dt.$$

1.2 Suite du Lucas

Pour P et $Q \in \mathbb{R}^n$, on définit la suite du Lucas comme suit :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \quad et \quad u_1 = 1, \\ u_n = Pu_{n-1} - Qu_{n-2}; n \geq 2. \end{cases}$$

Proposition 3. *Si u_n une suite de Lucas, alors :*

$$u_n = \frac{a^n - b^n}{a - b}$$

Avec : $a = \frac{P+\sqrt{\Delta}}{2}$ et $b = \frac{P-\sqrt{\Delta}}{2}$ sont les deux racines de,

$$x^2 - Px + Q = 0$$

Démonstration. On procède par réccurence, on appelle (P_n) la propriété $u_n = \dfrac{a^n - b^n}{a - b}$ et on utilise la réccurence :

$$\left.\begin{array}{c} P_0 \ et \ P_1 \ vrais, \\ P_{n-2} \wedge P_{n-1} \Longrightarrow \quad P_n \ \forall n \geq 2. \end{array}\right\}$$

On a :

$$\left.\begin{array}{lll} u_0 = \frac{a^0-b^0}{a-b} = 0 & \Longrightarrow & u_0 = 0, \\ u_1 = \frac{a^1-b^1}{a-b} = 1 & \Longrightarrow & u_1 = 1. \end{array}\right\} Vraies.$$

On suppose qu'elle est vraie pour $(n-1)$ et $(n-2)$ et on la démontre pour n.

On a :

$$\begin{aligned} u_n &= P(\frac{a^{n-1}-b^{n-1}}{a-b}) - Q(\frac{a^{n-2}-b^{n-2}}{a-b}) \\ &= \frac{P(a^{n-1}-b^{n-1}) - Q(a^{n-2}-b^{n-2})}{a-b} \\ &= \frac{(Pa^{n-1}-Qa^{n-2}) - (Pb^{n-1}-Qb^{n-2})}{a-b} \\ &= \frac{\frac{(Pa-Q)}{a^2}a^n - \frac{(Pb-Q)}{b^2}b^n}{a-b} \end{aligned}$$

Mais,

$$\begin{aligned} \frac{Pa-Q}{a^2} &= \frac{P(\frac{P+\sqrt{\Delta}}{2}) - Q}{(\frac{p+\sqrt{\Delta}}{2})^2} \\ &= \frac{\frac{P^2+p\sqrt{P^2-4Q}}{2} - Q}{\frac{P^2+P^2-4Q+2P\sqrt{P^2-4Q}}{4}} \\ &= \frac{\frac{P^2+p\sqrt{P^2-4Q}-2Q}{2}}{\frac{2P^2+2P\sqrt{P^2-4Q}-4Q}{4}} \\ &= \frac{\frac{P^2+p\sqrt{P^2-4Q}-2Q}{2}}{\frac{P^2+P\sqrt{P^2-4Q}-2Q}{2}} \\ &= \frac{P^2+p\sqrt{P^2-4Q}-2Q}{2} \times \frac{2}{P^2+P\sqrt{P^2-4Q}-2Q} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Et,

$$\begin{aligned}
\frac{Pb-Q}{b^2} &= \frac{\frac{P(P-\sqrt{P^2-4Q}-Q}{2}}{\frac{P-\sqrt{\Delta}}{2}2} \\
&= \frac{\frac{P^2-P\sqrt{P^2-4Q}-2Q}{2}}{\frac{P^2+P-4Q-2P\sqrt{P^2-4Q}}{4}} \\
&= \frac{P^2-P\sqrt{P^2-4Q}-2Q}{2} \times \frac{4}{2P^2-2P\sqrt{P^2-4Q}-4Q} \\
&= \frac{P^2-P\sqrt{P^2-4Q}-2Q}{2} \times \frac{2}{P^2-P\sqrt{P^2-4Q}-2Q} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Comme : $\dfrac{Pa-Q}{a^2} = \dfrac{Pb-Q}{b^2} = 1$, on conclut que :

$$u_n = \frac{a^n-b^n}{a-b}.$$

□

La suite de Fubbinacci est un cas particulier de la suite de Lucas lorsqu'on prend $P = 1$ et $Q = -1$. Son terme générale après simplification est donné par :

$$u_n = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n}{\sqrt{5}}.$$

1.3 Lemme de Neumann

Soit $(\mathbb{E}, \|.\|)$ un espace de Bannach et U un ouvert de $\mathbb{E}$.

Lemme 1. *Soit $L : U \subset \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ un opérrateur linéaire et continue, tel que,*

$$\|L\| = \sup_{\|x\|=1} \|L(x)\| < 1$$

Alors $(I-L)$ est inversible. Son inverse est donné par la somme de la série absolument convergente :

$$(I-L)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty} L^k$$

De plus :

$$\|(I-L)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|L\|}.$$

Démonstration. On va montrer d'abord que : $\sum_{k=0}^{\infty} L^k$ est absolument convergente .C-à-d que $\sum_{k=0}^{\infty} \|L^k\|$ est convergente

Mais : $\sum_{k=0}^{\infty} \|L\|^k$ est une série géométrique de raison $\|L\| < 1$, donc convergente .

Alors : $\sum_{k=0}^{\infty} L^k$ est absolument convergente, et :

$$\|\sum_{k=0}^{\infty} L^k\| \leq \frac{1}{1-\|L\|}.$$

De ce fait il existe un opérateur $M=\sum_{k=0}^{\infty} L^k$. $M_p=\sum_{k=0}^{p} L^k$ est sa somme partielle.

On a :

$$\begin{aligned}(I-L)M_p=(I-L)\sum_{k=0}^{p} L^k &= \sum_{k=0}^{p} L^k-\sum_{k=0}^{p} L^{k+1},\\ &= \sum_{k=0}^{p} L^k-\sum_{k=1}^{p+1} L^k,\\ &= I+\sum_{k=1}^{p} L^k-\sum_{k=1}^{p} L^k-L^{p+1},\\ &= I-L^{p+1}.\end{aligned}$$

Lorsque $p \longrightarrow \infty$, on a $L^{p+1} \longrightarrow^{\|\cdot\|} 0$, et d'autre part,

$$I - L^{p+1} = (I-L)M_p \longrightarrow^{\|\cdot\|} (I-L)M$$

Donc M est l'inverse de $(I-L)$, on obtient donc à la limite :

$$(I-L)M = (I-L)\sum_{k=0}^{\infty} L^k = I$$

Autrement dit :

$$(I-L)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} L^k$$

L'inégalité sur les normes s'en déduit. $\square$

Chapitre 2

Méthodes de Newton dans $\mathbb{R}$

L'intérêt de ces méthodes numériques est l'approximation des racines simples de $f(x) = 0$. Le cadre fonctionnel nécessite un espace de Bannach et la différentielle (Jacobienne). Nous commençons par l'espace $\mathbb{R}$ puis $\mathbb{R}^n$.

2.1 Méthode de Newton Classique dans $\mathbb{R}$

L'itération de Newton est une méthode numérique classique de recherche des zéros d'un système d'une équation non linéaire.

$$f : U \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ \ \textit{tel que}: \ \ U \ \textit{est un ouvert de} \ \ \mathbb{R}.$$

Si x est une approximation d'un zéro de ce système, la méthode de Newton raffine cette approximation en prenant pour nouvelle valeur la solution y de l'équation linéaire au voisinage de x.

$$f(x) + f'(x)(y - x) = 0$$
$$f(x) + f'(x)y - f'(x)x = 0$$

Lorsque $f'(x) \neq 0$ est inversible :

$$f'(x)^{-1}f(x) + f'(x)^{-1}f'(x)y - f'(x)^{-1}f'(x)x = 0$$

Alors, on obtient :

$$y = x - f'(x)^{-1}f(x)$$

On appelle opérateur de Newton l'expréssion ainsi définie :

$$N_f(x) = x - f'(x)^{-1}f(x)$$

La méthode de Newton est fondée sur l'étude de la suite :

$$x_{k+1} = N_f(x_k) = x_k - f'(x_k)^{-1}f(x_k).$$

Théorème 4. *Soit* $f[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *de classe* $\mathbb{C}^2(a,b)$, *supposons qu'il existe un unique* $\alpha \in]a,b[$ *et que* $M = \dfrac{max|f'|}{2min|f'|} < +\infty$
Alors ;

$$\begin{cases} x_0 \ \ assez \ \ proche \ \ de \ \ \alpha, \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \end{cases}$$

converge vers α, *et*

$$|x_n - \alpha| \leq M|x_{n-1} - \alpha|^2$$

Démonstration. On a :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} x_{n+1} - \alpha = x_n - \alpha - \frac{f(x_n) - f(\alpha)}{f'(x_n)}$$

On appliquant un développement de Taylor de f autour de x_n à l'ordre 2 :

$$0 = f(\alpha) = f(x_n) + (\alpha - x_n)f'(x_n) + (\alpha - x_n)\frac{f''(x_n)}{2}$$

$$\begin{aligned}
-(\alpha - x_n)f'(x_n) - f(x_n) &= (\alpha - x_n)^2 \frac{f''(x_n)}{2} \\
(x_n - \alpha)f'(x_n) - f(x_n) &= (x_n - \alpha)^2 \frac{f''(x_n)}{2} \\
\frac{(x_n - \alpha)f'(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} &= (x_n - \alpha)^2 \frac{1}{f'(x_n)} \frac{f''(x_n)}{2} \\
(x_n - \alpha) - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} &= (x_n - \alpha)^2 \frac{1}{f'(x_n)} \frac{f''(x_n)}{2}
\end{aligned}$$

Alors :

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq M|x_n - \alpha|^2.$$

Pour démontrer la convergence de la suite. On procède par réccurence :

Soit la propriété

$$(p_n) : |x_n - \alpha| \leq C^{2^{n-1}}|x_0 - \alpha|^{2^n}.$$

Pour $n = 1$ on a,

$$\begin{aligned}
(p_1) : |x_1 - \alpha| &\leq C^{2^{1-1}}|x_0 - \alpha|^{2^1} \\
&\leq C|x_0 - \alpha|^2
\end{aligned}$$

.

Supposons que P_n est vrai jusqu'à n, et on va montrer qu'il est vraie pour $n + 1$.

On a :

$$|x_n - \alpha| \leq M^{2^{n-1}}|x_0 - \alpha|^{2^n}$$

Et,

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq M|x_n - \alpha|^2$$

Donc :

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq M(M^{2^n - 1}|x_0 - \alpha|^{2^n})^2$$

D'où le résultat. □

2.2 Méthode de Newton Modifiée dans $\mathbb{R}$

Reprenons les mêmes conditions que celle du théorème 3 sur f. On définit les deux suites x_k et x_k^* par :

$$\begin{cases} x_k^* = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(\frac{1}{2}[x_{k-1} + x_{k-1}^*])} \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(\frac{1}{2}[x_k + x_k^*])} \end{cases}$$

Avec : x_0 est donnée, et

$$x_0^* = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Notre but est de démontrer que :

$$\lim_{k \longrightarrow +\infty} x_k = \lim_{k \longrightarrow +\infty} x_k^* = \alpha \quad avec \quad f(\alpha) = 0.$$

2.2.1 Convergence

Pour étudier la convergence, on définit :

$$\varepsilon = x_k - r$$

$$\varepsilon^* = x_k^* - r$$

On a :

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(\frac{1}{2}[x_{k-1} + x_{k-1}^*])} \tag{2.1}$$

$$x_k - r = x_{k-1} - r + \frac{f(r) - f(x_{k-1})}{f'(\frac{1}{2}[x_{k-1} + x_{k-1}^*])} \tag{2.2}$$

On fait le dévemoppement de Taylor de f en x_{k-1} à l'ordre 2, on obtient :

$$f(x_{k-1}) = f(r) + f'(r)(x_{k-1} - r) + \frac{1}{2}f''(r)(x_{k-1} - r)^2$$

$$f(x_{k-1}) - f(r) = f'(r)(x_{k-1} - r) + \frac{1}{2}f''(r)(x_{k-1} - r)^2$$

On substitue dans (2.2) on trouve :

$$\begin{aligned}
x_k - r &= x_{k-1} - r + \frac{-f'(r)(x_{k-1}-r) - \frac{1}{2}f''(r)(x_{k-1}-r)^2}{f'(\frac{1}{2}[x_{k-1}+x^*_{k-1}])} \\
&= \frac{[f'(\frac{1}{2}[x_{k-1}+x^*_{k-1}]) - f'(r)](x_{k-1}-r) - \frac{1}{2}f''(r)(x_{k-1}-r)^2}{f'(\frac{1}{2}[x_{k-1}+x^*_{k-1}])} \\
&= \frac{f''(\xi)(x_{k-1}-r)(\frac{1}{2}(x_{k-1}-r) + \frac{1}{2}(x^*_{k-1}-r)) - \frac{1}{2}f''(r)(x_{k-1}-r)^2}{f'(\frac{1}{2}[x_{k-1}+x^*_{k-1}])} \\
&= \frac{\frac{1}{2}f''(\xi)(x_{k-1}-r)^2 + \frac{1}{2}f''(\xi)(x_{k-1}-r)(x^*_{k-1}-r) - \frac{1}{2}f''(r)(x_{k-1}-r)^2}{f'(\frac{1}{2}[x_{k-1}+x^*_{k-1}])} \\
&= \frac{[\frac{1}{2}f''(\xi) - \frac{1}{2}f''(r)](x_{k-1}-r)^2 + \frac{1}{2}f''(\xi)(x_{k-1}-r)(x^*_{k-1}-r)}{f'(\frac{1}{2}[x_{k-1}+x^*_{k-1}])}.
\end{aligned}$$

Donc :

$$x_k - r = M_1(x_{k-1}-r)^2 + N_1(x_{k-1}-r)(x^*_{k-1}-r)$$

Alors, on trouve cette relation :

$$\varepsilon_k \leq M_1\varepsilon^2_{k-1} + N_1\varepsilon^*_{k-1}\varepsilon_{k-1}, \qquad (*)$$

avec,

$$M_1 = \frac{[\frac{1}{2}f''(\xi) - \frac{1}{2}f''(r)]}{f'(\frac{1}{2}[x_{k-1}+x^*_{k-1}])}, N_1 = \frac{\frac{1}{2}f''(\xi)}{f'(\frac{1}{2}[x_{k-1}+x^*_{k-1}])}$$

On a :

$$x^*_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(\frac{1}{2}[x_{k-1}+x^*_{k-1}])} \qquad (2.3)$$

$$x^*_k - r = x_k - r + \frac{f(r) - f(x_k)}{f'(\frac{1}{2}[x_{k-1}+x^*_{k-1}])} \qquad (2.4)$$

On utilise le dévellonpement de Taylor de f en x_k à l'ordre 2, on obtient :

$$f(x_k) = f(r) + f'(r)(x_k - r) + \frac{1}{2}f''(r)(x_k - r)^2$$

$$f(x_k) - f(r) = f'(r)(x_k - r) + \frac{1}{2}f''(r)(x_k - r)^2$$

On substitue dans (2.4) on trouve :

$$\begin{aligned}
x_k^* - r &= x_k - r + \frac{-f'(r)(x_k - r) - \frac{1}{2}f''(r)(x_k - r)^2}{f'(\frac{1}{2}[x_{k-1} + x_{k-1}^*])} \\
&= \frac{[f'(\frac{1}{2}[x_{k-1} + x_{k-1}^*]) - f'(r)](x_k - r) - \frac{1}{2}f''(r)(x_k - r)^2}{f'(\frac{1}{2}[x_{k-1} + x_{k-1}^*])} \\
&= \frac{f''(\xi)(x_k - r)(\frac{1}{2}(x_{k-1} - r) + \frac{1}{2}(x_{k-1}^* - r)) - \frac{1}{2}f''(r)(x_k - r)^2}{f'(\frac{1}{2}[x_{k-1} + x_{k-1}^*])} \\
&= \frac{\frac{1}{2}f''(\xi)(x_k - r)(x_{k-1} - r) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x_k - r)(x_{k-1}^* - r) - \frac{1}{2}f''(r)(x_k - r)^2}{f'(\frac{1}{2}[x_{k-1} + x_{k-1}^*])} \\
&= \frac{f''(\xi)[(x_k - r)[(x_{k-1} - r) + (x_{k-1}^* - r)]] - \frac{1}{2}f''(r)(x_k - r)^2}{f'(\frac{1}{2}[x_{k-1} + x_{k-1}^*])}.
\end{aligned}$$

Donc :

$$x_k^* - r = M_2(x_k - r)[(x_{k-1} - r)(x_{k-1}^* - r)] + N_2(x_k - r)^2$$

Alors, on trouve cette relation :

$$\varepsilon_k^* \leq M_2\varepsilon_k(\varepsilon_{k-1} + \varepsilon_{k-1}^*) + N_2\varepsilon_k^2 \qquad (**)$$

Tel que :

$$M_2 = \frac{f''(\xi)}{f'(\frac{1}{2}[x_{k-1} + x_{k-1}^*])}, N_2 = \frac{-\frac{1}{2}f''(r)}{f'(\frac{1}{2}[x_{k-1} + x_{k-1}^*])}$$

On met : $C = max(M_1\, N_1\, M_2\, N_2)$, et d'après (*) et (**), on obtient :

$$\varepsilon_k \leq C(\varepsilon_{k-1}^2 + \varepsilon_{k-1}^*\varepsilon_{k-1})\varepsilon_k^* \leq C(\varepsilon_k\varepsilon_{k-1} + \varepsilon_k\varepsilon_{k-1}^* + \varepsilon_k^3).$$

A partir de cette étape ; [1] confirme que $\varepsilon_{k+1} \leq C_1\varepsilon_k^{u_n}$ et $\varepsilon_{k+1}^* \leq C_2\varepsilon_k^{*u_n}$, où, u_n est la suite de Fubbinacci. Avec une simple approximation, on vérifie que :

$$\varepsilon_k \sim \varepsilon_0^{(1+\sqrt{2})^n},$$

$$\varepsilon_k^* \sim \varepsilon_0^{(1+\sqrt{2})^n}.$$

Ce qui montre, d'après [1] que cette méthode est meilleur que la classique.

On n'est pas arrivé à reproduire ce résultat et en plus les résultats numériques sont peu concluants.

Alors, on obtient :

$$y = x - Df(x)^{-1}f(x)$$

On appelle opérateur de Newton l'expréssion ainsi définie :

$$N_f(x) = x - Df(x)^{-1}f(x)$$

La méthode de Newton est fondée sur l'étude de la suite :

$$x_{k+1} = N_f(x_k) = x_k - Df(x_k)^{-1}f(x_k).$$

3.1.1 La Théorie de Kantorovitch

La théorème de Kantorovitch généralise la convergence de la méthode de Newton dans un espace de Bannach. Nous allons présenter une variante de ce théorème dans $\mathbb{R}^n$.

Théorème 5. *Soit $\xi \in U$ tel que $f(\xi) = 0$ et que $Df(\xi)$ soit inversible. Soit $r > 0$ tel que $\overline{B}(\xi, r) \subset U$. Notons*

$$K(f, \xi, r) = \sup_{\|x-\xi\|} \|Df(\xi)^{-1}D^2f(x)\|$$

Si $2rK(f, \xi, r) \leq 1$, pour tout $x_0 \in \overline{B}(\xi, r)$, la suite de Newton $x_{k+1} = N_f(x_k)$ est définit et converge vers ξ.
De plus

$$\|x_k - \xi\| \leq (\frac{1}{2})^{2^k-1}\|x_0 - \xi\|.$$

Démonstration. Soit :

$$F(x) = Df(\xi)^{-1}Df(x).$$

Pour tout x tel que $\|x-\xi\| \leq r$ *et* $F(\xi) = Df(\xi)_{-1}Df(\xi) = I$. La formule de Taylor appliquée à la fonction $F(x)$, donne :

$$\begin{aligned} F(x) &= F(\xi) + \int_0^1 Df(\xi)^{-1}D^2f((1-t)\xi + t(x-\xi))(x-\xi)dt \\ &= Df(\xi)^{-1}Df(\xi) + \int_0^1 Df(\xi)^{-1}D^2f((1-t)\xi + t(x-\xi))(x-\xi)dt \end{aligned}$$

Donc :

$$Df(\xi)^{-1}Df(x) = I + \int_0^1 Df(\xi)^{-1}D^2f((1-t)\xi + t(x-\xi))(x-\xi)dt.$$

De sorte que :

$$\begin{aligned} \|I - Df(\xi)^{-1}Df(x)\| &= \|\int_0^1 Df(\xi)^{-1}D^2f((1-t)\xi + t(x-\xi))(x-\xi)dt\| \\ &\leq \int_0^1 \|Df(\xi)^{-1}D^2f((1-t)\xi + t(x-\xi))\|\|(x-\xi)\|dt \\ &\leq r \sup_{\|x-\xi\|\leq r} \|Df(\xi)^{-1}D^2f(x)\| \\ &\leq rK(f,\xi,r) \\ &\leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Nous en déduisons par le lemme de Neumann que :

$$Df(\xi)^{-1}Df(x) = I - (I - Df(\xi)^{-1}Df(x)) \quad est \quad inversible.$$

On met :

$$p = I - Df(\xi)^{-1}Df(x)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \|I - p\| &\leq \frac{1}{1-\|p\|} \\ &\leq \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \\ &\leq 2 \end{aligned}$$

Et on déduit aussi que :

$$\|Df(x)^{-1}Df(\xi)\| \leq 2$$

Ansi, la suite de Newton est défini sur $\overline{B}(\xi, r)$. Par la formule de Taylor, appliquée à $Df(\xi)^{-1}Df(x)$ on a :

$$\begin{aligned} 0 &= Df(\xi)^{-1}f(\xi) \\ &= Df(\xi)^{-1}f(x) + Df(\xi)^{-1}Df(x)(\xi - x) + \int_0^1 (1-t)Df(\xi)^{-1}D^2f(x + t(\xi - x))(\xi - x)^2 dt. \end{aligned}$$

En composant à gauche par $Df(x)^{-1}Df(\xi)$, on trouve :

$$\begin{aligned} 0 &= f(x)^{-1}Df(\xi)[Df(\xi)^{-1}f(x) + Df(\xi)^{-1}Df(x)(\xi - x)] \\ &+ f(x)^{-1}Df(\xi)\int_0^1 (1-t)Df(\xi)^{-1}D^2f(x + t(\xi - x))(\xi - x)^2 dt \\ &= Df(x)^{-1}f(x) + \xi - x + f(x)^{-1}Df(\xi)\int_0^1 (1-t)Df(\xi)^{-1}D^2f(x + t(\xi - x))(\xi - x)^2 dt \\ &= \xi + [x - Df(x)^{-1}f(x)] + f(x)^{-1}Df(\xi)\int_0^1 (1-t)Df(\xi)^{-1}D^2f(x + t(\xi - x))(\xi - x)^2 dt. \end{aligned}$$

D'où, on obtient :

$$N_f(x) - \xi = f(x)^{-1}Df(\xi)\int_0^1 (1-t)Df(\xi)^{-1}D^2f(x + t(\xi - x))(\xi - x)^2 dt.$$

Compte tenu des estimations présédentes, on a :

$$\begin{aligned} \|N_f(x) - \xi\| &\leq \|f(x)^{-1}Df(\xi)\| \int_0^1 (1-t)\|Df(\xi)^{-1}D^2f(x + t(\xi - x))\|\|(\xi - x)\|^2 dt \\ &\leq K(f, \xi, r)\|\xi - x\|^2 \\ &\leq \frac{1}{2}\|\xi - x\|^2. \end{aligned}$$

On prouve par réccurence sur K que $x_k \in \overline{B}(\xi, r)$ et l'estimation

$$\|x_k - \xi\| \leq (\frac{1}{2})^{2^k - 1}\|x_0 - \xi\|$$

Donc, on suppose que $\|x_k - \xi\| \leq (\frac{1}{2})^{2^k-1}\|x_0 - \xi\|$ qu'elle est vraie, et

$$\|x_{k+1} - \xi\| \leq \frac{1}{2}\|x_k - \xi\|^2$$

Alors :

$$\|x_{k+1} - \xi\| \leq \frac{1}{2}[(\frac{1}{2})^{2^k-1}\|x_0 - \xi\|]^2$$

Ainsi, on déduit le résultat :

$$\|x_{k+1} - \xi\| \leq (\frac{1}{2})^{2^{k+1}-1}\|x_0 - \xi\|^2.$$

□

3.2 Méthode de Newton Modifiée dans $\mathbb{R}^n$

Nous allons procéder à la généralisation de la méthode de Newton modifiée étudiée auparavant dans $\mathbb{R}$. Elle est présenter par :
On définit les deux suites x_k et x_k^* par :

$$\begin{cases} x_k^* = x_k - Df^{-1}(\frac{1}{2}[x_{k-1} + x_{k-1}^*])f(x_k) \\ x_{k+1} = x_k - Df^{-1}(\frac{1}{2}[x_k + x_k^*])f(x_k) \end{cases}$$

Avec : x_0 est donnée, et

$$x_0^* = x_0 - Df^{-1}(x_0)f(x_0).$$

Avant de procéder à la vérification théorique de la méthode nous l'avons vérifié numériquement.

Les résultats numériques, comme vous pouvez le constater dans le chapitre suivant sont non concluant. Ce qui nous ce découper à vérifie qu'elle converge théoriquement.

Chapitre 4

Résultats Numériques

4.1 Comparaison entre les Méthodes de Newton dans $\mathbb{R}$

4.1.1 Exemple 1 :

Pour Le deuxième chapitre, on a choisi l'équation suivante :

$$f(x) = \sin^2 x - x^2 + 1,$$

Avant de programmer les algorithmes des Méthodes de Newton dans $\mathbb{R}$, il faut d'abord programmer la fonction $fnew\_clas1.m$ et sa dérivée $dfnew\_clas1.m$. l'algorithme de la fonction $fnew\_clas1.m$ est :

```
function y= fnew_clas1(x)
y= (sin( x ))^2- x^2 + 1,
end
```

L'algorithme de la dérivée de cette fonction $dfnew\_clas1.m$ est .

```
function y=dfnew_clas1(x)
y=2*(cos(x))^2*(sin(x))^2-2*x;
end
```

— **Méthode de Newton Classique dans $\mathbb{R}$**

L'algorithme de la méthode de Newton classique dans $\mathbb{R}$ pour ce problème peut s'écrire comme :

```
function [y,k]=new_clas1(a,e)
  y = a;
  k=0;
  while abs(fnew_clas1(y))>e,
    y = y - fnew_clas1(y)/dfnew_clas1(y);
    k=k+1;
  end
end
```

Le résultat obtenu a été présentée dans le tableau 4.1 :

$x0/\varepsilon$	0.01	0.001	0.0001	0.00001	0.000001	0.000000001	0.000000000001
1	3	4	5	6	7	10	12
2	2	3	4	5	6	9	12
3	3	4	5	6	7	10	13
10	5	6	7	8	9	12	15
20	6	7	8	9	10	13	16

TABLE 4.1 Méthode de Newton classique dans $\mathbb{R}$

— Méthode de Newton Modifiée dans $\mathbb{R}$

L'algorithme de la méthode de Newton modifée dans $\mathbb{R}$ pour ce problème peut s'écrire comme :

```
function [y,k]=newtmodi(x0,ep)
z=x0;
t=x0;
y=t-(fnew_clas1(t)/(dfnew_clas1(0.5*(t+z))));
k=0;
while abs(fnew_clas1(y))>=ep
    k=k+1;
    z=y-(fnew_clas1(y)/dfnew_clas1(0.5*(t+z)));
    t=y;
    y=y-(fnew_clas1(y)/dfnew_clas1(0.5*(y+z)));
end
end
```

Le résultat obtenu a été présentée dans le tableau 4.2 :

$x0/\varepsilon$	0.01	0.001	0.0001	0.00001	0.000001	0.000000001	0.000000000001
1	1	2	3	4	5	8	11
2	1	2	3	4	5	8	11
3	2	3	4	5	6	9	12
10	4	5	6	7	8	11	14
20	4	5	6	7	8	11	14

TABLE 4.2 – Méthode de Newton modifiée dans $\mathbb{R}$

4.1.2 Exemple 2 :

Pour le deuxième chapitre, on a choisi l'équation suivante

$$f(x) = xe^{x^2} - \sin^2 x + 3\cos x + 5,$$

Avant de programmer les algorithmes des Méthodes de Newton dans $\mathbb{R}$, il faut d'abord programmer la fonction $fnew\_clas2.m$ et sa dérivée $dfnew\_clas2.m$. l'algorithme de la fonction $fnew\_clas2.mest$:

```
function y=fnew_clas2(x)
y=x*(exp(x^2))-(sin(x))^2+3*(cos(x))+5;
end
```

L'algorithme de la dérivée de cette fonction $dfnew\_clas2.m$ est :

```
function y=dfnew_clas2(x)
y=(1+x^2)*(exp(x^2))-2*(cos(x))*(sin(x))-3*(sin(x));
end
```

— Méthode de Newton Classique dans $\mathbb{R}$

L'algorithme de la méthode de Newton classique dans $\mathbb{R}$ pour ce problème peut s'écrire comme :

```
function [y,k]=new_clas2(a,e)
  y = a;
  k=0;
  while abs(fnew_clas2(y))>e
    y = y - fnew_clas2(y)/dfnew_clas2(y);
    k=k+1;
  end
end
```

Le résultat obtenu a été présentée dans le tableau 4.3 :

$x0/\varepsilon$	0.01	0.001	0.0001	0.00001	0.000001	0.000000001	0.000000000001
1	14	17	19	22	25	34	42
2	14	17	19	22	25	34	42
3	15	18	21	24	26	35	44
10	67	70	73	76	79	87	96
20	227	230	233	236	1239	1247	256

Table 4.3 – Méthode de Newton classique dans $\mathbb{R}$

— Méthode de Newton Modifiée dans $\mathbb{R}$

L'algorithme de la méthode de Newton modifée dans $\mathbb{R}$ pour ce problème peut s'écrire comme :

```
function [y,k]=newtmoditow(x0,ep)
z=x0;
t=x0;
y=t-(fnew_clas2(t)/(dfnew_clas2(0.5*(t+z))));
k=0;
while abs(fnew_clas2(y))>=ep
    k=k+1;
    z=y-(fnew_clas2(y)/dfnew_clas2(0.5*(t+z)));
    t=y;
    y=y-(fnew_clas2(y)/dfnew_clas2(0.5*(y+z)));
end
end
```

Le résultat obtenu a été présentée dans le tableau 4.4 :

$x0/\varepsilon$	0.01	0.001	0.0001	0.00001	0.000001	0.000000001	0.000000000001
1	13	16	19	22	24	33	42
2	3nan	3nan	3nan	3nan	3nan	3nan	3nan
3	148	151	154	157	160	168	177
10	61	64	67	70	73	81	90
20	182nan	182nan	182nan	182nan	182nan	182nan	182nan

TABLE 4.4 – Méthode de Newton modifiée dans $\mathbb{R}$

4.2 Comparaison entre les Méthodes de Newton dans $\mathbb{R}^n$

4.2.1 Exemple 1 :

Pour le troisième chapitre, on a choisi le système suivant :

$$\begin{cases} F_1(x,y) = \frac{1}{10}x^2 + \sin y - x \\ F_2(x,y) = \cos x + \frac{1}{10}y^2 - y \end{cases}$$

Avant de programmer les algorithmes des Méthodes de Newton dans $\mathbb{R}^n$, il faut d'abord programmer le système d'équation *syst.m* et La dérivée de ce système *dfsyst.m*.

```
function q=syst(x)
q(1,1)=(1/10)*(x(1,1))^2+sin(x(2,1))-x(1,1);
q(2,1)=cos(x(1,1))+(1/10)*x(2,1)^2-x(2,1);
end
```

L'algorithme du système d'équation *dfsyst.m* est :

```
function d=dfsyst(x)
d=[(1/5)*x(1,1)-1 cos(x(2,1));-sin(x(1,1)) (1/5)*x(2,1)-1];
end
```

— **Méthode de Newton Classique dans $\mathbb{R}^n$**

L'algorithme de la méthode de Newton classique dans $\mathbb{R}^n$ pour ce problème peut s'écrire comme :

```
function [z,k]=new_sysrn(x0,ep)
z=x0;
k=0;
while max(abs(syst(z)))>=ep
    k=k+1;
    z=z-inv(dfsyst(z))*syst(z);
end
end
```

Le résultat obtenu a été présentée dans le tableau 4.5 :

$x0/\varepsilon$	0.01	0.001	0.0001	0.00001	0.000001	0.000000001	0.000000000001
[0; 0]	3	3	3	4	4	5	5
[1; 1]	2	2	2	3	3	4	4
[3; 3]	26	26	27	27	27	28	28
[10; 10]	2	3	3	3	4	4	4
[20; 20]	5	5	5	6	6	6	7

Table 4.5 – Méthode de Newton classique dans $\mathbb{R}^n$

— **Méthode de Newton Modifiée dans $\mathbb{R}^n$**

L'algorithme de la méthode de Newton modifiée dans $\mathbb{R}^n$ pour ce problème peut s'écrire comme :

```
function [y,k]=newmodi_rn(x0,ep)
z=x0;
t=x0;
y=t-(inv((dfsyst(0.5*(t+z))))*syst(t));
k=0;
while abs(syst(y))>=ep
    k=k+1;
    z=y-inv( dfsyst(0.5*(t+z)))*(syst(y));
    t=y;
    y=y-inv(dfsyst(0.5*(y+z)))*(syst(y));
end
end
```

Le résultat obtenu a été présentée dans le tableau 4.6 :

$x0/\varepsilon$	0.01	0.001	0.0001	0.00001	0.000001	0.000000001	0.000000000001
[0; 0]	1	2	2	2	2	3	3
[1; 1]	0	1	1	1	2	2	2
[3; 3]	12	13	13	13	13	14	14
[10; 10]	1	2	2	2	2	3	3
[20; 20]	4	4	5	5	5	5	6

TABLE 4.6 – Méthode de Newton modifiée dans $\mathbb{R}^n$

4.2.2 Exemple 2 :

Pour le troisième chapitre, on a choisi le système suivant :

$$\begin{cases} F_1(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8) = \frac{1}{10}x_1^2 + \sin x_2 \\ F_2(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8) = \cos x_2 + \frac{1}{10}x_1^2 \\ F_3(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8) = \frac{1}{10}x_3^2 + \sin x_4 \\ F_4(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8) = \cos x_4 + \frac{1}{10}x_3^2 \\ F_5(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8) = \frac{1}{10}x_5^2 + \sin x_6 \\ F_6(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8) = \cos x_6 + \frac{1}{10}x_5^2 \\ F_7(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8) = \frac{1}{10}x_7^2 + \sin x_8 \\ F_8(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8) = \cos x_8 + \frac{1}{10}x_7^2 \end{cases}$$

Avant de programmer les algorithmes des Méthodes de Newton dans $\mathbb{R}^n$, il faut d'abord programmer les système des équations $GG.m$ et $F.m$ et son dérivées son $dGG.m$ et dF.

l'algorithme du système d'équation $GG.m$ est :

```
function y=GG(n,x)
for i=1:n
    y(2*i-1,1)=(1/10)*(x(2*i-1,1))^2+sin(x(2*i,1));
    y(2*i,1)=cos(x(2*i-1,1))+(1/10)*x(2*i,1)^2;
```

```
end
```

l'algorithme du système d'équation $F.m$ est :

```
function y = F(n,x)
y=GG(n,x)-x;
end
```

L'algorithme de la dérivée du système d'équation $dGG.m$ est :

```
function y=dGG(n,x)
y=zeros(2*n,2*n);
for i=1:n
    y(2*i-1,2*i-1)=(1/5)*(x(2*i-1,1));
    y(2*i,2*i-1)=-sin(x(2*i-1,1));
    y(2*i-1,2*i)=cos(x(2*i,1));
    y(2*i,2*i)=(1/5)*x(2*i,1);
end
```

L'algorithme de la dérivée du système d'équation $dF.m$ est :

```
function y= dF(n,x)
y=dGG(n,x)-eye(2*n);
end
```

— **Méthode de Newton Classique dans $\mathbb{R}^n$**

L'algorithme de la méthode de Newton classique dans $\mathbb{R}^n$ pour ce problème peut s'écrire comme :

```
function [z,k]= newcles_rn(n,x0,ep)
```

```
z=x0;
k=0;
while max(abs(F(n,z)))>=ep
    k=k+1;
    h=dF(n,z)\F(n,z);
    %z=z-inv(dF(z))*F(z);
    z=z-h;
end
end
```

Pour le vecteur initiale on définit le vecteur $\mathbb{1}$ qui est un vecteur de longueur n et plein de 1.

Le résultat obtenu a été présentée dans le tableau 4.7 :

$x0/\varepsilon$	0.00001	0.000000001	0.00000000001
$\mathbb{1}(10)$	3	3	4
$2\mathbb{1}(10)$	10	10	11
$3\mathbb{1}(100)$	27	27	28
$4\mathbb{1}(1000)$	8	8	9

TABLE 4.7 – Méthode de Newton classique dans $\mathbb{R}^n$

— Méthode de Newton Modifiée dans $\mathbb{R}^n$

L'algorithme de la méthode de Newton modifiée dans $\mathbb{R}^n$ pour ce problème peut s'écrire comme :

```
function [z,k]= newmod_rn(n,x0,ep)
z=x0;
t=x0;
l=dF(n,0.5*(t+z))\F(n,t);
y=t-l;
k=0;
while abs(F(n,y))>=ep
    k=k+1;
    h=dF(n,0.5*(t+z))\F(n,z);
    z=y-h;
    t=y;
    h=dF(n,0.5*(y+z))\F(n,y);
    y=y-h;
end
end
```

Le résultat obtenu a été présentée dans le tableau 4.8 :

$x0/ep$	0.00001	0.000000001	0.00000000001
$\mathbb{1}(10)$	2	7	8
$2\mathbb{1}(10)$	21106	21106	21106
$3\mathbb{1}(100)$	321	321	321

Table 4.8 – Méthode de Newton modifiée dans $\mathbb{R}^n$

Le résultat obtenu avec un exemple de ($n = 250$ et $x_0 = 2\mathbb{1}(500)$ et $ep = 0.000000000001$) on trouve un nombre d'itération $K = 21106$ après ≈ 8 minutes, et avec $n = 500$ et $x_0 = 2\mathbb{1}(1000)$ et $ep = 0.000000000001$ on trouve un nombre d'itération $K = 21106$ après ≈ 22 minutes).

Conclusion

Nous avons étudié le problème phare de l'analyse fonctionnel qui est : $f(x) = 0$ ou f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$.

Notre but à la base était relier à l'étude faite dans [1]. On a cherché à reproduire ces résultats théorique on a obtenue seulement une partie des résultats déclarées. Lorsqu'on a commencé l'étude numérique comparative, on a vu que la méthode de Newton modifiée marche mieux que celle classique dans un exemple. Mais, dans un autre exemple, contrairement à la classique, la méthode de [1] ne converge pas.

Dans le cadre de l'espace $\mathbb{R}^n$, nous avons étudié la méthode de Newton classique et on a essayé de construire une méthode modifiée en reprenant les mêmes étapes que celles de [1]. Sauf les résultats numériques de la méthode modifiée étaient non concluants :

- — Elle donne des résultats irronés.
- — Elle donne le même nombre d'itérations que le classique.
- — Elle prend beaucoup plus de temps que la classique et ça est due en grande partie à la double inversion matricielle que nécessite cette méthode.

En conclusion, la méthode modifiée dans $\mathbb{R}^n$ n'a aucun intérêt pratique.

Bibliographie

[1] Trevor J.McDougall Simon J.Wotherspoon. *Méthode de Newton modifiée.*

[2] Jean-Pierre Dedieu. *Points fixes, zéros et la méthode de Newton.*

[3] Recherche sur site web : *Méthode de Newton.htm et Suite de Lucas-Wikipédia.htm.*