

République algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université 8 mai 1945 Guelma  
Faculté des Sciences et de la Technologie



**THESE**  
**Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat En Sciences**  
Spécialité : **Génie Mécanique**

Présentée par:

**LAOUADI Bouzid**

**Thème**

---

**Lubrification thermo-hydrodynamique des paliers soumis à des  
chargements statiques et dynamiques lubrifiés par des fluides à  
rhéologie complexe : Etude théorique et numérique simplifiée.**

---

Soutenue, le 10/07/2019

**JURY**

Président :	<b>S. ELLAGOUNE</b>	Pr. Université 8 mai 1945 Guelma
Rapporteur :	<b>M. LAHMAR</b>	Pr. Université 8 mai 1945 Guelma
Examineurs :	<b>B. BOU-SAÏD</b>	Pr. INSA de Lyon, France
	<b>M.R. SARI</b>	Pr. Université Badji Mokhtar Annaba
	<b>H. BOUCHERIT</b>	Pr. Université 8 mai 1945 Guelma
	<b>A. DIB</b>	MC-A. Université Badji Mokhtar Annaba
Invité	<b>A. MOUASSA</b>	MC-A. Université 8 mai 1945 Guelma

## AVANT-PROPOS

Le travail présenté dans ce mémoire est le résultat de la préparation d'une thèse de doctorat en sciences au sein du laboratoire de Mécanique & Structures (LMS) de l'Université 8 mai 1945 Guelma.

Je voudrais remercier tout spécialement Monsieur Mustapha LAHMAR, Professeur à l'Université 8 mai 1945 Guelma, pour le suivi de cette étude. Sa grande capacité d'analyse et de synthèse, son expérience des phénomènes thermiques, de la programmation numérique mais aussi sa grande disponibilité m'ont été d'une grande aide tout au long de ma thèse.

Je suis extrêmement sensible à l'honneur que me fait Monsieur Benyebka BOU-SAÏD, Professeur à l'INSA de Lyon pour l'intérêt qu'il porte à ce travail en acceptant de faire partie du jury de cette thèse.

Que Monsieur Salah ELLAGOUNE, Professeur à l'Université 8 mai 1945 de Guelma trouve ici l'expression de toute ma gratitude de bien vouloir accepter de présider le jury de cette thèse.

Je suis extrêmement sensible à l'honneur que me fait Monsieur Hamid Boucherit, Professeur à l'Université 8 mai 1945 Guelma en acceptant d'examiner ce travail.

Il m'est particulièrement agréable de remercier, Mohamed Rafik SARI, Professeur à l'Université Badji Mokhtar Annaba, d'avoir bien voulu s'intéresser à cette étude et d'avoir accepté d'examiner ce travail.

Je voudrais remercier aussi Monsieur Amar DIB, Maître de Conférences A à l'université Badji Mokhtar Annaba, pour avoir accepté de juger mon travail et faire partie du jury.

Mes remerciements vont aussi à Monsieur Ahcène MOUASSA, Maître de Conférences A à l'université 8 mai 1945 Guelma pour avoir accepté d'être invité.

Mes remerciements s'adressent également à tous les membres du laboratoire de Mécanique & Structures (LMS) et du département de Génie Mécanique de l'Université 8 mai 1945 Guelma.

## Résumé

Considérés comme des éléments de machines modernes, les paliers hydrodynamiques et aérodynamiques sont largement utilisés comme organes de guidage à cause de leur simplicité constructive et leur fiabilité élevée.

La plupart des études de simulation des problèmes de lubrification fluide dans de tels paliers supposent généralement que le comportement des fluides lubrifiants est Newtonien et que le régime de lubrification est isotherme. Néanmoins, les applications pratiques de la lubrification montrent que le modèle de fluide newtonien ou visqueux linéaire ne constitue pas une approche satisfaisante des problèmes de lubrification avec des fluides dopés ou pollués.

La recherche présentée dans ce mémoire de thèse comprend deux parties :

Dans La première partie, on a présenté une analyse théorique des effets combinés du paramètre de couple des contraintes (modèle du fluide polaire de V. K. Stokes) et de la piézo-viscosité du fluide sur le comportement thermo-hydrodynamique d'un palier compliant dynamiquement chargé de moteur à combustion interne. Dans cette partie, l'analyse de ce type de palier repose sur la résolution d'un problème de lubrification inverse non linéaire gouverné par l'équation de Reynolds modifiée couplée aux équations d'équilibre du maneton en utilisant une approche thermique globale. L'évaluation de la puissance dissipée dans le contact requiert la dérivation d'une équation d'énergie modifiée pour un fluide polaire à couples de contrainte. Pour déterminer le champ de pression dans le palier, la méthode des substitutions successives (ou méthode du point fixe) est utilisée pour la résolution du système d'équations algébriques non linéaires résultant de la discrétisation par différences finies de l'équation de Reynolds modifiée. Le lieu du centre du maneton durant tout le cycle thermodynamique du moteur est déterminé à l'aide de la méthode itérative de Newton-Raphson amortie appliquée aux équations d'équilibre du maneton en négligeant les forces d'inertie de celui-ci.

Dans la seconde partie, on a mené une étude du comportement statique et dynamique linéaire d'un palier à feuilles compliant (déformable) lubrifié par un gaz qui est de l'air pollué modélisé comme étant un fluide à couple de contraintes en régime isotherme. Dans cette approche dynamique, le film d'air est modélisé par huit

coefficients dynamiques, à savoir : quatre coefficients de raideur et quatre coefficients d'amortissement. Pour calculer ces coefficients, on a utilisé une technique basée sur la perturbation analytique de l'équation de Reynolds non linéaire modifiée écrite en régime dynamique. Une étude des effets des couples de contraintes et des déformations dynamiques des feuilles sur le comportement dynamique du palier a été aussi envisagée.

Les résultats obtenus ont montré que les effets des couples de contrainte dus à la présence des additifs et des particules de pollution, et de la piézo-viscosité ont des effets non négligeables sur le comportement dynamique des paliers fluides compliants surtout lorsqu'il s'agit de lubrifiants incompressibles.

### **Mots Clés :**

Lubrification thermo-hydrodynamique, Lubrification aérodynamique isotherme, Fluide non Newtonien à couples de contraintes, piézo-viscosité, palier à feuilles, déformations statique et dynamique, théorie du micro-continuum de V. K. Stokes, méthode de perturbation analytique, méthode des différences finies, méthode des substitutions successives sous-relaxées, méthode de Newton-Raphson, moteur à combustion interne, paliers de tête de bielle compliants, équation de Reynolds modifiée, palier lisse chargé dynamiquement, approche thermique globale, température effective, viscosité effective.

## Abstract

Considered as modern machine elements, hydrodynamic and aerodynamic bearings are widely used as guiding devices because of their constructive simplicity and high reliability.

Most simulation numerical studies of fluid lubrication problems in such bearings generally assume that the behavior of the lubricating fluids is Newtonian and that the lubrication regime is isothermal. Nevertheless, the practical applications of lubrication show that the Newtonian so-called linear viscous fluid model is not a satisfactory approach to lubrication problems with doped or polluted fluids.

The research presented in this thesis consists of two parts:

The first part consists of a theoretical analysis of the combined effects of the couple-stress parameter using the Vijay Kumar Stokes polar fluid model, and fluid piezoviscosity on the thermo-hydrodynamic behavior of an internal combustion engine dynamically loaded compliant bearing is presented. In this part, the analysis of this type of bearing is based on the solution of a nonlinear inverse lubrication problem governed by the modified Reynolds equation coupled to equilibrium equations of the crankpin using a global thermal approach. The evaluation of the power dissipated in the contact requires the derivation of a modified energy equation for a polar couple-stress fluid. To determine the pressure field in the bearing's clearance space, the successive substitution method so-called the fixed point method is used to solve the system of nonlinear algebraic equations resulting from finite difference discretization of the modified Reynolds equation written in dynamic conditions. The location of the crankpin center during the entire engine thermodynamic cycle is predicted using the damped iterative Newton-Raphson method applied to equilibrium equations of the crankpin by neglecting the inertia forces of this later.

In the second part, we carry out a study of the static and dynamic linear behavior of a compliant foil compliant bearing using a polluted air as lubricant which is modeled as a couple-stress fluid under isothermal conditions. In this linearized dynamic approach, the air film is modeled by eight dynamic coefficients, namely: four stiffness

coefficients and four damping coefficients. To compute these coefficients, a technique based on the analytical perturbation of the dynamic nonlinear Reynolds equation is used. A study of the effects of couple-stresses and static and dynamic deformations of the foils on the dynamic behavior of the bearing is also considered.

The obtained results show that the couple-stresses due to the presence of additives and pollution particles in lubricants as well as the piezoviscosity have significant effects on the dynamic behavior of steadily and dynamically loaded compliant fluid bearings, especially when the lubricant is incompressible.

**Keywords:**

Thermo-hydrodynamic lubrication, Isothermal aero-dynamic lubrication, non-Newtonian couple-stress fluid, piezo-viscosity, foil bearing, static and dynamic deformations, V. K. Stokes micro-continuum theory, analytical perturbation method, finite difference method, under-relaxed successive substitution method, Newton-Raphson method, internal combustion engine, compliant rod bearings, modified Reynolds equation, dynamically loaded bearing, Global thermal approach, effective temperature, effective viscosity.

## ملخص

تعتبر عناصر الآلات الحديثة ، المحامل الهيدروديناميكية و الديناميكية الهوائية المستخدمة على نطاق واسع كأجهزة توجيه بسبب بساطتها البناء وموثوقيتها العالية.

معظم الدراسات العددية لمشاكل تزييت السوائل في مثل هذه المحامل تفترض عادة أن سلوك سوائل التشحيم هو نيوتوني وأن نظام التشحيم متساوي الحرارة. ومع ذلك ، فإن التطبيقات العملية للتزييت تبين أن نموذج نيوتوني ما يسمى بالسائل غير القطبي ليس مقاربة مرضية لمشاكل التشحيم بالسوائل المشبعة أو الملوثة. يتكون البحث المقدم في هذه الرسالة من جزئين:

تناول الجزء الأول من البحث دراسة تحليل نظري للتأثيرات المشتركة للسائل القطبيولزوجة بيزو على السلوك الحراري الهيدروديناميكي للمحمل (قابل للتشوه) المتوافق مع التحميل الديناميكي لمحرك الاحتراق الداخلي من خلال نهج حراري كلي يعتمد على مفهوم "درجة الحرارة الفعالة".

في هذا الجزء ، يستند تحليل هذا النوع من المحامل على حلّ لمشكلة تشحيم عكسية غير خطية تحكمها معادلة رينولدز المعدلة إلى جانب معادلات التوازن في العمود المرفقي باستخدام نهج حراري كلي. يتطلب تقييم القدرة المتشكّنة في الاتصال اشتقاق معادلة طاقة معدلة لسائل الإجهاد القطبي المزدوج. ولتحديد مجال الضّغط في مساحة التخليص للحمل ، يتم استخدام طريقة الاستبدال المتعاقبة المسمّاة طريقة النقطة الثابتة لحل نظام المعادلات الجبرية اللاخطية الناتجة عن تقطيع الفرق المنتهي لمعادلة رينولدز المعدلة في ظروف ديناميكية. من المتوقع أن يتم تحديد موقع مركز العمود المرفقي أثناء دورة الديناميكا الحرارية للمحرك بالكامل باستخدام طريقة نيوتن-رافسن التكرارية المبطنّة والمستخدمّة في معادلات التوازن في العمود المرفقي عن طريق إهمال قوى القصور الذاتي في وقت لاحق.

في الجزء الثاني ، نقوم بإجراء دراسة للسلوك الخطي الساكن والديناميكي للمحمل الهوائية باستخدام هواء ملوث كزيوت تشحيم تم تصميمه على شكل سائل قطبي تحت ظروف متساوية الحرارة.

في هذا النهج الديناميكي الخطي ، تم تشكيل شريط هوائي على أساس ثمانية معاملات ديناميكية ، وهي: أربعة معاملات صلابة وأربعة معاملات تخميد. لحساب هذه المعاملات ، يتم استخدام تقنية تستند إلى الاضطراب التحليلي لمعادلة رينولدز غير الخطية الديناميكية. هذه الدراسة تؤخذ في الاعتبار أيضا الآثار المترتبة على دراسة تأثير السائل القطبي والتشوه الديناميكي للأوراق على السلوك الديناميكي للمحمل الورقية.

تظهر النتائج التي تم الحصول على أن للسائل القطبي بسبب احتوائه على مواد مضافة وجزيئات التلوث في زيوت التشحيم وكذلك لزوجة بيزو لهما تأثير كبير على السلوك الديناميكي للمحامل المتوافقة مع تحميلها بشكل ديناميكي او ثابت ، وخاصة عندما يكون زيت التشحيم غير قابل للضغط.

### الكلمات المفتاحية:

التشحيم الحراري الهيدروديناميكي، التشحيم الهوائي الديناميكي المتساوي الحرارة ،السائل القطبي ،الحامل الهوائي، محرك الاحتراق الداخلي، التشوهات الساكنة، التشوهات الديناميكية، العمود المرفقي،محرك الاحتراق الداخلي، الاضطراب التحليلي، لزوجة بيزو، النهج الحراري الشامل، درجة الحرارة الفعالة، طريقة الفروق المحدودة، طريقة نيوتن رافسون التكرارية، معادلة رينولدز المعدلة.

## SOMMAIRE

<b>INTRODUCTION GENERALE .....</b>	<b>1</b>
<b>CHAPITRE I : PROPRIETES PHYSICO-CHIMIQUES ET RHEOLOGIQUES DES FLUIDES</b>	
<b>    LUBRIFIANTS .....</b>	<b>4</b>
I.1. Introduction.....	4
I.2. Fonctions des lubrifiants.....	5
I.3. Les huiles.....	6
I.3.1. Utilisations .....	6
I.3.2. Composition.....	6
I.3.2.1. Les bases minérales.....	7
I.3.2.2. Les bases synthétiques.....	8
I.3.2.3. Les huiles d'origine végétale .....	10
I.3.3. Propriétés physico-chimiques des huiles.....	10
I.3.4. Domaine de performance d'une huile de lubrification.....	12
I.4. Les additifs ou dopes.....	13
I.4.1. Additifs améliorant la stabilité chimique de l'huile ou inhibant les effets des produits de dégradation.....	14
I.4.2. Les additifs améliorant les propriétés rhéologiques des lubrifiants .....	15
I.4.3 Les additifs extrême pression (EP) et anti-usure .....	16
I.5. Viscosité des huiles lubrifiantes.....	17
I.5.1. Définition de la viscosité.....	17
I.6. Variation de la viscosité avec la température.....	19
I.6.1. Lois de variation.....	19

I.6.2 Indice de viscosité .....	20
I.7 Variation de la viscosité avec la pression.....	22
I.8 Le taux de cisaillement .....	23
I.9 Comportements rhéologiques des huiles lubrifiantes.....	24
I.9.1 Equations constitutives .....	24
I.9.2 Fluide newtonien.....	25
I.9.3 Fluides non newtoniens.....	26
I.9.3.1 Fluide polaire à couple de contraintes.....	26
I.9.3.2 Fluides visqueux non linéaires.....	27
I.9.3.3 Fluide viscoplastique ou fluide de Bingham ou fluide à seuil .....	30
I.10 Conclusion.....	31

**CHAPITRE II : CINEMATIQUE ET DYNAMIQUE DES FLUIDES NON NEWTONIENS A  
COUPLE DE CONTRAINTES .....33**

II.1 Introduction.....	33
II.2 Présence des couples de contraintes dans les huiles lubrifiantes dopées.....	33
II.3 Historique.....	34
II.4. Contraintes et équations de mouvement .....	39
II.5. Cinématique des milieux continus.....	42
II.6. Equation d'énergie.....	47
II.7. Equations constitutives pour fluides visqueux linéaires.....	57
II.8. Fluides visqueux incompressibles : Ecoulement général.....	62
II.9. Conclusion.....	65

<b>CHAPITRE III : THEORIE DE LA LUBRIFICATION THERMO-HYDRODYNAMIQUE (THD) DES PALIERS LUBRIFIES PAR DES FLUIDES A COUPLE DE CONTRAINTES.....</b>	<b>66</b>
III.1 Introduction .....	66
III.2. Paliers hydrodynamiques .....	67
III.2.1. Paliers lisses cylindriques .....	67
III.2.2. Paliers à films amortisseurs (Squeeze Film Damper Bearings).....	69
III.2.3. Paliers à géométrie variables (Paliers à patins oscillants).....	70
III.3. Lubrification THD des paliers à film incompressible.....	73
III.4. Equations de base de la dynamique des fluides à couple de contrainte.....	78
III.4.1. Equations de mouvement d'un fluide à couple de contrainte.....	79
III.4.2. Equation de continuité d'un écoulement incompressible.....	79
III.4.3. Equation d'énergie.....	80
III.5 .Analyse dimensionnelle des équations de mouvement d'un fluide polaire.....	80
III.6. Analyse dimensionnelle de l'équation d'énergie .....	84
III.7. Profils des vitesses.....	85
III.7.1 . Cas d'un fluide à couple de contrainte piézo-visqueux.....	85
III.7.2. Cas d'un fluide à couple de contrainte thermo-visqueux.....	88
III.8. Dérivation des équations de Reynolds modifiées.....	88
III.8.1. Cas d'un fluide à couple de contrainte piézo-visqueux.....	89
III.8.2. Cas d'un fluide newtonien thermo-visqueux.....	90
III.8 .3. Cas d'un fluide newtonien piézo-visqueux en écoulement isotherme.....	90
III.9. Conditions limites associées à l'équation de Reynolds.....	90
III .10. Equation géométrique du film pour un palier compliant.....	92

III.11. Performances hydrodynamiques du palier.....	95
III.11.1. Champ de pression dans le film.....	95
III.11.2. Action du fluide sur les parois du contact.....	95
III.11.3. Vitesses d'écoulement moyennes et débit de fuite ( Side leakage flow).....	97
III.11 .4. Puissance dissipée (power loss) .....	97
III.12. Lois de variations viscosité- température des huiles.....	98
III.13. Lois de variation viscosité- pression .....	100
III.14. Algorithme de calcul THD.....	102
III.15. Equation de la chaleur et conditions limites associées.....	105
III.16. Bilan thermique global : Approche THD simplifiée .....	107
III.17. Conclusion.....	109

**CHAPITRE IV : COMPORTEMENT DYNAMIQUE NON LINEAIRE DES PALIERS DE  
MOTEURS A COMBUSTION INTERNE .....110**

IV.1. Introduction.....	110
IV.2. Analyse théorique.....	115
IV.2.1. Equations générales de base.....	115
IV.2.2. Equations de Reynolds modifiée pour un fluide piézo-visqueux à couple de contraintes.....	116
IV.2.3. Formulation de l'équation de Reynolds modifiée par les différences finies..	119
IV.2.4. Equations d'équilibre et orbite du centre du maneton.....	124
IV.2.5. Caractéristiques hydrodynamiques .....	127
IV.2.5.1. Débit de fuite latéral.....	127
IV.2.5.2. Puissance dissipée.....	129

IV.3. Analyse thermique : Approche thermique globale.....	130
IV.4. Procédure de calcul.....	135
IV.5. Résultats .....	136
IV.5.1. Validation.....	141
IV.5.1.1. Analyse isotherme.....	143
IV.5.2. Comparaison des analyses thermiques et isothermes.....	151
IV.6. Conclusion .....	156
<b>CHAPITRE V : ANALYSE DES EFFETS DE COUPLE DE CONTRAINTES DANS LES</b>	
<b>PALIER A FEUILLES .....</b>	<b>158</b>
V.1. Introduction.....	158
V.2 . Analyse théorique.....	159
V.2.1 Equation de Reynolds modifiée et son processus de perturbation analytique.....	159
V.2.2 Conditions aux limites pour équations normalisées d'ordre 0 et 1.....	167
V.3. Détermination de la position d'équilibre statique par itération .....	168
V.4. Performances statiques du palier.....	170
V.4.1 Débit de fuite latéral .....	170
V.4.2 Puissance dissipée .....	172
V.4.3. Formulation par différences finies des équations aux dérivées partielles gouvernantes.....	172
V.5 Procédure de calcul.....	178
V.6 Résultats et discussion .....	179
V.6.1 Validation .....	179

V.6.2. Effets des couples de contraintes sur les de performances du palier à feuilles en régime permanent.....	182
V.6.3. Effets des couple de contraintes sur les coefficients dynamiques du film à air.....	193
V.7. Conclusion .....	207
<b>CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES.....</b>	<b>210</b>
<b>ANNEXE A</b> : Equations générales de la théorie du micro-continuum de V. K. Stokes pour les fluides compressibles .....	214
<b>ANNEXE B</b> : Pseudo-code of the global thermal approach .....	217
<b>ANNEXE C</b> : Pseudo-code of the solution method of inverse elasto-aerodynamic lubrication problem .....	220
<b>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....</b>	<b>223</b>
<b>NOMENCLATURE.....</b>	<b>235</b>
<b>LISTE DES ILLUSTRATIONS.....</b>	<b>241</b>

## INTRODUCTION GENERALE

Dans les études de simulation numérique des problèmes de lubrification fluide, nous supposons généralement que le comportement des fluides lubrifiants est Newtonien. Néanmoins, les applications pratiques de la lubrification montrent que le modèle de fluide newtonien ou visqueux linéaire ne constitue pas une approche satisfaisante des problèmes de lubrification avec des fluides dopés ou pollués.

Des études expérimentales ont montré que les fluides dopés ou pollués ont un comportement rhéologique non-Newtonien et leur écoulement ne peut être décrit par la théorie des milieux continus classique qui néglige la taille des particules. Dans la littérature technique, il existe plusieurs théories permettant de décrire l'écoulement de ces fluides dits à rhéologie complexe. Parmi ces théories, la théorie des milieux continus de Vijay Kumar Stokes développée à partir des travaux des frères Cosserat dans le cas des solides élastiques polaires semble la plus simple et la plus utilisée car elle permet de tenir compte de la taille des particules en mouvement et des couples de volume et de contrainte dus à la présence des additifs et des polluants. Cette théorie jugée plus complète a été adoptée dans la présente étude aussi bien pour l'analyse Thermo-Hydro-Dynamique (THD) des paliers dynamiquement chargés tels que les paliers de moteurs à combustion interne que pour l'analyse aérodynamique isotherme des paliers à feuilles MITI de première génération utilisant l'air pollué comme lubrifiant. Ces paliers sont largement utilisés dans les machines tournantes modernes fonctionnant à des vitesses théoriquement illimitées tels que les compresseurs, les micro-turbines utilisés dans les MEMS (Micro-Electro-Mechanical-Systems) à cause de la faible énergie dissipée dans le film d'air. C'est ainsi que les paliers aérodynamiques ont reçu dans ces dernières décennies une attention considérable et trouve des applications de plus en plus nombreuses dans le cas où des vitesses élevées, de faibles charges et une grande précision de guidage sont nécessaires, les applications aéronautiques concernent principalement des groupes auxiliaires de puissance (APU) et des machines de conditionnement d'air (ACM) équipant les avions civils et militaires.

D'autre part, la théorie de lubrification isotherme a été largement utilisée dans les études de simulation des paliers fluides et ce depuis la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle. Cette théorie,

basée sur l'emploi de l'équation de Reynolds proposée en 1886, s'est avérée impuissante à analyser précisément les effets thermiques dans les paliers hydrodynamiques fonctionnant dans des conditions sévères (charges et vitesses élevées) en l'occurrence les paliers dynamiquement chargés de moteurs thermiques. C'est pourquoi dès les débuts du XX<sup>ème</sup> siècle, les chercheurs ont essayé de mettre au point des approches précises pour bien évaluer les champs de température dans les parties fluide et solide du contact lubrifié.

Dans la première partie de ce travail nous nous sommes intéressés à l'analyse théorique des effets combinés du paramètre de couple des contraintes (modèle du fluide polaire) et de la piézo-viscosité sur le comportement dynamique d'un palier de bielle revêtu avec une couche élastique d'un moteur à combustion interne en utilisant une approche thermique globale basée sur le concept de «température effective». Cette analyse repose sur la résolution d'un problème de lubrification inverse non linéaire (c'est-à-dire à charge imposée) gouverné par l'équation de Reynolds modifiée couplée aux équations d'équilibre du maneton dans le repère mobile lié à la bielle. La résolution de ces dernières par la méthode itérative de Newton-Raphson amortie permet de prédire le lieu du centre du maneton dans le palier de tête de bielle et ce pour un cycle thermodynamique du moteur thermique accompli après deux tours de vilebrequin correspondant à quatre courses du piston.

Dans la seconde partie, nous avons mené une étude du comportement statique et dynamique linéaire d'un palier à feuilles compliant (déformable) lubrifié par un gaz qui est de l'air pollué modélisé comme étant un fluide à couple de contraintes en régime isotherme. Dans cette approche dynamique, le film d'air est modélisé par huit coefficients dynamiques, à savoir : quatre coefficients de raideur et quatre coefficients d'amortissement. Pour calculer ces coefficients, nous avons utilisé une technique basée sur la perturbation analytique de l'équation de Reynolds modifiée écrite en régime dynamique. Une étude des effets des couples de contraintes, et des déformations statiques et dynamiques des feuilles sur le comportement dynamique du palier est aussi envisagée.

Le mémoire de thèse comprend cinq chapitres, une introduction et une conclusion générale.

Le premier chapitre est une étude complètement bibliographique sur les propriétés physicochimiques et rhéologiques des lubrifiants. Dans ce chapitre, nous avons mis en évidence la diversité et la complexité des lois de comportement des fluides lubrifiants. Il ressort de cette étude bibliographique que le modèle du fluide Newtonien ne peut pas être utilisé pour les études de simulation des systèmes lubrifiés surtout lorsqu'il s'agit de lubrifiants dopés ou pollués.

Dans le second chapitre, nous présentons de façon détaillée toute la théorie relative à l'étude cinématique et dynamique des fluides non Newtoniens à couple de contraintes pour les cas incompressible et compressible. A travers cette étude, nous établissons les différentes lois de conservation d'un milieu fluide à couple de contrainte, à savoir les équations de conservation masse-quantité de mouvement-moment de la quantité de mouvement-énergie.

Le troisième chapitre est dévolu d'une part à la présentation des équations fondamentales de la mécanique des milieux continus de V.K. Stokes et d'autre part à la dérivation de l'équation de Reynolds modifiée qui permet de décrire le comportement d'un fluide polaire ou à couple de contraintes, il est alors nécessaire d'associer l'équation d'énergie dans le film et les équations de conduction de la chaleur dans les solides. De nouvelles expressions permettant de calculer les performances hydrodynamiques sont également établies dans le cas non-Newtonien. La théorie de lubrification THD est présentée de façon simple en se basant sur une approche thermique globale.

Le quatrième chapitre est consacré à l'étude des effets combinés du paramètre de couple des contraintes (fluide polaire), de piézo-viscosité, et d'élasticité des revêtements de surface sur le comportement dynamique d'un palier de bielle d'un moteur à combustion interne (moteur Diesel marin) en utilisant une approche thermique globale basée sur le concept de «température ou viscosité effective».

Enfin, le chapitre V sera réservé à la présentation de la théorie des paliers à gaz ainsi que l'analyse des effets des couples de contraintes et des déformations dynamiques des feuilles sur le comportement dynamique linéaire des paliers aérodynamiques à feuilles de première génération en utilisant la théorie des milieux continus de V.K. Stokes. Le lubrifiant gazeux, supposé pollué, est modélisé comme un fluide non-Newtonien à couple de contrainte. L'approche utilisée est basée sur la perturbation analytique de l'équation de Reynolds modifiée.

**CHAPITRE I**  
**PROPRIETES PHYSICO-CHIMIQUES ET RHEOLOGIQUES**  
**DES FLUIDES LUBRIFIANTS**

## **I.1 Introduction**

La lubrification est l'action d'assurer un film fluide entre deux pièces en mouvement relatif l'une par rapport à l'autre afin de réduire la résistance au glissement provoquant l'échauffement et l'usure des surfaces. Elle est donc régie par l'aptitude à vaincre toutes les contraintes qui l'opposent durant le fonctionnement requis du système lubrifié (charge, vitesse, température, irrégularité des surfaces, abrasion...).

Pour ce faire, le lubrifiant doit disposer de plusieurs propriétés le qualifiant à garantir un fonctionnement optimal du système lubrifié.

Lorsque deux corps en contact sont animés de mouvements relatifs, notamment à une vitesse relative assez grande, plusieurs phénomènes peuvent se produire tels que l'échauffement des deux corps, l'usure des surfaces en contact, bruit ou émissions acoustiques, odeur...etc. et ce, comme effet du frottement dû aux états des surfaces qui ne peuvent être parfaitement lisses.

Les frottements engendrent des efforts mécaniques (forces et couples) dont la principale caractéristique est de contrarier systématiquement ou d'empêcher les mouvements relatifs et les déformations des corps. Ces efforts prennent naissance non seulement au niveau des surfaces en contact, mais aussi au sein des matériaux solides ou fluides qui se déplacent ou se déforment. Le frottement n'est pas un problème à deux dimensions mais bel et bien à trois dimensions. L'énergie mécanique perdue par frottement, transformée en chaleur, est généralement irrécupérable et parfois très difficile à évacuer. Les aspects thermiques du frottement peuvent avoir des conséquences inattendues sur le bon fonctionnement du système lubrifié.

L'usure, multiforme, ne peut être réduite à une simple perte de matière. Sous ce terme se cachent des phénomènes extraordinairement diversifiés, qui provoquent un

ensemble de transformations physico-chimiques et géométriques des couches superficielles soumises au frottement.

Aujourd'hui, les compagnies pétrolières et de l'industrie des moteurs rencontrent deux compétitions, à savoir les normes exigées par les gouvernements et l'évolution rapide de la technologie [1]. En effet, une bonne huile de lubrification contribue durant son fonctionnement à la réduction des pertes d'énergie et à la protection de l'environnement [2].

Les lubrifiants peuvent être des produits :

- ◆ gazeux (air) ;
- ◆ liquides telles que les huiles ;
- ◆ semi-liquides ou semi-solide (graisses) ;
- ◆ solides (graphite, etc.).

## **I.2. Fonctions des lubrifiants**

Un lubrifiant a pour fonction de :

- diminuer le frottement et par conséquent les pertes d'énergie ;
- réduire l'usure des pièces en contacts en les séparant totalement par un film lubrifiant (régime de lubrification hydrodynamique et hydrostatique) ;
- protéger les organes lubrifiés contre les corrosions humide et acide (turbine à vapeur) ;
- évacuer la chaleur produite lors du mouvement;
- transmettre l'énergie dans les systèmes hydrauliques ;
- absorber les chocs et réduire le bruit ;
- éliminer les impuretés lors des vidanges ou des opérations d'épuration (filtration- centrifugation) ;
- améliorer l'étanchéité vis-à-vis des poussières, des liquides ou des gaz indésirables ou nocifs.

## **I.3. Les huiles**

Les huiles lubrifiantes actuellement utilisées sont généralement constituées d'un fluide de base appelé (base de lubrifiant) qui peut être synthétique, d'origine minérale ou végétale.

Les propriétés de bases lubrifiantes sont généralement modifiées par des composés de structure chimique très variées, appelés additifs ou dopes.

### **I.3.1. Utilisations**

Les huiles constituent la principale classe de lubrifiants aussi bien en ce qui concerne le nombre d'utilisations que le volume de lubrifiant employé dans le monde. L'utilisation des lubrifiants permet :

- ◆ la formation d'un film de séparation (palier porteur entre les surfaces en mouvement relatif). L'épaisseur du film dépend de la vitesse relative, de la viscosité de l'huile et de la charge induisant une pression. Elle est de un à deux ordres de grandeurs plus grande que la rugosité des surfaces des solides ;
- ◆ l'élimination du contact entre les surfaces des solides par les aspérités ;
- ◆ la réduction du coefficient de frottement : il prend une valeur de l'ordre de  $5 \times 10^{-4}$  à  $5 \times 10^{-3}$  ;
- ◆ une usure nulle (sauf fatigue) ; la diminution et l'élimination de la chaleur générée par frottement.

### **I.3.2. Composition**

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser seulement aux huiles lubrifiantes [3]. Dans la plupart des applications modernes, le pouvoir intrinsèque d'une huile minérale n'est pas suffisant. Des produits chimiques de synthèse, appelés additifs, sont donc mélangés à l'huile pour en augmenter les performances et répondre à une demande d'efficacité accrue.

Un lubrifiant complètement formulé comprend une base lubrifiante, un ensemble d'additifs et, dans le cas d'une huile multigrade, un améliorant de viscosité. Le total de ces additifs peut représenter jusqu'à 30% de la composition du produit.

### **I.3.2.1. Les bases minérales**

Faisant partie des diverses familles des hydrocarbures, les huiles à base minérale sont d'origine pétrolière. Elles sont extraites des distillats provenant de la distillation du pétrole brut, elles subissent des opérations de raffinage dont la complexité dépend à la fois de l'origine du brut utilisé et de la qualité recherchée pour les produits finis.

Les huiles de base d'origine minérale regroupent :

- Les huiles de base paraffiniques (molécule à chaîne droite), elles sont stables à l'oxydation peu agressives pour les élastomères, dotées d'un bon indice de viscosité (*VI*) (variation de la viscosité relativement faible avec la température), mais certains constituants cristallisent dès la température ordinaire (figure I.1a).
- Les huiles de base isoparaffiniques (molécules à chaînes ramifiées), elles résistent bien à l'oxydation, sont peu agressives pour les élastomères, se comportent mieux à froid que les précédents, leur indice de viscosité est faible (figure I.1b).
- Les huiles à base minérale qui contiennent des atomes de carbone dans une disposition annulaire en liaisons simples (saturée en hydrogène) sont dites huiles de base naphthéniques (figure I.1c). Elles sont moins stables à l'oxydation mais possèdent de très bonnes caractéristiques d'écoulement aux basses températures malgré leurs faibles (*VI*).
- Les huiles de base aromatiques, délaissées aux vues de leurs mauvaises propriétés viscosité-température, de leur agressivité vis-à-vis des élastomères, et de leur mauvaise stabilité à l'oxydation (figure I.1d).



- ✓ des esters organiques (ester d'acide carboxylique, ester de polyol et polyester) ;
- ✓ divers autres produits organiques (ester de phosphate, polyalkylène glycol).

Les plus employés sont les polyoléfines, les esters d'acides di-carboxyliques et les esters de polyol. Contrairement aux bases minérales, les bases synthétiques ne comportent qu'une seule structure moléculaire, ce qui leur permet de bénéficier de propriétés constantes. Parmi les principales familles de produits utilisés, on mentionnera :

- Les esters aliphatiques qui se caractérisent par un indice de viscosité élevé une faible volatilité, et des propriétés lubrifiantes excellentes.
- Les esters phosphoriques utilisés comme additifs anti-usure, qui présentent un indice de viscosité élevé et sont difficilement inflammables.
- Les silicones et silicates ont un indice de viscosité et un point d'écoulement très bas ; cependant leurs propriétés lubrifiantes ne sont pas très bonnes.
- Les polyphénylethers caractérisés par :
  - une remarquable stabilité à haute température (jusqu'à 450°C environ) ;
  - d'excellentes propriétés lubrifiantes ;
  - un faible *VI* ;
  - très onéreux.
- Les polypropylènes glycols caractérisés par :
  - un *VI* élevé ;
  - un point d'écoulement très bas ;
  - de bonnes propriétés anti-usure ;
  - une stabilité thermique et résistance à l'oxydation assez moyennes.
- Les polyoléfines qui se caractérisent par:
  - un *VI* assez élevé;
  - un point d'écoulement très bas.

Certaines bases synthétiques peuvent être combinées avec des huiles pétrolières afin d'obtenir les propriétés désirées du point de vue de la volatilité à haute température et/ou de la viscosité à basse température.

### **I.3.2.3 Les huiles d'origine végétale (Eco-friendly lubricants)**

Les huiles végétales sont essentiellement constituées d'acides gras, particulièrement d'acide oléique. Contrairement aux huiles de pétrole et aux huiles synthétiques, elles ont l'avantage d'être biodégradables, mais rares sont celles qui sont directement utilisables comme lubrifiants ; la meilleure est sans aucun doute l'huile de ricin, que l'on a parfois utilisée pure.

L'huile de colza brute est relativement peu coûteuse mais elle se révèle difficilement utilisable aussi bien comme fluide lubrifiant que comme carburant. Son utilisation à huile perdue pour les chaînes de tronçonneuses, par exemple, présente certains inconvénients. Dans les moteurs Diesel, on peut, à ses risques et périls, l'utiliser en mélange à volumes égaux avec du kérosène, mais il est préférable de la transformer en ester méthylique de colza (EMC). Cette huile entre cependant dans la composition de quelques lubrifiants biodégradables et dans certaines préparations solubles pour l'usinage des métaux, associée à divers composés chimiques qui empêchent sa décomposition. L'huile de jojoba est utilisée comme lubrifiant pour les moteurs dans les pays où cette plante est cultivée.

### **I.3.3 Propriétés physico-chimiques des huiles**

#### **✓ *Masse volumique***

La masse volumique ou la masse spécifique d'un lubrifiant à une température donnée est la masse de l'unité de volume. Elle diminue légèrement lorsque la température s'élève. A 15°C, les masses volumiques des lubrifiants des moteurs à combustion interne varient entre 0,85 et 0,92 kg/dm<sup>3</sup> pour les huiles à base minérale, semi-synthétiques et synthétiques classiques, alors qu'elles sont de l'ordre de 1 kg/dm<sup>3</sup> pour les huiles de synthèse de type poly glycol.

#### **✓ *Chaleur massique***

La chaleur massique ou la capacité calorifique d'un lubrifiant est la quantité de chaleur fournie à l'unité de masse sous l'effet d'un gradient thermique élevant sa température de 1 Kelvin. Elle est exprimée en  $J.kg^{-1}.K^{-1}$  (généralement, de l'ordre de  $2 kJ.kg^{-1}.K^{-1}$ ).

Elle augmente avec la température et diminue avec la densité.

✓ ***Point d'écoulement***

Le point d'écoulement est la température la plus basse à laquelle l'huile coule encore lorsqu'elle est refroidie, sans agitation et dans des conditions normalisées. Il est exprimé en degrés Celsius, il est considéré comme caractéristique principale pour le choix des huiles de base.

✓ ***Point éclair***

Le point éclair est la température minimale à laquelle les constituants volatils de l'huile peuvent être brûlés au contact d'une flamme. Pour des raisons de sécurité, cette caractéristique est toujours prise en compte dans les spécifications des lubrifiants. Il est exprimé en degré Celsius, elle traduit la stabilité thermique de l'huile et sa résistance à l'inflammation.

✓ ***Indice de basicité***

Durant le fonctionnement du moteur diesel, la combustion génère des produits agressifs contenus dans le combustible ou formés au cours des réactions de combustion tels que l'anhydride sulfureux  $SO_2$  et l'anhydride sulfurique  $SO_3$ . Ces oxydes qui agissent en phase gazeuse et à haute température peuvent se condenser avec la vapeur d'eau formée durant la combustion. Les produits ainsi formés ont un caractère fortement acide et attaquent les parois métalliques du cylindre du moteur et celles du système d'échappement [4]. Il faut alors éliminer ces acides afin de préserver une bonne fiabilité au moteur.

L'indice de basicité ou TBN (Total Base Number) est le nombre de milligrammes de potasse par gramme d'huile (mg KOH/g d'huile). La mesure du TBN se fait par la méthode ASTM D-974 (American Society for Testing and Materials), il présente la réserve de l'huile en alcalinité [5]. C'est le pouvoir basique ayant le potentiel de neutraliser l'acidité indésirable de l'huile [6,7].

### **I. 3. 4. Domaine de performance d'une huile de lubrification**

Les performances d'une huile de lubrification ne sont pas visibles à l'œil nu, car toutes les fonctions se déroulent dans des systèmes fermés. Le domaine de performance d'une huile de lubrification ou pouvoir lubrifiant couvre l'ensemble des propriétés inhérentes qui favorisent à l'huile un bon comportement face à la sévérité des conditions de fonctionnement. Parmi ces propriétés, nous citons :

#### **✓ *Résistance à l'oxydation***

Sous l'action conjuguée de l'oxygène de l'air et de la température, les molécules d'hydrocarbures et de fluides de synthèse s'oxydent, en se transformant en une série de produits oxygénés plus ou moins polymérisés, dont certains à fonction acide.

L'oxydation de l'huile se fait en deux étapes successives, la première appelée phase d'induction durant laquelle le processus est lent. La deuxième est rapide dite phase d'évolution, elle correspond à une oxydation sévère. Cette phase est catalysée par la présence de particules métalliques telles que le fer, le cuivre et le chrome [8].

L'oxydation de l'huile génère un ensemble de phénomènes entraînant des conséquences nuisibles à l'huile, donc au moteur et en particulier son circuit de lubrification. Elle est considérée comme facteur capital de la dégradation des huiles de lubrification [9-10].

Une bonne formulation de l'huile de lubrification et un bon choix de base ainsi que son degré de raffinage favorisent une meilleure stabilité à l'oxydation [11-14]. Une bonne résistance de l'huile à l'oxydation réduit bien la reproduction des phénomènes agressifs contre la qualité de lubrification et l'état du moteur [15].

#### **✓ *Stabilité thermique***

La stabilité thermique de l'huile est le caractère qui définit l'aptitude de l'huile à fonctionner à haute température sans perdre sa qualité lubrifiante, tout en conservant ses propriétés physico-chimiques et rhéologiques. La résistance à

l'inflammabilité caractérisée par un point éclair convenable permet un fonctionnement sécurisé de la lubrification du système. La volatilité minimise les pertes par évaporation, ce qui préserve la quantité nécessaire pour le graissage [16].

✓ ***Aptitude à fonctionner en atmosphère polluée***

Le fonctionnement du moteur connaît la reproduction de plusieurs phénomènes qui peuvent faire l'objet de régénération d'éléments dont la présence dans le moteur est indésirable. Afin d'assurer sa fonction de lubrification, l'huile de lubrification doit avoir une bonne immunité vis à vis des éléments polluants. Ce caractère permet à l'huile de neutraliser ces éléments ou de résister à leur influence sur le bon fonctionnement de la lubrification du système.

✓ ***Adaptation à la variation des paramètres de fonctionnement du système lubrifié***

Les conditions thermodynamiques des cycles des moteurs thermiques exigent des variations des paramètres de fonctionnement avec des gradients élevés et sur des plages assez larges (pression, température, quantité de chaleur échangée...) [17]. Ces variations affectent la nature de l'huile, ce qui entraîne une perte de sa qualité lubrifiante. L'huile de lubrification doit résister à toute variation des paramètres de fonctionnement.

## **I.4. Les additifs ou dopes**

Les additifs de lubrification sont des substances que l'on ajoute à l'huile de base dans le but d'améliorer ses propriétés naturelles et lui conférer de nouvelles performances. Convenablement ajoutés à l'huile de base, le nombre des additifs peut atteindre une valeur égale à vingt (20).

Les tribologistes reconnaissent bien l'importance de la structure chimique d'un additif et son influence sur les performances de l'huile finie. Plus de quarante ans ont, par ailleurs, été consacrés à ces études [18]. Les études expérimentales étaient insuffisantes pour maîtriser le comportement de l'additif dans le fonctionnement du lubrifiant et sa réactivité avec les autres additifs [18]. En effet, les interactions des

additifs entre eux ainsi qu'avec l'huile de base peuvent favoriser des effets synergiques comme elles peuvent entraîner un comportement antagoniste [19].

Les additifs se distinguent par leurs compositions chimiques et leurs fonctions.

On peut classer les additifs en trois grandes catégories :

- ceux qui améliorent la stabilité chimique de l'huile ou inhibent les effets des produits de dégradation;
- ceux qui améliorent les propriétés rhéologiques;
- ceux qui protègent les surfaces métalliques et ont un effet anti-usure.

#### **I.4.1. Additifs améliorant la stabilité chimique de l'huile ou inhibant les effets des produits de dégradation**

##### **✓ *Les additifs antioxydants:***

Ces produits ont pour rôle de ralentir et si possible de supprimer les phénomènes d'oxydation du lubrifiant. Ils s'agissent de trois façons différentes :

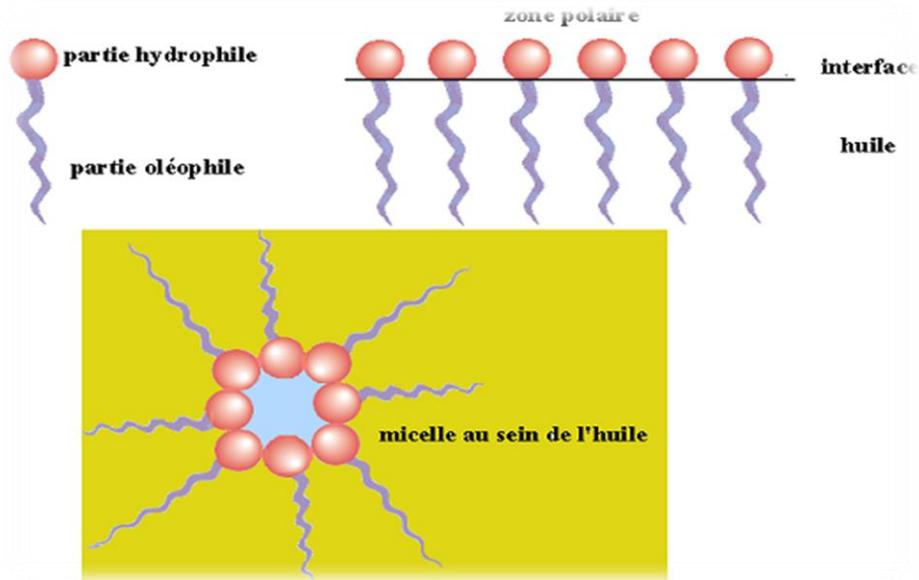
- par blocage du processus de destruction en captant les radicaux libres des chaînes moléculaires. Ces produits sont généralement des phénols et des amines
- par blocage du processus de destruction en captant les radicaux libres des chaînes moléculaires. Ces produits sont généralement des phénols et des amines ;
- par destruction des peroxydes qui se forment lors des phénomènes de détérioration. Ces composés sont des dithiophosphates et des dithiocarbamates ;
- par désactivation des ions métalliques et par formation d'un film protecteur sur les surfaces afin d'éliminer l'action catalytique des métaux. Ces additifs sont des phénols et des phénates.

##### **✓ *Les additifs détergents et dispersants***

Ces additifs sont destinés à limiter les effets produits par l'oxydation que les antioxydants ne peuvent totalement empêcher. Ils possèdent une structure

tensioactive constituée d'une partie organique soluble dans l'huile et d'une partie polaire. Ce caractère est responsable de deux comportements l'adsorption sur les surfaces polaires et l'auto association dans l'huile pour former les micelles figure (I.2).

- Les dispersants sont des tensioactifs organiques
- Les détergents sont d'acides organiques ou de phénols et de métaux divalents (calcium et magnésium)



**Figure I.2:** Organisation des additifs dispersants et détergents dans l'huile [20]

#### **I.4.2 Les additifs améliorant les propriétés rhéologiques des lubrifiants**

##### ***- le point d'écoulement des huiles et les additifs anti-congelants***

Optimisateurs du point d'écoulement, ils permettent l'écoulement de l'huile même encore à des basses températures par retardement de la formation de cristaux de paraffine. Les petits cristaux de paraffine qui se forment lors du refroidissement d'huile sont enveloppés par l'additif et ne peuvent fusionner, ce qui fait que l'huile reste fluide plus longtemps. Les produits dits <<anticongelants>> commercialisés sont des alkylnaphtènes, des polyacrylates d'alcools à longues chaînes ou des polystyrènes alkylés.

### ***- Les additifs améliorant l'indice de viscosité VI (Viscosity Index Improver )***

Le VI caractérise la chute de viscosité du lubrifiant en fonction de la température par rapport à deux références de même viscosité à 100°C ; une base naphénique dont le VI égal à 0, et une base paraffinique égal à 100. Plus l'indice est élevé, plus le comportement viscosité-température est meilleur.

La volonté des pétroliers ou des raffineurs du pétrole dans les années cinquante d'obtenir des lubrifiants dont les VI soient supérieurs à 100, les a conduits à ajouter à leurs bases minérales de longues chaînes de polymères à poids moléculaire élevé. Ces additifs apportent aux huiles de base un effet épaississant à haute température. Cet effet est produit par le gonflement et l'étirement de ces chaînes provoqués par la diminution des forces de cohésion solvant-polymère lorsque la température augmente. On compense ainsi la chute de la viscosité, jusqu'à multiplier par trois la viscosité à haute température des huiles de base à haute température.

Les répercussions de ces progrès sur les huiles de moteur sont à l'origine des lubrifiants multigrades qui obéissent aujourd'hui à un niveau de viscosité ou grade spécifié à la fois à haute température (100°C), et à basse température (-18°C).

Ces additifs sont très largement utilisés et actuellement deux grandes familles sont commercialisées :

- Les polymères hydrocarbonés ;
- Les polymères à fonction ester.

### ***- Les produits anti-moussants***

La présence d'agents tensioactifs dans les formules et la forte agitation en présence de gaz provoque la formation de mousse. L'ajout de quelques parties par million (PPM) de dérivés de silicones permet d'éviter ce phénomène.

### **I.4.3 Les additifs extrême pression (EP) et anti-usure**

Lorsque le lubrifiant fonctionne en régime hydrodynamique, le film d'huile est stable et il n'y a pas réellement de problème d'usure. En conditions plus sévères, si les pièces se rapprochent, si le film se rompt, le frottement peut provoquer de

l'arrachement de métal. En conditions extrêmes, l'échauffement peut conduire à la soudure des pièces (grippage).

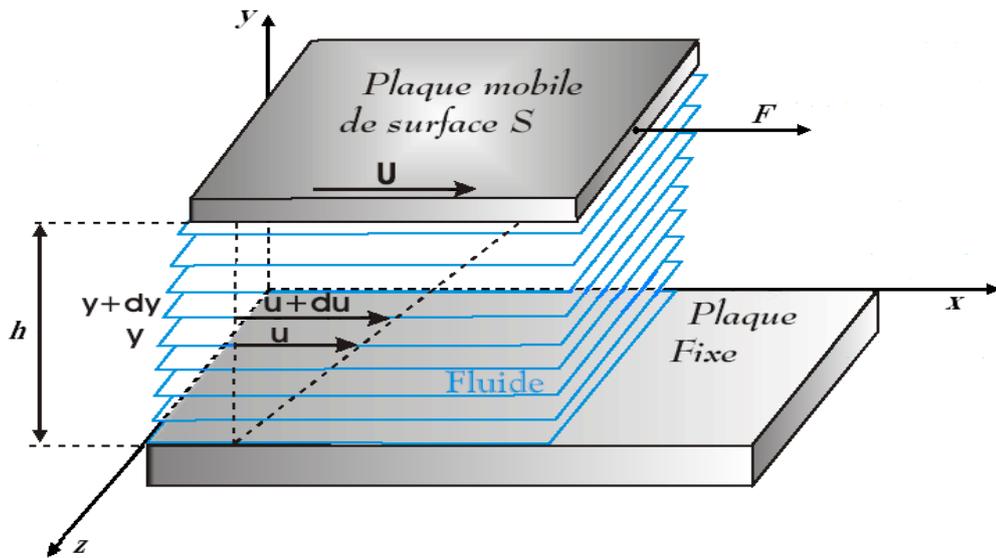
Les additifs extrême pression et anti-usure ont pour rôle de créer un lubrifiant solide par réaction avec la surface. Les produits commerciaux sont des composés organiques contenant du chlore, du soufre ou du phosphore. Ces atomes réagissent avec le métal au moment de la décomposition thermique de l'additif en créant une interface plus ductile qui joue le rôle de lubrifiant solide [21]. On utilise par exemple des produits de réaction du soufre avec des oléfines, des dérivés dithiophosphoriques ou des hosphomolybdates.

## **I.5. Viscosité des huiles lubrifiantes**

La viscosité est la propriété qui caractérise la résistance d'un fluide à l'écoulement. Elle détermine alors l'essentiel des pertes par frottement et l'épaisseur des films d'huile. Elle est certainement la plus importante des propriétés des huiles. Elle est définie comme étant la résistance qu'oppose un fluide au glissement de ses molécules les unes sur les autres. La viscosité est une grandeur sensiblement dépendante de la température. A basse température la viscosité est trop élevée, ainsi les frottements entre les surfaces des pièces mobiles sont importants. Plus l'huile est chaude, plus la viscosité est assez basse pour réduire les frottements internes. Ils existent deux types de viscosité : la viscosité dynamique et la viscosité cinématique.

### **I.5.1. Définition de la viscosité**

Selon la norme N.F. T 60-100 de novembre 1959 : " la viscosité d'un liquide est la propriété de ce liquide, résultant de la résistance qu'opposent ses molécules à une force tendant à les déplacer par glissement dans son sein ". Ainsi la viscosité d'un fluide est la résistance opposée par ce fluide à sa mise en mouvement.



**Figure I.3 :** Écoulement laminaire de Couette entre deux plans parallèles.

La résistance peut être calculée par la formule de Newton relative à l'écoulement laminaire d'un fluide entre une surface mobile animée d'une vitesse  $U$  et une surface fixe (figure I-3). Pour visualiser le cisaillement qui s'effectue dans un film fluide, il faut imaginer que le film se compose de plusieurs couches (pellicules) semblables à une plate-forme de cartes [22].

La couche liquide en contact avec la plaque mobile s'accroche à sa surface et toutes les deux se déplacent à la même vitesse  $U$ . De même, la couche liquide en contact avec la deuxième surface fixe est stationnaire. Entre ces deux surfaces les différentes couches dans l'intervalle se déplacent à des vitesses directement proportionnelles à leur distance de la surface fixe. Par exemple, à une distance  $y$  de la surface fixe la vitesse de la couche de fluide est  $u$ , et devient  $u + du$  à la distance  $y + dy$ .

Alors la contrainte tangentielle  $\tau_{xy}$ , appelée fréquemment contrainte de cisaillement et notée  $\tau$ , est donnée par :

$$\tau = \tau_{xy} = \mu \frac{du}{dy} \quad (\text{I.1})$$

où  $\mu$  est un coefficient caractéristique du fluide appelé coefficient de viscosité dynamique et  $(du/dy)$  est le taux de cisaillement ou le gradient de vitesse ou le taux de déformation.

Plus le fluide est visqueux, plus il s'oppose à sa mise en mouvement. En étudiant le rapport entre  $F/S$  (homogène à la contrainte) et  $U/h$  (homogène au gradient de la vitesse ou à la vitesse de cisaillement) nous mettons en évidence plusieurs types de comportement rhéologique.

Comme la viscosité détermine la capacité de charge, l'épaisseur du film d'huile et les pertes par frottement, connaître et modéliser sa variation en fonction de différents paramètres est primordiale dans l'étude des paliers.

## I.6. Variation de la viscosité avec la température

### I.6.1 Lois de variation

La majorité des lubrifiants montrent une variation exponentielle décroissante avec la température, elle chute très rapidement aux basses températures puis plus lentement aux températures élevées (figure I.4).

Il existe dans la littérature plusieurs modèles analytiques pour la variation de la viscosité avec la température parmi lesquelles nous retiendrons :

- La relation de Reynolds modifiée avec une viscosité corrective  $\mu_c$  :

$$\mu = \mu_0 e^{-\beta(T-T_0)} + \mu_c \quad (I.2)$$

où est la viscosité dynamique à la température  $T$ ,  $\beta$  le coefficient de thermo viscosité et  $(\mu_0 + \mu_c)$  est la viscosité à  $T_0$ .

- L'équation de Mc Coull et Walther :

$$\log_{10}[\log_{10}(\nu + c_1)] = c_2 - c_3 \log_{10} T \quad (I.3)$$

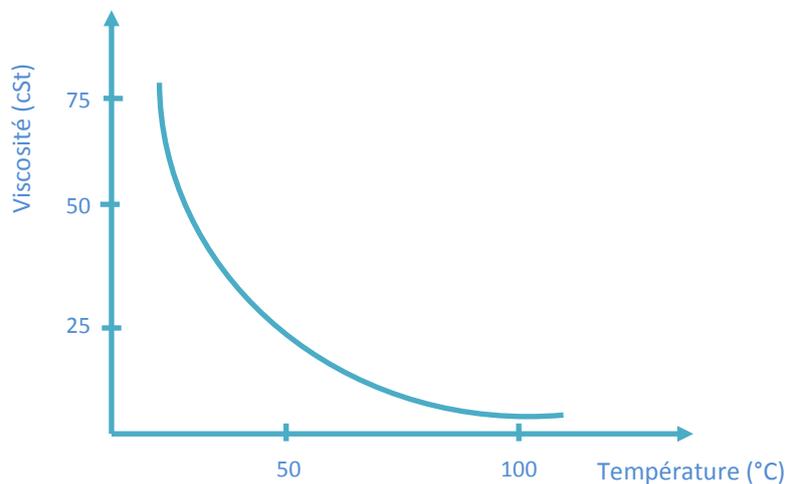
où  $\nu$  représente la viscosité cinématique (en *centistokes* ou  $mm^2/s$ ),  $c_1$  une constante valant entre 0,6 et 0,8 (l'ASTM recommande 0,7),  $T$  la température absolue en ( $^{\circ}K$ ),  $c_2$  et  $c_3$  représentent des constantes qui dépendent du lubrifiant.

La relation (I.2) est une extension de l'approche proposée par Reynolds sur la forme  $\mu = \mu_0 e^{-\beta(T-T_0)}$  où  $\mu_0$  est la viscosité dynamique à la température  $T_0$ , et  $\beta$  le coefficient de thermo-viscosité en  $^{\circ}(C^{-1})$ .

La viscosité corrective  $\mu_c$  permet d'éviter des problèmes numériques dus à une décroissance trop importante de la viscosité à haute température. Cependant elle ne reste valable que localement, près des points d'identification.

La loi de McCoull et Walther est une expression souvent utilisée car elle a été adoptée par la société américaine de tests de matériaux (ASTM).

De plus une représentation de  $\log_{10}[\log_{10}(\nu + c_1)]$  en fonction de  $\log_{10} T$  conduit à une relation linéaire de la viscosité en fonction de la température.



**Figure I.4 :** Variation de la viscosité avec la température pour une huile minérale paraffinique (huile Total Presilia 32) [23].

## I.6.2 Indice de viscosité

La notion de l'indice de viscosité a été introduite en 1929 par Dean et Davis [24]. Elle traduit la variation de la viscosité en fonction de la température.

La viscosité des huiles décroît, plus ou moins fortement selon leurs natures chimiques, lorsque la température s'élève. Ainsi celle d'une huile minérale paraffinique est divisée par sept quand la température passe de 60°C à 120°C.

Pour déterminer l'indice de viscosité d'une huile ayant U à 40°C et P à 100°C

comme valeurs de  $\log(\nu + 0.6)$  où  $\nu$  est la viscosité cinématique, on recherche les valeurs respectives  $L$  et  $H$  à 40°C des huiles de références à caractères paraffinique et naphthénique ayant une valeur commune  $P$  à 100°C (figure I.5). L'indice de viscosité  $VI$  (Viscosity Index) est alors donné par [24] :

$$VI = 100 (L-U)/(L-H) \quad (I.4)$$

La norme ASTM D-2270 permet la détermination directe de l'indice de viscosité d'une huile. Elle consiste à mesurer sa viscosité cinématique à 40°C et à 100°C pour utiliser les tables ASTM.

Des divers indices de viscosité qui ont été proposés jusqu'à ce jour, seul celui de Dean et Davis est d'usage universel, bien qu'il fasse encore l'objet de critiques justifiées. Pour définir leur indice, Dean et Davis s'étaient référés à deux gammes d'huiles [25] ;

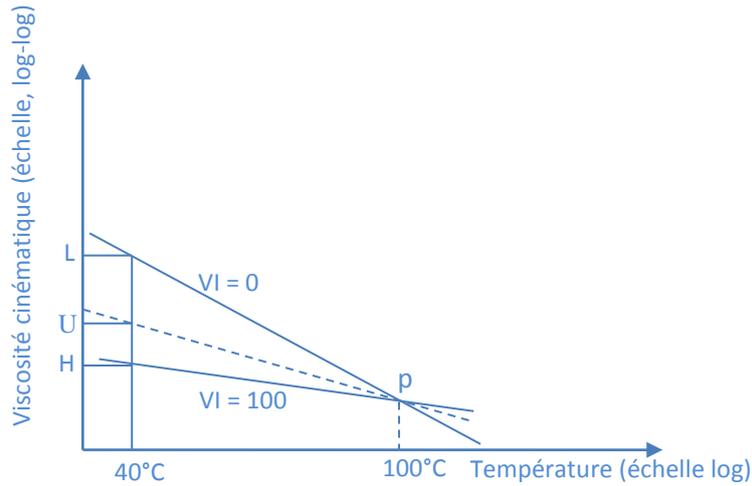
- ◆ l'une de type naphthénique, était affectée de l'indice 0, en raison de son mauvais comportement viscosité-température ;
- ◆ l'autre de type paraffinique, était affectée de l'indice 100, en raison de son bon comportement viscosité-température.

Si l'on veut calculer le  $VI$  d'une huile inconnue, on doit déterminer d'abord :

- ◆ sa viscosité en cSt à 40°C :  $U$  ;
- ◆ sa viscosité en cSt à 100°C :  $Y$ .

Il faut chercher ensuite dans chacune des deux gammes étalons, l'huile de même viscosité  $Y$  à 100°C. A 40°C, l'huile étalon d'indice 100 aura une viscosité  $H$ , tandis que l'huile étalon d'indice 0 aura une viscosité  $L$ .

où  $L$ ,  $H$  et  $U$  sont respectivement les viscosités cinématiques en centistokes (cSt) des huiles de référence et de l'huile étudiée à 40°C (figure I.5).



**Figure. I.5:** Définition de l'indice de viscosité.

Les trois huiles ayant la même viscosité à 100°C. Des tables donnent les valeurs de  $L$ ,  $H$  et  $L-H$  pour différentes valeurs de la viscosité  $P$  à 100°C.

Pour une huile de  $VI$  inférieur à 100°C, on appliquera la formule suivante :

$$VI = 100 \frac{(L - U)}{(L - H)} \quad (I.5)$$

Pour une huile de  $VI$  supérieur à 100, la formule ci-dessus ne donne pas entière satisfaction. En effet, pour les valeurs élevées de  $VI$  tel que 150, il est possible que deux huiles ayant la même viscosité à 40°C et des viscosités différentes à 100°C, aient le même indice de viscosité. Pour cette raison, l'ASTM a créé un autre mode de calcul de  $VI$

$$VI = \frac{10^N - 1}{0.00715} + 100 \quad (I.6)$$

$$N = \frac{\log_{10} H - \log_{10} U}{\log_{10} Y} \quad (I.7)$$

## I.7. Variation de la viscosité avec la pression

Les huiles lubrifiantes dans leur majorité, sont piézo-visqueuses, c'est-à-dire que leur viscosité monte avec la pression. Dans le cas des paliers, la pression peut dépasser 200 MPa, ce qui peut avoir des influences non négligeables sur la viscosité.

La viscosité peut varier en fonction de la pression selon une relation exponentielle ou même de puissance.

En 1893, Barus décrit la loi exponentielle [26] ;

$$\mu = \mu_0 e^{\alpha p} \quad (1.8)$$

ou  $\mu_0$  représente la viscosité dynamique à la pression atmosphérique,  $\alpha$  le coefficient de piézo-viscosité propre au type d'huile et  $p$  la pression.

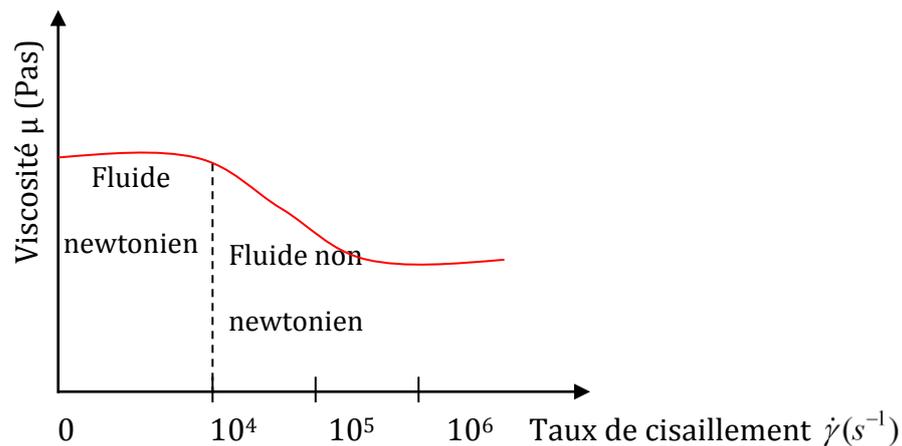
Une deuxième loi largement utilisée est la loi de puissance [27] ;

$$\mu = \mu_0 e^{-\alpha p} (1 + c_2)^{c_1} \quad (1.9)$$

Avec deux coefficients  $c_1$  et  $c_2$  qui dépendent des propriétés physico-chimiques des lubrifiants.

## I.8. Le taux de cisaillement

Lorsque la viscosité dynamique  $\mu$  varie avec le taux de cisaillement, le fluide est dit non newtonien. Ainsi, des essais réalisés sur un viscosimètre de type Couette et pouvant atteindre des taux de cisaillement supérieures à  $10^6 \text{ s}^{-1}$  montrent que la viscosité du fluide diminue lorsque le taux de cisaillement augmente (figure I.6). Cet effet, généralement réversible est caractéristique des huiles qui comportent des additifs améliorant l'indice de viscosité. Cet effet peut aussi être permanent, il correspond alors à une dégradation du lubrifiant par rupture de certaines chaînes moléculaires.



**Figure I.6 :** Variation de la viscosité avec le taux de cisaillement.

## I.9. Comportements rhéologiques des huiles lubrifiantes

Si le modèle de fluide newtonien décrit bien la très grande majorité des fluides composés de molécules simples tels que l'eau et l'air pur, il existe un bon nombre de fluides dont certains sont utilisés en lubrification (huiles lourdes, graisses, etc.) qui ont un comportement plus complexe.

La définition d'un fluide newtonien est assez restrictive, les contraintes de cisaillement sont proportionnelles aux gradients de vitesse, ce qui implique :

- ◆ dans un écoulement de cisaillement simple, les seules contraintes créées par l'écoulement sont des contraintes de cisaillement ;
- ◆ la viscosité est indépendante du taux de cisaillement ;
- ◆ la viscosité est indépendante du temps et les contraintes s'annulent immédiatement lorsque l'écoulement est arrêté.

Toute déviation de ces règles est le signe d'un comportement non newtonien. La description de ces comportements et leurs interprétations en relation avec la structure microscopique du fluide constitue la discipline appelée rhéologie.

Le terme **rhéologie** fut inventé par Eugène Bingham en 1928. La rhéologie a pour objet l'étude de la déformation des corps, y compris leurs écoulements, sous l'influence de contraintes qui leurs sont appliquées.

L'utilisation des fluides (huiles, etc.) en lubrification, nécessite des études sur leurs lois de comportement rhéologique dans des conditions réelles de fonctionnement de plus en plus sévères.

### I.9.1. Equations constitutives

Le terme de loi de comportement des fluides est couramment utilisé pour énoncer la relation descriptive du tenseur des contraintes en liaison avec celui des taux de déformation représenté dans le milieu du fluide en écoulement. Les caractères des fluides newtoniens et non newtoniens sont alors associés à des paramètres dont dépendent ces relations.

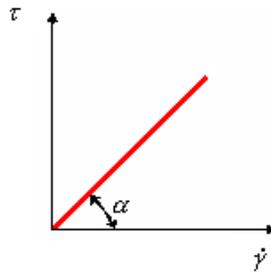
Par cette démarche, plusieurs lois de comportement ont pu être proposées, donnant une meilleure simulation de l'écoulement des fluides de différents types.

### I.9.2. Fluide newtonien

Pour un fluide newtonien et compressible, la relation qui lie le tenseur des contraintes  $T_{ij}$  au tenseur des taux de déformation  $D_{ij}$  s'écrit [22]:

$$T_{ij} = (-p + \lambda D_{kk})\delta_{ij} + 2\mu D_{ij} \quad (I.10)$$

où  $p$  est la pression dans le fluide,  $D_{kk}$  le taux de dilatation cubique  $\delta_{ij}$ , le symbole de Kronecker,  $\mu$  et  $\lambda$  deux coefficients de viscosité appelés constantes de Navier. Pour un fluide incompressible (iso-volume)  $D_{kk} = 0$ , le second coefficient de viscosité  $\lambda$  n'intervient alors plus.



**Figure I.7:** Rhéogramme d'un fluide newtonien ( $\mu = tg\alpha$  et  $\dot{\gamma} = \frac{du}{dy}$ )

Ce fluide, composé d'une seule phase liquide, est aussi appelé fluide visqueux linéaire. Il est de plus incompressible, homogène et isotrope. La relation (I-10) généralise l'équation (I-1) dans le cas tridimensionnel où  $\tau$  est la contrainte de cisaillement visqueuse et  $\dot{\gamma}$  le taux de cisaillement. La majorité des fluides utilisés en lubrification suivent, en première approximation, cette loi de comportement qui est représentée graphiquement en figure (I.7). Par rapport aux lois de comportement des fluides visqueux non linéaires, elle permet de simplifier considérablement les études théoriques sur les caractéristiques des mécanismes lubrifiés.

### I.9.3. Fluides non newtoniens

Dans ce cas, la viscosité n'est pas constante. A chaque valeur du couple taux de cisaillement - contrainte de cisaillement  $(\dot{\gamma}, \tau)$  correspond une valeur de la viscosité  $\mu$ . Dès lors, on parle de viscosité apparente.

Les lois de comportement des fluides non newtoniens sont caractérisées par la composition du milieu (fluides multiphasés et fluides composés de différentes substances liquides ou solides) [28]. Chacune des phases (substances) fait intervenir différents caractères liés à son état de mouvement tels que viscosité, élasticité, plasticité, ainsi que l'influence de la température, l'effet régressif, etc. La prise en compte de l'ensemble de ces facteurs conduit alors aux lois de comportement non linéaires des fluides non newtoniens.

#### I.9.3.1. Fluide polaire ou à couple de contrainte (couple-stress fluid or polar fluid)

La quasi-totalité des huiles utilisées dans la lubrification des machines contiennent des additifs améliorant l'indice de viscosité (VI). Ces additifs entraînent une modification du comportement rhéologique de ces huiles. D'après la théorie de V. K. Stokes [29], la loi de comportement rhéologique de ce type de fluide dit à rhéologie complexe ou encore fluide polaire s'écrit:

$$T_{ij} = -p \delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) - \frac{1}{2} e_{ijk} M_{rk,r} \quad (I.11)$$

$$\text{avec : } M_{rk} = \frac{1}{3} M_{nn} \delta_{rk} + 4\eta w_{k,r} + 4\eta' w_{r,k}$$

où  $T_{ij}$  est le tenseur des contraintes symétrique ( $T_{ij} = T_{ji}$ ),  $M_{rk}$  est le tenseur des couples de contraintes,  $e_{ijk}$  est le tenseur de permutation d'ordre trois,  $\mu$  est le coefficient de viscosité,  $\eta$  et  $\eta'$  sont des constantes physiques dues à la présence des couples de contraintes.

### I.9.3.2. Fluides visqueux non linéaires

Le caractère non newtonien le plus répandu est la variation de la viscosité avec le taux de cisaillement. De nombreux travaux expérimentaux, dont les plus anciens remontent à 1925, ont montré que même pour les fluides monophasiques, par exemple l'huile lourde ou l'huile contenant des additifs, le comportement rhéologique n'était pas linéaire. Plusieurs lois de comportement ont été proposées en lubrification à la suite de différentes expériences:

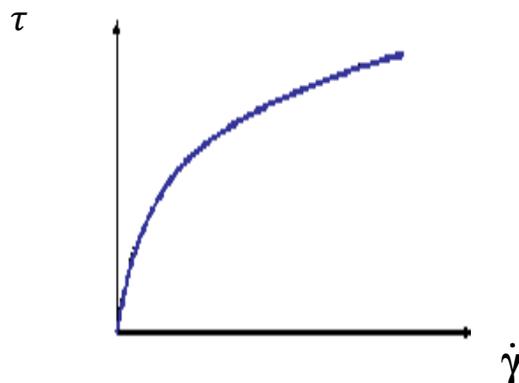
- ◆ loi d'Oswald en 1925 (loi en puissance) [30]

$$\tau = \mu \dot{\gamma}^n \quad (\text{I-12})$$

L'exposant  $n$  est très significatif du comportement de ce modèle. L'écoulement devient visqueux linéaire ou newtonien pour une valeur de  $n$  égale à 1. Toute valeur de  $n$  autre que l'unité signifie un comportement visqueux non linéaire ou non newtonien. Le fluide est dit rhéo-fluidifiant pour des valeurs de  $n$  inférieures à 1 et rhéo-épaississant pour des valeurs de  $n$  supérieures à 1.

#### ***-Fluide pseudo-plastique ou rhéofluidifiant***

Ces systèmes ne présentent pas de seuil d'écoulement, la déformation commence dès qu'une contrainte est exercée. La tension de cisaillement  $\tau$  n'est pas proportionnelle au taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  car la viscosité diminue pour des taux de cisaillement croissants (fig. I-8).



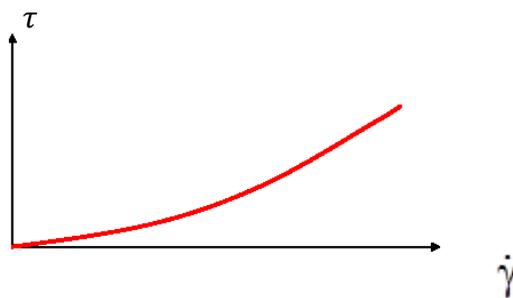
**Figure I.8 :** Rhéogramme d'un fluide rhéofluidifiant.

Ce type de comportement est moins fréquent. Il concerne les dispersions de particules asymétriques, les polymères à longues chaînes en solution ou à l'état fondu, les pâtes à papier, les colles, les ciments, etc.

Les molécules, sous l'effet du taux de cisaillement ont tendance à s'aligner progressivement le long des couches ce qui favorise leur glissement relatif. Une seconde interprétation consiste à envisager une modification de la structure du matériau sous l'effet du gradient de vitesse (destruction par rupture de liaison de type Van der Waals, défloculation des particules).

- **Fluide dilatant ou rhéo-épaississant**

Un fluide dilatant se manifeste lorsqu'une augmentation de la tension de cisaillement entraîne une augmentation de la viscosité (figure I-9).



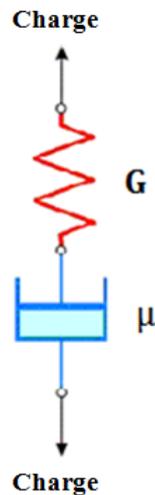
**Figure I.9 :** Rhéogramme d'un fluide rhéoépaississant.

Ce comportement est beaucoup moins fréquent. Il concerne des dispersions très concentrées, les solutions d'amidon, sable mouillés et compactés et certaines huiles polymériques. Certains de ces produits augmentent de volume sous la contrainte. Les causes d'origine moléculaire sont diverses et pas toujours élucidées. On peut invoquer l'augmentation du volume libre entre les particules. Au repos, il est minimal, sous un gradient de vitesse en augmentation, il y a gonflement du liquide (les particules sont moins imbriquées). La phase continue n'est plus capable de combler les vides interparticulaires ni d'assurer une bonne lubrification.

### - *Fluide viscoélastique*

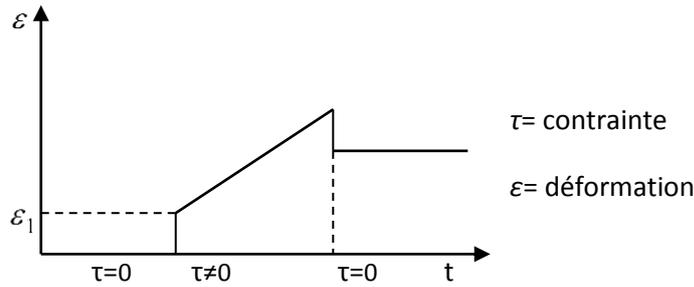
Un autre comportement non newtonien très important est le caractère viscoélastique, la réponse du fluide à une déformation présente à la fois un aspect visqueux (contrainte proportionnelle au taux de déformation) et un aspect élastique (contrainte proportionnelle à la déformation) [30].

Le modèle le plus simple de fluide viscoélastique consiste à additionner les contraintes d'origine visqueuse et d'origine élastique. La représentation graphique la plus simple de ce modèle est celle de Maxwell : association en série d'un ressort et d'un amortisseur (figure I-10).



*Figure I.10 : Modèle de Maxwell*

Selon Maxwell tous les corps sont viscoélastiques. Un liquide réagit comme un solide quand l'impulsion qu'on lui applique est extrêmement brève. Sous l'effet d'une contrainte, le fluage et l'écoulement n'apparaissent qu'au bout d'un certain temps. Celui-ci correspond au temps de relaxation qui sépare en gros le temps de passage du phénomène élastique au phénomène visqueux [30].



**Figure I.11** : Réponse d'un fluide à une contrainte de cisaillement.

La figure (I-11) montre comment un fluide répond à l'application d'une contrainte de cisaillement. Il se produit immédiatement une déformation élastique suivie du fluage. La déformation élastique se fait durant un temps très court et est récupérée lorsque cesse la contrainte. Le modèle de Maxwell est représenté par une relation linéaire :

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{G} \frac{d\tau}{dt} + \frac{\tau}{\mu} \quad (\text{I.13})$$

Suivant cette équation, en écoulement permanent, le fluide viscoélastique se comporte comme un fluide newtonien de viscosité  $\mu$ . Mais, dans les mouvements transitoires brefs il se comporte comme un fluide élastique de module de cisaillement  $G$ .

Par des expériences avec des contacts très chargés et à faible glissement relatif des surfaces, plusieurs auteurs ont montré que la viscosité apparente de quelques produits lubrifiants est une fonction de la vitesse d'entraînement. Ce phénomène sous-entend un comportement qui dépend d'un facteur de temps de passage du lubrifiant dans la zone de contact [22].

### 1.9.3.3 Fluide viscoplastique ou fluide de Bingham ou fluide à seuil

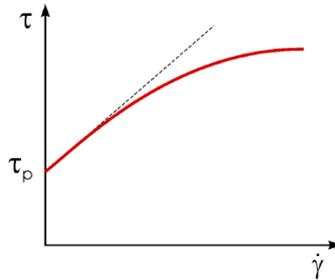
Au repos le fluide possède une structure tridimensionnelle rigide (particules emboîtées) ou floculées. Le seuil d'écoulement correspond à l'énergie nécessaire pour les séparer. Au-delà, l'écoulement s'effectue sous l'effet de la contrainte effective ( $\tau - \tau_0$ ) [29]. Lorsque la tension de cisaillement est inférieure au seuil d'écoulement, le système se comporte comme un solide :

$$\tau = G\dot{\gamma} \quad (\text{I.14})$$

Au-delà, le matériau a le comportement d'un fluide newtonien (figure I-12), avec :

$$\tau = \tau_p + \alpha \dot{\gamma} \quad (\text{I.15})$$

où  $\alpha$  est la viscosité plastique notée parfois  $\mu_p$ .



**Figure I.12:** Rhéogramme d'un fluide plastique de Bingham.

Bien que la loi de comportement dite de Bingham, soit établie théoriquement, de nombreuses expériences ont montré qu'elle est applicable pour une gamme très large de produits lubrifiants telles que les graisses [31].

## I.10 Conclusion

Il ressort de cette étude bibliographique que les huiles lubrifiantes sont généralement constituées d'un fluide de base appelé « base de lubrifiant » qui peut être synthétique ou d'origine minérale, auquel sont ajoutés de nombreux additifs dont la nature varie avec la destination du produit et que les fluides peuvent être classés en deux grandes catégories:

- ◆ fluides newtoniens pour lesquels le taux de cisaillement est directement proportionnel à la contrainte (la viscosité dynamique  $\mu$  est constante);
- ◆ fluides non newtoniens pour lesquels la relation entre la contrainte de cisaillement et le taux de cisaillement est non linéaire.

Cette étude a permis de mettre en évidence la diversité et le degré de complexité du comportement rhéologique des fluides non newtoniens. Ceci est confirmé par les nombreux modèles proposés dans la littérature.

Ces modèles dépendent éventuellement de la composition chimique du fluide et des conditions de fonctionnement (taux de cisaillement élevés) du système lubrifié par ce fluide.

Le calcul correct des performances d'un contact lubrifié nécessite le choix d'un modèle qui décrit convenablement le comportement d'une huile lubrifiante.

En ce qui concerne notre étude, on a choisi le modèle du fluide polaire avec prise en considération des couples de contraintes en plus des forces de surfaces. Ce modèle permet de décrire convenablement le comportement rhéologique des huiles contenant des additifs améliorant l'indice de viscosité ( $VI$ ) qui sont des polymères solubles ou des particules solides de pollution.

**CHAPITRE II**  
**CINEMATIQUE ET DYNAMIQUE DES FLUIDES COMPRESSIBLES**  
**NON NEWTONIENS A COUPLE DE CONTRAINTES**

### **II.1. Introduction**

On ne peut faire aucun doute à l'importance du mouvement tourbillonnaire en dynamique des fluides visqueux. En effet, très peu d'attention est généralement accordée à la loi de conservation du moment de la quantité de mouvement et de son rôle dans la définition du caractère fondamental de l'état de contraintes en un point du fluide qui est habituellement représenté par un tenseur symétrique d'ordre 2 dénommé tenseur de Cauchy.

Dans le présent chapitre, nous envisageons d'une part la possibilité d'existence des couples de contraintes et des couples de volume en plus des contraintes ou forces de surface et des forces de volume ce qui rend le tenseur de contraintes non symétrique en tout point du fluide.

D'autre part nous développons une théorie qui permet de prendre en considération la taille des particules de fluide en écoulement. Sur la base de cette formulation, on peut reconnaître que la théorie classique des fluides à couple de contraintes souffre de quelques incohérences pouvant ainsi restreindre son application dans l'étude des écoulements visqueux.

Après avoir présenté la formulation générale de la nouvelle théorie pour la description des écoulements de fluides à couple de contraintes. Enfin, nous concluons que la théorie présentée ici peut fournir une base pour une large gamme d'applications en hydrodynamique pour des études fondamentales d'écoulements de films minces visqueux entre parois fixes ou mobiles pour lesquelles la théorie des milieux continus peut s'appliquer.

### **II.2. Présence des couples de contraintes dans les huiles lubrifiantes**

#### **Dopées**

Les lubrifiants liquides tels que les huiles minérales ou synthétiques sont largement utilisés dans la lubrification de systèmes mécaniques (paliers, butées,

roulement, engrenages, etc). Dans la plupart de ces systèmes, le pouvoir intrinsèque d'une huile de base n'est suffisant, des produits chimiques de synthèse ou dopes appelés aussi additifs sont donc mélangés à l'huile de base pour en augmenter les performances et répondre à une demande d'efficacité accrue. Ces additifs qui entrent dans la composition des huiles moteurs et certaines huiles industrielles, sont des composés de structures chimiques très variées (polymères solubles, etc.) incorporés aux huiles de base afin de modifier leurs propriétés. Ces additifs se caractérisent par de longues chaînes moléculaires pouvant être un million de fois le diamètre d'une molécule d'eau et ont un comportement rhéologique complexe. Ainsi, leur écoulement ne peut être décrit par la théorie des milieux continus classiques qui néglige la taille des particules fluides en mouvement.

Un certain nombre de théories ont été développées pour expliquer le comportement particulier des huiles contenant des additifs (polymères) et mettre en évidence les effets de la présence des couples de contrainte sur le comportement des systèmes lubrifiés.

Parmi ces théories, la théorie de Vijay Kumar Stokes, de mise en œuvre simple, permet de tenir compte des effets polaires dus à la présence des couples de contraintes et couples de volume. Un fluide à couple de contraintes dénommé aussi fluide polaire est caractérisé rhéologiquement par deux constantes physiques  $\mu$  et  $\eta$ , tandis qu'un seul paramètre est nécessaire pour caractériser un fluide newtonien qui est le coefficient de viscosité dynamique  $\mu$ .

### II.3. Historique

Au milieu du XIX<sup>ème</sup> siècle, Cauchy [1] a établi le concept du vecteur contrainte agissant sur la surface d'un élément de forme tétraédrique soumis à une contrainte. A cette époque, il a éliminé l'existence des couples de contraintes et couples de volume.

Cependant, il convient de rappeler que Cauchy a développé la théorie du continuum basée sur une représentation atomique ayant uniquement des forces centrales. Les théories du continuum formulées par Cauchy, Poisson et autres conduisaient au modèle d'élasticité qui, pour des matériaux isotropes, ne fait intervenir qu'un seul paramètre à savoir le module d'élasticité. Des expériences physiques ont montré qu'une telle présentation est non convenable. Voigt [2,3] a joué un rôle dans la poursuite du développement de modèle atomique en considérant le concept des couples de contraintes.

Au début du XX<sup>ème</sup> siècle, les frères Cosserat [4] ont formulé plusieurs théories pour le calcul des structures telles que les poutres et les coques. Ces théories impliquent des degrés de liberté de déplacements et de rotations indépendants d'une manière naturelle compatible avec les hypothèses du continuum. Sur la base de ce succès, les frères Cosserats ont alors étendu cette idée des degrés de liberté de rotation indépendants (c-à-d, les trois composantes de la micro-rotation au cas de corps tridimensionnel [4]). De telles formulations sont aujourd'hui dénommées théories micro-polaires Dahler et Scri [5], Condiff. Dahler [6], Eringen [7,8], Cowen [9] et Nowacki [10] qui tentent souvent de capturer l'effet de microstructure discontinue. Les théories micro-polaires peuvent être considérées comme des cas spéciaux de la théorie micro-morphique générale [11,12]. Dans ce dernier modèle plus général, il existe 12 degrés de libertés : trois composantes du vecteur micro-déplacement et neuf composantes du tenseur microdéformation additionnelles indépendantes.

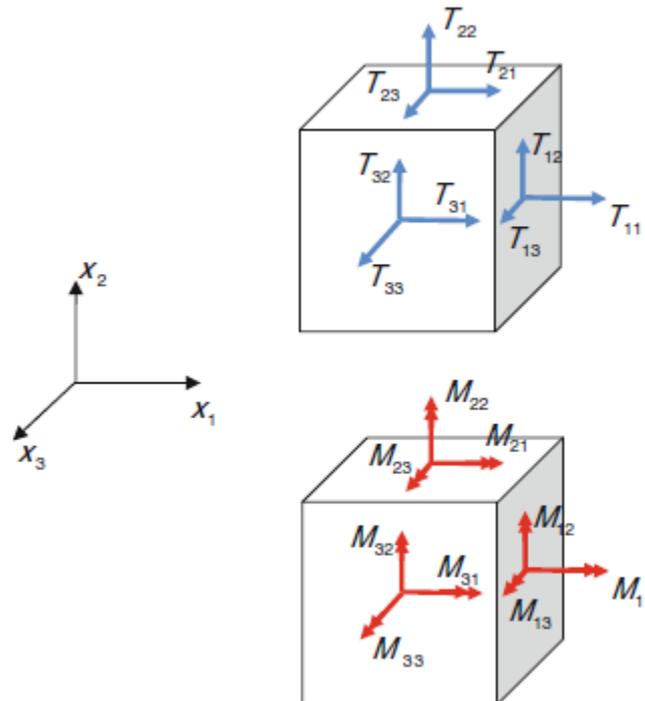
Dans le domaine de la mécanique des fluides, un certain nombre de chercheurs au milieu du XX<sup>ème</sup> siècle ont commencé à envisager la quantité de mouvement angulaire et les couples de contraintes avec plus de détails lors de l'étude des phénomènes de turbulence lorsque la structure de l'écoulement présente des désordres (chaos) sur toutes les échelles de temps et de l'espace. Puisque une connexion directe entre les équations de Navier-Stokes et les phénomènes de turbulence doit encore être entièrement établie, il a été suggéré par d'autres que les équations de Navier-Stokes ne sont pas suffisantes. L'absence d'une échelle de longueur dans les équations de Navier-Stokes peut fournir une indication supplémentaire. Néanmoins, au fil des années de nombreux modèles de turbulence ont été élaborés à partir de la moyennisation des équations de Navier-Stokes afin d'incorporer les contraintes ou tensions de Reynolds.

En particulier, Nikolaevskiy [13-14] a souligné que ces méthodes de calcul de la moyennisation ne sont pas équivalentes les unes aux autres et que le tenseur des contraintes de Reynolds est en général non symétrique. Il a affirmé qu'il est essentiel de considérer avec beaucoup de soins l'équilibre de la quantité de mouvement angulaire et d'introduire les couples de contraintes dans le fluide ce qui nécessiterait une modification des équations de Navier-Stokes.

Des travaux antérieurs importants ont été réalisés par Mattioli [15,16 ], Ferrari [17], Dahler [18], Dahler et Scriven [5], Condiff et Dahler [6], Aero et al.[19], Lumley[20 ]

et Condiff et Brenner [21].

Nous mentionnons aussi un article de synthèse sur les écoulements avec des effets d'orientation réalisé par Rae [22]. D'autre part, une version initiale incomplète d'une théorie de continuum avec couple de contraintes a été développée par Toupin [23], Mindlin et Tiersten [24], Koiter [25] et d'autres chercheurs dans le domaine de la mécanique du solide. Cette théorie utilisait le champ de déplacement.



**Figure II.1 :** Composantes des tenseurs des contraintes et des couples de contraintes selon la théorie incohérente

Par la suite, V. K. Stokes [26] a employé ces formulations en mécanique des fluides en vue d'étudier le comportement des fluides à couple de contraintes. En principe, celles-ci représentent la généralisation la plus simple de la théorie classique des fluides qui tient compte de la présence des couples de contraintes. Au cours de ces dernières décennies, cette théorie a été appliquée pour étudier l'écoulement du sang, la lubrification des systèmes mécaniques, les cristaux liquides, les micro-fluides, et les couplages multi-physiques [27-34]. Toutefois, il existe certaines difficultés dans les formulations de base. Dans le contexte de la théorie présentée par Stokes [26], ces difficultés apparaissent comme l'indétermination de la partie sphérique du tenseur de couples de contraintes et la présence du couple de volume dans les relations constitutives pour les tenseurs des contraintes et couples de contraintes. Ces deux

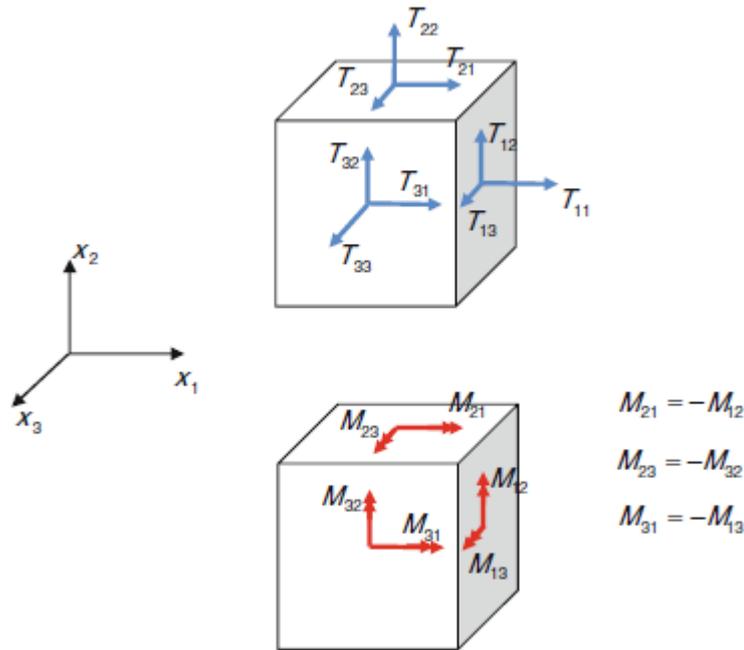
lacunes ont été héritées de la théorie de la mécanique du solide de Mindlin et Tiersten [24], et Koiter [25].

La principale difficulté dans le développement d'une théorie de couple de contraintes cohérente depuis le début a été le nombre excessif des composantes des tenseurs des forces et couples de contraintes. Ces derniers ont dix-huit composantes comme le montre la figure (II.1). Cependant, nous n'avons que six équations d'équilibre et il semble d'abord que nous devons obtenir les douze équations supplémentaires à partir des relations constitutives. Néanmoins, les relations constitutives de la théorie des couples de contraintes de Toupin [23], Mindlin et Tierstein [24] et Koiter [25] ne parviennent pas à fournir toutes ces équations supplémentaires et de créer l'indétermination de la partie sphérique du tenseur couple de contraintes. En réponse à l'apparition de cette indétermination, les chercheurs ont repris la théorie originale de Cosserat en considérant une micro-rotation indépendante dans le développement de nombreuses théories micro-polaires différentes. Rétrospectivement, on pourrait démontrer que le nombre de composantes de contraintes indépendantes dans le cadre d'une théorie des couples de contraintes cohérente est moins de dix-huit.

Récemment, Hadjesfandiari et Dargush [35] ont montré pour les corps solides en reconnaissant le caractère antisymétrique du tenseur des couples de contraintes, ce qui réduit le nombre de composantes de contraintes à douze. Ils ont montré aussi la dépendance entre les couples de volume et les forces de volume.

Ces deux points de vue offrent une théorie couple de contraintes pleinement compatible dépendant de la taille pour continuer en réduisant le nombre de composantes du tenseur de contraintes de neuf à trois, comme le montre la figure(II.2). Dans le cadre de ce développement, nous nous rendons compte que la courbure moyenne et les tenseurs des taux de courbure moyens sont les nouvelles mesures compatibles de déformations.

Koiter, Mindlin, Stokes et d'autres n'avaient pas reconnu le caractère antisymétrique des couples de contraintes, qui a conduit à des incohérences dans la théorie originale. Ici, la cohérence est obtenue par une utilisation correcte de conditions aux limites, qui, dans un continuum au sens mécanique doit s'appliquer à tout sous-domaine arbitraire dans le corps.



**Figure II.2 :** Composantes des tenseurs des contraintes et des couples de contraintes selon la théorie cohérente

D'autre part, Koiter [25] considérait seulement la limite physique réelle et ensuite a donné une analogie apparente avec la flexion des plaques, qui implique une approximation de la mécanique des structures. En conséquence, il n'était pas en mesure d'établir le caractère antisymétrique fondamental du tenseur des couples de contrainte. Comme il a été mentionné ci-dessus, Stokes [26] a réalisé cette théorie de couples de contraintes indéterminée en mécanique des fluides. L'impossibilité d'une distribution des couples de volume indépendante est un autre problème qui n'a pas été réalisé par Koiter, Mindlin et d'autres auteurs. L'apparition de couples de volume dans les relations constitutives est assez gênante, et certains chercheurs, y compris Stokes [26], choisissaient d'ignorer cette possibilité dans leur développement. En tout cas, il semblerait que ces incohérences pourraient être la principale raison de recourir à l'idée de micro-rotation et le développement ultérieur des théories micro-polaires.

Nous pouvons reformuler en termes simples que la théorie de la dynamique des fluides classique fournit une base raisonnable pour l'écoulement, chaque fois que le taux de courbure de déformation est négligeable par rapport à la vitesse de cisaillement, comme dans l'analyse de l'écoulement laminaire des fluides visqueux à l'échelle macroscopique. De tels problèmes ne nécessitent pas une échelle de longueur matérielle. Cependant, lorsque la dimension géométrique caractéristique du problème

se réduit à des échelles microscopiques ou nanoscopiques, on doit tenir compte aussi pour les taux de flexion des éléments fluides en utilisant une théorie du continuum prenant en considération la taille des particules, impliquant des couples de contraintes et des contraintes non-symétriques dans le fluide.

Dans ce qui suit, nous présentons en détails la nouvelle théorie des couples de contraintes cohérente qui sera appliquée à l'analyse hydrodynamique isotherme et thermohydrodynamique (THD) des paliers fluides, comme les paliers lisses et les paliers à feuilles.

En établissant le caractère antisymétrique du tenseur des couples de contraintes, nous résolvons tous les problèmes relatifs à la mécanique des fluides à couple de contraintes en utilisant la théorie des milieux continus de Vijay Kumar Stokes [26]. La présente théorie utilise le vecteur vitesse de l'écoulement et de son vecteur rotation correspondant comme grandeur de champ principal.

En conséquence, cette théorie ne nécessite qu'un seul paramètre supplémentaire comme une seconde caractéristique physique, qui à son tour apporte une échelle de longueur dans la formulation. Cette caractérisation fait de la nouvelle théorie beaucoup plus simple que la théorie classique des couples de contrainte et la théorie micro-polaire. En outre, un nombre important de travaux de recherche sur les écoulements des fluides biologiques et la lubrification, qui ont été effectués par la théorie classique des couples de contrainte de Stokes [26], peuvent être refaits dans le cadre de la théorie des couples de contrainte cohérente.

## II.4. Contraintes et équations de mouvement

Dans un « micro-continuum » pour lequel la taille des particules est prise en considération, on suppose que l'interaction entre deux particules du corps à travers un élément de surface  $dS$  orienté par le vecteur normal  $n_i$  se produit non seulement au moyen d'un vecteur de force  $t_i^{(n)} dS$ , mais aussi par un vecteur moment  $m_i^{(n)} dS$ . Les contraintes ou forces de surface et les couples de contraintes sont alors représentés par les tenseurs antisymétriques de contraintes  $T_{ji}$  et couple de contraintes  $M_{ji}$  qui sont reliés par les expressions suivantes :

$$t_i^{(n)} = T_{ji} n_j, \quad (II.1)$$

$$m_i^{(n)} = M_{ji} n_j \quad (II.2)$$

Les tenseurs de contraintes  $T_{ij}$  et couple de contraintes  $M_{ij}$  sont présentés sous la forme la plus générale dans la figure (II.1), chacun ayant neuf composantes indépendantes.

Considérons une partie arbitraire d'un continuum (milieu fluide compressible) occupant un volume fixe ( $V$ ) délimité par la surface ( $S$ ) à la configuration actuelle à l'instant  $t$ . Le théorème de transport de Reynolds s'écrit :

$$\frac{DM}{Dt} = \int_S \rho v_i n_i dS + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = 0 \quad ; i=1,2,3 \quad (II.3)$$

où  $\rho$  est la masse volumique du fluide,  $M$  est la masse et  $v_i$  est le champ de vitesse du continuum en coordonnées cartésiennes. En appliquant le théorème de Gauss-Ostrogradski (théorème de la divergence) ( $\int_S \rho v_i n_i dS = \int_V \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} dV$ ) et sachant que la

masse est conservée (c'est-à-dire  $\frac{DM}{Dt} = 0$ ), on obtient l'équation de continuité :

$$(\rho v_i)_{,i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (II.4)$$

où la virgule indique la différenciation partielle par rapport à la coordonnée spatiale d'Euler  $\alpha_i$ .

Cette équation peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho v_{i,i} = 0 \quad (II.5)$$

Dans les équations (II.3) et (II.5), l'opérateur  $\frac{D}{Dt}$  représente la dérivée matérielle ou particulière ou encore totale qui s'exprime par :

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (II.6)$$

$j=1,2,3$

Considérons  $\Psi$  une propriété du fluide spécifique ; c-à-d par unité de masse telle que l'énergie ou la densité de quantité de mouvement dans la configuration actuelle. Par conséquent, l'intégrale de volume  $\int_V \rho \Psi dV$  sur un volume de contrôle fixe  $V$  donne

l'énergie totale ou la quantité de mouvement dans ce volume de contrôle. Le théorème de transport de Reynolds permet d'écrire :

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \Psi dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \Psi dV + \int_S \rho \Psi v_i n_i dS \quad (\text{II.7})$$

L'application du théorème de la divergence et l'utilisation de l'équation de continuité permettent d'obtenir le théorème de transport de Reynolds:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \Psi dV = \int_V \rho \frac{D\Psi}{Dt} dV \quad (\text{II.8})$$

Pendant ce temps, les équations de bilan des quantités de mouvement linéaire et angulaire (lois de conservation de la quantité de mouvement et du moment de la quantité de mouvement) pour cette partie du volume peuvent être écrites :

$$\int_S t_i^{(n)} dS + \int_V \rho b_i dV = \frac{D}{Dt} \int_V \rho v_i dV \quad (\text{II.9})$$

$$\int_S [\varepsilon_{ijk} x_j t_k^{(n)} + m_i^{(n)}] dS + \int_V [\varepsilon_{ijk} x_j \rho b_k + \rho c_i] dV = \frac{D}{Dt} \int_V \rho \varepsilon_{ijk} x_j v_k dV \quad (\text{II.10})$$

où  $b_i$  et  $c_i$  sont respectivement les forces de volume et les couples de volume par unité de masse du continuum.  $\varepsilon_{ijk}$  étant le tenseur de permutation antisymétrique d'ordre trois ou symbole de Levi-Civita. En appliquant le théorème de transport de Reynolds aux équations (II.9) et (II.10), nous avons :

$$\int_S t_i^{(n)} dS + \int_V \rho b_i dV = \int_V \rho \frac{Dv_i}{Dt} dV \quad (\text{II.11})$$

$$\int_S [\varepsilon_{ijk} x_j t_k^{(n)} + m_i^{(n)}] dS + \int_V [\varepsilon_{ijk} x_j \rho b_k + \rho c_i] dV = \int_V \rho \varepsilon_{ijk} (v_j v_k + x_j \frac{Dv_k}{Dt}) dV \quad (\text{II.12})$$

En utilisant maintenant les relations (II.1) et (II.2) de  $t_i^{(n)}$ ,  $m_i^{(n)}$  et en appliquant le théorème de la divergence pour les intégrales de surface figurant dans les équations (II.11) et (II.12), et en remarquant que le volume ( $V$ ) est arbitraire, on obtient la forme différentielle des équations de mouvement d'un fluide à couple de contrainte :

$$T_{ji,j} + \rho b_i = \rho \frac{Dv_i}{Dt} \quad (\text{II.13})$$

$$M_{ji,j} + \varepsilon_{ijk} T_{jk} + \rho c_i = 0 \quad (\text{II.14})$$

La densité du couple de volume  $c_i$  n'est pas prise en considération comme une quantité indépendante dans la nouvelle théorie cohérente des milieux continus qui tient compte de la taille des particules constituant le continuum.

Comme nous l'avons mentionné précédemment, que les tenseurs  $T_{ji}$  et  $M_{ji}$  ayant dix-huit éléments, mais nous n'avons que six équations d'équilibre. Par conséquent, il semble que nous avons besoin de douze équations constitutives supplémentaires.

En fait, cela a été le principal problème dans le développement d'une théorie cohérente de couples de contraintes dans le passé, comme nous l'avons expliqué. Comme dans le cas classique, nous devrions nous attendre que l'équation angulaire d'équilibre (II.14) fournira un aperçu sur la distribution des contraintes dans un continuum. Cela permettra de réduire le nombre de composants indépendants de contraintes de dix-huit. Nous explorons ceci en étudiant les conditions aux limites, les puissances dues aux contraintes et aux couples de contraintes dans l'équation d'énergie et de certaines considérations cinématiques. Dans ce qui suit, nous découvrons le caractère antisymétrique du tenseur couple de contraintes existant dans le continuum.

## II.5. Cinématique des milieux continus

Considérons les points voisins  $P$  et  $Q$  représentés par les vecteurs de position d'Euler  $x_i$  et  $x_i + dx_i$  dans la configuration actuelle à l'instant  $t$ . La vitesse relative du point  $Q$  par rapport à  $P$  est :

$$dv_i = v_{i,j} dx_j \quad (II.15)$$

$i,j=1,2,3$

où  $v_{i,j}$  est le tenseur gradient de vitesse au point  $P$ . Comme nous le savons, bien que ce tenseur soit important dans l'analyse de la vitesse ou du taux de déformation, ce n'est pas lui-même une mesure appropriée de la vitesse de déformation. Pour donner une signification physique de ce tenseur, on le décompose en un tenseur symétrique  $D_{ij}$  et un tenseur antisymétrique  $\Omega_{ij}$  comme suit:

$$v_{i,j} = D_{ij} + \Omega_{ij} \quad (II.16)$$

où :

$$D_{ij} = v_{(i,j)} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) \quad (II.17)$$

$$\Omega_{ij} = v_{[i,j]} = \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i}) \quad (\text{I.18})$$

Notons que les parenthèses entourant une paire d'indices sont introduites pour désigner la partie symétrique d'un tenseur du second ordre, alors que les crochets sont associés à la partie antisymétrique.  $D_{ij}$  et  $\Omega_{ij}$  représentent respectivement le tenseur des vitesses de déformation et le tenseur des vitesses angulaires. Ce dernier est aussi appelé tenseur rotation ou tourbillon (vortex).

Le vecteur tourbillon ou rotation  $\omega_i$  dual du tenseur rotation  $\Omega_{ij}$  est défini par :

$$\omega_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} v_{k,j} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \Omega_{kj}. \quad (\text{II.19})$$

ou encore sous forme vectorielle :

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v} \quad (\text{II.20})$$

$$\text{Cela montre que} \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = \omega_{k,k} = 0 \quad (\text{II.21})$$

Ce qui signifie que la vitesse angulaire est sans source. Ce vecteur est en relation avec le tenseur de vitesse angulaire par :

$$\varepsilon_{ijk} \omega_k = \Omega_{ji} \quad (\text{II.22})$$

qui montre

$$\omega_1 = -\Omega_{23}, \quad \omega_2 = -\Omega_{13}, \quad \omega_3 = -\Omega_{12} \quad (\text{II.23, 1-3})$$

Sur la base du développement ci-dessus, la vitesse relative du point  $Q$  par rapport à  $P$  se décompose en :

$$dv_i = dv_i^{(1)} + dv_i^{(2)} \quad (\text{II.24})$$

où

$$dv_i^{(1)} = D_{ij} dx_j \quad (\text{II.25})$$

$$dv_i^{(2)} = \Omega_{ij} dx_j \quad (\text{II.26})$$

$\Omega_{ij}$  est alors considéré pour représenter une rotation rigide de l'élément  $dx_i$  autour du point  $P$ ,

où

$$dv_i^{(2)} dx_i = \Omega_{ij} dx_i dx_j = 0 \quad (\text{II.27})$$

Seule la partie symétrique du tenseur des taux de déformations  $D_{ij}$  est la mesure appropriée de la vitesse de déformation dans les théories classiques.

En mécanique des milieux continus qui tient compte de la taille des particules, nous prévoyons un tenseur supplémentaire mesurant le taux de courbure d'un élément de fluide arbitraire  $dx_i$ . Pour trouver ce tenseur, nous considérons le champ de la vitesse angulaire  $\omega_i$ . La rotation relative des deux points voisins  $P$  et  $Q$  est donnée par :

$$d\omega_i = \omega_{i,j} dx_j. \quad (\text{II.28})$$

où le tenseur  $\omega_{i,j}$  est le gradient du vecteur vitesse angulaire au point  $P$ . Ce tenseur décrit la flexion et la torsion d'un élément arbitraire  $dx_i$ . En mécanique des solides, Wit [36] a appelé  $\omega_{i,j}$  tenseur de flexion- torsion. Les composantes  $\omega_{1,1}$ ,  $\omega_{2,2}$  et  $\omega_{3,3}$  représentent respectivement les taux de torsion de l'élément de fluide le long des directions correspondantes  $x_1, x_2$  et  $x_3$ , au point  $P$ .

Les composantes hors-diagonales représentent les taux de courbure de l'élément dans des plans parallèles aux plans des coordonnées. Par exemple,  $\omega_{1,2}$  est le taux de courbure de l'élément dans la direction  $x_2$  dans un plan parallèle au plan  $x_2x_3$  alors que  $\omega_{2,1}$  est le taux de courbure de l'élément dans la direction  $x_1$  dans un plan parallèle au plan  $x_1x_3$ .

La mesure appropriée du taux de courbure doit être un tenseur représentant le taux de courbure pure d'un élément arbitraire  $dx_i$ . Par conséquent, dans ce tenseur, les composantes  $\omega_{1,1}$ ,  $\omega_{2,2}$  et  $\omega_{3,3}$  ne peuvent pas apparaître. Par conséquent, nous prévoyons que le tenseur requis est la partie antisymétrique de  $\omega_{i,j}$ . En décomposant le tenseur  $\omega_{i,j}$  en parties symétrique et antisymétrique, nous obtenons :

$$\omega_{i,j} = X_{ij} + K_{ij} \quad (\text{II.29})$$

où

$$X_{ij} = \omega_{(i,j)} = \frac{1}{2}(\omega_{i,j} + \omega_{j,i}) \quad (\text{II.30})$$

$$K_{ij} = \omega_{[i,j]} = \frac{1}{2}(\omega_{i,j} - \omega_{j,i}) \quad (\text{II.31})$$

Le tenseur symétrique axial  $X_{ij}$  résulte de l'application de l'opérateur de déformation au vecteur de vitesse angulaire, tandis que le tenseur antisymétrique axial  $K_{ij}$  est la rotation du vecteur de vitesse angulaire au point  $P$ . De l'équation (II.30), on a :

$$X_{11} = \omega_{1,1}, X_{22} = \omega_{2,2}, X_{33} = \omega_{3,3} \quad (\text{II.32. 1-3})$$

et

$$X_{12} = X_{21} = \frac{1}{2}(\omega_{1,2} + \omega_{2,1}) \quad (\text{II.32-4})$$

$$X_{23} = X_{32} = \frac{1}{2}(\omega_{2,3} + \omega_{3,2}) \quad (\text{II.32-5})$$

$$X_{13} = X_{31} = \frac{1}{2}(\omega_{1,3} + \omega_{3,1}) \quad (\text{II.32-6})$$

A partir d'un examen attentif, les éléments diagonaux  $X_{11}$ ,  $X_{22}$  et  $X_{33}$  représentent les taux de torsion pure mentionnés précédemment de l'élément de fluide selon les directions correspondantes  $x_1, x_2$  et  $x_3$ , tandis que  $X_{12}$ ,  $X_{23}$  et  $X_{13}$  mesurent respectivement les taux de déviation par rapport aux plans de déformation parallèles à  $x_1x_2$ ,  $x_2x_3$  et  $x_1x_3$  Hamilton[37].

En outre, nous pouvons reconnaître que le tenseur symétrique  $X_{ij}$  doit avoir des valeurs principales réelles, représentant les taux de torsion pure le long des directions principales. Ainsi, nous nous référons à  $X_{ij}$  comme le tenseur des taux de torsion, et nous prévoyons que ce tenseur ne contribuera pas comme une mesure fondamentale de la vitesse ou du taux de déformation.

Au lieu de cela, nous prévoyons que le tenseur de courbure fondamentale  $K_{ij}$  est la rotation antisymétrique du tenseur taux de rotation. Ceci sera confirmé dans le paragraphe suivant par la prise en considération des couples de contraintes dans l'équation d'énergie.

Nous pouvons également arriver à ce résultat en remarquant que seule la partie de  $d\omega_i$  qui est normale à l'élément  $dx_i$  produit un taux de courbure pur. Par conséquent, en décomposant  $d\omega_i$  comme suit :

$$d\omega_i = d\omega_i^{(1)} + d\omega_i^{(2)} \quad (\text{II.33})$$

où :

$$d\omega_i^{(1)} = X_{ij} dx_j \quad (\text{II.34})$$

$$d\omega_i^{(2)} = K_{ij} dx_j \quad (\text{II.35})$$

Nous constatons que :

$$d\omega_i^{(2)} dx_i = K_{ij} dx_i dx_j = 0 \quad (\text{II.36})$$

Cela montre que  $d\omega_i^{(2)}$  est la composante de  $d\omega_i$  normale à  $dx_i$ . Par conséquent, le tenseur  $K_{ij}$  semble être le tenseur des taux de courbure approprié qui s'écrit sous la forme :

$$[K_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & K_{12} & K_{13} \\ -K_{12} & 0 & K_{23} \\ -K_{13} & -K_{23} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.37})$$

où les composantes non nulles de ce tenseur sont :

$$K_{12} = -K_{21} = \frac{1}{2}(\omega_{1,2} - \omega_{2,1}) \quad (\text{II.38.1})$$

$$K_{23} = -K_{32} = \frac{1}{2}(\omega_{2,3} - \omega_{3,2}) \quad (\text{II.38.2})$$

$$K_{13} = -K_{31} = \frac{1}{2}(\omega_{1,3} - \omega_{3,1}) \quad (\text{II.38.3})$$

Maintenant, nous pouvons reconnaître que  $K_{12}$ ,  $K_{23}$  et  $K_{13}$  représentent respectivement la moitié des taux de courbure moyenne des plans parallèles aux plans  $x_1x_2$ ,  $x_2x_3$  et  $x_3x_1$ , au point  $P$ . Par conséquent, le tenseur antisymétrique  $K_{ij}$  sera considéré comme le tenseur des taux de courbure moyens ou plus simplement le tenseur des taux de courbure. Le vecteur de taux de courbure  $K_i$  est le dual de ce tenseur est défini par :

$$K_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\omega_{k,j} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}K_{kj} \quad (\text{II.39})$$

Ainsi, ce vecteur polaire est lié au tenseur de courbure moyen par :

$$K_{ji} = \varepsilon_{ijk}K_k \quad (\text{II.40})$$

$$\text{qui montre } K_1 = -K_{23}, \quad K_2 = K_{13}, \quad K_3 = -K_{12} \quad (\text{II.41.1-3})$$

En outre, de l'équation (II.39), le vecteur de courbure moyenne peut être exprimé par :

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2}\nabla \times \boldsymbol{\omega} \quad (\text{II.42})$$

Cela montre que  $\mathbf{K}$  est le rotationnel du vecteur de rotation, qui peut être également exprimé en :

$$\mathbf{K} = \frac{1}{4}\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \frac{1}{4}(\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v}) \quad (\text{II.43})$$

Soit en notation indicielle :

$$K_i = \frac{1}{4}v_{k,ki} - \frac{1}{4}v_{i,kk} = \frac{1}{4}v_{k,ki} - \frac{1}{4}\nabla^2 v_i \quad (\text{II.44})$$

$$\text{Notons que : } \nabla \cdot \mathbf{K} = K_{k,k} = 0 \quad (\text{II.45})$$

On obtient une relation similaire au vecteur vitesse angulaire  $\boldsymbol{\omega}$ . En comparant les équations (II.44) et (II.18), on obtient la relation intéressante pour le vecteur de taux de courbure moyen :

$$K_i = \frac{1}{2} \Omega_{ji,j} \quad (\text{II.46})$$

Il est utile de noter que le vecteur rotation ou vitesse angulaire  $\boldsymbol{\omega}$  et le vecteur vorticit e ou tourbillon  $\boldsymbol{\zeta}$  sont reliées par la relation suivante :

$$\boldsymbol{\zeta} = 2\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v} \quad (\text{II.47})$$

Bien entendu, dans les applications de mécanique des fluides, ce vecteur tourbillon est fréquemment plus utilisé que le vecteur de vitesse angulaire.

## II.6. Equation d'énergie

Selon le premier principe de la thermodynamique, l'équation d'équilibre énergétique est donnée par :

$$\frac{D}{Dt} \int_V \frac{1}{2} \rho v_i v_i dV + \frac{D}{Dt} \int_V \rho \varepsilon dV = \int_S t_i^{(n)} v_i dS + \int_S m_i^{(n)} \omega_i dS + \int_V \rho b_i v_i dV + \int_V \rho c_i \omega_i dV - \int_S q_i n_i dS + \int_V \rho h dV \quad (\text{II.48})$$

où  $\varepsilon$  est l'énergie interne par unité de masse,  $q_i$  est le vecteur flux de chaleur, et  $h$  est la source de chaleur interne par unité de masse. Cette équation montre le taux de variation de l'énergie totale du système dans le volume ( $V$ ) est équivalente à la puissance des forces et des couples externes, l'apport de chaleur et la chaleur générée.

Tout d'abord, nous montrons que le couple de volume ne peut être distingué de la force de volume dans la théorie de la mécanique des milieux continus à couples de contraintes.

On voit que la puissance du couple de volume est :

$$\int_V \rho c_i \omega_i dV \quad (\text{II.49})$$

dans l'équation (II.48) est le seul terme dans le volume qui implique  $\omega_i$ . Cependant,  $\omega_i$  n'est pas indépendant de  $v_i$  dans le volume ( $V$ ), parce que nous avons la relation

$$\omega_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} v_{k,j} \quad (\text{II.50})$$

Par conséquent, en utilisant l'équation (II.50), nous obtenons :

$$\rho c_i \omega_i = \frac{1}{2} \rho c_i \varepsilon_{ijk} v_{k,j} = \frac{1}{2} (\varepsilon_{ijk} \rho c_i v_k)_{,j} - \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} (\rho c_i)_{,j} v_k \quad (\text{II.51})$$

et, après l'application du théorème de la divergence, la puissance du couple de volume apparaissant dans l'équation (II.49) devient :

$$\int_V \rho c_i \omega_i dV = \int_V \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} (\rho c_k)_{,j} v_i dV + \int_S \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \rho c_j n_k v_i dS \quad (\text{II.52})$$

ce qui signifie que le couple de volume  $\rho c_i$  se transforme en une force de volume

équivalente  $\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} (\rho c_k)_{,j}$  dans le volume et un vecteur de force de traction  $\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \rho c_j n_k$

sur la surface délimitant le volume. Cela montre que dans la théorie des couples de contraintes, le couple de volume n'est pas distinguable d'une force de volume équivalente et d'une force de traction surfacique. En conséquence, en théorie des couples de contraintes, nous devons considérer seulement les forces de volume. Pour une théorie de couples des contraintes appropriée, les équations de mouvement deviennent :

$$T_{ji,j} + \rho b_i = \rho \frac{Dv_i}{Dt} \quad (\text{II.53})$$

$$M_{ji,j} + \varepsilon_{ijk} T_{jk} = 0 \quad (\text{II.54})$$

et le bilan énergétique se réduit à :

$$\frac{D}{Dt} \int_V \frac{1}{2} \rho v_i v_i dV + \frac{D}{Dt} \int_V \rho \varepsilon dV = \int_S t_i^{(n)} v_i dS + \int_S m_i^{(n)} \omega_i dS + \int_V \rho b_i v_i dV - \int_S q_i n_i dS + \int_V \rho h dV \quad (\text{II.55})$$

Ensuite, nous étudions le caractère fondamental du tenseur couples de contraintes en fonction des conditions limites.

Les conditions aux limites prescrites sur la surface du volume peuvent être des vecteurs  $v_i$  et  $\omega_i$  ou  $t_i^{(n)}$  et  $m_i^{(n)}$  qui font un nombre total de six valeurs limites pour les deux cas de problèmes tridimensionnels (3-D). Cependant, ceci est en contraste avec le nombre de conditions aux limites cinématiques qui peuvent être imposées. Par exemple, si les composantes de  $v_i$  sont spécifiées sur la surface délimitant le volume, alors la composante normale du vecteur vitesse angulaire  $\omega_i$  correspond à la torsion,

$$\omega_i^{(n)} = \omega^{(n)} n_i = \omega_k n_k n_i \quad (\text{II.56})$$

où

$$\omega^{(nm)} = \omega_k n_k \quad (\text{II.57})$$

ne peut être prescrite de façon indépendante. Par conséquent, la composante normale  $\omega^{(nm)}$  n'est pas un degré de liberté indépendant, peu importe si le vecteur vitesse  $v_i$  est spécifié ou non. Toutefois, la composante tangentielle de  $\omega_i$  correspond au taux de flexion,

$$\omega_i^{(ns)} = \omega_i - \omega^{(nm)} n_i = \omega_i - \omega_k n_k n_i \quad (\text{II.58})$$

représente deux degrés de liberté indépendants dans le système de coordonnées global et peut être spécifiée en plus à  $v_i$ . En conséquence, le nombre total de conditions aux limites géométriques ou essentielles pouvant être spécifiées est cinq [25].

Nous désignerons par  $m_i^{(nm)}$  et  $m_i^{(ns)}$  les composantes normale et tangentielle du vecteur moment ou couple de contrainte  $m_i^{(n)}$  agissant sur la surface. La composante normale est :

$$m_i^{(nm)} = m^{(nm)} n_i \quad (\text{II.59-1})$$

où

$$m^{(nm)} = m_k^{(n)} n_k = M_{ji} n_i n_j \quad (\text{II.59-2})$$

provoque la torsion, tandis que

$$m_i^{(ns)} = m_i^{(n)} - m^{(nm)} n_i \quad (\text{II.60})$$

cause la flexion.

Comme nous le savons en mécanique théorique, les forces généralisées sont associées qu'avec des degrés de liberté généralisés indépendants, formant ainsi des paires énergétiquement doubles ou conjuguées. A partir de la description cinématique ci-dessus,  $\omega^{(nm)}$  n'est pas un degré de liberté généralisé indépendant. Par conséquent, la force généralisée correspondante doit être nulle et, pour la composante normale de  $m_i^{(n)}$ , il faut appliquer la condition

$$m^{(nm)} = m_k^{(n)} n_k = M_{ji} n_i n_j = 0 \text{ sur } (S) \quad (\text{II.61})$$

En outre, la puissance due à  $m_i^{(n)}$  figurant dans l'équation (55) devient :

$$\int_S m_i^{(n)} \omega_i dS = \int_S m_i^{(ns)} \omega_i dS = \int_S m_i^{(ns)} \omega_i^{(ns)} dS \quad (\text{II.62})$$

Cela montre que la théorie des couples de contraintes d'un milieu matériel ne supporte pas des distributions indépendantes du moment normal  $m^{(nn)}$ , et le nombre de conditions aux limites mécaniques est également cinq. Ce résultat a déjà été établi par Koiter [25] dans la théorie des couples de contraintes indéterminée pour les solides.

De la discussion ci-dessus, nous devrions réaliser que sur la surface de la frontière du continuum le moment normal indépendant  $m^{(nn)}$  ne peut pas être appliqué. En continuant ce raisonnement, nous pouvons révéler le caractère subtil du tenseur couples de contraintes dans le continuum. Tout d'abord, nous considérons un volume arbitraire ( $V_a$ ) avec la surface ( $S_a$ ) à l'intérieur du volume ( $V$ ). Les mêmes équations gouvernantes fondamentales et les conditions aux limites doivent s'appliquer à ce volume arbitraire. Par conséquent, le moment normal  $m^{(nn)}$  disparaît sur la surface  $S_a$  et l'équation de l'énergie (II.55) peut s'écrire :

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_a} \frac{1}{2} \rho v_i v_i dV + \frac{D}{Dt} \int_{V_a} \rho \varepsilon dV = \int_{S_a} t_i^{(n)} v_i dS + \int_{S_a} m_i^{(ns)} \omega_i dS + \int_{V_a} \rho b_i v_i dV - \int_{S_a} q_i n_i dS + \int_{V_a} \rho h dV \quad (\text{II.63})$$

Ici, le volume ( $V_a$ ) et sa surface ( $S_a$ ) sont complètement arbitraires. Par conséquent, à n'importe quel point dans le volume ( $V$ ) avec une normale unitaire  $n_i$ , nous devons avoir

$$m^{(nn)} = M_{ji} n_i n_j = 0 \text{ dans } (V) \quad (\text{II.64})$$

Puisque  $n_i n_j$  forme un tenseur symétrique et arbitraire dans l'équation (II.64),  $M_{ji}$  doit être un tenseur antisymétrique d'ordre 2, soit :

$$M_{ji} = -M_{ij} \quad (\text{II.65})$$

C'est la propriété fondamentale du tenseur couple de contraintes en mécanique des milieux continus, qui n'a pas été reconnue précédemment. Ce caractère indique que le tenseur de couple de contraintes dans le cadre de la théorie cohérente ne crée que le moment de flexion sur n'importe quelle surface arbitraire.

Les composantes des tenseurs de contraintes  $T_{ij}$  et de couples de contraintes  $M_{ij}$  dans la théorie cohérente sont présentées sur la figure (II.2). En termes de composantes, le tenseur de couple de contraintes peut maintenant être écrit comme suit :

$$[M_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & M_{12} & M_{13} \\ -M_{12} & 0 & M_{23} \\ -M_{13} & -M_{23} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.66})$$

et l'on peut se rendre compte que le tenseur de couple de contraintes  $M_{ij}$  peut réellement être considéré comme un vecteur polaire. Ce vecteur couple de contraintes polaire  $M_i$  dual du tenseur  $M_{ij}$  peut être défini par

$$M_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} M_{kj} \quad (\text{II.67})$$

où nous avons aussi

$$\varepsilon_{ijk} M_k = M_{ji} \quad (\text{II.68})$$

Ces relations montrent tout simplement

$$M_1 = -M_{23}, \quad M_2 = M_{13}, \quad M_3 = -M_{12} \quad (\text{II.69.1-3})$$

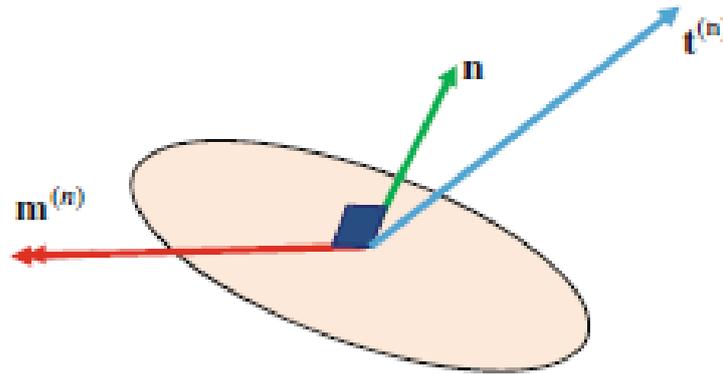
En outre, le vecteur moment peut être exprimé comme

$$m_i^{(n)} = M_{ji} n_j = \varepsilon_{ijk} n_j M_k \quad (\text{II.70})$$

qui peut être écrite sous forme vectorielle

$$\mathbf{m}^{(n)} = \mathbf{n} \times \mathbf{M} \quad (\text{II.71})$$

Cela montre évidemment que le vecteur moment axial  $\mathbf{m}^{(n)}$  est tangent à la surface, ce qui signifie qu'il existe seulement des effets de flexion dus aux couples de contrainte. Le vecteur contrainte  $\mathbf{t}^{(n)}$  et le moment de flexion cohérent  $\mathbf{m}^{(n)}$  agissant sur une surface arbitraire avec vecteur unitaire normal  $\mathbf{n}$  sont représentés sur la figure (II.3).



**Figure II.3 :** Représentation du vecteur contrainte  $t^{(n)}$  et du vecteur couple de contrainte  $m^{(n)}$  sur un élément de surface.

Le caractère antisymétrique des couples de contraintes n'a pas été reconnu par Koiter, Mindlin, Stokes et autres s'expliquent pourquoi toutes les théories précédentes sont incompatibles ou incohérentes. Hadesfandiari Ali R et Hadesfandiari Arezoo [38] ont pu découvrir ce caractère en manipulant correctement le vecteur couple de contrainte à la surface frontière conditions aux limites, qui au sens de la mécanique des milieux continus doit s'appliquer à n'importe quel sous-domaine arbitraire appartenant au volume. Ils étaient également en mesure de corriger la théorie originale en éliminant les couples de volume et les considérer comme des quantités indépendantes.

Dans des travaux récents, Upadhyay et al. [39] obtiennent un caractère antisymétrique de la partie déviatorique du tenseur de couple de contraintes pour les solides élastiques isotropes en égalisant deux de leurs coefficients élastiques. Une fixation similaire de paramètres dans les modèles de Mindlin et Tierston [24] et Koiter [25] entraîne également une partie déviatorique antisymétrique du tenseur de couple de contraintes, bien que cela soit explicitement interdite dans leur théorie pour des considérations énergétiques. D'autre part, le présent développement est général pour tout continuum; solide ou fluide, isotrope ou anisotrope, linéaire ou non linéaire sans aucune hypothèse supplémentaire.

Après avoir découvert le caractère antisymétrique du tenseur de couple de contraintes  $M_{ji}$ , nous étudions la structure du tenseur de contraintes  $T_{ji}$ . En utilisant la relation (II.68), l'équation d'équilibre angulaire (II.54) peut être exprimée comme suit :

$$\varepsilon_{ijk} (M_{k,j} + T_{jk}) = 0 \quad (II.72)$$

ce qui indique que  $(M_{k,j} + T_{jk})$  est symétrique. Par conséquent, sa partie antisymétrique disparaît et

$$T_{[ji]} = -M_{[i,j]} = -\frac{1}{2}(M_{i,j} - M_{j,i}) \quad (\text{II.73})$$

fournissant ainsi la partie antisymétrique du tenseur des contraintes en termes de vecteur couple de contraintes. Par conséquent, le seul rôle de l'équation d'équilibre angulaire, exprimée par les équations (II.54) ou (II.72), est de produire la partie antisymétrique du tenseur des contraintes. Cette relation peut être élaborée si l'on considère le vecteur axial  $S_i$  dual du tenseur de contraintes polaire antisymétrique  $T_{[j,i]}$ , où :

$$S_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} T_{[kj]} \quad (\text{II.74})$$

qui satisfait aussi

$$\varepsilon_{ijk} S_k = T_{[ji]} \quad (\text{II.75})$$

et donc

$$S_1 = -T_{[23]}, S_2 = T_{[13]}, S_3 = -T_{[12]} \quad (\text{II.76})$$

Compte tenu de l'équation (II.73), l'équation (II.74) prend la forme suivante :

$$S_i = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} M_{[j,k]} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} M_{k,j} \quad (\text{II.77})$$

qui peut être écrite sous forme vectorielle :

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{M} \quad (\text{II.78})$$

Ceci montre simplement que le demi-rotationnel du vecteur couple de contraintes  $\mathbf{M}$  produit la partie antisymétrique du tenseur de contraintes à travers  $\mathbf{S}$ . Il convient de noter que :

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = 0 \quad (\text{II.79})$$

Le même raisonnement a été utilisé par Mindlin et Tiersten [24] et, plus récemment, Taupin et al. [40] en vue d'obtenir la partie antisymétrique du tenseur de contraintes à partir du couple de contraintes.

Il convient de rappeler que la théorie de couple de contraintes cohérente a été développée dans le présent travail en réduisant le nombre de composantes des tenseurs de contraintes  $T_{ji}$  et de couple de contraintes  $M_{ji}$  à neuf composantes indépendantes.

Ce sont les six éléments indépendants du tenseur symétrique  $T_{(ji)}$  et trois composantes indépendantes du tenseur antisymétrique  $M_{ji}$ . Les composantes du tenseur antisymétrique  $T_{[ji]}$ , qui peuvent être obtenues à partir de l'équation (II.73) ou via le vecteur  $S_i$  dans l'équation (II.77).

Après avoir résolu le caractère des tenseurs de contraintes et de couples de contraintes dans le cadre de la théorie cohérente de la mécanique des milieux continus qui tient compte de la taille des particules, nous retournons maintenant à l'équation d'équilibre énergétique. En appliquant l'équation de transport de Reynolds pour le membre gauche de l'équation (II.63), nous trouvons :

$$\int_{V_a} \rho v_i \frac{Dv_i}{Dt} dV + \int_{V_a} \rho \frac{D\varepsilon}{Dt} dV = \int_{S_a} T_{ji} v_i n_j dS + \int_{S_a} M_{ji} \omega_i n_j dS + \int_{V_a} \rho b_i v_i dV - \int_{S_a} q_i n_i dS + \int_{V_a} \rho h dV \quad (\text{II.80})$$

Puis, en appliquant le théorème de la divergence, nous avons

$$\int_{V_a} \rho v_i \frac{Dv_i}{Dt} dV + \int_{V_a} \rho \frac{D\varepsilon}{Dt} dV = \int_{V_a} (T_{ji,j} v_i)_{,j} dV + \int_{V_a} (M_{ji} \omega_i)_{,j} dV + \int_{V_a} \rho b_i v_i dV - \int_{V_a} q_{i,i} dV + \int_{V_a} \rho h dV \quad (\text{II.81})$$

ou encore

$$\int_{V_a} \rho v_i \frac{Dv_i}{Dt} dV + \int_{V_a} \rho \frac{D\varepsilon}{Dt} dV = \int_{V_a} (T_{ji,j} v_i + T_{ji} v_{i,j}) dV + \int_{V_a} (M_{ji,j} \omega_i + M_{ji} \omega_{i,j}) dV + \int_{V_a} \rho b_i v_i dV - \int_{S_a} q_{i,i} dV + \int_{V_a} \rho h dV \quad (\text{II.82})$$

Compte tenu des équations de mouvement (II.53) et (II.54), on obtient

$$\int_{V_a} \rho \frac{D\varepsilon}{Dt} dV = \int_{V_a} T_{ji} v_{i,j} dV + \int_{V_a} M_{ji} \omega_{i,j} dV - \int_{V_a} \varepsilon_{ijk} T_{jk} \omega_i dV - \int_{V_a} q_{i,i} dV + \int_{V_a} \rho h dV \quad (\text{II.83})$$

En vertu de l'équation (II.22), nous avons

$$\int_{V_a} \rho \frac{D\varepsilon}{Dt} dV = \int_{V_a} T_{ji} (v_{i,j} - \Omega_{ij}) dV + \int_{V_a} M_{ji} \omega_{i,j} dV - \int_{V_a} q_{i,i} dV + \int_{V_a} \rho h dV \quad (\text{II.84})$$

Puis en tenant compte de la relation (II.16), il vient :

$$\int_{V_a} \rho \frac{D\varepsilon}{Dt} dV = \int_{V_a} [T_{ji} D_{ij} + M_{ji} \omega_{i,j} - q_{i,i} + \rho h] dV \quad (\text{II.85})$$

Puisque le volume ( $V_a$ ) est arbitraire, on obtient la forme différentielle de l'équation de l'énergie dans le contexte de la théorie des couples de contraintes :

$$\rho \frac{D\varepsilon}{Dt} = T_{ji} D_{ij} + M_{ji} \omega_{i,j} - q_{i,i} + \rho h \quad (\text{II.86})$$

Puisque  $M_{ji}$  est antisymétrique et compte tenu de la relation de décomposition (II.29), nous avons :

$$M_{ji} \omega_{i,j} = M_{ji} K_{ij} \text{ où } K_{ij} \text{ est défini par la relation (II.31).}$$

Ceci montre que le tenseur des taux de courbure moyen antisymétrique  $K_{ij}$  est énergétiquement relié au tenseur antisymétrique  $M_{ji}$ . Le bilan énergétique s'exprime par l'équation différentielle suivante :

$$\rho \frac{D\varepsilon}{Dt} = T_{ji} D_{ij} + M_{ji} K_{ij} - q_{i,i} + \rho h \quad (\text{II.87})$$

Les termes  $T_{ji} D_{ij}$  et  $M_{ji} K_{ij}$  sont respectivement appelés puissances de contraintes et de couples de contraintes par unité de volume. Le terme  $T_{ji} D_{ij}$  représente la fonction de dissipation visqueuse  $\Phi = T_{(ji)} D_{ij}$  dans le cas newtonien auquel s'ajoute la dissipation due à la présence des couples de contraintes  $\Phi' = M_{ji} K_{ij}$ . Il convient de noter qu'en utilisant les deux vecteurs duaux des tenseurs antisymétriques, nous avons :

$$M_{ji} K_{ij} = -2M_i K_i \quad (\text{II.88})$$

Soit par conséquent :

$$\rho \frac{D\varepsilon}{Dt} = T_{ji} D_{ij} - 2M_i K_i - q_{i,i} + \rho h \quad (\text{II.89})$$

Puisque  $D_{ij}$  est symétrique, cette relation peut s'écrire :

$$\rho \frac{D\varepsilon}{Dt} = T_{(ji)} D_{ij} + M_{ji} K_{ij} - q_{i,i} + \rho h \quad (\text{II.90})$$

$$\text{où } T_{(ji)} = \frac{1}{2}(T_{ji} + T_{ij}) \quad (\text{II.91})$$

est la partie symétrique du tenseur de contraintes.

Les conditions aux limites naturelles  $t_i^{(n)}$  et essentielles  $v_i$  sont spécifiées comme en mécanique des milieux continus classique. Cependant, il y a de nouvelles conditions

aux limites naturelles et essentielles  $m_i^{(n)}$  et  $\omega_i$  lorsque l'on prend en considération les couples de contraintes. Dans de nombreux cas, la frontière réelle ( $S$ ) peut ne pas être assujettie à un couple de contrainte, ce qui signifie que cette condition limite naturelle est nulle ; c'est à dire,  $m_i^{(n)} = 0$  partout sur ( $S$ ). Il est à souligner que cette condition limite n'exclut pas l'existence des couples de contraintes  $M_{ji}$  à l'intérieur du volume ( $V$ ).

Dans certains phénomènes, il peut être qu'une condition limite de vitesse angulaire nulle est plus appropriée (c'est-à-dire  $\omega_i = 0$ ), qui crée une valeur non nulle  $m_i^{(n)}$  sur la surface limite réelle.

Pour compléter les équations fondamentales, nous présentons aussi la deuxième loi de la thermodynamique. Cette loi sous la forme de l'inégalité de Clausius-Duhem pour le volume arbitraire ( $V_a$ ) peut être écrite :

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_a} \rho s dV \geq \int_{V_a} \frac{\rho h}{T} dV - \int_{S_a} \frac{q_i n_i}{T} dS \quad (\text{II.92})$$

où  $s$  est l'entropie par unité de masse et  $T$  est la température absolue.

La seconde loi indique que le taux de variation de l'entropie dans le volume ( $V_a$ ) en tant que système est supérieur ou égal à la variation de l'entropie en raison de la source de chaleur et l'entrée de flux de chaleur. Il est à noter que l'égalité est seulement valable pour les processus réversibles.

Encore une fois en appliquant l'équation de transport de Reynolds (II.8) pour le membre gauche de l'équation (II.92) et en sachant que le volume ( $V_a$ ) est arbitraire, on obtient la forme différentielle de l'inégalité de **Clausius-Duhem** après avoir transformé l'intégrale de surface en une intégrale de volume (théorème de la divergence de Gauss-Ostrogradsky) :

$$\rho \frac{Ds}{Dt} \geq \frac{\rho h}{T} - \left( \frac{q_i}{T} \right)_{,i} \quad (\text{II.93})$$

où encore

$$\rho \frac{Ds}{Dt} \geq \frac{\rho h}{T} - \frac{q_{i,i}}{T} + \frac{1}{T^2} T_{,i} q_i \quad (\text{II.94})$$

Une forme finale de l'inégalité de **Clausius-Duhem** en termes de puissance est obtenue en remplaçant l'équation d'énergie (II.87) dans l'équation (II.94), tel que :

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} \geq \rho \frac{D\varepsilon}{Dt} - T_{ji} D_{ij} - M_{ji} K_{ij} + \frac{1}{T} T_{,i} q_i \quad (\text{II.95})$$

Nous avons montré que le nombre réel de composantes de contraintes indépendantes est neuf, à savoir six composantes de  $T_{(ji)}$  et les trois composantes du vecteur  $M_i$  qui est le vecteur dual du tenseur antisymétrique  $M_{ji}$ . Les lois de conservation ou les équations générales d'équilibre sous forme différentielle peuvent être résumées comme suit :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho v_{i,i} = 0 \quad (\text{II.96.1})$$

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = T_{ji,j} + \rho b_i \quad (\text{II.96.2})$$

$$T_{[ji]} = -M_{[i,j]} \quad (\text{II.96.3})$$

$$\rho \frac{D\varepsilon}{Dt} = T_{(ji)} D_{ij} - 2M_i K_i - q_{i,i} + \rho h \quad (\text{II.96.4})$$

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} \geq \rho \frac{D\varepsilon}{Dt} - T_{(ji)} D_{ij} + 2M_i K_i + \frac{1}{T} T_{,i} q_i \quad (\text{II.96.5})$$

A ces équations, on doit rajouter l'équation d'état du fluide compressible (gaz) :

$$f(p, \rho, T) = 0 \quad (\text{II.96.6})$$

En reportant l'équation (II.96.3) dans l'équation (II.96.2), l'équation du mouvement linéaire(II.96.2) devient :

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = [T_{(ji)} + M_{[j,i]}]_{,j} + \rho b_i \quad (\text{II.97})$$

Il est bien évident que les équations de mouvement (II.96.1 à 3) seules ne suffisent pas pour décrire la réponse mécanique d'un milieu matériel particulier. Pour compléter la description du mouvement ou de l'écoulement, nous devons définir dans le prochain paragraphe les équations constitutives du fluide considéré comme visqueux linéaire.

## II.7. Equations constitutives pour fluides visqueux linéaires

Avant d'examiner les relations constitutives de couples de contraintes, considérons à nouveau les deux d'équations du mouvement ensemble (II.96.2) et

(II.96.3) correspondant respectivement à une translation linéaire et une rotation angulaire d'un élément de fluide infinitésimal. Un fluide à couple de contraintes visqueux est un continuum dans lequel les contraintes et les couples de contraintes dépendent des taux de déformation et des taux de courbure moyens de sorte que

$$T_{ji} = -p(\rho, T) \delta_{ij} + \tau_{ji}(D_{mn}, K_m, \rho, T) \quad (\text{II.98})$$

$$M_i = M_i(D_{mn}, K_m, \rho, T) \quad (\text{II.99})$$

où  $p(\rho, T)$  est la pression thermodynamique représentant la seule contrainte dans le fluide lorsqu'il n'y a pas de taux de déformation. D'autre part,  $\tau_{ji}(D_{mn}, K_m, \rho, T)$  est la partie du tenseur qui dépend de  $D_{mn}$ ,  $K_m$  et la viscosité du fluide.

Par conséquent, une simple modification d'un fluide visqueux newtonien donne

$$T_{(ji)} = -p(\rho, T) \delta_{ij} + \lambda(\rho, T) D_{kk} \delta_{ij} + 2\mu(\rho, T) D_{ij} \quad (\text{II.100})$$

$$M_i = -8\eta(\rho, T) K_i \quad (\text{II.101})$$

On note que l'expression de la partie symétrique du tenseur des contraintes  $T_{(ji)}$  représentée par l'équation(II.100) est exactement la relation constitutive classique, où  $\lambda(\rho, T)$  et  $\mu(\rho, T)$  sont respectivement les coefficients de viscosité de dilatation et de cisaillement classiques et  $p(\rho, T)$  est la pression thermodynamique. L'expression linéaire de  $M_i$  dans l'équation(II.101) est compatible avec le caractère isotrope du fluide. La forme linéaire du coefficient a été choisie de telle sorte qu'elle ressemble à certaines caractéristiques des relations constitutives établies par Stokes [26]. Ainsi,  $\eta(\rho, T)$  est le seul coefficient physique supplémentaire, qui représente les couples de contraintes dans le fluide. Le signe négatif de l'équation(II.101) rend ce coefficient positif, comme on le voit à partir de l'équation (II.88) pour l'énergie de dissipation. Dans ce qui suit, nous supposons que les coefficients  $\mu$ ,  $\lambda$  et  $\eta$  du fluide sont constants. Par conséquent, nous avons

$$T_{(ji)} = -p \delta_{ij} + \lambda D_{kk} \delta_{ij} + 2\mu D_{ij} \quad (\text{II.102})$$

$$M_i = -8\eta K_i \quad (\text{II.103})$$

En utilisant l'équation (II.44), on obtient

$$M_i = 2\eta(\nabla^2 v_i - v_{k,ki}) \quad (\text{II.104})$$

où sous forme vectorielle

$$\mathbf{M} = 2\eta \left[ \underbrace{\nabla^2 \mathbf{v} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v})}_{= -\mathbf{rot}(\mathbf{rot}(\mathbf{v}))} \right] \quad (\text{II.105})$$

Notons que

$$\nabla \cdot \mathbf{M} = 0 \quad (\text{II.106})$$

En outre,

$$M_{i,j} = 2\eta (\nabla^2 v_{i,j} - v_{k,kij}) \quad (\text{II.107})$$

En conséquence,

$$M_{[i,j]} = \eta \nabla^2 (v_{i,j} - v_{j,i}) \quad (\text{II.108})$$

où encore

$$M_{[i,j]} = 2\eta \nabla^2 \Omega_{ij} \quad (\text{II.109})$$

et nous obtenons pour la partie antisymétrique du tenseur de contraintes

$$T_{[ji]} = -M_{[i,j]} = 2\eta \nabla^2 \Omega_{ji} \quad (\text{II.110})$$

Le vecteur axial  $S_i$  défini dans l'équation (II. 77) comme le dual de  $T_{[ji]}$  peut maintenant être exprimé par :

$$S_i = -4 \eta \varepsilon_{ijk} K_{k,j} \quad (\text{II.111})$$

Par conséquent, la relation constitutive pour le vecteur  $\mathbf{S}$  est :

$$\mathbf{S} = -4\eta \nabla \times \mathbf{K} \quad (\text{II.112})$$

ou compte tenu de la relation (II.42)

$$\mathbf{S} = -2\eta \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{\omega} = 2\eta \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \quad (\text{II.113})$$

où encore compte tenu de la relation (II.20)

$$\mathbf{S} = -\eta \nabla \times \nabla \times \nabla \times \mathbf{v} \quad (\text{II.114})$$

Ce résultat remarquable montre que le vecteur  $\mathbf{S}$ , correspondant à la partie antisymétrique du tenseur de contraintes, est proportionnel à  $\nabla \times \nabla \times \nabla \times \mathbf{v}$  ou  $\mathbf{rot}(\mathbf{rot}(\mathbf{rot}(\mathbf{v})))$ , ce qui souligne encore une fois l'importance de la rotation dans la théorie des milieux à couple de contraintes.

En utilisant les équations (II. 100) et (II.110), le tenseur des contraintes totales s'écrit :

$$T_{ji} = \underbrace{-p\delta_{ij} + \lambda \overbrace{D_{kk}}^{\tau_{ij}} \delta_{ij} + 2\mu D_{ij}}_{\text{Partiesymétrique}} + \underbrace{2\eta \nabla^2 \Omega_{ji}}_{\text{Partieanti-symétrique}} \quad (\text{II.115})$$

$$\text{avec } \Omega_{ji} = -\Omega_{ij} = -v_{[i,j]} = -\frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i})$$

et à partir de l'équation (II.103), nous remarquons également que

$$M_{ji} = -8\eta K_{ji} = 8\eta K_{ij} = 4\eta (\omega_{i,j} - \omega_{j,i}) \quad (\text{II.116})$$

qui peut être plus utile que  $M_i$  dans la pratique.

Nous pouvons remarquer que ces relations constitutives sont semblables à celles établies dans la théorie des couples de contraintes indéterminée de Vijay Kumar Stokes [26], lorsque  $\eta$  dans la théorie précédente est défini comme  $\eta' = -\eta$ . Cependant, nous devons souligner que ce réglage particulier des paramètres est explicitement exclu dans le travail de Mindlin et Tiersten [24] et Stokes [26]. Ici, nous avons dérivé la théorie de couple de contraintes dans laquelle toutes les anciennes difficultés avec indétermination disparaissent et où un seul paramètre du milieu matériel (fluide) dépendant de la taille  $\eta$  apparaît. Il est intéressant de souligner que le rapport :

$$\frac{\eta}{\mu} = \ell^2 \text{ ou encore } \ell = \sqrt{\frac{\eta}{\mu}} \quad (\text{II.117})$$

peut être considéré pour spécifier une longueur caractéristique du milieu matériel  $\ell$ , qui ne figure absolument pas en mécanique des fluides classique, mais qui est fondamentale en théorie des milieux continus à couple de contraintes.

A partir de la définition du tenseur de contraintes (force-stress tensor) dans l'équation (II.115), nous trouvons que sa trace est :

$$T_{kk} = -3p + (3\lambda + 2\mu) D_{kk} \quad (\text{II.118})$$

qui peut s'écrire aussi sous la forme :

$$-\bar{p} = \frac{1}{3} T_{kk} = -p + \left( \lambda + \frac{2}{3} \mu \right) D_{kk} \quad (\text{II.119})$$

où  $\bar{p}$  est la pression mécanique

En utilisant l'équation de continuité sous la forme

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho D_{kk} = 0 \quad (\text{II.120})$$

Nous obtenons :

$$p - \bar{p} = \left( \lambda + \frac{2}{3} \mu \right) D_{kk} = - \left( \lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \quad (\text{II.121})$$

Ainsi, pour un écoulement incompressible, la pression thermodynamique  $p$  et la pression mécanique  $\bar{p}$  sont égales. Toutefois, il est parfois supposé que, selon

l'hypothèse de Stokes (II.122), cette égalité est toujours valable quelque soit le cas du fluide même compressible (gaz monoatomique), soit :

$$\lambda + \frac{2}{3}\mu = 0 \quad (\text{II.122})$$

La quantité  $\lambda + \frac{2}{3}\mu$  est dénommée viscosité de volume (bulkviscosity)[45].

Lorsque le tenseur de contraintes

$$T_{ji} = -p\delta_{ij} + \lambda D_{kk}\delta_{ij} + 2\mu D_{ij} - 2\eta\nabla^2\Omega_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda v_{k,k}\delta_{ij} + \mu(v_{i,j} + v_{j,i}) - \eta\nabla^2(v_{i,j} - v_{j,i}) \quad (\text{II.123})$$

Est reporté dans les équations de mouvement linéaire (II.96.2), nous obtenons les équations de mouvement d'un fluide non newtonien à couple de contraintes :

$$-p_{,i} + (\lambda + \mu + \eta\nabla^2)v_{k,ki} + (\mu - \eta\nabla^2)\nabla^2 v_i + \rho b_i = \rho \frac{Dv_i}{Dt} \quad (\text{II.124})$$

qui peut être écrite sous forme vectorielle :

$$-\nabla p + (\lambda + \mu + \eta\nabla^2)\nabla(\nabla \bullet \mathbf{v}) + (\mu - \eta\nabla^2)\nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \quad (\text{II.125})$$

ou encore

$$-\nabla p + (\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \bullet \mathbf{v}) - (\mu - \eta\nabla^2)\nabla \times \nabla \times \mathbf{v} + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \quad (\text{II.126})$$

Cette équation est exactement identique à celle utilisée par V. K. Stokes [26] sur la base du travail de Mindlin et Tiersten [24]. La non dépendance de cette équation de  $\eta'$  dans la théorie Mindlin- Tiersten aurait été utilisée pour indiquer que  $\eta'$  dans leur théorie ne devrait pas être indépendant de  $\eta$ . Comme nous le savons maintenant, la relation correcte devrait être  $\eta' = -\eta$ .

A partir des équations constitutives (II.102) et (II.103), nous avons

$$T_{(ji)}D_{ij} - 2M_i K_i = -pD_{kk} + \lambda D_{kk}D_{kk} + 2\mu D_{ij}D_{ij} + 16\eta K_i K_i \quad (\text{II.127})$$

Par conséquent, l'équation d'énergie (II.96.4) devient :

$$\rho \frac{D\varepsilon}{Dt} = -pD_{kk} + \lambda D_{kk}D_{pp} + 2\mu D_{ij}D_{ij} + 16\eta K_i K_i - q_{i,i} + \rho h \quad (\text{II.128})$$

Le terme supplémentaire de dissipation d'énergie  $16\eta K_i K_i$  fait de la mécanique des fluides à couple de contraintes plus appropriée pouvant constituer une base potentielle pour l'étude de la turbulence. En outre, il convient de souligner que ce nouveau terme pour la dissipation de l'énergie a une influence stabilisatrice pour des écoulements

caractérisés par un nombre de Reynolds élevé. Par ailleurs, l'idée d'ajouter un terme du quatrième ordre a été introduite il y a longtemps comme un terme de dissipation artificielle en vue de stabiliser les calculs de simulation numérique en CFD (Computational Fluid Dynamics) [41- 43].

## II.8. Fluides visqueux incompressibles : Ecoulement général

Considérons maintenant le cas important, où la compressibilité du liquide est négligeable. Pour de nombreuses applications pratiques telles que, l'hypothèse d'un fluide incompressible est appropriée. Dans ce cas, l'équation de continuité se réduit à

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = D_{kk} = 0 \quad (\text{II.129})$$

Puis, de l'équation (II.44), le vecteur des taux de courbure moyen devient :

$$K_i = -\frac{1}{4} \nabla^2 v_i = -\frac{1}{4} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (\text{II.130})$$

et pour les contraintes, nous avons compte tenu de la relation (II.117) :

$$T_{(ji)} = -p \delta_{ij} + 2\mu D_{ij} \quad (\text{II.131})$$

$$M_i = 2\mu \ell^2 \nabla^2 v_i \quad (\text{II.132})$$

$$T_{[ji]} = 2\mu \ell^2 \nabla^2 \Omega_{ji} \quad (\text{II.133})$$

Notons que les équations (II.130) et (II.132) indiquent clairement que  $K_i$  et  $M_i$  sont des vecteurs polaires, comme mentionné précédemment.

Commençant par l'équation (II.132), nous utilisons  $\mu \ell^2$  au lieu de  $\eta$ . Enfin, nous avons

$$T_{ji} = -p \delta_{ij} + 2\mu D_{ij} + 2\mu \ell^2 \nabla^2 \Omega_{ji} \quad (\text{II.134})$$

$$\text{ou encore } T_{ji} = -p \delta_{ij} + 2\mu D_{ij} - 2\mu \ell^2 \frac{\partial^2 \Omega_{ij}}{\partial x_k \partial x_k}$$

$$\text{où } -p = T_{kk}/3 \quad (\text{II.135})$$

Par conséquent, l'équation de mouvement linéaire (II.125) se réduit à

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} - \mu \ell^2 \nabla^2 \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{b} \quad (\text{II.136})$$

et l'équation d'énergie (II.128) devient :

$$\rho \frac{D\varepsilon}{Dt} = \mu (v_{i,j} v_{i,j} + v_{i,j} v_{j,i}) + \mu \ell^2 \nabla^2 v_i \cdot \nabla^2 v_i - q_{i,i} + \rho h \quad (\text{II.137})$$

qui peut également s'écrire

$$\rho \frac{D\varepsilon}{Dt} = \mu [v_{i,j}(v_{i,j} + v_{j,i})] + \mu \ell^2 \nabla^2 \mathbf{v} \bullet \nabla^2 \mathbf{v} - q_{i,i} + \rho h \quad (\text{II.138.1})$$

Si le milieu est sans source de chaleur (sourceless medium), l'équation d'énergie se réduit à :

$$\rho \frac{D\varepsilon}{Dt} = \mu [v_{i,j}(v_{i,j} + v_{j,i})] + \mu \ell^2 \nabla^2 \mathbf{v} \bullet \nabla^2 \mathbf{v} - q_{i,i} \quad (\text{II.138.2})$$

avec  $q_i = -k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j}$  ou  $\mathbf{q} = -\mathbf{k} \nabla T$ ,  $\mathbf{k} = k_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$

Si le milieu fluide est isotrope, on peut écrire :  $q_i = -k \frac{\partial T}{\partial x_i}$  qui est la loi de Fourier. Dans

ces conditions, l'équation d'énergie (II.138.2) devient :

$$\rho \frac{D\varepsilon}{Dt} = \mu [v_{i,j}(v_{i,j} + v_{j,i})] + \mu \ell^2 \nabla^2 \mathbf{v} \bullet \nabla^2 \mathbf{v} + k \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i} \quad (\text{II.138.3})$$

ou encore

$$\underbrace{\rho C_p \frac{DT}{Dt}}_{\text{Apport de chaleur par convection}} = \underbrace{\mu [v_{i,j}(v_{i,j} + v_{j,i})] + \mu \ell^2 \nabla^2 \mathbf{v} \bullet \nabla^2 \mathbf{v}}_{\text{Dissipation visqueuse totale}} + \underbrace{k \nabla^2 T}_{\text{Apport de chaleur par conduction}} \quad (\text{II.138.4})$$

avec  $\frac{D}{Dt}(\circ) = \frac{\partial}{\partial t}(\circ) + \mathbf{v} \bullet \nabla(\circ)$  ou  $\frac{D}{Dt}(\circ) = \frac{\partial}{\partial t}(\circ) + v_j \frac{\partial(\circ)}{\partial x_j}$

Pour un fluide incompressible ayant une viscosité constante, lorsque la force de volume est négligée, les équations de mouvement (II.136) se réduisent à :

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} - \mu \ell^2 \nabla^2 \nabla^2 \mathbf{v} \quad (\text{II.139})$$

qui peut s'écrire aussi :

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \mathbf{v} \bullet \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} - \mu \ell^2 \nabla^2 \nabla^2 \mathbf{v} \quad (\text{II.140})$$

avec  $\nabla \mathbf{v} \equiv \overline{\text{grad}(\mathbf{v})}$  est le tenseur gradient de vitesse d'ordre 2 représenté par la matrice carrée (3×3)  $[L]$  tel que  $L_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ .

Le terme non linéaire figurant dans le membre gauche de l'équation (II.140) correspondant à l'accélération convective peut être écrit comme suit :

$$\nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla \mathbf{v}^2 - \mathbf{v} \times \underbrace{(\nabla \times \mathbf{v})}_{2\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{2} \nabla \mathbf{v}^2 - \mathbf{v} \times \boldsymbol{\zeta} \quad (\text{II.141})$$

où  $\mathbf{v}^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$

Par conséquent,

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{v}^2 + \boldsymbol{\zeta} \times \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} - \mu \ell^2 \nabla^2 \nabla^2 \mathbf{v} \quad (\text{II.142})$$

L'équation de vorticité est alors obtenue en prenant le rotationnel de l'équation vectorielle (II. 142), soit :

$$\frac{D\boldsymbol{\zeta}}{Dt} = \nabla \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\zeta} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\zeta} - \nu \ell^2 \nabla^4 \boldsymbol{\zeta} \quad (\text{II.143})$$

$$\text{où } \nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (\text{II.144})$$

est la viscosité cinématique du fluide. C'est l'équation de transport de vorticité du fluide à de couple de contraintes. Il est intéressant, pour les écoulements bidimensionnels, le vecteur de vorticité ou tourbillon  $\boldsymbol{\zeta}$  est perpendiculaire au plan de l'écoulement et, par conséquent, nous avons l'équation scalaire :

$$\frac{D\zeta}{Dt} = \nu \nabla^2 \zeta - \nu \ell^2 \nabla^4 \zeta \quad (\text{II.145})$$

pour la composante hors-plan du tourbillon  $\zeta$ .

En appliquant l'opérateur de divergence aux deux membres de l'équation vectorielle (II.139) et compte tenu de l'équation de continuité (II.129), on obtient l'équation régissant la distribution de pression

$$\nabla^2 p + \rho v_{i,j} v_{j,i} = 0 \quad (\text{II.146})$$

qui est identique à l'équation de Poisson.

 tant donné que les équations gouvernantes sont très compliquées, les solutions analytiques sont rares et, par conséquent, le recours aux formulations numériques est nécessaire pour trouver des solutions approchées. Hadjefandiari et al. [44] ont mis au point une formulation intégrale de frontière pour des écoulements rampants bidimensionnels (2-D creeping flows) de fluide à couple de contraintes.

## II.9. Conclusion

La théorie des écoulements de fluides compressibles ou incompressible à couple de contraintes développée par V. K. Stokes [26] dérive de la théorie de l'élasticité linéaire formulée par Mindlin et Tiersten [24] dans le cas où les couples de contraintes sont pris en considération en plus des forces de surface (vecteur contrainte). Il résulte que cette théorie est basée sur une véritable description du continuum du point de vue cinématique avec l'introduction des taux de vorticité et de courbure définie directement à partir du champ de vitesse de l'écoulement.

Cependant, les théories de Mindlin et Tiersten [24], Koiter [25] et Stokes [26] utilisent un tenseur de courbure incohérent, et la partie sphérique du tenseur de couples de contraintes demeure indéterminée. En outre, dans Mindlin et Tiersten [24], les couples de volume apparaissent dans les relations constitutives pour le tenseur des contraintes.

Dans le présent chapitre, nous avons examiné attentivement les paramètres de description cinématique, les relations relative à l'énergie et les conditions aux limites de supprimer toutes les indéterminations les aspects incorrects de la formulation. Le but est la définition d'une théorie de couple de contrainte complète qui tient compte de la taille des particules fluides en écoulement. Dans cette nouvelle théorie, le tenseur de couple de contraintes est antisymétrique.

Dans les prochains chapitres, nous allons appliquer les équations dérivées dans ce chapitre à savoir l'équation de mouvement linéaire écrite pour un fluide compressible ou incompressible non pesant (forces de volume négligées) (II.139) ou (II.140) et l'équation d'énergie (II.138.4) pour l'étude de la lubrification thermo-hydrodynamique (THD) des paliers fluides et la lubrification aérodynamique en régime isotherme des paliers à feuilles.

**CHAPITRE III**  
**THEORIE DE LA LUBRIFICATION THERMO-HYDRODYNAMIQUE (THD)**  
**DES PALIERS LUBRIFIES PAR DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES**  
**A COUPLE DE CONTRAINTES**

### **III.1. Introduction**

Les paliers hydrodynamiques assurent de nombreux guidages dans les mécanismes contemporains à cause de leur simplicité constructive et leur fiabilité élevée. Le bon fonctionnement des paliers dépend essentiellement des caractéristiques d'un film présent entre les surfaces en mouvement relatif. Dans des conditions sévères de fonctionnement (charges spécifiques et vitesses élevées), la variation de la viscosité avec la température et les conditions d'alimentation de l'huile, jouent un rôle, non négligeable sur les principaux paramètres de fonctionnement d'un palier.

La lubrification THD consiste à déterminer les champs de température dans le fluide mais aussi dans les solides constituant le contact en liaison avec le champ de pression hydrodynamique dans le film lubrifiant. Pour cela, à l'équation de Reynolds dont le paramètre principal est la pression sont associées deux équations supplémentaires : l'équation de l'énergie qui va permettre de déterminer la température en tout point du fluide, et l'équation de Fourier qui permettra, de déterminer la température dans les solides.

Dans les études de simulation des problèmes de lubrification, nous supposons généralement que le comportement des fluides lubrifiants est newtonien. Néanmoins, les applications pratiques de la lubrification montrent que le modèle de fluide newtonien ne constitue pas une approche satisfaisante des problèmes de lubrification avec des huiles dopées ou additivées. Des études expérimentales ont montré que les huiles contenant des additifs de viscosité telles que les huiles moteurs multigrades (SAE 5W40,...) ont un comportement rhéologique non newtonien, leur viscosité diminue quand le taux de cisaillement auquel elles sont soumises augmente. Ainsi, leur écoulement ne peut être décrit par la théorie des milieux continus classique qui néglige la taille des particules.

Dans le premier chapitre, nous avons vu qu'il existe plusieurs modèles et théories permettant de décrire l'écoulement de ces fluides dits à rhéologie complexe. Parmi ces théories, la théorie des milieux continus de Vijay Kumar Stokes présentée en détails dans le chapitre précédent est la plus simple et la plus utilisée car elle permet de tenir compte de la taille des particules en mouvement et des couples de volume et de contrainte dus à la présence des additifs. Dans la présente étude, le lubrifiant est assimilé à un fluide incompressible à couple de contrainte pour lequel seuls les moments de contrainte qui s'ajoutent aux forces de surface (forces de pression et de frottement visqueux) sont pris en considération.

## **III.2. Paliers hydrodynamiques**

Dans ces systèmes, un fluide visqueux sépare totalement les surfaces en présence. Ce fluide peut être un liquide pratiquement incompressible ou un gaz compressible. La pression dans le film est créée par le déplacement relatif des surfaces et la géométrie du contact. Les paliers hydrodynamiques sont fréquemment utilisés pour supporter des charges radiales, pour le guidage des rotors de dimensions importantes. Ces paliers sont conçus pour fonctionner dans des conditions sévères (charges et fréquences de rotations élevées). Par conséquent, pour remplir leur fonction dans de parfaites conditions, les paliers hydrodynamiques doivent être soigneusement conçus. Il existe deux types de configuration de paliers hydrodynamiques

- Paliers à géométrie fixe;
- Paliers à géométrie variable.

### **III.2.1. Paliers lisses cylindriques**

Les paliers lisses, à géométrie fixe, sont fréquemment utilisés, les plus simples sont constitués d'un arbre qui tourne à l'intérieur d'un coussinet complet (amplitude angulaire 360°). Ces deux éléments sont totalement séparés par un film lubrifiant (figure I.11). Dans certains mécanismes, ils correspondent à la meilleure solution technologique existant actuellement. On les rencontre dans les moteurs thermiques, les compresseurs, les turbomachines, les alternateurs, les réducteurs, etc.

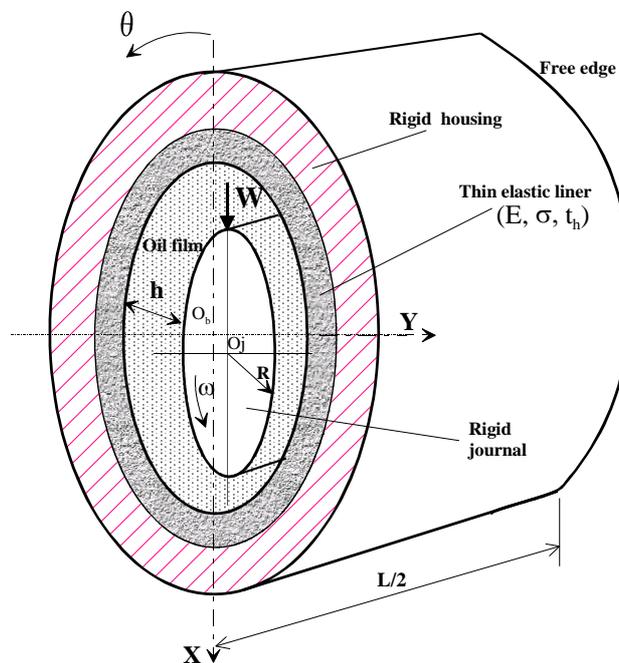


**Figure III. 1: Coussinets (Doc. LE COUSSINET MODERNE)**

Un palier lisse est constitué de deux éléments, l'arbre de rayon  $R_a$  et le coussinet de rayon  $R_c$  et de longueur  $L$  (figure III.2).

Ainsi, un palier lisse peut être schématisé par deux cercles de rayons voisins et caractérisé par trois grandeurs

- le jeu radial ( $C = R_c - R_a$ ),
- le jeu relatif ( $C/R$ ) est de l'ordre de 0.001,
- le rapport ( $L/D$ ) de la longueur au diamètre du palier.



**Figure III.2 : Section droite d'un palier lisse revêtu**

Pour une vitesse de rotation stable et une charge  $\vec{W}$  constante, le centre de l'arbre occupe une position fixe à l'intérieur du coussinet appelée point de fonctionnement.

Si le torseur des forces se réduit à une force unique  $\vec{W}$  qui agit dans le plan de la section médiane du palier, les axes de l'arbre et du coussinet sont alors parallèles.

Deux paramètres sont alors nécessaires pour positionner  $O_j$  par rapport à  $O_b$  ;

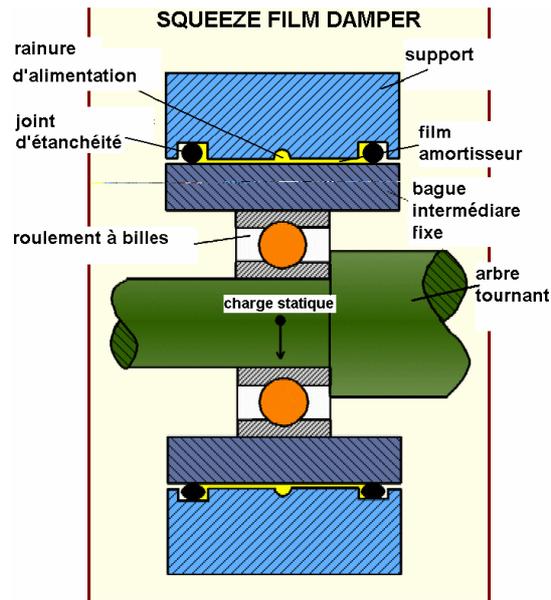
- La distance  $e = |\overrightarrow{O_j O_b}|$  appelée excentricité,
- L'angle  $\varnothing$  que fait la direction de la charge  $\vec{W}$  avec la ligne des centres  $\overrightarrow{O_j O_b}$  appelé angle de calage.

### III.2.2. Paliers à films amortisseurs (Squeeze Film Damper Bearings)

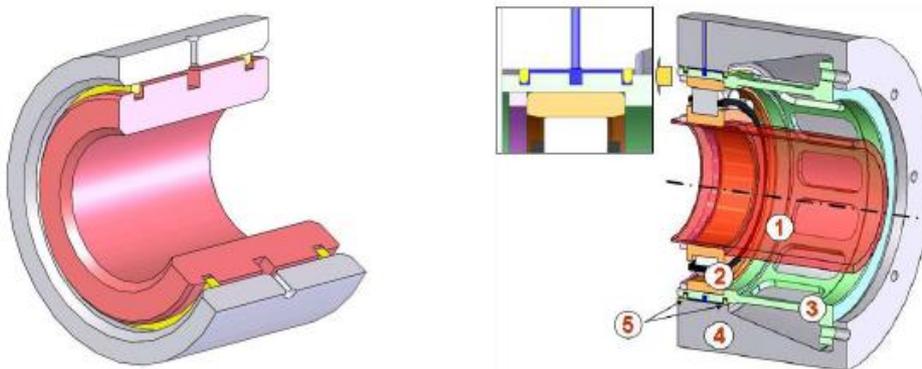
Ce type de palier est surtout utilisé pour le guidage des rotors de turbines tournant à grande vitesse tels que les turboréacteurs d'avions qui utilisent fréquemment des paliers de roulement au lieu des paliers à film d'huile. A cause de leur faible amortissement, les paliers de roulement ne permettent pas d'atténuer les amplitudes de vibrations surtout lors du passage des vitesses critiques. En effet, il a été montré expérimentalement que pour un rotor monté dans deux paliers de roulement rigides, le passage de la vitesse critique est très délicat car les amplitudes de vibrations sont trop importantes. Celles-ci peuvent être atténuées si le rotor est monté dans des paliers à film amortisseur. L'ensemble rotor-roulement à billes est monté dans un palier fluide (figure III.3). Le guidage en rotation de l'arbre est assuré par le roulement alors que le palier fluide joue le rôle d'un amortisseur visqueux. La bague intermédiaire (fixe en rotation) permet de réduire le mouvement de la bague extérieure du roulement dans le palier à une translation.

Deux technologies de paliers à film amortisseur peuvent être envisagées :

- Montage d'un ressort en parallèle avec le film amortisseur permettant de donner une certaine raideur au palier,
- Film amortisseur libre (sans ressort).



**Figure III. 3a:** Schéma de principe d'un palier à film amortisseur (SFDB)



**Figure III. 3b :** Amortisseur à film fluide (1, rotor, 2, roulement, 3, cage d'écureuil, 4, stator, 5, segments)

### III.2.3. Paliers à géométrie variable (Paliers à patins oscillants)

Les paliers à patins oscillants sont des paliers à géométrie variable ou réglables par leur mode de fonctionnement (figure III.4). Ils sont composés de  $n$  patins, identiques ou non, individuellement articulés autour de pivots situés généralement sur un cercle appelé cercle des pivots. Nous avons schématisé sur la figure (III.4a) un palier à trois patins oscillants non chargé.

Les principaux paramètres caractérisant ce type de palier sont :

- Le nombre de patins  $n$ ,

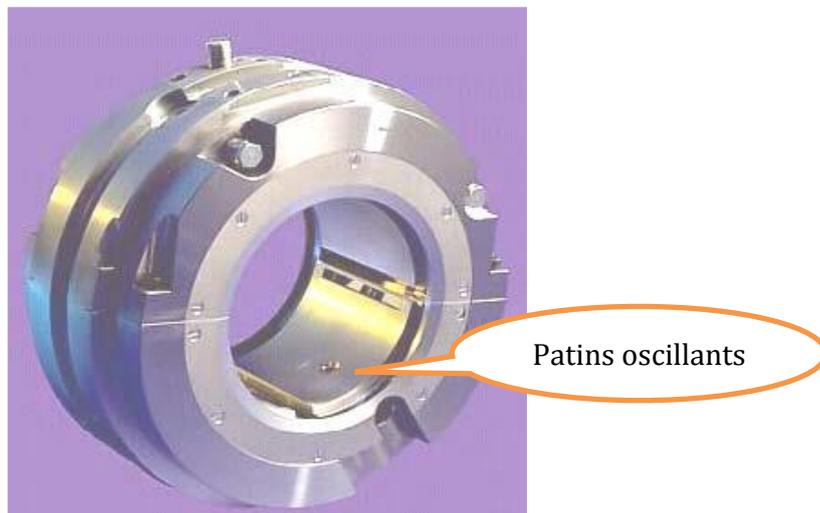
- Le rayon de l'arbre  $R_a$ ,
- Le rayon de cercle des pivots  $R_p$ ,
- L'amplitude angulaire  $\beta$ , la largeur  $L$ , le rayon de courbure  $R_p$ , la masse équivalente de chaque patin ( $M = I - R_p$ ) où  $I$  est le moment d'inertie du patin par rapport à son pivot,
- La position des pivots  $\psi_1$ ,
- Le jeu d'usinage du patin  $C_p = R_p - R_a$
- Le rapport  $\alpha/\beta$  qui définit la position angulaire du pivot,
- La distance  $a$  qui sépare le centre géométrique du palier du centre de courbure du patin,
- Le coefficient de précharge géométrique  $m = a / C_p$ .

Sous charge nulle, les centres de l'arbre  $O_a$  et du palier  $O$  sont confondus (figure III.4a).

Si le coefficient de précharge géométrique  $m$  est nul, il n'y a pas de génération de pression hydrodynamique. Les patins sont alors en position d'équilibre.

Il y a alors un risque de contact entre l'extrémité du patin et l'arbre.

Par contre, lorsque le coefficient de précharge géométrique  $m$  est différent de zéro, tous les patins sont hydrodynamiquement chargés.

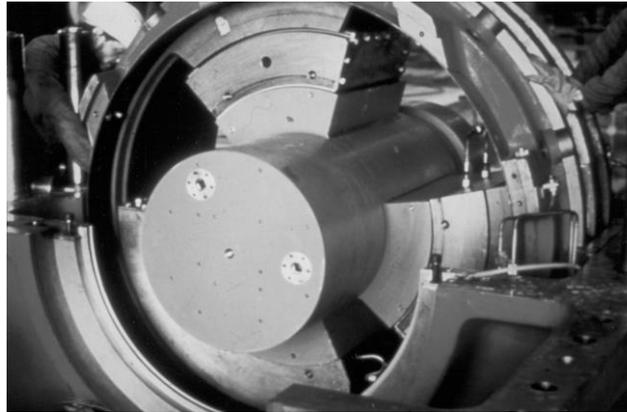


**Figure III.4a:** Photographie d'un palier à trois patins oscillants

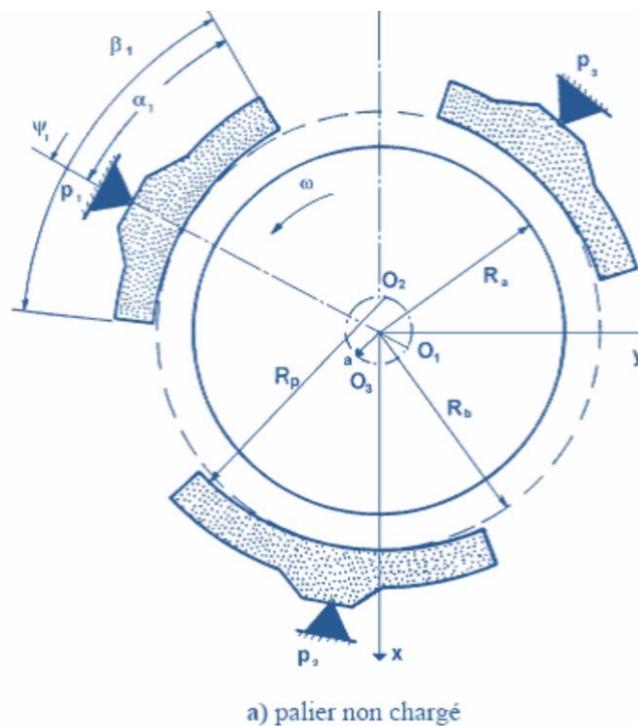
Le paramètre de précharge géométrique est donc très important puisqu'il assure, comme dans le cas des paliers à géométrie fixe, une bonne rigidité du système sous charge nulle. Lorsque le palier est chargé, l'arbre est excentré (figure III.4 b).

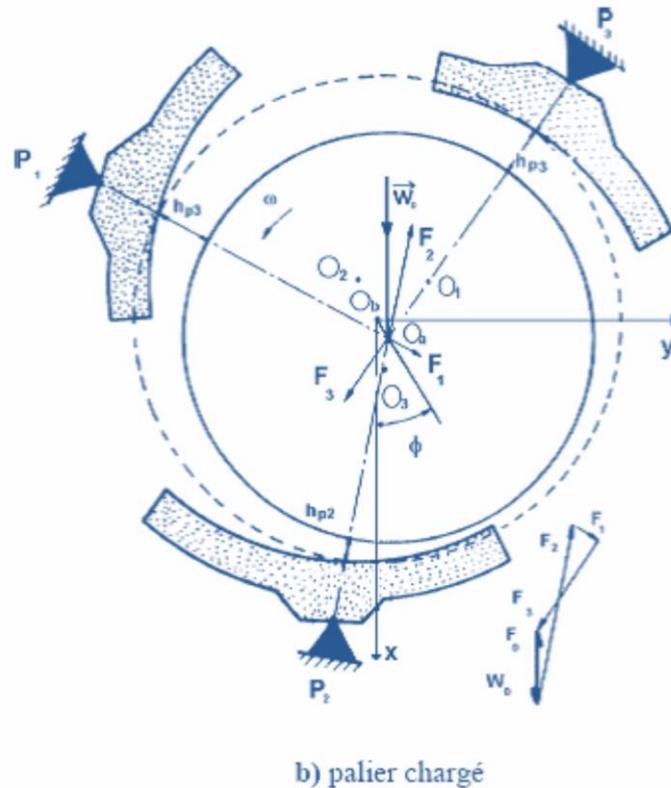
Les patins quant à eux tournent autour de leurs pivots. Ils occupent alors une position d'équilibre statique telle que l'action hydrodynamique exercée sur chaque patin passe par son pivot et que la résultante de toutes les forces  $\vec{F}_i$  soit égale et opposée à la charge statique extérieure  $\vec{W}_0$  supportée par le palier.

En régime dynamique, les patins peuvent suivre le mouvement de l'arbre, ce qui est à l'origine du palier.



**Figure III.4b** : Palier à patins oscillants de grand groupe turboalternateur (DOCUMENT EDF)





**Figure III. 5 :** Schématisation d'un palier à trois patins oscillants

### III.3. Lubrification THD des paliers à film incompressible

#### • Aspect historique

Les fondements de la science de la lubrification remontent à la fin du XIX siècle (O.Pinkus, 1987). C'est en effet au cours d'un congrès de la « British Association for the Advancement of Science », qui s'est tenu à Montréal en 1884, que Osborne Reynolds lut deux contributions, l'une intitulée « On the Action of lubricants », et l'autre « On the Friction of Journals ».

Pour la première fois lors de ce congrès, l'équation différentielle exprimant la nature hydrodynamique de la lubrification étant discutée. La place de pionnier que O. Reynolds occupe dans le domaine de la lubrification provient de la formulation de l'équation différentielle qui porte aujourd'hui son nom et dont l'établissement fut publié par la Royal Society (O. Reynolds, 1886). L'article de Reynolds contenait, outre l'établissement de la fameuse équation différentielle :

- a. une solution pour le film séparant deux surfaces elliptiques s'approchant l'une

- de l'autre à une vitesse  $V$ ,
- b. le concept de palier infiniment long que Reynolds se proposait de résoudre pour le cas du palier lisse et celui du blochet,
  - c. les caractéristiques du blochet optimal,
  - d. des considérations sur la cavitation dans la partie divergente du palier lisse,
  - e. Reynolds fut le premier à proposer des conditions aux limites particulières à la partie du contact,
  - f. la formulation de la loi de variation exponentielle de la viscosité en fonction de la température,
  - g. la notion de jeu de rayons différents, dans les paliers lisses.

Une nouvelle science venait ainsi de voir le jour.

Son évolution, cependant, était liée à la capacité de résoudre théoriquement l'équation de Reynolds, équation non homogène aux dérivées partielles et à coefficients variables.

Ce fut Arnold Sommerfeld (1858-1951) qui, le premier, parvint à intégrer théoriquement l'équation de Reynolds, en 1904 dans le cas d'un palier infiniment long. La solution qu'il obtint correspondait à une distribution de pression antisymétrique par rapport au centre du contact.

Il en résultait une portance nulle au contact et donc des résultats erronés lors du calcul des paliers et butées hydrodynamiques. Dans sa publication, Sommerfeld mentionnait déjà que ces résultats insensés devaient provenir des conditions aux limites adoptées.

Dès le début des tentatives de résolution du problème de la lubrification, deux voies se dessinent : la première s'oriente vers les problèmes des paliers et butées hydrodynamiques, alors que la deuxième se dirige vers les problèmes de contact hertiens, c'est-à-dire les problèmes liés à la lubrification des engrenages et des paliers à corps roulants.

#### • Les effets thermiques

Le modèle isotherme qui fut utilisé durant de nombreuses années, ne donne de bons résultats que dans des cas simples, pour lesquels l'énergie dissipée est faible est l'augmentation de température trop faible pour induire une variation de la viscosité du lubrifiant.

Les phénomènes thermiques dans les paliers lisses ont été abordés par plusieurs auteurs depuis plus de 50 ans. Comme le domaine est très vaste, l'étude bibliographique présentée dans les pages suivantes ne peut pas être exhaustive. Les travaux de Piffeteau[14] de Bouyer[16] et de Michaud [17] présentent une bibliographie retraçant l'évolution des études thermiques tant sur le plan théorique qu'expérimental.

En 1974, Ezzat et Rohde[1] présentent pratiquement la première étude sur le comportement THD d'un mécanisme lubrifié en régime transitoire. Ils traitent le problème par bloc de largeur finie. Les équations sont résolues à l'aide d'une discrétisation différences finies. Comme la phase transitoire thermique dans les solides est beaucoup plus longue, les solides sont supposés en régime établi.

Boncompain et Frêne [2] publient en 1979 une étude sur les caractéristiques statiques et dynamiques d'un palier fonctionnant en régime laminaire. Ils montrent que les effets thermiques perturbent fortement les coefficients de raideur et d'amortissement. De même ils remarquent que le gradient de température axial est faible.

En 1982, Ettles[3] étudie les effets thermoélastiques transitoires sur une butée de longueur infinie. L'équation de l'énergie est résolue à l'aide de la méthode des volumes finis. Les déformations thermoélastiques sont calculées à partir de la théorie des poutres; l'effet d'écrasement du film est négligé.

En 1983, Ferron et al. [4] présentent une comparaison entre théorie et expérimentation sur un palier lisse. Le modèle THD tient compte des transferts thermiques entre le fluide, l'arbre et le coussinet mais aussi de la recirculation du lubrifiant et de la cavitation. Ils mesurent expérimentalement les pressions et les températures dans le palier soumis à différentes charges à plusieurs vitesses. Ils observent une bonne concordance entre théorie et expérimentation mais soulignent que les dilatations différentielles ainsi que les déformations thermiques doivent être prises en compte afin d'obtenir une meilleure précision dans le calcul et dans les mesures.

Khonsari et Beaman [5] publient en 1986 une étude THD dans laquelle ils tiennent compte de la cavitation et du mélange de fluide dans la rainure. Deux types de conditions

aux limites sont étudiées : THD et ISOADI (arbre isotherme et surface intérieure du coussinet adiabatique). Ils montrent que les gradients de température suivant l'épaisseur du film sont beaucoup plus importants que ceux que l'on peut observer suivant la direction circonférentielle. Ils concluent également que l'hypothèse adiabatique pour la surface de l'arbre est une solution satisfaisante qui donne de bons résultats et permet un gain de temps de calcul non négligeable.

Knight et Barrett [6] ont étudié en 1987 les effets thermiques dans un palier soumis à un chargement statique. Afin de réduire le temps de calcul ils font plusieurs hypothèses simplificatrices : la viscosité varie dans la direction circonférentielle, mais elle est constante avec l'épaisseur ; la température a une variation parabolique suivant l'épaisseur du film ; la variation de la température dans la direction axiale est négligée. Des comparaisons faites avec des résultats expérimentaux montrent une bonne concordance.

Moes et al. [7] en 1989 associent les effets thermiques à une étude EHD d'un palier soumis à des charges dynamiques. La température des solides est considérée constante et les effets élasto-thermiques sont ignorés.

Afin de réduire le temps de calcul, la pression a une variation parabolique dans la direction axiale (hypothèse de Rhode et Li). L'étude révèle l'importance que peut avoir la position de l'alimentation sur les épaisseurs minimales du film et les températures maximales.

En 1992 Khonsari et Wang [8] ont découplé l'équation de Reynolds et l'équation de l'énergie afin d'analyser le comportement d'un palier lisse en régime transitoire. L'hypothèse d'une variation connue de la température et d'une viscosité constante suivant l'épaisseur du film est faite. Des comparaisons acceptables ont été obtenues avec les études de Ezzat et Rohde[1].

Pascovici et al. [9] ont analysé en 1995 le comportement TEHD transitoire d'un palier concentrique. Un modèle thermique "global" est utilisé. Les auteurs ont montré l'effet de la vitesse de rotation sur la variation de la température et du jeu radial.

Paranjpe et Han [10] proposent en 1995 une étude THD d'un palier soumis à une charge dynamique sinusoïdale. L'équation de l'énergie dans le film est résolue avec une discrétisation par volumes finis. L'arbre est considéré à une température constante.

L'équation de la chaleur, sans les termes transitoires est utilisée pour calculer le champ thermique dans le logement. La température d'alimentation est calculée en fonction du débit d'alimentation et de la température autour de la zone alimentée. Les auteurs ont montré que l'échelle de temps dans le film est du même ordre que celle de la charge appliquée. C'est pour cela que les effets transitoires dans le film ne peuvent pas être négligés. La température des solides ne varie pas avec le temps, lorsque le régime est établi.

Zhang et al [11] proposent en 1998 une analyse THD transitoire d'un palier soumis à un chargement dynamique en incluant la rugosité des surfaces. L'équation de l'énergie est résolue avec la méthode des différences finis en adoptant une température constante dans l'arbre et une condition adiabatique à l'interface film/coussinet. Les auteurs ont montré l'influence de la forme des rugosités sur les principales caractéristiques de l'écoulement.

La même année, Wang et al. [12] étudient un palier dynamique. L'équation de Reynolds, l'équation tridimensionnelle de l'énergie et l'équation bidimensionnelle de la chaleur dans les solides sont résolues avec une discrétisation par différences finis. La continuité de flux de chaleur et de la température est considérée à l'interface film/solides. Une condition de type échange convectif est utilisée pour les interfaces solides/extérieur. Les déformations thermiques des surfaces ne sont pas calculées.

En 1998, Kucinski[13] étudie le comportement TEHD des paliers lisses en régime transitoire. Il développe un modèle thermique bidimensionnelle et utilise la méthode des éléments finis. La validation des résultats numériques est faite par comparaison avec des études expérimentales pour deux catégories d'essais : démarrage rapide et démarrage lent. Les résultats théoriques sont en bon accord avec les données expérimentales. Des écarts plus importants sont observés près des régions en cavitation.

Piffeteau[14] étudie en 1999 le comportement TEHD d'un palier de tête de bielle. Afin de réduire le temps de calcul, l'hypothèse de Rhode et Li est employée. De même, les équations de l'énergie et de la chaleur sont bidimensionnelles. Pour modéliser la couche limite thermique qui apparaît à l'interface film/solides, il considère un raffinement local du maillage des solides. Pour les interfaces solides/extérieur une condition de type adiabatique ou de température imposée est choisie. Il conclut que les déformées

thermiques des surfaces ont un rôle plus important que celles dues à la pression hydrodynamique.

En 2000, Pascovici et al. [15] étudient le comportement transitoire d'un palier concentrique. Deux modèles sont développés : un modèle analytique et un modèle numérique. En considérant une variation parabolique de la température dans la couche limite thermique au sein du solide, à l'interface film/solides, ils présentent une prédiction analytique de la variation avec le temps de l'épaisseur de cette couche limite. Les comparaisons entre les deux modèles sont en très bon accord.

En 2003 Bouyer [16] étudie les performances des paliers soumis à des conditions sévères, il a montré que le modèle complet (TEHD) a une forte influence sur tous les paramètres du palier lorsqu'il est fortement sollicité. Les déformations mécaniques dues au champ de pression, ainsi que les déformations thermiques, dues à la fois aux dilatations des éléments du palier et aux gradients thermiques existants à l'interface, ont une influence considérable sur les performances du palier.

En 2004 Michaud [17] développe un modèle TEHD pour la modélisation des paliers de moteurs. Les équations tridimensionnelles de l'énergie et de la chaleur sont résolues avec la méthode des éléments finis. Une condition de continuité de flux de chaleur et de température est considérée à l'interface film/solides. Des conditions de type adiabatique ou de température imposée sont utilisées pour l'interface solides/extérieur. Les déformées élastiques et élasto-thermiques sont prises en compte à partir des matrices de compliances. Des temps de calcul importants (quelques jours) sont nécessaires pour la convergence du problème, surtout dans le cas des paliers dynamiques. Les comparaisons faites avec le modèle 2D de Piffeteau [14], ont montré l'importance d'un modèle 3D dans le film et dans les solides.

### **III.4. Equation de base de la dynamique des fluides à couple de contrainte**

Dans ce paragraphe, nous allons rappeler puis procéder à l'analyse dimensionnelle des équations gouvernantes dérivées dans le chapitre précédent, à

savoir les équations de mouvement, l'équation de continuité et l'équation d'énergie, en utilisant cette fois-ci la notation classique avec le changement de variables suivant :

- pour les variables d'espace :  $(x, y, z)$  au lieu de  $(x_1, x_2, x_3)$
- pour les composantes du champ de vitesse :  $(u, v, w)$  au lieu de  $(v_1, v_2, v_3)$

### III.4.1. Equations de mouvement d'un fluide à couple de contrainte

Dans le chapitre précédent, nous avons dérivé les équations de mouvement (momentum equations) d'un fluide non newtonien à couple de contrainte incompressible (II.140) qui s'écrivent comme suit :

- Notation vectorielle :

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} - \eta \nabla^4 \mathbf{v} \quad (\text{III.1})$$

- Notation indicielle:

$$\rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} - \eta \frac{\partial^4 u_i}{\partial x_j \partial x_j \partial x_k \partial x_k} ; \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (\text{II.2})$$

- Notation classique:

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \eta \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} \right) - 2\eta \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^2 \partial z^2} \right) \quad (\text{III.3.a})$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - \eta \left( \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 v}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} \right) - 2\eta \left( \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 v}{\partial y^2 \partial z^2} \right) \quad (\text{III.3.b})$$

$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \eta \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} \right) - 2\eta \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial z^2} \right) \quad (\text{III.3.c})$$

### III.4.2. Equation de continuité d'un écoulement incompressible

En notation classique, l'équation de continuité ou de conservation de la masse pour un écoulement incompressible et conservatif (absence de source et de puits) s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{III.4})$$

### III.4.3 Equation d'énergie

Pour un fluide iso-volume, l'équation d'énergie fournie par la thermodynamique en appliquant le principe de conservation s'écrit pour un milieu fluide homogène et isotrope :

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) = k \nabla^2 T + \underbrace{2\mu \overline{\mathbf{D}} : \overline{\mathbf{D}} + \mu \ell^2 \nabla^2 \mathbf{v} \cdot \nabla^2 \mathbf{v}}_{\text{Fonction de dissipation } \Phi} \quad (\text{III.5})$$

où

$$\overline{\mathbf{D}} = \frac{1}{2}(\overline{\text{grad}}(\mathbf{v}) + \overline{\text{grad}}^T(\mathbf{v})) \text{ et } \nabla^2 \mathbf{v} = \underbrace{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v})}_{\text{nul}} - \text{rot}(\text{rot}(\mathbf{v}))$$

Soit en notation indicielle :

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_j \cdot \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i} + \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \mu \ell^2 \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_k} \quad (\text{III.6})$$

ou encore en utilisant la notation classique :

$$\begin{aligned} \rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) &= k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + 2\mu \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \right. \\ &\left. \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] + \mu \ell^2 \left[ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)^2 + \right. \\ &\left. \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)^2 \right] \quad (\text{III.7}) \end{aligned}$$

Le deuxième et troisième terme du second membre de l'équation (III.7) représente la fonction de dissipation visqueuse qui s'exprime :

$$\begin{aligned} \Phi &= 2\mu \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] + \mu \ell^2 \left[ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \right. \right. \\ &\left. \left. \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)^2 \right] \quad (\text{III.8}) \end{aligned}$$

Notons que pour un fluide newtonien ( $\ell = 0$ ), l'expression de  $\Phi$  se simplifie et s'écrit :

$$\Phi = 2\mu \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (\text{III.9})$$

### III.5. Analyse dimensionnelle des équations de mouvement d'un fluide polaire

La théorie des écoulements de films minces visqueux suppose que l'épaisseur du film mesurée suivant la direction  $(O, y)$  est très faible devant les deux autres dimensions de l'espace, ce qui permet, pour déterminer l'ordre de grandeur des différents termes des équations (III.3) de poser :

- Pour les variables spatiale et temporelle :

$$\tilde{x} = \frac{x}{L}, \tilde{y} = \frac{y}{h}, \tilde{z} = \frac{z}{L}, \tilde{t} = \frac{tV}{L} \quad (\text{III.10a})$$

- Pour les composantes du champ de vitesse :

$$\tilde{u} = \frac{u}{V}, \tilde{v} = \frac{v}{\frac{h}{L}V}, \tilde{w} = \frac{w}{V} \quad (\text{III.10b})$$

- Pour les propriétés physiques du fluide lubrifiant :

$$\tilde{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0}, \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0} \text{ et } \tilde{\eta} = \frac{\eta}{\eta_0} \quad (\text{III.10c})$$

Dans ces expressions, L et V sont respectivement la dimension et la vitesse caractéristiques selon les axes  $(o, x)$  et  $(o, z)$ , h et  $\varepsilon V$  celles suivant  $(o, y)$  tandis que  $L/V$ ,  $\rho_0$ ,  $\mu_0$  et  $\eta_0$  définissent respectivement l'ordre de grandeur du temps et des constantes physiques du fluide. Ce changement de variables conduit à poser

$$\tilde{p} = p \frac{h^2}{VL\mu_0} = \varepsilon \Re_h \frac{p}{\rho_0 V^2} \text{ et } \ell_0 = \sqrt{\frac{\eta_0}{\mu_0}} \text{ et } \varepsilon = \frac{h}{L} \text{ est un paramètre d'échelle d'ordre}$$

$10^{-3}$  et

$$\Re_h = \rho_0 \frac{Vh}{\mu_0} = \frac{Vh}{\nu_0} = \varepsilon \Re_L \text{ est le nombre de Reynolds local.}$$

Notons que l'adimensionnement de la composante de la vitesse d'écoulement suivant la direction de l'épaisseur du film  $(o, y)$ ,  $\tilde{v} = \frac{v}{\varepsilon V}$  provient de l'analyse dimensionnelle de

l'équation de continuité (III.4) qui, sous forme adimensionnelle, s'écrit :

$$\frac{V}{L} \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{\varepsilon V} \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{= \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}}} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} \right) = 0 \quad (\text{III.11a})$$

ou encore :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} = 0 \quad (\text{III.11b})$$

Certains auteurs [18] utilisent le changement de variables suivant dans leur analyse dimensionnelle :

$$\hat{x} = \frac{x}{R}; \hat{y} = \frac{y}{C}; \hat{z} = \frac{z}{R}; \hat{u} = \frac{u}{V}; \hat{v} = \frac{v}{V} \frac{R}{C}; \hat{w} = \frac{w}{V}; \hat{p} = R_e \frac{C}{R} \frac{p}{\rho V^2}; \hat{t} = \omega t \text{ et } \varepsilon = \frac{C}{R} \ll 1$$

$C$  et  $R$  étant respectivement le jeu radial et le rayon du palier.

De ce changement de variables, on peut tirer les hypothèses suivantes :

$$\frac{v}{u} \sim \varepsilon, \quad \frac{w}{u} \sim \varepsilon, \quad \frac{\partial/\partial x}{\partial/\partial y} \sim \varepsilon, \quad \frac{\partial/\partial z}{\partial/\partial y} \sim \varepsilon, \quad \frac{\partial^2/\partial x^2}{\partial^2/\partial y^2} \sim \varepsilon^2 \text{ et } \frac{\partial^2/\partial z^2}{\partial^2/\partial y^2} \sim \varepsilon^2$$

Ce qui conduit à écrire :

$v \ll u$  et  $w$  ;

$$\frac{\partial u}{\partial x} \ll \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} \ll \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \ll \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

et des relations similaires pour la composante  $w$ .

Compte tenu de ces changements de variables, les équations de mouvement s'écrivent en termes de variables adimensionnelles comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} = & -\varepsilon \tilde{\rho} \mathfrak{R}_h \frac{D\tilde{u}}{D\tilde{t}} + \tilde{\mu} \left( \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2} \right) - \tilde{\eta} \left( \frac{l_0}{h} \right)^2 \left( \varepsilon^4 \frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^4} + \varepsilon^4 \frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^4} \right) - \\ & 2\tilde{\eta} \left( \frac{l_0}{h} \right)^2 \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2 \partial \tilde{y}^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2 \partial \tilde{z}^2} + \frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2 \partial \tilde{z}^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.12.a})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} = & \varepsilon^2 \left( -\varepsilon \tilde{\rho} \mathfrak{R}_h \frac{D\tilde{v}}{D\tilde{t}} + \tilde{\mu} \left( \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{z}^2} \right) - \tilde{\eta} \left( \frac{l_0}{h} \right)^2 \left( \varepsilon^4 \frac{\partial^4 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\partial^4 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^4} + \varepsilon^4 \frac{\partial^4 \tilde{v}}{\partial \tilde{z}^4} \right) - \right. \\ & \left. 2\tilde{\eta} \left( \frac{l_0}{h} \right)^2 \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^4 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2 \partial \tilde{y}^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^4 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2 \partial \tilde{z}^2} + \frac{\partial^4 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2 \partial \tilde{z}^2} \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{III.12.b})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} = & -\varepsilon \tilde{\rho} \mathfrak{R}_h \frac{D\tilde{w}}{D\tilde{t}} + \tilde{\mu} \left( \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{y}^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{z}^2} \right) - \tilde{\eta} \left( \frac{l_0}{h} \right)^2 \left( \varepsilon^4 \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{y}^4} + \varepsilon^4 \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{z}^4} \right) - \\ & 2\tilde{\eta} \left( \frac{l_0}{h} \right)^2 \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2 \partial \tilde{y}^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2 \partial \tilde{z}^2} + \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{y}^2 \partial \tilde{z}^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.12.c})$$

Cela permet, en supposant que toutes les quantités des équations ci-dessus sont de l'ordre de l'unité, de négliger tous les termes multipliés par  $\varepsilon^2$  et  $\varepsilon^4$ , il reste :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} = -\varepsilon \tilde{\rho} \mathfrak{R}_h \frac{D \tilde{u}}{D \tilde{t}} + \tilde{\mu} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} - \tilde{\eta} \left( \frac{\ell_0}{h} \right)^2 \frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^4} \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} = 0 \quad \rightarrow \tilde{p} = \tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{t}) \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} = -\varepsilon \tilde{\rho} \mathfrak{R}_h \frac{D \tilde{w}}{D \tilde{t}} + \tilde{\mu} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{y}^2} - \tilde{\eta} \left( \frac{\ell_0}{h} \right)^2 \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{y}^4} \end{array} \right. \quad (\text{III.13})$$

Si  $\varepsilon \mathfrak{R}_h \ll 1$ , les termes d'inertie seront négligeables et l'équation (III.13) se réduit à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} = \tilde{\mu} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} - \tilde{\eta} \left( \frac{\ell_0}{h} \right)^2 \frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^4} \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} = 0 \quad \rightarrow \tilde{p} = \tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{z}) \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} = \tilde{\mu} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{y}^2} - \tilde{\eta} \left( \frac{\ell_0}{h} \right)^2 \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{y}^4} \end{array} \right. \quad (\text{III.14})$$

En revenant aux variables dimensionnées, les équations (III.14) deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \eta \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \eta \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{\partial p}{\partial z} \end{array} \right. \quad (\text{III.15})$$

Il est utile de noter que lorsque la viscosité dynamique du fluide  $\mu$  varie selon l'épaisseur du film (cas thermo-visqueux) et la constante physique responsable des couples de contrainte  $\eta$  est constante, l'équation (III.15) prend la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \eta \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \eta \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{\partial p}{\partial z} \end{array} \right. \quad (\text{III.16})$$

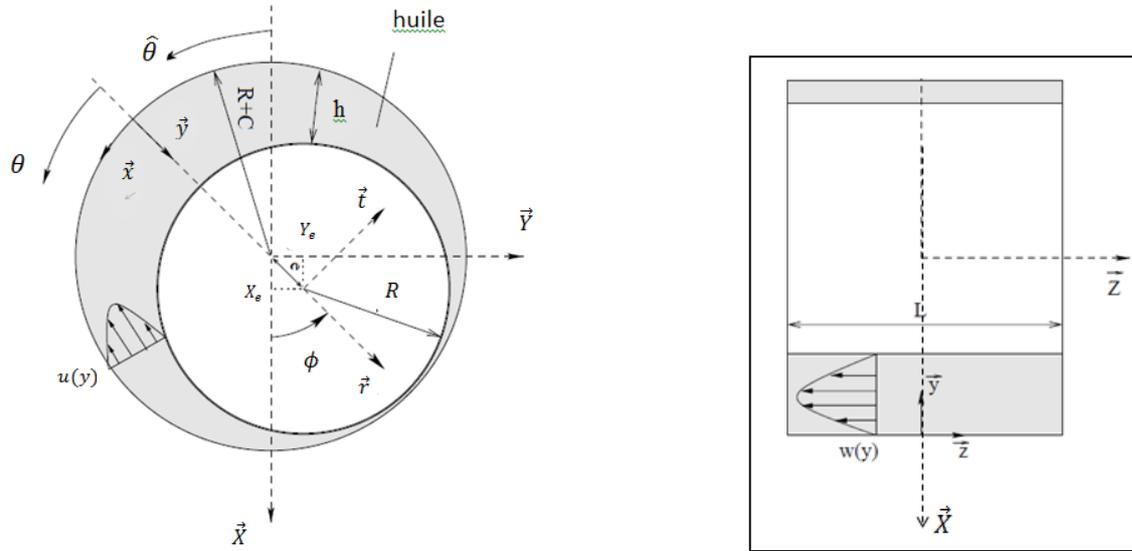


Figure III.6: Géométrie et système de repérage d'un palier cylindrique

### III.6. Analyse dimensionnelle de l'équation d'énergie

En lubrification par film mince visqueux, l'équation d'énergie peut aussi se simplifier très sensiblement à l'instar des équations de mouvement. Pour mettre en évidence les termes prépondérants, il est commode de récrire l'équation (III.7) sous forme adimensionnelle. Pour cela, on utilisera les variables sans dimension (III.10) auxquelles on ajoutera :

$$\tilde{T} = \frac{T}{T_0}, \quad \tilde{C}_p = \frac{C_p}{C_{p0}}, \quad \tilde{k} = \frac{k}{k_0} \quad (\text{III.17})$$

où  $T_0$ ,  $C_{p0}$  et  $k_0$  définissent respectivement l'ordre de grandeur de la température, de la chaleur massique et du coefficient de conductivité du fluide.

L'équation d'énergie normalisée s'écrit alors :

$$\mathcal{P}_e \tilde{\rho} \tilde{C}_p \frac{D\tilde{T}}{D\tilde{t}} = \tilde{k} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2} + N_{d1} \tilde{\mu} \left\{ \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \right)^2 + \left( \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{y}} \right)^2 \right\} + N_{d2} \tilde{\eta} \left[ \left( \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{y}^2} \right)^2 \right] \quad (\text{III.18})$$

où :

$\mathcal{P}_e = \rho_0 C_{p0} \frac{V h^2}{L k_0}$  qui est le nombre de *Peclet*,  $N_{d1} = \frac{\mu_0 V^2}{k_0 T_0}$  et  $N_{d2} = \frac{\eta_0 V^2}{h^2 k_0 T_0}$  qui sont les nombres de dissipation dus respectivement aux effets de cisaillement et de couples de contraintes.

En revenant aux variables dimensionnées, l'équation d'énergie s'écrit :

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \text{ou } \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z}$$

$$\underbrace{k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}}_{\text{ou } \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right)} + \underbrace{\mu \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\}}_{\Phi_1} + \underbrace{\eta \left[ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right]}_{\Phi_2} \quad (\text{III.19})$$

Dans le cas newtonien lorsque  $\eta = 0$ , l'équation d'énergie newtonienne se réduit à :

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \underbrace{k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}}_{\text{ou } \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right)} + \underbrace{\mu \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\}}_{\Phi_1} \quad (\text{III.20})$$

On remarque que contrairement à la pression, la température du fluide varie selon l'épaisseur du film.

### III.7. Profils des vitesses

L'intégration des équations (III.16) moyennant des conditions limites permet de déterminer les distributions ou les profils de vitesses en tout point du film fluide

#### III.7.1 Cas d'un fluide à couple de contrainte piézo-visqueux

Dans le cas où la viscosité du fluide  $\mu$  varie en fonction de la pression selon la loi de Barus [19]; c'est-à-dire  $\mu(p) = \mu_0 e^{\alpha p}$ , les équations (III.16) se simplifient car  $\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial y} = 0$  compte tenu de la deuxième équation du système (III.16) et s'expriment comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_0 e^{\alpha p(x,z)} \frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial y^2} - \eta \frac{\partial^4 u(x,y,z)}{\partial y^4} = \frac{\partial p(x,z)}{\partial x} \\ \mu_0 e^{\alpha p(x,z)} \frac{\partial^2 w(x,y,z)}{\partial y^2} - \eta \frac{\partial^4 w(x,y,z)}{\partial y^4} = \frac{\partial p(x,z)}{\partial z} \end{array} \right. \quad (\text{III.21a})$$

ou encore

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \ell^2 \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = \frac{e^{-\alpha p}}{\mu_0} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \ell^2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{e^{-\alpha p}}{\mu_0} \frac{\partial p}{\partial z} \end{array} \right. \quad (\text{III.21b})$$

dont les solutions générales sont :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = A_0 + A_1 y + B_1 \cosh\left(e^{\frac{\alpha p}{2}} \frac{y}{\ell}\right) + B_2 \sinh\left(e^{\frac{\alpha p}{2}} \frac{y}{\ell}\right) + \frac{1}{2\mu_0 e^{\alpha p}} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 \\ w(x, y, z) = C_0 + C_1 y + D_1 \cosh\left(e^{\frac{\alpha p}{2}} \frac{y}{\ell}\right) + D_2 \sinh\left(e^{\frac{\alpha p}{2}} \frac{y}{\ell}\right) + \frac{1}{2\mu_0 e^{\alpha p}} \frac{\partial p}{\partial z} y^2 \end{cases} \quad (\text{III.22})$$

Les conditions limites associées à ces équations sont :

$$\begin{aligned} u(x, 0, z) &= 0 \\ w(x, 0, z) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.23.a})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=0} &= 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=0} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.23.b})$$

$$\begin{aligned} u(x, h, z) &= U \\ w(x, h, z) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.23.c})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=h} &= 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=h} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.23.d})$$

Les conditions (III.23.a) et (III.23.c) sont appelées conditions de non glissement (no slip conditions), et les conditions (III.23.b) et (III.23.d) proviennent de l'annulation des couples de contraintes  $(-2\eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=0,h})$  et  $(-2\eta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=0,h})$  au niveau des parois (surfaces de l'arbre et du coussinet) dont l'expression générale a été établie dans le deuxième chapitre (équation II.116).

Compte tenu des conditions aux limites (III.23), l'intégration par rapport à  $y$  des équations (III.21.a) ou (III.21b) fournit les profils de vitesses suivants :

$$u(x, y, z) = \underbrace{U \frac{y}{h}}_{\text{termedeCouette}} + \underbrace{\frac{e^{-2\alpha p}}{2\mu_0} \frac{\partial p}{\partial x} \left\{ \frac{y(y-h)}{e^{-\alpha p}} + 2\ell^2 \left[ 1 - \frac{\text{Cosh}\left(\frac{2y-h}{2\ell e^{-\frac{1}{2}\alpha p}}\right)}{\text{Cosh}\left(\frac{h}{2\ell e^{-\frac{1}{2}\alpha p}}\right)} \right] \right\}}_{\text{termedeHagen-Poiseuille}} \quad (\text{III.24a})$$

$$w(x, y, z) = \underbrace{\frac{e^{-2\alpha p}}{2\mu_0} \frac{\partial p}{\partial z} \left\{ \frac{y(y-h)}{e^{-\alpha p}} + 2\ell^2 \left[ 1 - \frac{\text{Cosh}\left(\frac{2y-h}{2\ell e^{-\frac{1}{2}\alpha p}}\right)}{\text{Cosh}\left(\frac{h}{2\ell e^{-\frac{1}{2}\alpha p}}\right)} \right] \right\}}_{\text{termedeHagen-Poiseuille}} \quad (\text{III.24b})$$

$\alpha$  étant le coefficient de piézo-viscosité du fluide (viscosity-pressure coefficient).

Si le fluide polaire est iso-visqueux ( $\mu=\mu_0$ ), les profils de vitesses prennent la forme suivante:

$$u(x, y, z) = \underbrace{U \frac{y}{h}}_{\text{termedeCouette}} + \underbrace{\frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial p}{\partial x} \left\{ y(y-h) + 2\ell^2 \left[ 1 - \frac{\cosh\left(\frac{2y-h}{2\ell}\right)}{\cosh\left(\frac{h}{2\ell}\right)} \right] \right\}}_{\text{termedeHagen-Poiseuille}} \quad (\text{III.25a})$$

$$w(x, y, z) = \underbrace{\frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial p}{\partial z} \left\{ y(y-h) + 2\ell^2 \left[ 1 - \frac{\cosh\left(\frac{2y-h}{2\ell}\right)}{\cosh\left(\frac{h}{2\ell}\right)} \right] \right\}}_{\text{termedeHagen-Poiseuille}} \quad (\text{III.25b})$$

Il est également utile de rajouter, ci-dessous, les dérivées partielles par rapport à  $y$  de  $u$  et  $w$  qui serviront par la suite pour le calcul de la puissance dissipée, ... :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{U}{h} + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \left( 2y - h - 2\ell \frac{\sinh\left(\frac{2y-h}{2\ell}\right)}{\cosh\left(\frac{h}{2\ell}\right)} \right) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \left( 2 - 2 \frac{\cosh\left(\frac{2y-h}{2\ell}\right)}{\cosh\left(\frac{h}{2\ell}\right)} \right) \\ \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{\ell} \frac{\sinh\left(\frac{2y-h}{2\ell}\right)}{\cosh\left(\frac{h}{2\ell}\right)} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \left( 2y - h - 2\ell \frac{\sinh\left(\frac{2y-h}{2\ell}\right)}{\cosh\left(\frac{h}{2\ell}\right)} \right) \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \left( 2 - 2 \frac{\cosh\left(\frac{2y-h}{2\ell}\right)}{\cosh\left(\frac{h}{2\ell}\right)} \right) \\ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{1}{\ell} \frac{\sinh\left(\frac{2y-h}{2\ell}\right)}{\cosh\left(\frac{h}{2\ell}\right)} \end{array} \right.$$

D'autre part, pour un fluide newtonien (non polaire) et iso-visqueux pour lequel  $\ell = 0$  et  $\alpha = 0$ , les équations (III.25) deviennent :

$$u(x, y, z) = \underbrace{U \frac{y}{h}}_{\text{termedeCouette}} + \underbrace{\frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial p}{\partial x} y(y-h)}_{\text{termedeHagen-Poiseuille}} \quad (\text{III.26a})$$

$$w(x, y, z) = \underbrace{\frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial p}{\partial z} y(y-h)}_{\text{termedeHagen-Poiseuille}} \quad (\text{III.26b})$$

### III.7.2. Cas d'un fluide à couple de contrainte thermo-visqueux

Dans le cas thermo-visqueux, la viscosité dynamique du fluide dépend de la température  $T(x, y, z)$  et varie ainsi selon l'épaisseur du film ainsi que selon les deux autres directions de l'espace  $x$  et  $z$ . Dans ces conditions, les équations (III.16) s'expriment comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu(x, y, z) \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y} \right) - \eta \frac{\partial^4 u(x, y, z)}{\partial y^4} = \frac{\partial p(x, z)}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu(x, y, z) \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial y} \right) - \eta \frac{\partial^4 w(x, y, z)}{\partial y^4} = \frac{\partial p(x, z)}{\partial z} \end{array} \right. \quad (\text{III.27})$$

On constate que les équations (III.27) n'admettent pas de solutions analytiques à cause de leur caractère non linéaire. On doit donc recourir aux méthodes d'approximation en vue de trouver des solutions approchées.

En revanche, dans le cas newtonien (non polaire,  $\eta=0$ ), les solutions analytiques générales de ces équations s'écrivent sous la forme suivante :

$$u(x, y, z) = \frac{\partial p}{\partial x} \int \frac{y dy}{\mu} + A(x, z) \int \frac{dy}{\mu} + B(x, z)$$

$$w(x, y, z) = \frac{\partial p}{\partial z} \int \frac{y dy}{\mu} + C(x, z) \int \frac{dy}{\mu} + D(x, z)$$

$$\text{Posons } I(x, y, z) = \int \frac{y dy}{\mu} = \int_0^y \frac{\xi d\xi}{\mu(x, \xi, z)} \text{ et } J(x, y, z) = \int \frac{dy}{\mu} = \int_0^y \frac{d\xi}{\mu(x, \xi, z)}$$

L'application des conditions de non glissement (III.23.a) et (III.23.c) permet de trouver les profils de vitesse après avoir déterminé les constantes d'intégration :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, y, z) = \frac{\partial P}{\partial x} \left( I - \frac{l_2}{J_2} J \right) + \frac{J}{J_2} U \\ w(x, y, z) = \frac{\partial P}{\partial z} \left( I - \frac{l_2}{J_2} J \right) \end{array} \right. \quad (\text{III.28})$$

avec  $I_2(x, z) = \int_0^h \frac{\xi d\xi}{\mu(x, \xi, z)}$  et  $J_2(x, z) = \int_0^h \frac{d\xi}{\mu(x, \xi, z)}$

### III.8. Dérivation des équations de Reynolds modifiées

Les équations de Reynolds sont obtenues à partir de l'intégration de l'équation de continuité (III.4) à travers l'épaisseur du film moyennant la règle d'intégration de Leibnitz puisque la borne supérieure de l'intégrale est variable et les conditions limites suivantes :

$$v(x, 0, z) = 0 \text{ et } v(x, h, z, t) = \frac{dh(x, z, t)}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} \quad (\text{III.29})$$

#### III.8.1. Cas d'un fluide à couple de contrainte piézo-visqueux

Intégrée à travers l'épaisseur du film, l'équation de continuité s'écrit :

$$\int_0^{h(x, z, t)} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dy = 0 \quad (\text{III.30})$$

où les composantes du champ de vitesse  $u$  et  $w$  sont définies par les équations (III.24).

Après intégration, on trouve :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_z}{\partial z} = - \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{III.31})$$

ou encore

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{Q} = - \frac{\partial h}{\partial t}$$

où :

$$Q_x = - \frac{G(h, \ell, \alpha, p)}{12\mu_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{h}{2} U, \quad Q_z = - \frac{G(h, \ell, \alpha, p)}{12\mu_0} \frac{\partial p}{\partial z}, \text{ et}$$

$$G(h, \ell, \alpha, p) = h^3 e^{-\alpha p} - 12\ell^2 \left[ h e^{-2\alpha p} - 2\ell e^{-\frac{5}{2}\alpha p} \tanh\left(\frac{h e^{\frac{1}{2}\alpha p}}{2\ell}\right) \right] \quad (\text{III.32})$$

$$Q_x = \int_0^h u dy \text{ et } Q_z = \int_0^h w dy \text{ étant respectivement les composantes du vecteur débit}$$

volumique  $\vec{Q}$  par unité de longueur suivant les directions  $x$  et  $z$  du palier.

Compte tenu des équations (III.29) and (III.32), l'équation (III.31) devient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( G(h, \ell, \alpha, p) \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( G(h, \ell, \alpha, p) \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu_0 \left[ U \frac{\partial h}{\partial x} + 2 \frac{\partial h}{\partial t} \right] \quad (\text{III.33})$$

où  $U = \omega R$  est la vitesse linéaire de la surface de l'arbre.

Dans le cas d'un fluide à couple de contrainte iso-visqueux ( $\alpha=0$ ) en écoulement laminaire, l'équation de Reynolds modifiée (2-D) (III.33) se réduit à :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{G(h, \ell)}{12} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{G(h, \ell)}{12} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \mu_0 \left[ U \frac{\partial h}{\partial x} + 2 \frac{\partial h}{\partial t} \right] \quad (\text{III.34a})$$

avec

$$G(h, \ell) = h^3 - 12\ell^3 h + 24\ell^3 \tanh\left(\frac{h}{2\ell}\right) \quad (\text{III.34b})$$

### III.8.2. Cas d'un fluide newtonien thermo-visqueux

Compte tenu des profils de vitesse (III.28) et les conditions limites (III.29), l'équation (III.30) donne l'équation de Reynolds newtonienne généralisée (3-D):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( G^* \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( G^* \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (F \cdot U) + \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{III.35})$$

$$\text{avec } G^* = \frac{\int_0^h (I_2 J - I J_2) dy}{J_2} \quad \text{et } F = \frac{\int_0^h J dy}{J_2}$$

### III.8.3. Cas d'un fluide newtonien piézo-visqueux en écoulement isotherme

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3}{e^{\alpha p}} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h^3}{e^{\alpha p}} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu_0 \left[ U \frac{\partial h}{\partial x} + 2 \frac{\partial h}{\partial t} \right] \quad (\text{III.36a})$$

Pour rendre cette équation linéaire, on pose :

$$q = \frac{1 - e^{-\alpha p}}{\alpha} \quad \text{avec } \frac{\partial q}{\partial x} = e^{-\alpha p} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{et } \frac{\partial q}{\partial z} = e^{-\alpha p} \frac{\partial p}{\partial z}$$

Ce changement de variable permet d'écrire l'équation de Reynolds sous la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \frac{\partial q}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \frac{\partial q}{\partial z} \right) = 6\mu_0 \left[ U \frac{\partial h}{\partial x} + 2 \frac{\partial h}{\partial t} \right] \quad (\text{III.36b})$$

La connaissance du champ  $q$  permettra de calculer la pression hydrodynamique  $p$  par la relation suivante :

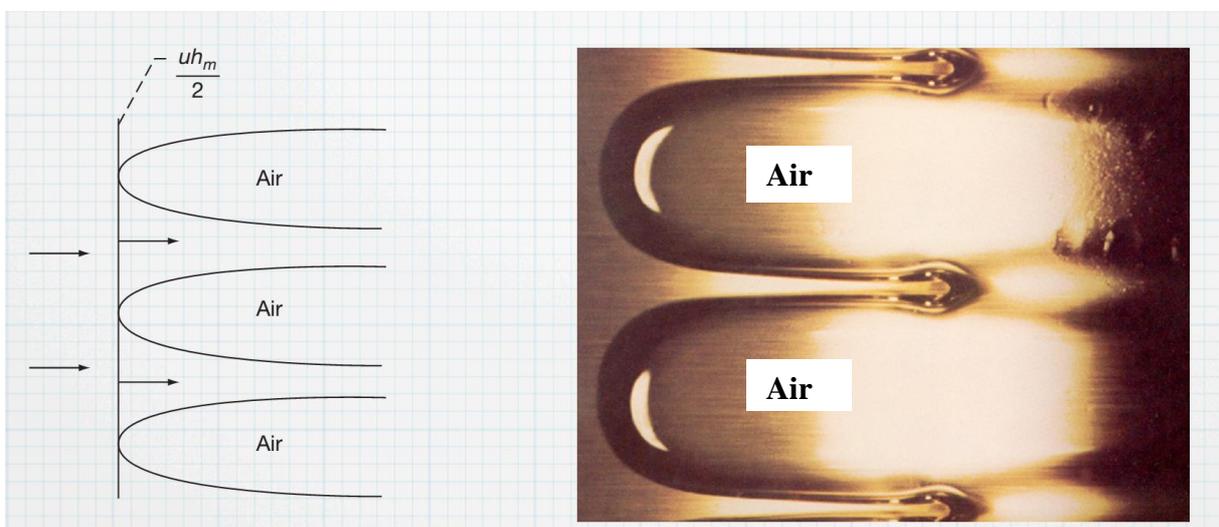
$$p = -\frac{1}{\alpha} \ln(1 - \alpha q) \quad (\text{III.37})$$

On remarque que lorsque le champ  $q$  est nul, la pression  $p$  est également nulle.

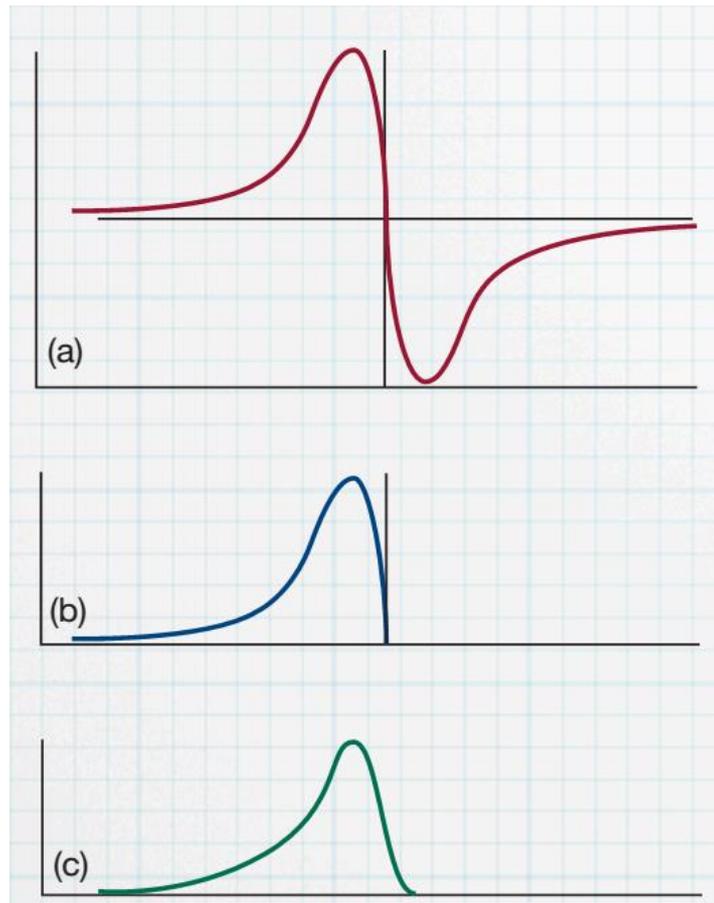
### III.9 .Conditions limites associées à l'équation de Reynolds

Le champ de pression dans le film lubrifiant doit satisfaire à l'équation de Reynolds et aux conditions aux limites sur la pression. Ces conditions peuvent être classées en trois types :

- 1- conditions liées à l'alimentation du système :  $p = p_{alim}$  dans les rainures et orifices d'alimentation du palier où  $p_{alim}$  est la pression d'alimentation dont la valeur maximale est de l'ordre de 5 bars;
- 2- conditions liées à l'environnement dans lequel fonctionne le système :  $p = p_{amb}$  sur les bords libres du palier. La pression ambiante  $p_{amb}$  peut être égale à la pression atmosphérique ;
- 3- conditions de continuité ou de périodicité de la pression dans le cas d'un palier cylindrique d'amplitude angulaire  $360^\circ$ ;
- 4- conditions conservatives (*Jackobson, Floberg, Olsson, Elrod-Admas*) ou non conservatives (*Sommerfeld, demi-Sommerfeld ou Gümbel et Swift-Stieber*) liées à l'écoulement du fluide dans le système. Les conditions non conservatives tiennent compte seulement du phénomène de rupture du film lorsque la pression chute et atteint la valeur de la pression de vapeur saturante dans la géométrie divergente du film tandis que les conditions conservatives prennent en considération, en plus de la rupture, la reformation du film figure (III.7). Ce phénomène est communément appelé phénomène de cavitation qui se caractérise physiquement par un changement de phase.



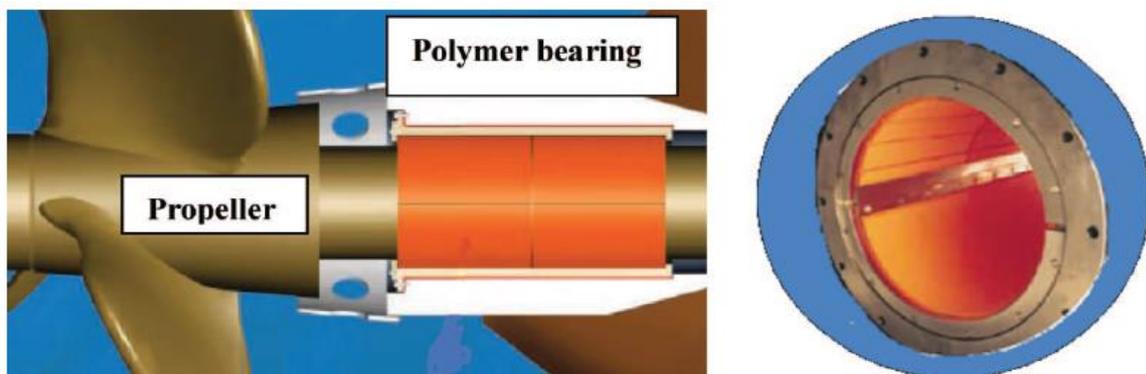
**Figure III.7 :** Visualisation du phénomène de cavitation dans un palier hydrodynamique



**Figure III.8 :** Courbes de pression hydrodynamique obtenues avec différentes conditions limites (**a-Condition de Sommerfeld**, **b-Condition de demi-Sommerfeld**, **c-Conditions de Swift-Stieber ou Reynolds**)

### III.10. Equation géométrique du film pour un palier compliant

La figure (III.9) montre un bel exemple de palier compliant d'arbre d'hélice marine dont le coussinet est muni d'une couche en élastomère.



**Figure III.9:** Vue d'un palier compliant d'hélice marine

La figure (III.10) montre schématiquement un palier lisse compliant aligné dont les axes de l'arbre et du coussinet sont parallèles. Le centre de l'arbre  $O_j$  occupe la position définie par les coordonnées cartésiennes  $(X, Y)$ . La configuration du palier rigide est représentée par le cercle de centre  $O_b$  et de rayon  $(R + C)$ . L'origine du système de coordonnées cartésiennes  $(X, Y, Z)$  lié à la charge statique  $\vec{W}$  est située au centre du coussinet rigide  $O_b$ . La coordonnée circonférentielle  $\theta$  est mesurée à partir de la ligne de charge ou l'axe  $\vec{X}$  tandis que l'origine de la coordonnée circonférentielle  $\hat{\theta}$  est située sur la ligne des centres figure (III.10). L'arbre de rayon  $R$ , supposé rigide, tourne avec une vitesse angulaire constante  $\omega$  autour de l'axe  $\vec{Z}$ .

L'équation géométrique du film peut être obtenue en appliquant la règle des cosinus au triangle de sommets  $O_b, O_j$  et  $M$  :

$$(R + h)^2 = (R + C + \delta h)^2 + e^2 - 2e(R + C + \delta h) \underbrace{\cos(\hat{\theta} - \pi)}_{= -\cos \hat{\theta}} \quad (\text{III.38})$$

où :

$C = R_{\text{coussinet}} - R_{\text{arbre}} = R_c - R_a$  est le jeu radial du palier,  $h$  l'épaisseur du film,  $\delta h$  englobe les composantes de déplacement élastique et thermique suivant la direction radiale de la couche ainsi que la dilatation thermique de l'arbre, et  $e = C\varepsilon$  l'excentricité de fonctionnement du palier.

En divisant les deux membres de l'équation (III.38) par  $R^2$  et en négligeant les termes en  $\left(\frac{h}{R}\right)^2, \left(\frac{C}{R}\right)^2, \left(\frac{\delta h}{R}\right)^2$  et  $\left(\frac{e}{R}\right)^2$ , l'équation (III.38) se réduit à :

$$h = C(1 + \varepsilon \cos \hat{\theta}) + \delta h \quad (\text{III.39})$$

ou encore en utilisant la coordonnée  $\theta$  :

$$h = C[1 + \varepsilon \cos(\theta - \phi)] + \delta h$$

soit :

$$h = C + X \cos \theta + Y \sin \theta + \delta h \quad (\text{III.40})$$

avec  $X = C \varepsilon \cos \phi, Y = C \varepsilon \sin \phi$  et  $\delta h = C p + \delta h_c - \delta h_a$

où :  $\delta h_c$  et  $\delta h_a$  sont respectivement les déformations thermiques du revêtement et de l'arbre.

$C = \frac{\chi - 1}{\chi + 1} \frac{t_h}{G}$  est l'opérateur de compliance de la structure défini par

$t_h$  : est l'épaisseur de la couche élastique,

$G = \frac{E}{2(1+\sigma)}$  est le module de cisaillement de Coulomb ( $E$  : module d'élasticité d'Young et  $\sigma$  : le coefficient de Poisson),

$\chi$  : étant le paramètres d'élasticité qui s'exprime par :

-Hypothèse de déformations planes :  $\chi = 3 - 4\sigma$

-Hypothèse de contraintes planes :  $\chi = \frac{3-\sigma}{1+\sigma}$

Dans le cas d'un palier revêtu, on utilise l'hypothèse de déformations planes. Dans ce cas,  $\mathcal{C}$  s'exprime par :

$$\mathcal{C} = \frac{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma) t_h}{1 - \sigma} \frac{1}{E}$$

La prise en considération des déformations élastiques du revêtement et des dilatations thermiques des solides (arbre et coussinet revêtu) conduit à l'expression complète de l'épaisseur ou la hauteur du film :

$$h = C(1 + \varepsilon \cos \hat{\theta}) + \mathcal{C}p + \delta h_c - \delta h_a \quad (\text{III.41})$$

ou encore

$$h = C + X \cos \theta + Y \sin \theta + \underbrace{\mathcal{C}p + \delta h_c - \delta h_a}_{\delta h} \quad (\text{III.42})$$

où :

$$\delta h_c = R_c \alpha_c (\bar{T}_c - T_0) \text{ et } \delta h_a = R_a \alpha_a (\bar{T}_a - T_0) \quad (\text{III.43})$$

Dans l'équation (III.43),  $\alpha_a$  et  $\alpha_c$  sont respectivement les coefficients de dilatation de l'arbre et du coussinet, et  $T_0, \bar{T}_a$  et  $\bar{T}_c$  sont respectivement la température de référence à laquelle ont été prises les dimensions du palier (diamètres de l'arbre et du coussinet) et les températures moyennes de l'arbre et du coussinet.

Notons que lorsque le palier est rigide (non revêtu), le module d'élasticité  $E \rightarrow \infty$  ce qui conduit à l'annulation de  $\mathcal{C}$ .

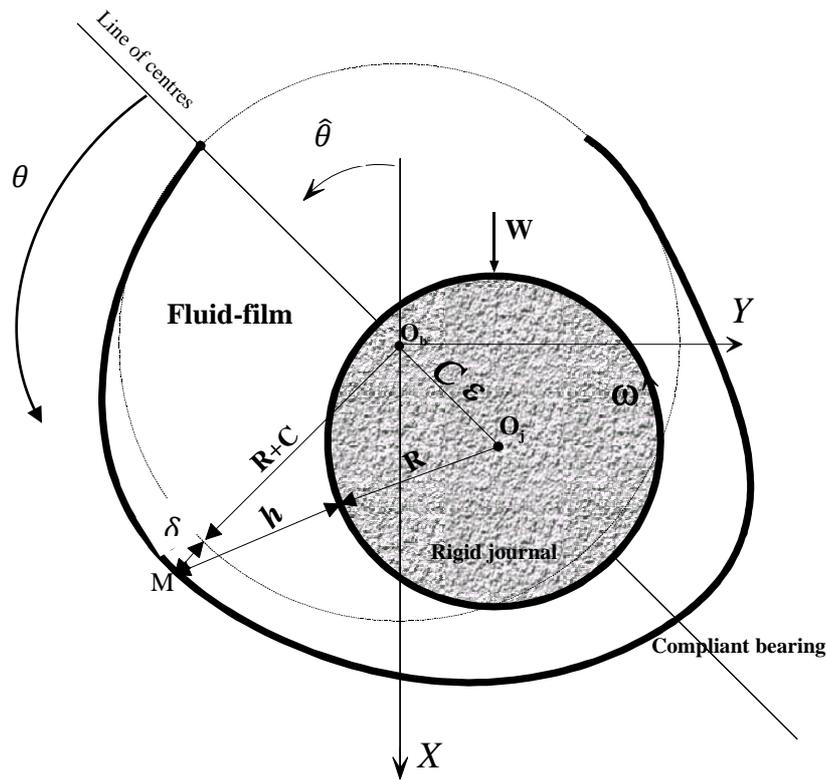


Figure III. 10 : Schéma d'un palier lisse compliant

### III.11. Performances hydrodynamiques du palier

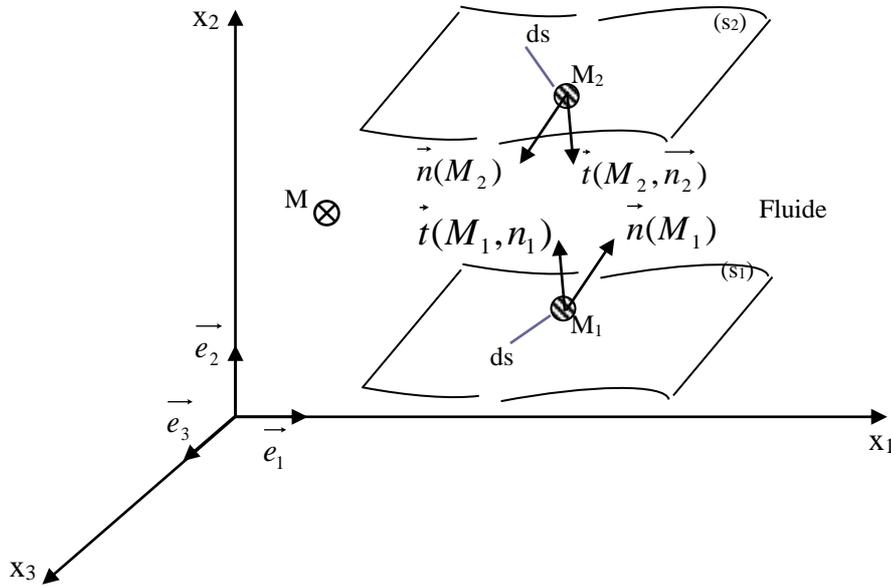
#### III.11.1. Champ de pression dans le film

La pression est obtenue par intégration de l'équation de Reynolds moyennant les conditions limites associées.

#### III.11.2. Action du fluide sur les parois du contact

L'action de contact  $\vec{t}$ , appelée habituellement le vecteur contrainte, exercé en un point  $M$  de la paroi, dépend uniquement du tenseur des contraintes en ce point et du vecteur normal  $\vec{n}$  (fig. III.11).

$$\vec{t}(M, \vec{n}) = t_i \vec{e}_i = \sigma_{ij} n_j \vec{e}_i \quad (\text{III.44})$$



**Figure III.11** : Action du fluide sur les parois d'un contact.

$\sigma_{ij}$  étant les composantes du tenseur des contraintes.

Les éléments de réduction en un point  $C$  quelconque du torseur des actions de contact du fluide sur la surface  $(S)$  du contact seront donc :

$$\text{Résultante : } \vec{W} = \int_{(S)} \vec{t}(M, \vec{n}) ds \quad (\text{III.45})$$

$$\text{Moment en } C : \vec{M}(C) = \int_{(S)} \vec{CM} \wedge \vec{t}(M, \vec{n}) ds \quad (\text{III.46})$$

Lorsque la surface  $S$  est un plan admettant  $\vec{x}_2$  comme normale, l'intégration du champ de pression sur la surface permet de calculer la charge extérieure  $F$  que le contact peut supporter :

$$F = \int_{(S)} p ds \quad (\text{III.47})$$

Tandis que l'intégration des contraintes de cisaillement permet de déterminer les composantes selon les axes  $x_1$  et  $x_3$  de la force tangentielle exercée par le fluide sur la paroi (force de frottement) :

$$\begin{cases} F_1 = \int_{(S)} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \eta \left( \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) \right]_{y=0 \text{ ou } h} dS \\ F_2 = \int_{(S)} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \eta \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) \right]_{y=0 \text{ ou } h} dS \end{cases} \quad (\text{III.48})$$

### III.11.3. Vitesses d'écoulement moyennes et débit de fuite (side leakage flow)

Les vitesses d'écoulement moyennes  $\bar{u}$  et  $\bar{w}$  en régime laminaire sont déterminées par les relations suivantes:

- Cas piézo-visqueux :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u}(x, z) = \frac{1}{h} \int_0^h u(x, y, z) dy = \underbrace{\frac{U}{2}}_{\text{écoulement de Couette}} - \underbrace{\frac{G(h, \ell, \alpha, p)}{12\mu_0 h} \frac{\partial p}{\partial x}}_{\text{écoulement de Hagen-Poiseuille}} \\ \bar{w}(x, z) = \frac{1}{h} \int_0^h w(x, y, z) dy = - \underbrace{\frac{G(h, \ell, \alpha, p)}{12\mu_0 h} \frac{\partial p}{\partial z}}_{\text{écoulement de Hagen-Poiseuille}} \end{array} \right. \quad (\text{III.49})$$

- Cas iso-visqueux :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u}(x, z) = \frac{1}{h} \int_0^h u(x, y, z) dy = \frac{U}{2} - \frac{G(h, \ell)}{12\mu_0 h} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \bar{w}(x, z) = \frac{1}{h} \int_0^h w(x, y, z) dy = - \frac{G(h, \ell)}{12\mu_0 h} \frac{\partial p}{\partial z} \end{array} \right. \quad (\text{III.50})$$

Le débit de fuite aux bords libres ( $z = \pm \frac{L}{2}$ ) du palier est :

$$Q_z = \left| \int_{\theta_1}^{\theta_2} h(\theta, z = \frac{L}{2}) \bar{w}(\theta, z = \frac{L}{2}) R d\theta \right| + \left| \int_{\theta_1}^{\theta_2} h(\theta, z = -\frac{L}{2}) \bar{w}(\theta, z = -\frac{L}{2}) R d\theta \right| \quad (\text{III.51})$$

où  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont des abscisses délimitant la zone active du palier.

Si le palier est aligné, l'expression du débit devient :

$$Q_z = 2 \left| \int_{\theta_1}^{\theta_2} h(\theta, z = \frac{L}{2}) \bar{w}(\theta, z = \frac{L}{2}) R d\theta \right| \quad (\text{III.52})$$

### III.11.4. Puissance dissipée (power loss)

L'intégration de la fonction de dissipation visqueuse sur le volume occupé par le fluide en écoulement permet de calculer la puissance dissipée due au cisaillement de fluide :

$$P = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^h \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Phi R d\theta dy dz \quad (\text{III.53})$$

où  $\Phi$  est la fonction de dissipation spécifique (par unité de volume) totale définie par:

$$\begin{aligned}
\Phi &= \mu \left\{ \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + \ell^2 \left[ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] \right\} \\
&= \underbrace{\mu \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]}_{\text{effet de cisaillement}} + \underbrace{\eta \left[ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right]}_{\text{effet des couples de contraintes}}
\end{aligned} \tag{III.54}$$

La puissance dissipée totale  $\mathcal{P}$  est la somme de la puissance dissipée par effet de cisaillement  $\mathcal{P}_{Couette}$  et celle due aux gradients de la pression  $\mathcal{P}_{Hagen-Poiseuille}$ . Ces deux contributions s'expriment comme suit :

- **Cas d'un fluide piézo-visqueux**

Dans le cas où la viscosité du fluide varie selon la loi de *Barus*, les puissances dissipées s'expriment par les relations suivantes :

$$\mathcal{P}_{Hagen-Poiseuille} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{G(h,\ell,p,\alpha)}{12\mu_0} \left[ \left( \frac{\partial p}{R\partial\theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right)^2 \right] R d\theta dz \tag{III.55}$$

$$\mathcal{P}_{Couette} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mu_0 e^{\alpha p} \frac{U^2}{h} R d\theta dz \tag{III.56}$$

où  $G$  est une fonction définie par la relation (III.32) et  $\mu_0$  est la viscosité dynamique du fluide mesurée à la pression atmosphérique.

- **Cas d'un fluide isovisqueux**

$$\mathcal{P}_{Hagen-Poiseuille} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{G(h,\ell)}{12\mu_0} \left[ \left( \frac{\partial p}{R\partial\theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right)^2 \right] R d\theta dz \tag{III.57}$$

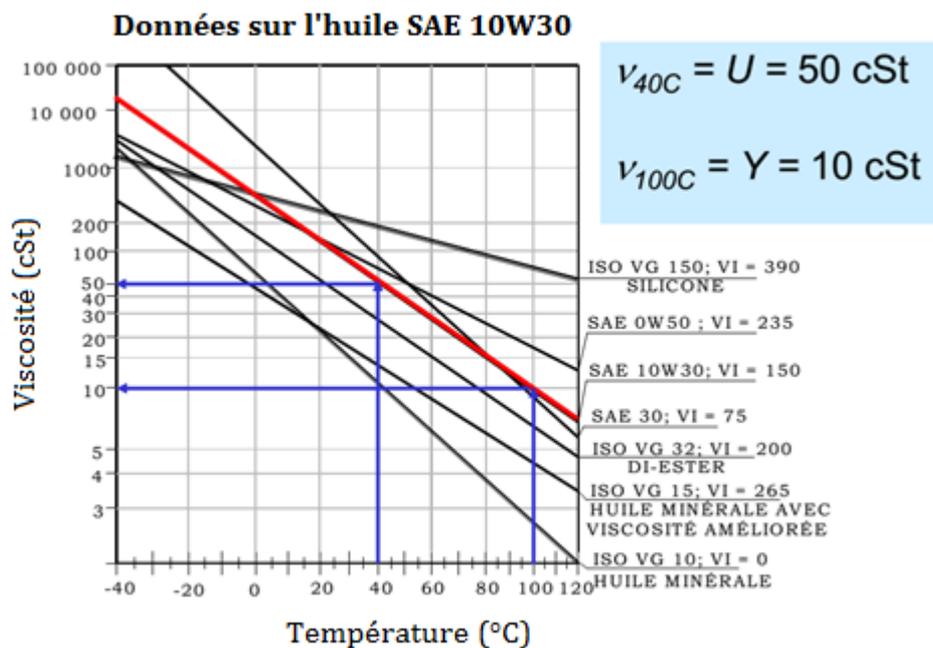
$$\mathcal{P}_{Couette} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mu_0 \frac{U^2}{h} R d\theta dz \tag{III.58}$$

où  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont des abscisses délimitant la zone active du palier caractérisée par une pression positive et  $G$  est une fonction définie par l'équation (III.34b).

### III.12. Lois de variations viscosité-température des huiles

La viscosité des huiles lubrifiantes est extrêmement sensible à la température de fonctionnement. Lorsque la température augmente, la viscosité des huiles chute assez

rapidement. Dans certains cas, la viscosité de l'huile peut diminuer d'environ 80% pour une augmentation de température de 25 °C. Sur le plan industriel, il est important de connaître la valeur de la viscosité à la température de fonctionnement puisqu'elle permet de déterminer l'épaisseur du film de lubrifiant séparant les deux surfaces du contact contiguës au film. La viscosité de l'huile à une température spécifique peut être soit calculée à partir de la relation viscosité-température ou obtenue à partir du diagramme ASTM (American Society for Testing and Materials) figure (III.12).



**Figure III.12** : Exemple de diagramme normalisé ASTM D 341.

Plusieurs lois de variation viscosité-température sont proposées dans la littérature technique. Certaines d'entre elles sont purement empiriques, alors que d'autres sont dérivées de modèles théoriques. Les lois les plus couramment utilisées sont mentionnées dans le tableau III.1 [20]. Parmi elles, le modèle de Vogel est le plus précis. Trois mesures de viscosité à différentes températures d'une huile spécifique sont nécessaires afin de déterminer les trois constantes de ce modèle.

La viscosité de l'huile peut alors être calculée à la température requise, ou la température de fonctionnement peut être calculée, si la viscosité est connue. En plus de sa précision, la relation de Vogel est utile dans les simulations et modélisation numériques des problèmes de lubrification fluide.

**Tableau III.1** : Relations viscosité-température [20].

Nom de la loi	Expression	Commentaires
Reynolds	$\mu = b e^{-aT}$	L'équation de Reynolds est précise pour une plage de températures très limitée.
Slotte	$\mu = a / (b + T)^c$	Raisonnable et utilisée en analyse numérique
Mac Coull & Walther (1921)	$\nu + a = 10^{10^{n-m \log_{10}(T)}}$ ou $\log_{10}(\log_{10}(\nu + a)) = n - m \log_{10}(T)$	$\nu$ étant la viscosité cinématique en (cSt) ou (mm <sup>2</sup> /s), et $m$ et $n$ sont des constantes. Cette loi, qui constitue la base de la norme ASTM, est très utilisée aussi bien pour les huiles minérales que synthétiques.
Vogel	$\mu = a e^{b/(T-Tc)}$	C'est la plus précise dans les calculs d'ingénierie.

où:  $a, b, c$  sont des constantes et  $T$  la température absolue en [°K].

### III.13. Lois de variation viscosité-pressure

La viscosité d'un lubrifiant liquide augmente sensiblement avec la pression. Pour la plupart des lubrifiants, cet effet est nettement plus grand que l'effet de la température ou de la vitesse de cisaillement lorsque la pression est nettement supérieure à la pression atmosphérique. Ceci est d'une importance particulière dans la lubrification des contacts hertiens lourdement chargés qui peuvent être rencontrés, par exemple, dans les roulements et les engrenages. Les pressions engendrées dans ces contacts peuvent être si élevées (de quelques Giga-Pascals) et le taux d'augmentation de la pression est si rapide que le lubrifiant se comporte comme un solide plutôt qu'un liquide. Le phénomène d'augmentation de la viscosité avec la pression affecte le comportement rhéologique du lubrifiant et entraîne des déformations élastiques voire plastiques des parois ou des surfaces formant le contact.

Un certain nombre de tentatives ont été faites pour développer des formules décrivant la relation entre la pression et la viscosité des lubrifiants. Certaines ont été tout à fait satisfaisantes, en particulier à basse pression, tandis que d'autres ont été tout à fait complexes et difficilement applicables dans la pratique. L'équation la plus connue pour calculer la viscosité d'un lubrifiant à des pressions modérées est l'équation de *Barus*. L'application de cette équation à des pressions supérieures à 0,5 [GPa] peut,

cependant, conduire à des erreurs intolérables [22]. L'équation devient encore plus défailante si la température ambiante est élevée. L'équation de Barus est de la forme:

$$\mu(p) = \mu_0 e^{\alpha p} \quad (\text{III.59})$$

où:

$\mu$  : est la viscosité dynamique à la pression  $p$ ;

$\mu_0$  : est la viscosité dynamique à la pression atmosphérique ;

$\alpha$  : est le coefficient de piézo-viscosité, qui peut être obtenu en traçant le logarithme naturel de la viscosité dynamique  $\mu$  en fonction de la pression  $p$ . La pente de la courbe correspond à la valeur de  $\alpha$ ;

Pour des pressions plus élevées Chu et al.[23] ont suggéré la formule suivante :

$$\mu(p) = \mu_0(1 + C \times p)^n \quad (\text{III.60})$$

où  $C$  et  $n$  sont des constantes,  $n$  : est approximativement égal à 16 [23,24].

Le coefficient de piézo-viscosité est une fonction de la structure moléculaire du lubrifiant et de ses caractéristiques physiques.

Il y a diverses formules disponibles pour calculer le coefficient de piézo-viscosité. L'une des plus précoces a été obtenue par Wooster [21]:

$$\alpha = (0.6 + 0.965 \log_{10} \mu_0) \times 10^{-8} \quad (\text{III.61})$$

Bien que cette loi corresponde à la plupart des lubrifiants, elle n'est pas particulièrement précise. Il existe d'autres équations pour le calcul du coefficient de viscosité sous pression disponibles dans la littérature. Il est souvent rapporté que certaines de ces équations sont correctes pour certains fluides, mais inadaptées pour d'autres. L'une des meilleures formules pour la détermination analytique du coefficient de pression de viscosité est l'expression empirique développée par So, Klaus [25]. L'un des problèmes associés aux formules disponibles est qu'elles permettent uniquement un calcul précis du coefficient de piézo-viscosité à des taux de cisaillement faibles.

Dans de nombreuses applications d'ingénierie, en particulier dans les contacts hertiens fortement chargés, le lubrifiant est assujéti à des taux de cisaillement très élevés et des valeurs précises du coefficient de piézo-viscosité sont alors nécessaires pour l'évaluation correcte de l'épaisseur minimale du film. Une valeur précise de ce coefficient peut être déterminée expérimentalement.

L'augmentation de la viscosité avec la pression varie entre les huiles, et il y a une différence considérable entre les huiles paraffiniques et naphthéniques. Le coefficient de piézo-viscosité  $\alpha$  apparaissant dans l'équation de Barus a une valeur comprise entre  $1,5$  à  $2,4 \times 10^{-8}$  [ $m^2/N$ ] pour les huiles paraffiniques, et une valeur comprise entre  $2,5$  à  $3,5 \times 10^{-8}$  [ $m^2/N$ ] pour des huiles aromatiques selon Klamann [26]. Pour les extraits aromatiques du pétrole, le coefficient de piézo-viscosité est beaucoup plus élevé, mais cela est d'une importance pratique limitée. La valeur du coefficient de pression viscosité est en général réduite à des températures plus élevées notamment dans le cas des huiles naphthéniques qui sont les plus sévèrement touchées. L'eau, en revanche ne montre qu'une légère hausse, presque négligeable, de la viscosité avec la pression.

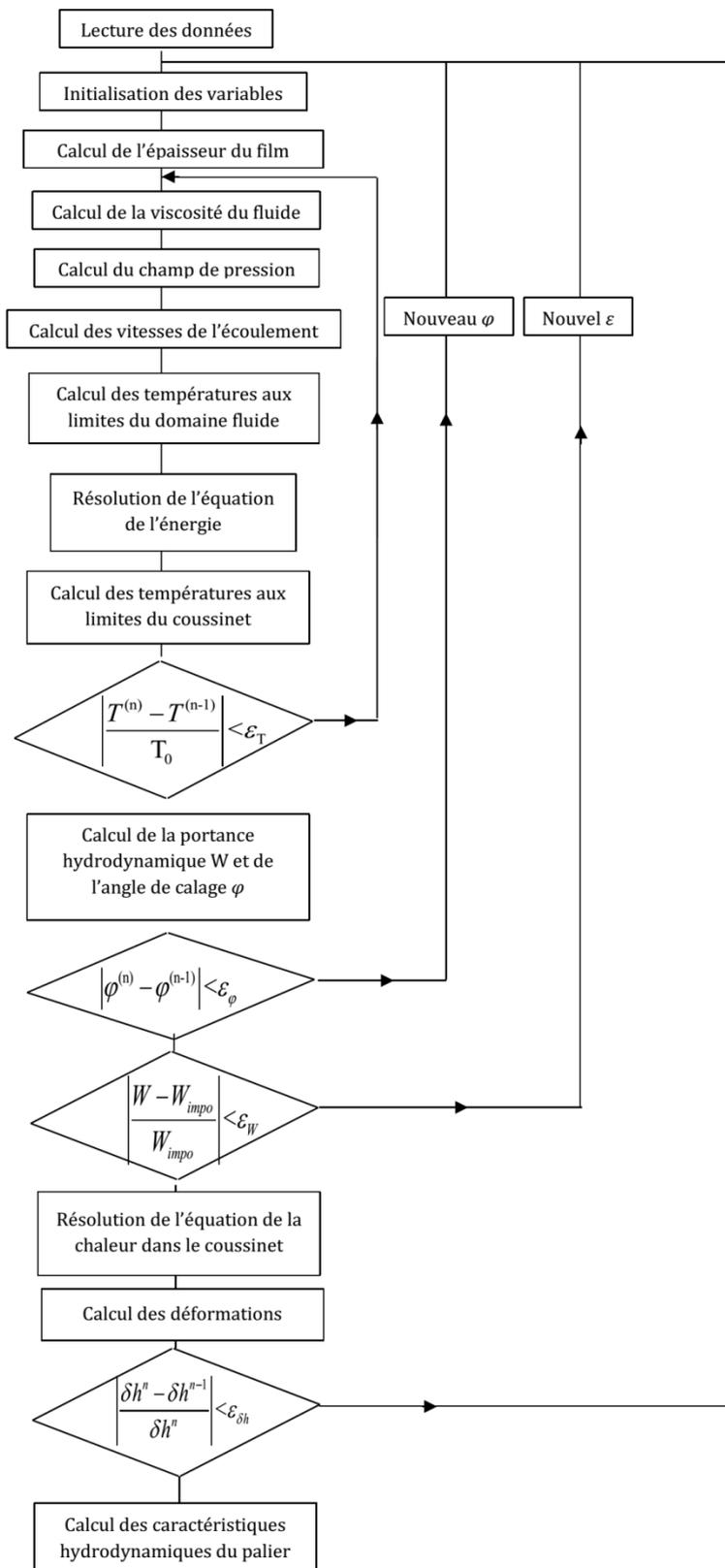
Il y a beaucoup d'autres formules pour les relations viscosité-pression. Un bref examen de certaines des formules empiriques pour les relations viscosité-pression sont données dans [25,27]. Ces formules permettent le calcul de la viscosité change avec la pression dans différentes conditions et à différents degrés de précision.

Une expression qui convient pour le calcul a été initialement proposée par Roelands [28,29] et développée par Houpert [29,30].

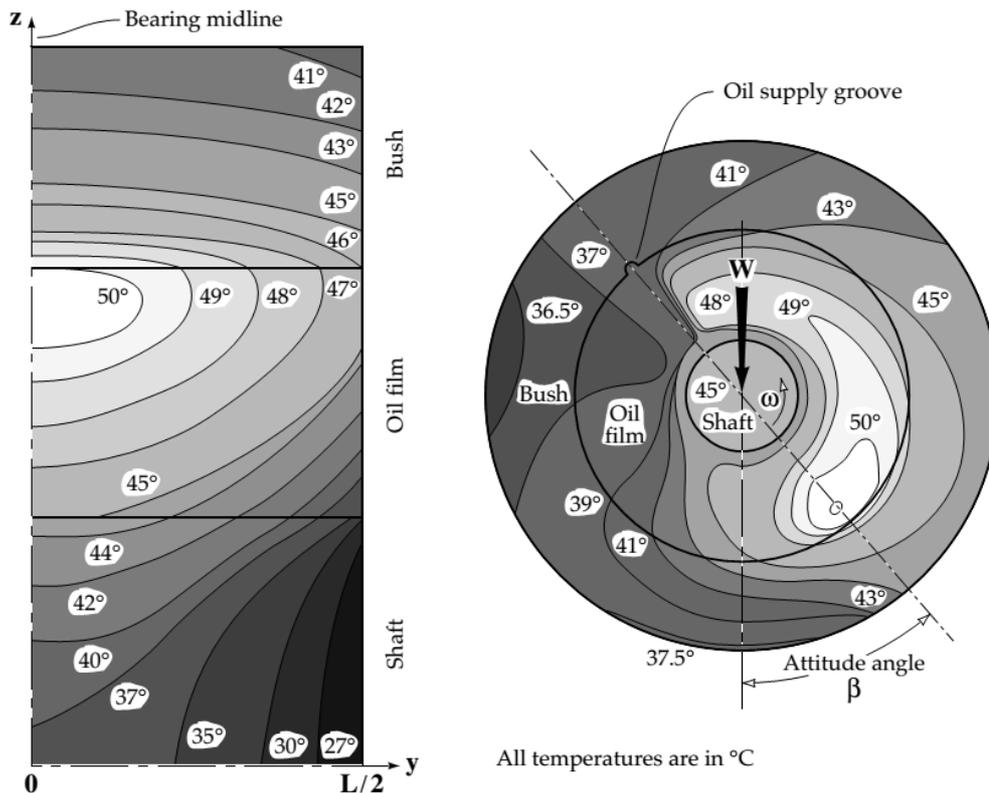
### III.14. Algorithme de calcul THD

La figure (III. 13) représente le schéma général du processus de calcul THD d'un palier. Tout d'abord, une initialisation des champs de température et de pression est réalisée avant de calculer l'épaisseur de film, qui va être le point de retour du processus itératif. La viscosité est ensuite calculée avant la détermination du champ de pression. La convergence sur le champ de pression est obtenue lorsque la différence relative entre deux valeurs du champ de pression est inférieure à une certaine erreur relative tolérée. Ce n'est que lorsque ce calcul est fini que l'on calcule le champ des vitesses qui va servir à la résolution de l'équation de l'énergie. L'équation de la chaleur permet d'obtenir le champ de température dans le coussinet, qui est définitif lorsque la différence entre deux températures successives est inférieure à la précision  $\varepsilon_T$ . On itère ensuite sur la charge  $W$  et l'angle de calage  $\phi$  jusqu'à obtention d'une valeur stable de  $\phi$  (à  $\varepsilon_\phi$  près) et de la charge imposée ( $W_{imp}$ ) à  $\varepsilon_W$  près. Si tel n'est pas le cas, une nouvelle excentricité est calculée avant de recommencer le processus itératif au niveau du calcul de l'épaisseur de film. Lorsque ce critère est atteint, on calcule les éventuelles modifications  $\delta h(\theta, z)$  de la forme géométrique du palier (déplacements élastiques et/ou

thermiques, dilatation différentielle) par un processus itératif. La convergence sur les déplacements est effective lorsque la différence maximale entre deux valeurs du déplacement par rapport au jeu radial, entre deux itérations successives, est inférieure à un critère de convergence  $\varepsilon_d$ . Enfin, on calcule les caractéristiques de fonctionnement du palier (pression maximale, température maximale, débits, épaisseur minimale de film, puissance dissipée, température d'arbre...).



**Figure III.13 :** Schéma de calcul THD d'un palier



**Figure III.14** : Exemple de distribution de champ de température calculée dans un palier hydrodynamique[31]

### III.15. Equation de la chaleur et conditions limites associées

Afin de déterminer de façon précise le champ de température dans le film fluide, il est indispensable d'associer à l'équation de l'énergie l'équation de la chaleur dénommée équation de Fourier gouvernant le problème de conduction de la chaleur dans les milieux solides constitués par l'arbre et le coussinet figure(III.15). Dans le cas de l'arbre, l'équation de la chaleur en régime transitoire s'écrit :

$$\rho_a C_{pa} \frac{\partial T}{\partial t} = k_a \nabla^2 T \quad (\text{III.62})$$

où  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_a^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_a^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_a^2}$  est l'opérateur de Laplace,  $(x_a, y_a, z_a)$  sont les coordonnées cartésiennes suivant les directions  $x, y$  et  $z$ , et  $\rho_a, C_{pa}$  et  $k_a$  sont respectivement la masse volumique, la capacité calorifique et la conductivité thermique du matériau constituant l'arbre.

Dans le cas du coussinet, l'équation de la chaleur en coordonnées cylindriques prend la forme suivante :

$$\rho_c C_{pc} \frac{\partial T}{\partial t} = k_c \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r_c^2} + \frac{1}{r_c} \frac{\partial T}{\partial r_c} + \frac{1}{r_c^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (\text{III.63})$$

où  $T(r_c, \theta, z, t)$  est le champ de température en un point quelconque du coussinet exprimée dans le repère cylindrique lié au coussinet.

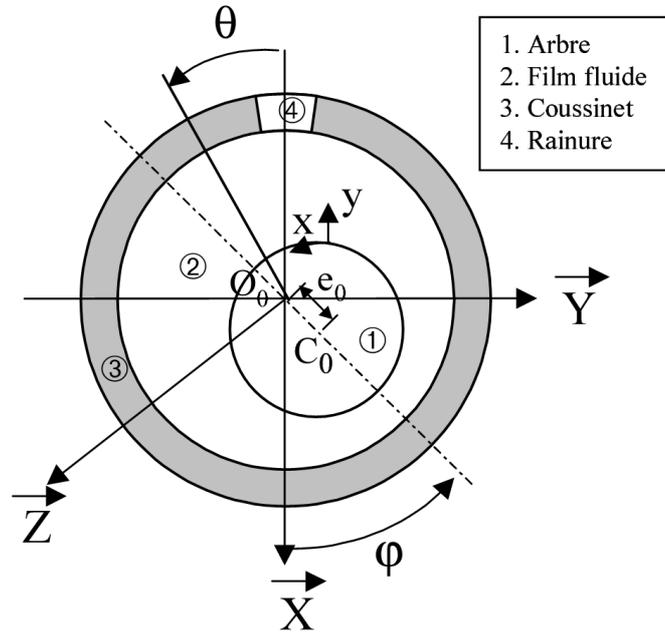


Figure III.15 : Systèmes d'axes

Les conditions limites associées aux équations de la chaleur portent en général sur :

- température imposée  $T$  :

$$T = T_{alim} \text{ (source d'alimentation : rainure, orifice, ...)}$$

ou encore  $T = T_{amb}$  (température du milieu ambiant)

- densité de flux de chaleur imposé  $\vec{q} = -k\nabla T$  :

- surface isolée (pas de flux de chaleur) :  $\vec{q} \cdot \vec{n} = q_i n_i = k \frac{\partial T}{\partial n} = 0 ; i=1,2,3$

- transfert thermique par rayonnement ou radiation thermique :

$q_i n_i = \varepsilon \zeta (T^4 - T_{ref}^4)$  où  $\varepsilon$  et  $\zeta$  sont respectivement le coefficient d'émissivité variant de 0 à 1 et la constante de Stephan Boltzmann ( $\zeta = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \text{K}^{-4}$ ), et  $T_{ref}$  étant la température de référence en ( $^{\circ}\text{K}$ ).

- transfert thermique par convection :  $q_i n_i = h_c (T - T_{ref})$  où  $h_c$  est le coefficient de convection en ( $\text{W}/\text{m}^2 \text{K}$ )
- transfert par convection et rayonnement :  $q_i n_i = h_g (T - T_{ref})$  où  $h_g$  est le coefficient d'échange global.

- la continuité de flux de chaleur aux interfaces fluide-solides:

$$k_{fluide} \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{fluide} = k_{solide} \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{solide}$$

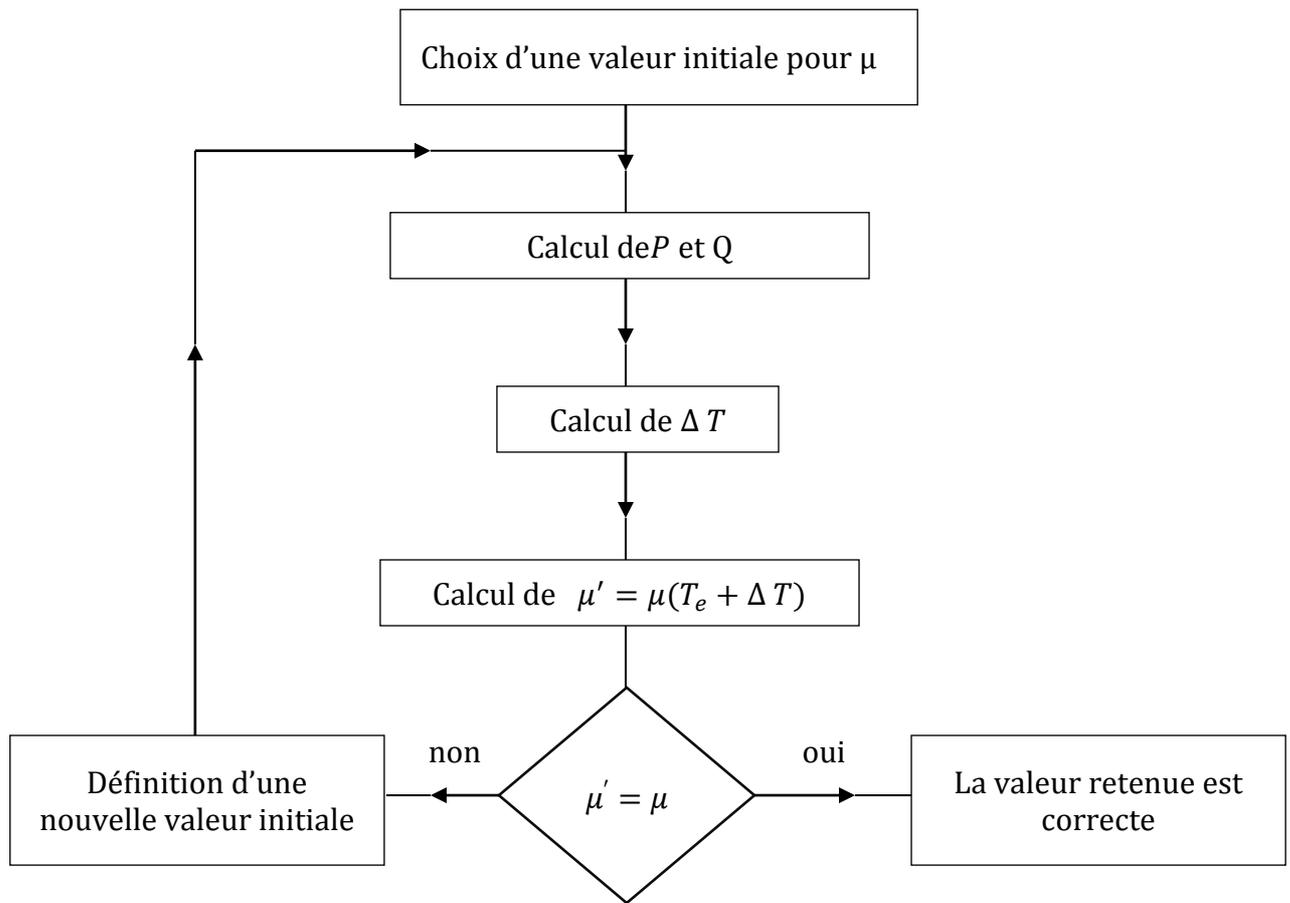
où  $\frac{\partial(\ )}{\partial n} = \vec{n} \cdot \vec{\nabla}(\ ) = n_i \frac{\partial(\ )}{\partial x_i}$  est la dérivée normale.

### III.16. Bilan thermique global : Approche THD simplifiée

L'hypothèse d'une viscosité constante en tout point du film lubrifiant est irrationnelle voire erronée car il est communément connu que la viscosité d'un fluide varie sensiblement avec la température surtout lorsqu'il s'agit de fluide incompressibles. La répartition de température à l'intérieur du film peut être obtenue en résolvant simultanément l'équation d'énergie, l'équation de Reynolds généralisée et également les équations de conduction de la chaleur dans les milieux solides représentés par l'arbre et le coussinet. La résolution numérique de ce problème multi-physique tridimensionnel complexe n'a été envisagée que récemment. L'algorithme de calcul THD est très lourd à mettre en œuvre et nécessite des efforts et des temps de calcul élevés. Pour cela, on utilise pratiquement une approche THD simplifiée basée sur le concept de "viscosité effective" qui consiste à supposer le régime isotherme et la température égale à  $T_f = T_e + \Delta T$ , où  $T_e$  est la température d'entrée du lubrifiant et  $\Delta T$  l'accroissement de température obtenu en égalant un pourcentage de l'énergie générée par effets de cisaillement et de couples de contraintes à la quantité de chaleur évacuée par le lubrifiant :

$$\lambda \mathcal{P} = \rho C_p Q \Delta T \quad (III.64)$$

où  $\lambda$  est un paramètre fixé :  $0,5 < \lambda \leq 1$  qui rend compte de l'environnement du palier. Pour un écoulement adiabatique  $\lambda = 0,85$ . Cela signifie que 85% de la chaleur est évacuée par le fluide et 15% par l'arbre et le coussinet. Comme, pour une charge donnée la puissance et le débit sont fonctions de la viscosité du lubrifiant, l'équation(III.64) doit être résolue de manière itérative. Le processus de calcul est illustré par le schéma de la figure (III.16).



**Figure III.16 :** Schéma de calcul de la viscosité effective.

La convergence de ce processus itératif dépend de la valeur de  $T_e$ , de la forme de la relation  $\mu(T)$ , de la puissance et du débit. Lorsque le processus diverge ou converge difficilement vers la solution, on peut utiliser l'algorithme de sous-relaxation suivant :

$$\Delta T^{(k+1)} = (1 - \varpi)\Delta T^{(k)} + \varpi \left( \frac{\lambda P}{\rho c_p Q} \right)^{(k+1)} ; k = 0, 1, 2, \dots, k_{max} \quad (\text{III.65})$$

où  $\varpi$  est le facteur de sous-relaxation dont la valeur s'échelonne entre 0 et 1, et  $k$  est le numéro d'itération.

En pratique, une valeur de  $\varpi$  égale à 0.5 et une valeur initiale nulle pour  $\Delta T$  assure une convergence rapide du processus.

### III. 17. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté en détail les lois fondamentales de la théorie des milieux continus de V.K Stokes, à savoir : les lois de la conservation de la masse, de la quantité de mouvement, du moment de la quantité de mouvement et de l'énergie ainsi que les lois constitutives en vue de décrire l'écoulement d'un fluide polaire en prenant en considération les couples de contrainte. L'existence de ces derniers est due à la présence des polymères additifs ou des particules solides de pollution dans les huiles lubrifiantes. Ce type de fluide, est appelé fluide à couple de contraintes, se caractérise par le paramètre  $\ell = \sqrt{\frac{\eta}{\mu}}$  qui représente physiquement la longueur de la chaîne du polymère. Sur la base de cette théorie, nous avons dérivé à partir des équations de mouvement et de continuité écrites dans le cas incompressible une équation aux dérivées partielles du second ordre linéaire appelée équation de Reynolds modifiée dont l'inconnue principale est la pression dans le fluide. Dans le cas d'un palier compliant, cette équation prend un caractère non linéaire puisque la géométrie du film dépend de la pression.

Ce chapitre a été complété par la formulation des caractéristiques hydrodynamiques du contact, à savoir : la puissance dissipée et le débit de fuite, les expressions de caractéristiques hydrodynamiques telles que la portance hydrodynamique, le débit de fuite, la force de frottements et la puissance dissipée dans le contact.

Les effets thermiques dans les paliers lisses sont généralement évalués en calculant une température effective et une viscosité effective correspondante du lubrifiant par un équilibre thermique entre la chaleur générée et la chaleur dissipée en utilisant une analyse isotherme.

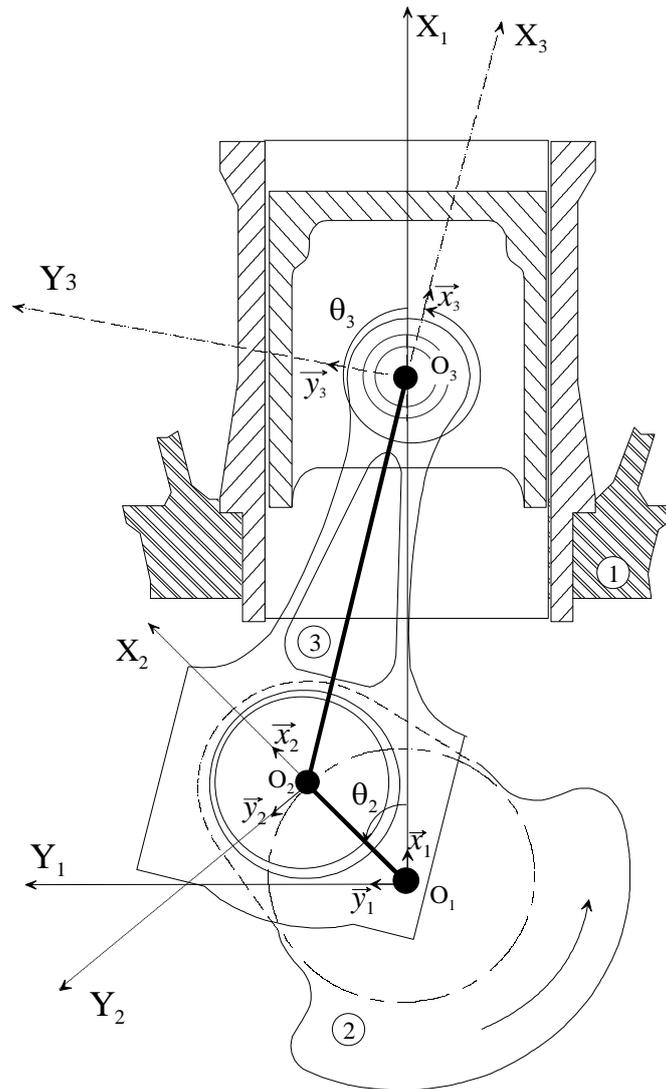
**CHAPITRE IV**  
**COMPORTEMENT THERMOHYDRO-DYNAMIQUE (THD) DES PALIERS**  
**DE MOTEURS A COMBUSTION INTERNE**

### **IV.1. Introduction**

De nos jours, les machines alternatives telles que les moteurs à combustion interne et les compresseurs constituent la catégorie de machines la plus importante utilisée dans diverses applications techniques. Le comportement dynamique de ces machines dépend essentiellement des performances de leurs paliers.

Les paliers de vilebrequin et de bielle de ces machines modernes avec des conditions sévères de fonctionnement (fortes charges cycliques et vitesses de rotation élevées) doivent être correctement conçus pour supporter des charges dynamiques importantes résultant de la pression de combustion dans le cylindre du moteur et des forces d'inertie dues aux mouvements alternatifs et rotatifs des solides –du système bielle manivelle figure( IV. 1).

Ces charges qui sont généralement déterminées à partir de l'étude cinématique et dynamique du système bielle manivelle varient en amplitude et en direction pendant un cycle moteur. Dans ces conditions de fonctionnement sévères, le comportement du palier chargé dynamiquement devient fortement non linéaire, nécessitant une analyse transitoire non linéaire complète. Ceci implique des solutions simultanées du problème d'interaction fluide-solide multi-physique, régis par l'équation de Reynolds transitoire et l'équation d'énergie pour la partie fluide et les équations de la chaleur, d'élasticité linéaire et de mouvement pour la partie solide afin de prédire correctement la position du centre du tourillon (maneton) à chaque pas de temps ou angle de rotation de la manivelle. Ce type d'analyse est extrêmement important lorsque le moteur tourne à grande vitesse, par exemple dans le cas de formule 1.



**Figure IV. 1 :** Schéma de principe du système bielle manivelle avec définition des différents repères (1: Cylindre, 2: Vilebrequin, 3: Bielle).

De nombreux chercheurs dans les domaines de la lubrification par film fluide et de la conception des moteurs ont tenté de formuler des lubrifiants avec de nouveaux composés chimiques pour améliorer le comportement dynamique des systèmes rotatifs. L'application de divers types de fluides newtoniens et non newtoniens ou la combinaison de lubrifiants classiques de base d'origine minérale et synthétique avec différents additifs polymères sont des exemples des efforts déployés pour obtenir de meilleures caractéristiques de performances dynamiques des systèmes de paliers lisses.

Le comportement rhéologique des huiles moteurs minérales ou synthétiques utilisées comme lubrifiants est sensiblement affecté par la présence de divers additifs tels que les polymères améliorant l'indice de viscosité (VI), caractérisés par de longues

chaînes. Ces polymères peuvent être classés en deux catégories: les copolymères d'hydrocarbures et les poly-méthacrylates.

En général, les huiles contenant des additifs VI tels que les huiles multigrades doivent être considérées comme des fluides non newtoniens. Leur viscosité diminue lorsque la vitesse de cisaillement ou de déformation à laquelle ils sont soumis augmente et ils sont affectés par l'effet de Weissenberg, c'est-à-dire que des forces normales au plan de cisaillement apparaissent pendant l'écoulement. Ces propriétés ont été analysées par un rhéogoniomètre de Weissenberg [1]. Selon Lodge [2], ces forces pourraient être proportionnelles au carré du taux de cisaillement.

Osenberg [3, 4] a montré expérimentalement que l'épaisseur de film minimale d'un palier lisse lubrifié par des huiles polymérisées est plus importante que celle avec les huiles minérales pures ayant la même viscosité. Afin de déterminer les effets des additifs VI sur le comportement des paliers, Robin [5] a mis au point un palier d'essai. Les conditions opératoires pour lesquelles les essais ont été effectués sont  $N=3$  krpm  $W_0=4$  kN, qui sont respectivement la vitesse de rotation de l'arbre et la charge appliquée. Il a constaté que l'introduction d'une concentration élevée de polyméthacrylates dans l'huile minérale de base réduit le couple de friction d'environ 25% sans modification importante de l'épaisseur du film. Il a également été conclu qu'il serait intéressant d'utiliser des huiles à forte concentration d'additifs VI ayant un faible poids moléculaire, tels que les polyméthacrylates, plutôt que de faibles concentrations d'additifs à haut poids moléculaire.

Dans le travail expérimental d'Oliver [6], il a constaté que la présence de polymères incorporés dans le lubrifiant augmente la capacité de charge du film lubrifiant et diminue le coefficient de frottement.

Dans une autre étude expérimentale, Scott et al. [7] ont montré que l'addition d'une petite quantité d'additifs à longue chaîne, comme certains polymères tels que le polyisobutylène, pourrait améliorer l'efficacité lubrifiante d'un lubrifiant newtonien conventionnel.

La microstructure de ces nouveaux lubrifiants peut se translater, tourner et se déformer indépendamment.

Les résultats expérimentaux montrent que l'utilisation de la théorie du micro-continuum est la plus appropriée pour l'étude théorique de tels lubrifiants. L'application des équations classiques de Navier-Stokes et d'énergie pour décrire leur mouvement conduit à des résultats erronés. Ainsi, de nombreux modèles rhéologiques tels que la loi de puissance, la viscoélastique, le couple de contrainte et la micropolaire sont proposés dans la littérature technique.

Afin de mieux décrire le comportement rhéologique de ce type de lubrifiant, différentes théories du micro-continuum ont été développées. Parmi ces théories on utilise la théorie du micro-continuum V. K. Stokes [8, 9] qui est la théorie la plus simple des fluides proposée dans la littérature technique depuis les années soixante, qui tient compte des effets polaires tels que la présence de couples des contraintes et des couples de volume en plus des forces du volume et des forces de surface. Cependant, elle néglige l'élasticité et les effets des forces normales apparaissant pendant l'écoulement en raison de la présence de tels additifs.

Dans cette théorie, les fluides à couple de contraintes iso-volume sont caractérisés par deux constantes  $\mu$  et  $\eta$ , à savoir que seul un paramètre apparaît pour un fluide newtonien iso-volume qui est la viscosité dynamique  $\mu$ . La nouvelle constante physique  $\eta$  responsable du couple-de contrainte. Dans la littérature, les effets de couple de contraintes sur le comportement des paliers sont généralement étudiés en définissant le paramètre du couple de contraintes  $l = \left(\frac{\eta}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}$  qui a la dimension de longueur et peut être considéré comme une propriété fluide en fonction de la taille de la molécule de polymère. En annexe A, nous donnons les équations générales de champ de la théorie de V.K. Stokes pour un écoulement compressible.

En raison de sa simplicité mathématique relative, le modèle de fluide à couple de contraintes a été largement appliqué pour analyser divers problèmes de lubrification hydrodynamique dans des conditions isothermes [10-17]. Les résultats théoriques obtenus ont montré que la présence du couple de contraintes améliore les caractéristiques hydrodynamiques en régime permanent et dynamique des paliers lisses par rapport au cas du lubrifiant newtonien. Il a également été montré que les effets du couple de contraintes sont plus prononcés pour les valeurs élevées du paramètre de couple de contraintes  $l$ .

Selon la théorie de micro-continuum de Stokes sur les fluides à couple de contraintes [8,9] et la variation de la viscosité avec la pression, les effets combinés de la piézo-viscosité de couple des contraintes sur le comportement dynamique non linéaire d'un rotor flexible par des paliers fluides compliants ont été récemment étudiés par Lahmar et al. [18] en utilisant la méthode des éléments finis. La relation viscosité-pression utilisée par les auteurs est celle de Barus [19], largement utilisée dans les études de lubrification élastohydrodynamique. Ils ont trouvé que les effets combinés des contraintes de couple et de la piézo-viscosité dues à la présence d'additifs polymères dans les lubrifiants sur la réponse dynamique non linéaire du système de palier du rotor sont significatifs et ne peuvent être négligés. Ils ont également constaté que ces effets sont plus significatifs pour les polymères caractérisés par des chaînes moléculaires de plus grande longueur  $l$ .

Dans une excellente investigation, Fatu et al. [20] ont étudié l'importance des effets non newtoniens et piézo-visqueux sur le comportement dynamique de trois paliers de bielles utilisés pour un moteur de Formule 1, un moteur à allumage par compression et un moteur à allumage commandé. L'équation constitutive reliant la viscosité dynamique du fluide à la vitesse de cisaillement utilisée par les auteurs pour décrire le comportement rhéofluidifiant (shearthinning) est similaire à celle proposée par Gecim [21]. Pour étudier les effets piézo-visqueux, le modèle utilisé par les auteurs est celui proposé par Chu et al. [22] qui convient à des pressions plus élevées. Ils ont montré que pour les cas étudiés, les effets rhéofluidifiants non newtoniens ne pouvaient pas être négligés, en particulier pour les moteurs à des vitesses de rotation élevées, et que les effets piézovisqueux étaient plus importants que les effets non newtoniens avec une augmentation de l'épaisseur du film.

Il convient de noter que la même équation constitutive a été utilisée par Paranjpe [23], et Wang et al. [24, 25], afin d'étudier les effets rhéofluidifiants non newtoniens dans les paliers lisses et rugueux chargés dynamiquement.

Lahmar [16], a présenté une étude isotherme du comportement dynamique des paliers de bielles rigides de longueur infini pour les moteurs diesel et à essence lubrifiés par le fluide à couple de contraintes. La méthode de mobilité [26-27] proposée en 1965 par Booker a été adoptée pour le traitement numérique des équations de mouvement non linéaire du maneton rigide. Les effets des différentes valeurs du paramètre des

couples de contraintes  $l$  sur l'épaisseur minimale du film, la pression maximale, le débit, la perte de puissance ainsi que les trajectoires du maneton ont été étudiés pour les deux moteurs.

Dans ce chapitre notre étude porte sur une analyse thermique simplifiée basée sur le concept de «viscosité effective» ou de «température effective», elle est rapide et fournit des prévisions raisonnables des performances de paliers de bielle de moteur à combustion interne lubrifiés par des fluides piézo-visqueux à couple de contraintes.

Dans l'approche proposée basée sur le bilan thermique global, nous calculons les performances des paliers sur la base de la théorie classique de la lubrification isotherme, mais dans les calculs, nous devons incorporer la valeur spécifique de la viscosité, appelée ici viscosité effective, compatible avec la température moyenne dans le palier également appelée température effective. Cette dernière est calculée au moyen d'une procédure itérative sous-relaxée.

La méthode de Newton-Raphson amortie est utilisée, sous une forme améliorée, pour prédire la réponse dynamique de palier de bielle compliant soumis à un cycle de charge au lieu de la méthode de mobilité, car celle-ci n'est pas appropriée pour l'analyse de palier lisse partiellement rainuré malgré sa rapidité à obtenir des réponses dynamiques de paliers cylindriques rigides [28]. Cependant, lorsqu'on utilise la méthode de Newton-Raphson, le problème de lubrification inverse doit être résolu au lieu du problème direct, c'est-à-dire que les charges dynamiques appliquées sur le palier sont connues mais que les excentricités correspondantes doivent être calculées par itération.

## IV.2. Analyse théorique

### IV.2.1. Equations générales de base

Les équations gouvernantes d'un écoulement transitoire (iso-volume) incompressible à couples de contraintes, en négligeant les forces du volume et les couples du volume, peuvent être écrites sous la forme générale [8, 9]

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (IV.1)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} \quad (\text{IV.2})$$

où  $T_{ji} = -p\delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \eta \nabla^2 \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$  est le tenseur de contraintes total antisymétrique, et  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k}$  étant l'opérateur de Laplace.

$$\underbrace{\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right)}_{\text{Transfert d'énergie du à la convection}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right)}_{\text{Transfert d'énergie du à la conduction}} + \underbrace{2\mu D_{ij} D_{ij} + 16\eta K_i K_i}_{\text{Dissipation visqueuse totale } \Phi} \quad (\text{IV.3})$$

où  $D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$  et  $K_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \omega_{k,j} = -\frac{1}{4} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}$  sont respectivement le tenseur des taux de déformation et le vecteur moyen du taux de courbure.

Ce sont les équations de conservation de la masse, la conservation de la quantité de mouvement, et la conservation de l'énergie, respectivement. Dans ces équations,  $v_i$  est la vitesse,  $p$  est la pression,  $T$  est la température,  $\mu$  est la viscosité dynamique,  $\eta$  est le coefficient physique supplémentaire qui spécifie le caractère non newtonien du fluide à couple des contraintes,  $\rho$  est la masse volumique du fluide,  $C_p$  est la capacité thermique du fluide, et  $k$  est la conductivité du fluide.

#### IV.2.2. Equation de Reynolds modifiée pour un fluide piézo-visqueux à couple de Contraintes

Avec les hypothèses classiques prises en compte pour le film lubrifiant, l'équation de Reynolds modifiée pour l'écoulement isotherme bidimensionnel d'un fluide piézo-visqueux à couple de contraintes pour un palier de bielle représenté sur la figure(IV.2)

[16, 18, 29] prend la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ G(h, l, \alpha, p) \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ G(h, l, \alpha, p) \frac{\partial p}{\partial z} \right] = 12\mu_0 \left( \langle \omega(t) \rangle R \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} \right) \quad (\text{IV.4})$$

où

$$G(h, l, \alpha, p) = h^3 e^{-\alpha p} - 12l^2 \left[ h e^{-2\alpha p} - 2l e^{-\frac{5}{2}\alpha p} \tanh \left( \frac{h e^{\frac{1}{2}\alpha p}}{2l} \right) \right],$$

$$\langle \omega(t) \rangle = \frac{\omega_s + \omega_b}{2} \approx \frac{\omega_s}{2} \left( 1 - \frac{\ell_2}{\ell_3} \cos \theta_2(t) \right), \text{ et } l = \left( \frac{\eta}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{IV.5})$$

Pour les paliers de vilebrequin (paliers principaux), l'équation (IV.5) se réduit à  $\langle \omega(t) \rangle = \frac{\omega_s}{2}$

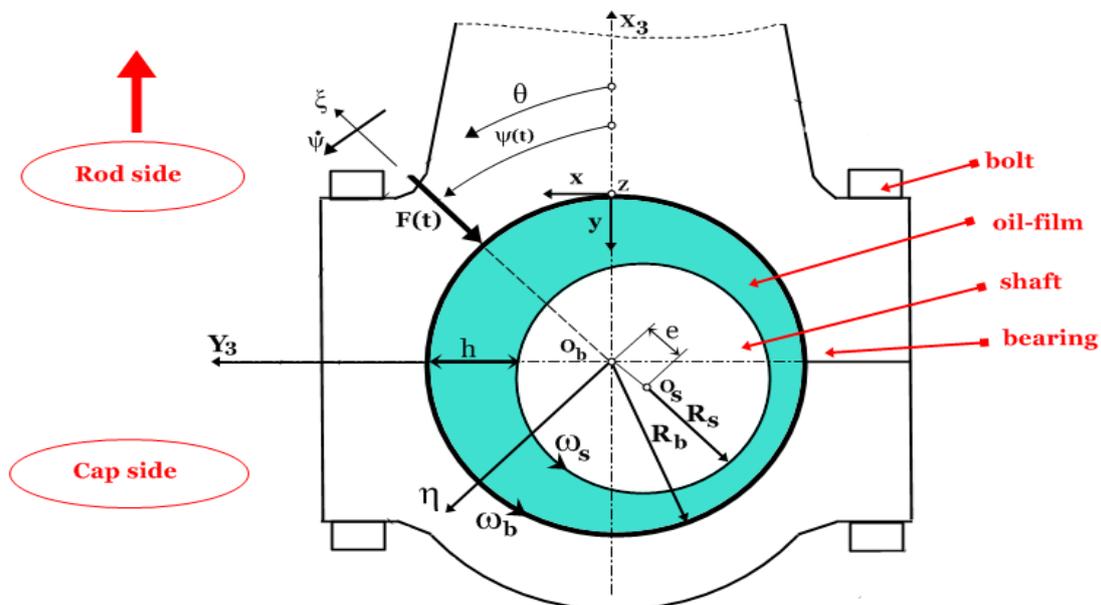
Dans les équations ci-dessus,  $h$  est l'épaisseur du film de lubrifiant,  $l$  représente physiquement la longueur de la chaîne moléculaire. Si  $l = 0$ , l'équation (IV.4) se réduit à l'équation classique de Reynolds pour un fluide newtonien.  $\alpha$  étant le coefficient de piézoviscosité. Pour caractériser l'effet (variation viscosité-pression), on utilise la relation de Barus [19], en régime isotherme :

$$\mu(p) = \mu_0 e^{\alpha p} \quad (\text{IV.6})$$

où  $\mu_0$  est la viscosité dynamique pour  $p = 0$ , et  $\alpha$  est le coefficient de piézo-viscosité qui peut être obtenu en traçant le logarithme naturel de la viscosité  $\mu$  dynamique en fonction de la pression  $p$ . La pente de la courbe correspond à la valeur de  $\alpha$ . Le coefficient de piézo-viscosité est fonction de la structure moléculaire du lubrifiant et de ses caractéristiques physiques. Si  $\alpha = 0$ , la viscosité est alors constante, et  $\mu = \mu_0$ , le fluide est isovisqueux et l'équation de Reynolds modifié (IV.4) se réduit à

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ G(h, l) \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ G(h, l) \frac{\partial p}{\partial z} \right] = 12\mu \left( \langle \omega(t) \rangle R \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} \right) \quad (\text{IV.7})$$

où  $G(h, l) = h^3 - 12l^2 \left[ h - 2l \tanh \left( \frac{h}{2l} \right) \right]$  [16].



**Figure IV. 2 :** Schéma d'un palier de tête de bielle et systèmes d'axes

## Conditions aux limites

Les conditions aux limites associées à l'équation de Reynolds (IV.4) peuvent être classées comme suit :

Les conditions aux limites liées à l'environnement dans lequel fonctionne le système:

$$p(x, z = \pm \frac{l}{2}) = p_{atm}, \text{ aux bords libres du palier} \quad (IV.8)$$

Condition de périodicité:

$$p(x = 0, z) = p(x = 2\pi, z) \quad (IV.9)$$

Condition limite liée à l'alimentation en lubrifiant:

$$p = p_s, \text{ au niveau de la rainure d'alimentation} \quad (IV.10)$$

Les conditions aux limites liées à l'écoulement du lubrifiant (phénomène de cavitation):

$$\begin{cases} p(x, z) = p_{cav} \\ \frac{\partial p}{\partial x}(x, z) = \frac{\partial p}{\partial z}(x, z) = 0 \end{cases}, \text{ à la frontière de rupture du film d'huile} \quad (IV.11)$$

Pour ces conditions, nous pouvons ajouter pour les paliers alignés la condition suivante:

$$\frac{\partial p}{\partial z}(x, z = 0) = 0, \text{ dans le plan médian du palier} \quad (IV.12)$$

## Epaisseur du film d'huile

Le palier de bielle revêtu et le maneton, sont considérés comme infiniment rigide et donc seul le revêtement de surface qui est considéré comme élastique (figure IV. 2). Dans le repère mobile (X, Y) associé au palier de bielle, l'épaisseur du film non déformé est une fonction du jeu radial  $C = R_b - R_s$  et de la position du centre de maneton définie par  $e_x$  et  $e_y$ , est donnée par :

$$h_0 = C - e_x(t) \cos \theta - e_y(t) \sin \theta \quad (IV.13)$$

où  $\theta$  est l'angle du palier (coordonnées cylindriques) dont l'origine se trouve sur l'axe des abscisses. Lorsque l'épaisseur du film  $h_0$  est modifiée par la déformation élastique de l'interface revêtement-film lubrifiant, l'équation géométrie du film devient :

$$h(\theta, z, t) = h_0 + Cp(\theta, z, t) \quad (IV.14)$$

où  $C = \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)t_l}{1-\sigma E}$  est l'opérateur de compliance du palier aligné en ( $m/Pa$ ). Cet opérateur donne seulement une relation entre la pression et le déplacement élastique.

Le modèle élastique simplifié utilisé dans l'équation (IV.14) pour calculer la déformation radiale due à de la pression hydrodynamique est plus précis lorsque l'on suppose que

l'épaisseur du revêtement,  $t_l$ , est beaucoup plus petite que le rayon du palier, c'est à dire  $\frac{t_l}{R} \ll 1$  [32,33, 34].

### IV.2.3 Formulation de l'équation de Reynolds modifiée par les différences finies

La méthode des différences finies est utilisée pour approcher l'équation de pression transitoire non linéaire (IV.4) appelée ici l'équation de Reynolds modifiée obtenue à partir des lois de conservation de la masse et de conservation de la quantité de mouvement pour un fluide incompressible à couple de contraintes en utilisant la théorie du micro-continuum de V. K. Stokes [8]. Comme il est illustré sur la figure (IV.3), la surface du palier est divisée en  $(N_x \times N_z)$  cellules rectangulaires, c'est-à-dire le nombre total de nœuds est  $(N_x + 1) \times (N_z + 1)$ .

Une grille de calcul de  $61 \times 21$  points nodaux est choisie dans la présente étude. Cette taille de cellule est choisie comme un compromis entre le temps de calcul et la précision. En utilisant la méthode des différences finies centrées comme le montre la figure (IV.3), les relations suivantes sont obtenues :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( G \frac{\partial p}{\partial x} \right) \Big|_{i,j} \approx \frac{G \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{i+\frac{1}{2}j} - G \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{i-\frac{1}{2}j}}{\Delta x} = \frac{G_{i+\frac{1}{2}j} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2}j} - G_{i-\frac{1}{2}j} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_{i-\frac{1}{2}j}}{\Delta x} = \frac{G_{i+\frac{1}{2}j} \frac{(p_{i+1,j} - p_{i,j})}{\Delta x} - G_{i-\frac{1}{2}j} \frac{(p_{i,j} - p_{i-1,j})}{\Delta x}}{\Delta x} \quad (IV.15)$$

$$\text{où } G_{i+\frac{1}{2}j} = \frac{G_{i,j} + G_{i+1,j}}{2} \text{ et } G_{i-\frac{1}{2}j} = \frac{G_{i,j} + G_{i-1,j}}{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( G \frac{\partial p}{\partial z} \right) \Big|_{i,j} \approx \frac{G_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{(p_{i,j+1} - p_{i,j})}{\Delta z} - G_{i,j-\frac{1}{2}} \frac{(p_{i,j} - p_{i,j-1})}{\Delta z}}{\Delta z} \quad (IV.16)$$

$$\text{où } G_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{G_{i,j} + G_{i,j+1}}{2} \text{ et } G_{i,j-\frac{1}{2}} = \frac{G_{i,j} + G_{i,j-1}}{2}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{i,j} \approx \frac{h_{i+\frac{1}{2}j} - h_{i-\frac{1}{2}j}}{\Delta x} \quad (IV.17)$$

$$\text{où } h_{i+\frac{1}{2}j} = \frac{h_{i,j} + h_{i+1,j}}{2}, h_{i-\frac{1}{2}j} = \frac{h_{i,j} + h_{i-1,j}}{2}, \text{ et } \frac{\partial h}{\partial t} \Big|_{i,j} \approx \frac{h_{i,j}^t - h_{i,j}^{t-\Delta t}}{\Delta t} \quad (IV.18)$$

Dans l'équation (IV.18),  $\left. \frac{\partial h}{\partial t} \right|_{i,j}$  est la vitesse de compression nodale, et  $h_{ij}^{t-\Delta t}$  est l'épaisseur de film d'huile nodale calculée au pas de temps précédent.

En substituant les équations (IV.15) à (IV.18) dans l'équation (IV.4) ou l'équation (IV.7) on obtient :

$$-\underbrace{\left( \frac{G_{i+\frac{1}{2},j} + G_{i-\frac{1}{2},j}}{(\Delta x)^2} + \frac{G_{i,j+\frac{1}{2}} + G_{i,j-\frac{1}{2}}}{(\Delta z)^2} \right)}_{a_{i,j}} p_{i,j} + \underbrace{\left( \frac{G_{i+\frac{1}{2},j}}{(\Delta x)^2} \right)}_{b_{i,j}} p_{i+1,j} + \underbrace{\left( \frac{G_{i-\frac{1}{2},j}}{(\Delta x)^2} \right)}_{c_{i,j}} p_{i-1,j} + \underbrace{\left( \frac{G_{i,j+\frac{1}{2}}}{(\Delta z)^2} \right)}_{d_{i,j}} p_{i,j+1} + \underbrace{\left( \frac{G_{i,j-\frac{1}{2}}}{(\Delta z)^2} \right)}_{e_{i,j}} p_{i,j-1} - \underbrace{12\mu \left[ \bar{\omega} R \left( \frac{h_{i+1,j} - h_{i-1,j}}{2\Delta x} \right) + \frac{h_{ij}^t - h_{ij}^{t-\Delta t}}{\Delta t} \right]}_{f_{ij}} = 0 \quad (IV.19)$$

ou encore sous une forme plus pratique puisque l'équation (IV.19) est non linéaire en termes de  $p$

$$p_{ij}^{(m)} = (b'_{ij})^{(m-1)} p_{i+1,j}^{(m-1)} + (c'_{ij})^{(m-1)} p_{i-1,j}^{(m-1)} + (d'_{ij})^{(m-1)} p_{i,j+1}^{(m-1)} + (e'_{ij})^{(m-1)} p_{i,j-1}^{(m-1)} - (f'_{ij})^{(m-1)} \quad (IV.20)$$

$$\text{où } (b'_{ij})^{(m-1)} = \frac{b_{ij}^{(m-1)}}{a_{ij}^{(m-1)}}, \quad (c'_{ij})^{(m-1)} = \frac{c_{ij}^{(m-1)}}{a_{ij}^{(m-1)}} \quad ; \quad (d'_{ij})^{(m-1)} = \frac{d_{ij}^{(m-1)}}{a_{ij}^{(m-1)}}; \quad (e'_{ij})^{(m-1)} = \frac{e_{ij}^{(m-1)}}{a_{ij}^{(m-1)}} ;$$

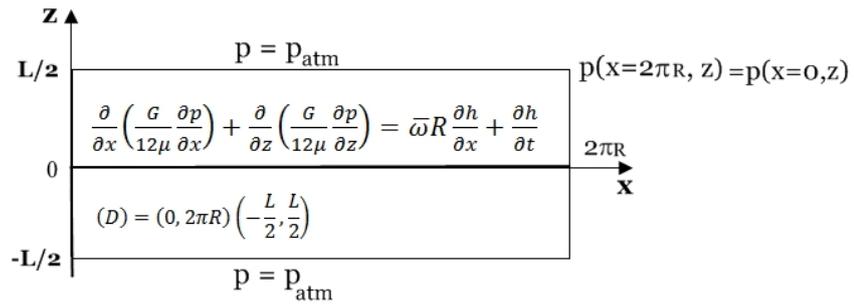
$$(f'_{ij})^{(m-1)} = \frac{f_{ij}^{(m-1)}}{a_{ij}^{(m-1)}}, i=1, \dots, N_x+1, j=1, \dots, N_z; \text{ et } m=1,2, \dots, m_{max}$$

Les coefficients  $a_{ij}^{(m-1)}, b_{ij}^{(m-1)}, c_{ij}^{(m-1)}, d_{ij}^{(m-1)}, e_{ij}^{(m-1)}$  et  $f_{ij}^{(m-1)}$  sont calculés pour  $p_{ij}^{(m-1)}$ .

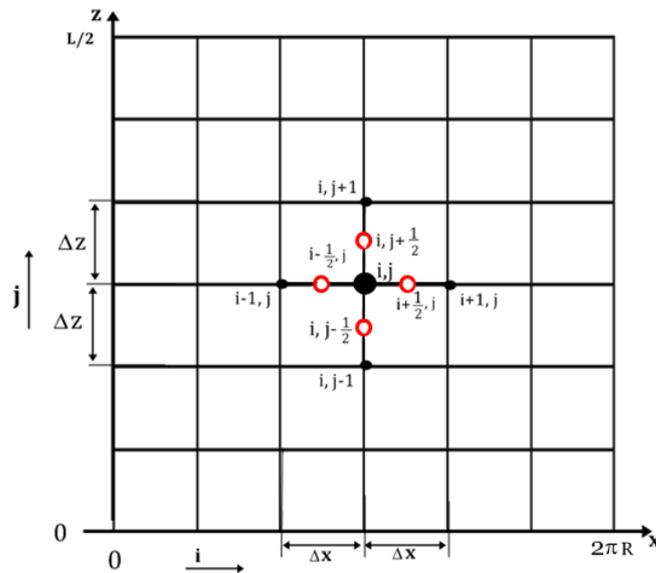
L'indice  $m$  indique le nombre d'itérations pour la méthode des substitutions successives.

Dans l'équation (IV.19),  $\Delta x = \frac{2\pi}{N_x}$ ,  $\Delta z = \frac{L}{2N_z}$  sont les tailles de maille dans les directions circonférentielle et axiale, respectivement, et  $\Delta t = \left| \frac{\Delta \theta_2}{\omega_2} \right|$  est l'incrément de temps.

$\Delta \theta_2 = \frac{4\pi}{nsteps}$ ,  $\Delta \theta_2$  étant le pas angulaire du vilebrequin et  $nsteps$  est le nombre d'étapes d'un cycle de moteur, c'est-à-dire que le cycle de charge complet est divisé en  $n$  étapes. Ainsi, le nombre total de données sera  $(nsteps + 1)$  incluant la première et la dernière donnée (par exemple pour  $\Delta \theta_2 = 5^\circ$ ,  $nsteps = 144$  et pour  $\Delta \theta_2 = 1^\circ$ ,  $nsteps = 720$ ).



(a) Problème de lubrification continu : le domaine de calcul considéré



b) Problème discret

**Figure IV. 3 : Maillages (2-D) par différences finies du demi-palier**

Le système d'équations algébriques non linéaires (IV.20) résultant de la discrétisation spatio-temporelle de l'équation de Reynolds modifiée non linéaire est résolu par la méthode de substitution successive avec un coefficient de sous-relaxation  $\omega$  dont la valeur varie de 0 à 1 similaire à la méthode de Wegstein utilisée pour la résolution des équations non linéaires unidimensionnelles.

Détermination du champ de pression d'huile  $p_{i,j}$ :

$$p_{ij}^{(m)} = (1 - \omega)p_{ij}^{(m-1)} + \omega p_{ij}^{(m)} \quad (\text{IV.21})$$

Selon l'équation (IV.20), l'équation (IV.21) prend la forme suivante

$$p_{ij}^{(m)} = (1 - \omega)p_{ij}^{(m-1)} + \omega \left( \underbrace{(b'_{i,j})^{(m-1)} p_{i+1,j}^{(m-1)} + (c'_{i,j})^{(m-1)} p_{i-1,j}^{(m-1)} + (d'_{i,j})^{(m-1)} p_{i,j+1}^{(m-1)} + (e'_{i,j})^{(m-1)} p_{i,j-1}^{(m-1)} - (f'_{i,j})^{(m-1)}}_{p_{ij}^{(m)}} \right) \quad (\text{IV.22})$$

Les valeurs typiques de  $\omega$  sélectionnées pour les cas étudiés dans cette étude vont de  $10^{-3}$  à  $10^{-1}$  selon le comportement non linéaire de l'équation de Reynolds modifiée. Cependant,  $\omega$  peut être égal à 1 lors de la résolution de l'équation de Reynolds linéaire, c'est-à-dire pour des cas de palier rigide et/ou iso-visqueux.

Cette méthode consiste à construire une série de solutions  $p_{ij}^{(0)}, p_{ij}^{(1)}, \dots, p_{ij}^{(m-1)}, p_{ij}^{(m)}$  où  $p_{ij}^{(0)}$  est l'estimé initial de la solution. Les pressions nodales  $p_{ij}^{(m)}$  étant calculées en résolvant le système suivant par l'algorithme de Gauss-Seidel avec coefficient de sur-relaxation  $\Omega_{GS}$  afin d'accélérer la convergence de la procédure en particulier lorsqu'il s'agit de problèmes transitoires et non linéaires et pour satisfaire les conditions de Reynolds (Cavitation ou rupture du film) (IV.11) en utilisant l'algorithme de Christopherson [36]. Pendant le calcul itératif de la pression du film fluide, la pression disparaît ( $p_{cav}=0$ ) si la pression calculée devient négative.

$$\begin{aligned} (p_{ij}^{(m)})^{n+1} &= (1 - \Omega_{GS}) (p_{ij}^{(m)})^n + \\ \Omega_{GS} &\left( (b'_{i,j})^{(m-1)} (p_{i+1,j}^{(m)})^n + (c'_{i,j})^{(m-1)} (p_{i-1,j}^{(m)})^{n+1} + (d'_{i,j})^{(m-1)} (p_{i,j+1}^{(m)})^n + \right. \\ &\left. (e'_{i,j})^{(m-1)} (p_{i,j-1}^{(m)})^{n+1} - (f'_{i,j})^{(m-1)} \right) \end{aligned} \quad (\text{IV.23})$$

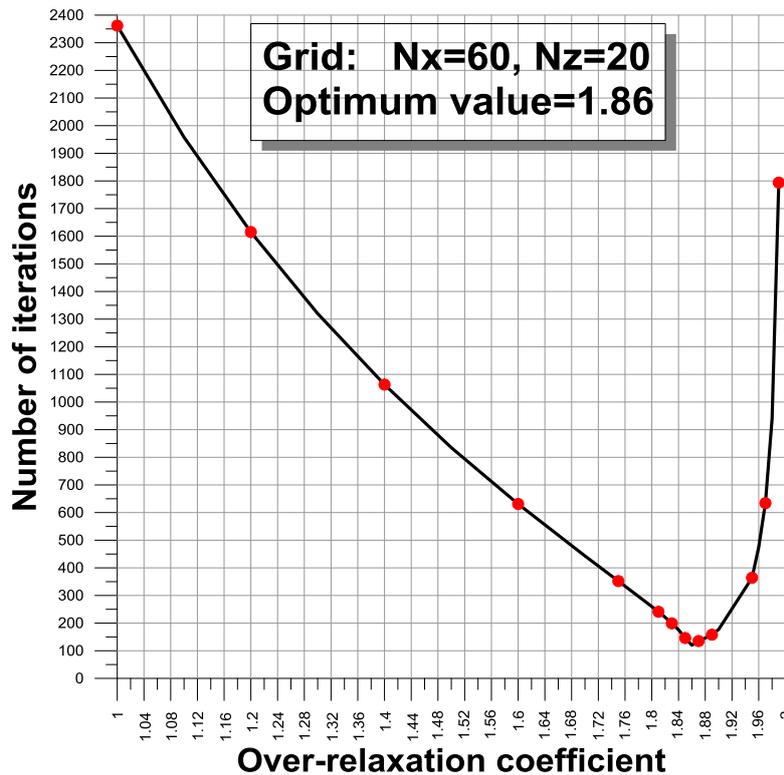
où  $(n)$  et  $(n+1)$  sont les étapes des itérations de Gauss-Seidel.

La procédure itérative de Gauss-Seidel est arrêtée lorsqu'à chaque nœud du maillage l'erreur relative maximale (entre deux itérations successives) est inférieure à l'erreur

$$\text{tolérée, c.-à-d., } \max \left| \frac{p_{ij}^{(n+1)} - p_{ij}^{(n)}}{p_{ij}^{(n+1)}} \right| \leq 10^{-6} . \quad (\text{IV.24})$$

Notons que dans les méthodes de relaxation, le temps d'exécution (stabilité numérique) est sensiblement affecté par le coefficient de relaxation choisi. La valeur optimale du coefficient de relaxation ( $\Omega_{GS}$ ) n'est pas toujours connu a priori [37].

La valeur optimale de  $\Omega_{GS}$  étant celle qui permet de converger vers la solution pour une erreur tolérée pour un nombre minimum d'itérations ou un petit temps de calcul. En pratique, il est généralement déterminé par des simulations numériques comme le montre la figure (IV. 4).



**Figure IV.4 :** Nombre d'itérations en fonction du coefficient de sur-relaxation pour une erreur tolérée égale à  $10^{-6}$

Le critère d'arrêt des itérations dans l'algorithme de substitution successif est :

$$\|n\| = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_x+1} \sum_{j=1}^{N_z+1} (p_{ij}^{(m)} - p_{ij}^{(m-1)})^2}{\sum_{i=1}^{N_x+1} \sum_{j=1}^{N_z+1} (p_{ij}^{(m)})^2}} \leq 10^{-2} \quad (\text{IV.25})$$

«n» étant la norme relative des moindres carrés.

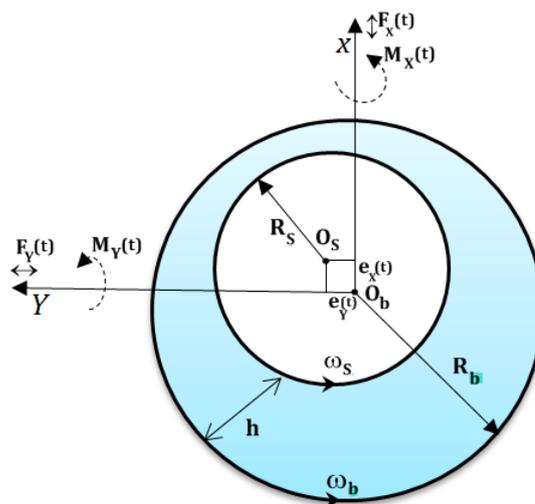
#### IV.2.4. Equations d'équilibre et orbite du centre du maneton

Lorsque la charge externe agissant sur le palier varie à la fois en direction et en module, le centre du maneton décrit une trajectoire à l'intérieur du palier. La détermination de cette trajectoire nécessite la résolution des équations d'équilibre non linéaires à chaque pas de temps ou angle de rotation du vilebrequin par une méthode itérative. Une solution inverse de l'équation de Reynolds est alors requise. Pour un palier mésaligné figure (IV. 5) soumis à un torseur arbitraire, les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\begin{cases} \iint_A p \cos\theta \, dA - F_X = 0 \\ \iint_A p \sin\theta \, dA - F_Y = 0 \\ \iint_A z p \cos\theta \, dA - M_X = 0 \\ \iint_A z p \sin\theta \, dA - M_Y = 0 \end{cases} \quad (IV.26)$$

où  $F_X$ ,  $F_Y$  sont les composantes de charge appliquées, et  $M_X$ ,  $M_Y$  sont les couples appliqués. Si le système de palier est parfaitement aligné, l'équation (IV.26) devient:

$$\begin{cases} - \iint_A p \cos\theta \, dA + F_X = 0 \\ - \iint_A p \sin\theta \, dA + F_Y = 0 \end{cases} \quad (IV.27)$$



**Figure IV.5 :** Représentation schématique d'un palier dynamiquement chargé soumis à un torseur arbitraire

A chaque instant, la position du centre du maneton défini par le vecteur d'excentricité

$\mathbf{e}(t) = \begin{Bmatrix} e_X(t) \\ e_Y(t) \end{Bmatrix}$  est déterminée lorsque le vecteur de portance

$$\mathbf{W}(t) = \begin{Bmatrix} W_X(t) \\ W_Y(t) \end{Bmatrix} = - \iint_A p \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{Bmatrix} dA \text{ équilibre la charge appliquée } \mathbf{F}(t) = \begin{Bmatrix} F_X(t) \\ F_Y(t) \end{Bmatrix}$$

qui est exprimée dans le système de coordonnées mobiles lié à la bielle ( $X_3, Y_3$ ) comme indiqué sur la figure (IV.1)

L'équation (IV.27) peut être réécrite comme suit :

$$\begin{cases} r_X(e_X(t), e_Y(t)) = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} p(\theta, z, t) \cos\theta R d\theta dz - F_X(t) = 0 \\ r_Y(e_X(t), e_Y(t)) = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} p(\theta, z, t) \sin\theta R d\theta dz - F_Y(t) = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.28a})$$

où  $r_X$  et  $r_Y$  sont les composantes du vecteur résidu  $\mathbf{r}(t)$  qui sont des fonctions non linéaires de  $e_X$  et  $e_Y$ .

La méthode de Newton-Raphson amortie est utilisée pour résoudre l'ensemble de deux équations non linéaires (IV.28a). Cette méthode est formulée à partir de la linéarisation des équations d'équilibre à l'aide du développement de Taylor d'une

fonction à deux variables au voisinage de la  $k$ ième solution  $\begin{Bmatrix} e_X^{(k)}(t) \\ e_Y^{(k)}(t) \end{Bmatrix}$ , c'est-à-dire

$$\begin{cases} r_X^{(k+1)} \approx r_X^{(k)} + \left(\frac{\partial r_X}{\partial e_X}\right)_k \delta e_X^{(k)} + \left(\frac{\partial r_X}{\partial e_Y}\right)_k \delta e_Y^{(k)} = 0 \\ r_Y^{(k+1)} \approx r_Y^{(k)} + \left(\frac{\partial r_Y}{\partial e_X}\right)_k \delta e_X^{(k)} + \left(\frac{\partial r_Y}{\partial e_Y}\right)_k \delta e_Y^{(k)} = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.28b})$$

Dans la méthode amortie de Newton-Raphson, la  $(k+1)$  ième solution est :

$$\begin{Bmatrix} e_X^{(k+1)}(t) \\ e_Y^{(k+1)}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e_X^{(k)}(t) \\ e_Y^{(k)}(t) \end{Bmatrix} + \omega_{NR} \begin{Bmatrix} \delta e_X^{(k)}(t) \\ \delta e_Y^{(k)}(t) \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.29a})$$

où  $\omega_{NR}$  est le facteur d'amortissement compris dans l'intervalle (0, 1).

Lors des simulations, on a constaté pour les revêtements à faible module d'élasticité et pour les fluides piézo-visqueux menant à une équation de Reynolds non linéaire, l'utilisation de la méthode de Newton-Raphson amortie décrite ci-dessus

avec  $\omega_{NR} = 10^{-1}$  est nécessaire pour obtenir la convergence de la solution. D'autre part, pour le cas rigide et/ou lorsque le fluide est isovisqueux, la valeur  $\omega_{NR}$  peut être considérée égale à 1, car dans ce cas, les équations de Reynolds ont un comportement linéaire en termes de pression  $p$ .

Notons que la valeur  $\omega_{NR}$  peut être ajustée automatiquement pendant les itérations basées sur la vitesse de convergence de la solution [38, 39]. Ainsi, l'équation (IV.29a) devient :

$$\begin{Bmatrix} e_X^{(k+1)}(t) \\ e_Y^{(k+1)}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e_X^{(k)}(t) \\ e_Y^{(k)}(t) \end{Bmatrix} + \omega_{NR}^{(k)} \begin{Bmatrix} \delta e_X^{(k)}(t) \\ \delta e_Y^{(k)}(t) \end{Bmatrix} \quad (IV.29b)$$

Les corrections  $\begin{Bmatrix} \delta e_X^{(k)}(t) \\ \delta e_Y^{(k)}(t) \end{Bmatrix}$  à  $\begin{Bmatrix} e_X^{(k)}(t) \\ e_Y^{(k)}(t) \end{Bmatrix}$  sont déterminées en résolvant le système algébrique linéaire suivant, déduit de l'équation (IV.28b)

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial r_X}{\partial e_X} & \frac{\partial r_X}{\partial e_Y} \\ \frac{\partial r_Y}{\partial e_X} & \frac{\partial r_Y}{\partial e_Y} \end{bmatrix}_{(e_X^{(k)}, e_Y^{(k)})} \begin{Bmatrix} \delta e_X^{(k)}(t) \\ \delta e_Y^{(k)}(t) \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} r_X(e_X^{(k)}(t), e_Y^{(k)}(t)) \\ r_Y(e_X^{(k)}(t), e_Y^{(k)}(t)) \end{Bmatrix} ; k=0, 1, 2, \dots, k_{max} \quad (IV.30)$$

dont la solution analytique est:

$$\begin{Bmatrix} \delta e_X^{(k)}(t) \\ \delta e_Y^{(k)}(t) \end{Bmatrix} = - \frac{\begin{bmatrix} \frac{\partial r_Y}{\partial e_Y} & -\frac{\partial r_X}{\partial e_Y} \\ -\frac{\partial r_Y}{\partial e_X} & \frac{\partial r_X}{\partial e_X} \end{bmatrix}_{(e_X^{(k)}, e_Y^{(k)})} \begin{Bmatrix} r_X(e_X^{(k)}, e_Y^{(k)}) \\ r_Y(e_X^{(k)}, e_Y^{(k)}) \end{Bmatrix}}{\begin{pmatrix} \frac{\partial r_X}{\partial e_X} \frac{\partial r_Y}{\partial e_Y} - \frac{\partial r_X}{\partial e_Y} \frac{\partial r_Y}{\partial e_X} \end{pmatrix}_{(e_X^{(k)}, e_Y^{(k)})}} \quad (IV.31)$$

La matrice jacobienne  $[J_k] = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_X}{\partial e_X} & \frac{\partial r_X}{\partial e_Y} \\ \frac{\partial r_Y}{\partial e_X} & \frac{\partial r_Y}{\partial e_Y} \end{bmatrix}_{(e_X^{(k)}, e_Y^{(k)})}$  du système (IV.30) à la  $k$ ème itération

est généralement une matrice non symétrique. En multipliant les deux membres du système (IV.30) par  $[J_k]^T$ , nous obtenons un système équivalent avec une matrice symétrique définie positive chaque fois que  $[J_k]$  est régulière qui a la même solution

$\begin{Bmatrix} \delta e_X^{(k)}(t) \\ \delta e_Y^{(k)}(t) \end{Bmatrix}$  que celle du système d'origine (IV.30). Ainsi, le système (IV.30) après de

simples manipulations algébriques devient :

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial r_X}{\partial e_X}\right)^2 + \left(\frac{\partial r_Y}{\partial e_X}\right)^2 & \frac{\partial r_X}{\partial e_X} \frac{\partial r_X}{\partial e_Y} + \frac{\partial r_Y}{\partial e_X} \frac{\partial r_Y}{\partial e_Y} \\ \text{Sym.} & \left(\frac{\partial r_X}{\partial e_Y}\right)^2 + \left(\frac{\partial r_Y}{\partial e_Y}\right)^2 \end{bmatrix}_{(e_X^{(k)}, e_Y^{(k)})} \begin{Bmatrix} \delta e_X^{(k)}(t) \\ \delta e_Y^{(k)}(t) \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} r_X \frac{\partial r_X}{\partial e_X} + r_Y \frac{\partial r_Y}{\partial e_X} \\ r_X \frac{\partial r_X}{\partial e_Y} + r_Y \frac{\partial r_Y}{\partial e_Y} \end{Bmatrix}_{(e_X^{(k)}, e_Y^{(k)})} \quad (\text{IV.32})$$

Le système linéaire obtenu peut être résolu par la méthode directe de Choleski.

Le critère d'arrêt pour la méthode de Newton-Raphson améliorée par laquelle le processus itératif peut être terminé sans modifier la précision de la solution est :

$$\left| r_X^{(k)}(t) \right| + \left| r_Y^{(k)}(t) \right| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad k < k_{max} \quad (\text{IV.33a})$$

Ce qui représente la norme de Laplace  $L_1$  du résidu.

On peut également utiliser la norme euclidienne  $L_2$  du résidu, c'est-à-dire

$$\begin{Bmatrix} r_X^{(k)}(t) \\ r_Y^{(k)}(t) \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} r_X^{(k)}(t) \\ r_Y^{(k)}(t) \end{Bmatrix} \leq \varepsilon \quad (\text{IV.33b})$$

où  $\varepsilon=10^{-2}$  et  $k_{max}$  sont respectivement la tolérance de convergence prédéfinie et le nombre maximal d'itérations.

Les coefficients de la matrice jacobienne sont évalués numériquement par des différences finies centrées, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial r_X}{\partial e_X}\right)_k &\approx \frac{r_X(e_X^{(k)}+\delta, e_Y^{(k)}) - r_X(e_X^{(k)}-\delta, e_Y^{(k)})}{2\delta}; & \left(\frac{\partial r_X}{\partial e_Y}\right)_k &\approx \frac{r_X(e_X^{(k)}, e_Y^{(k)}+\delta) - r_X(e_X^{(k)}, e_Y^{(k)}-\delta)}{2\delta}; \\ \left(\frac{\partial r_Y}{\partial e_X}\right)_k &\approx \frac{r_Y(e_X^{(k)}+\delta, e_Y^{(k)}) - r_Y(e_X^{(k)}-\delta, e_Y^{(k)})}{2\delta}; & \left(\frac{\partial r_Y}{\partial e_Y}\right)_k &\approx \frac{r_Y(e_X^{(k)}, e_Y^{(k)}+\delta) - r_Y(e_X^{(k)}, e_Y^{(k)}-\delta)}{2\delta} \end{aligned} \quad (\text{IV.34})$$

où  $\delta = 10^{-10}$  pour les calculs effectués en double précision.

## IV.2.5. Caractéristiques hydrodynamiques

### IV.2.5. 1. Débit de fuite latéral

Le débit de fuite latéral aux bords libres du palier ( $z = \pm \frac{L}{2}$ ) est calculé par la relation suivante:

$$Q_z = \left| \int_{\theta_1^*}^{\theta_2^*} h(\theta, z = \frac{L}{2}) \langle w(\theta, z = \frac{L}{2}) \rangle R d\theta \right| + \left| \int_{\theta_1^*}^{\theta_2^*} h(\theta, z = -\frac{L}{2}) \langle w(\theta, z = -\frac{L}{2}) \rangle R d\theta \right| \quad (\text{IV.35a})$$

où  $\theta_1^*(t)$  et  $\theta_2^*(t)$  sont les angles délimitant la zone active du palier.

Si le palier est parfaitement aligné, l'équation ci-dessus (IV.35a) devient:

$$Q_z = 2 \left| \int_{\theta_1^*}^{\theta_2^*} h(\theta, z = \frac{l}{2}) \langle w(\theta, z = \frac{l}{2}) \rangle R d\theta \right| \quad (IV.35b)$$

Dans les équations ci-dessus,  $h$  est l'épaisseur du film et  $\langle w(x, z) \rangle = \frac{1}{h} \int_0^h w(x, y, z) dy$  est la vitesse axiale moyenne d'écoulement calculée par les relations suivantes:

- Fluide piézo-visqueux à couple de contrainte ( $\mu = \mu_0 e^{\alpha p}$ ):

$$\langle w(x, z) \rangle = - \frac{G(h, l, \alpha, p)}{12\mu_0 h} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (IV.36a)$$

- Fluide iso-visqueux à couple de contrainte ( $\alpha=0$ ):

$$\langle w(x, z) \rangle = - \frac{G(h, l)}{12\mu h} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (IV.36b)$$

- Fluide newtonien piezo-visqueux ( $\eta=0$ ):

$$\langle w(x, z) \rangle = - \frac{h^3 e^{-\alpha p}}{12\mu_0 h} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (IV.36c)$$

- Fluide newtonien iso-visqueux ( $\alpha = \eta = 0$ ):

$$\langle w(x, z) \rangle = - \frac{h^3}{12\mu h} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (IV.36d)$$

La vitesse axiale d'écoulement  $w(x, y, z)$  ainsi que la vitesse circonférentielle  $u(x, y, z)$  sont déterminées à partir de l'intégration d'équations de champ régissant le mouvement de l'huile lubrifiante dans les directions  $x$  et  $z$ :

$$\eta \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} - \mu_0 e^{\alpha p} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (IV.37a)$$

$$\eta \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \mu_0 e^{\alpha p} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = - \frac{\partial p}{\partial z} \quad (IV.37b)$$

Les solutions générales des équations (IV.37) ont la forme suivante :

$$u(x, y, z) = A_0 + A_1 y + A_2 \cosh\left(\frac{y}{l} e^{\frac{\alpha p}{2}}\right) + A_3 \sinh\left(\frac{y}{l} e^{\frac{\alpha p}{2}}\right) + \frac{1}{2\mu_0 e^{\alpha p}} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 \quad (IV.38a)$$

$$w(x, y, z) = B_0 + B_1 y + B_2 \cosh\left(\frac{y}{l} e^{\frac{\alpha p}{2}}\right) + B_3 \sinh\left(\frac{y}{l} e^{\frac{\alpha p}{2}}\right) + \frac{1}{2\mu_0 e^{\alpha p}} \frac{\partial p}{\partial z} y^2 \quad (IV.38b)$$

En utilisant les conditions aux limites suivantes

$$u(x, 0, z) = U_b = \omega_b R, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, 0, z) = 0, \quad u(x, h, z) = U_s = \omega_s R, \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, h, z) = 0 \quad (IV.39a)$$

$$w(x, 0, z) = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, 0, z) = 0, \quad w(x, h, z) = 0, \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, h, z) = 0 \quad (\text{IV.39b})$$

On a:

$$u(x, y, z) = \underbrace{U_b + (U_s - U_b) \frac{y}{h}}_{\text{Couette flow}} + \underbrace{\frac{e^{-2\alpha p}}{2\mu_0} \frac{\partial p}{\partial x} \left\{ \frac{y(y-h)}{e^{-\alpha p}} + 2\ell^2 \left[ 1 - \frac{\text{Cosh}\left(\frac{2y-h}{2\ell e^{-\frac{1}{2}\alpha p}}\right)}{\text{Cosh}\left(\frac{h}{2\ell e^{-\frac{1}{2}\alpha p}}\right)} \right] \right\}}_{\text{Hagen-Poiseuille flow}} \quad (\text{IV.40a})$$

$$w(x, y, z) = \underbrace{\frac{e^{-2\alpha p}}{2\mu_0} \frac{\partial p}{\partial z} \left\{ \frac{y(y-h)}{e^{-\alpha p}} + 2\ell^2 \left[ 1 - \frac{\text{Cosh}\left(\frac{2y-h}{2\ell e^{-\frac{1}{2}\alpha p}}\right)}{\text{Cosh}\left(\frac{h}{2\ell e^{-\frac{1}{2}\alpha p}}\right)} \right] \right\}}_{\text{Hagen-Poiseuille flow}} \quad (\text{IV.40b})$$

### IV.2.5.2. Puissance dissipée

La puissance dissipée totale est évaluée sur la zone active du palier

$$\mathcal{P} = |\mathcal{P}_{\text{Couette \& Hagen-Poiseuille}}| + |\mathcal{P}_{\text{squeeze}}| \quad (\text{IV.41})$$

où

$$\mathcal{P}_{\text{Couette \& Hagen-Poiseuille}} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{\theta_1^*}^{\theta_2^*} \int_0^h \Phi_1 dy R d\theta dz + \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{\theta_1^*}^{\theta_2^*} \int_0^h \Phi_2 dy R d\theta dz \quad (\text{IV.42})$$

Dans l'équation (IV.42),  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  sont les fonctions de dissipation dues respectivement à la contrainte de cisaillement et aux effets de couple de contraintes. Ces deux fonctions qui apparaissent dans le second membre de l'équation d'énergie modifiée (IV.3) peuvent être définies dans la théorie de la lubrification hydrodynamique comme suit :

$$\Phi_1 = 2\mu D_{ij} D_{ij} = \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \approx \mu \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (\text{IV.43})$$

$$\Phi_2 = 16\eta K_i K_i = \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_k} \approx \eta \left[ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] \quad (\text{IV.44})$$

Après intégration par rapport à y, nous obtenons

$$\mathcal{P}_{\text{Couette \& Hagen-Poiseuille}} = \underbrace{\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{\theta_1^*}^{\theta_2^*} \frac{\mu_0 e^{\alpha p} (U_j - U_b)^2}{h} R d\theta dz}_{\text{Shear induced power}} + \underbrace{\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{\theta_1^*}^{\theta_2^*} \frac{G(h, l, \alpha, p)}{12\mu_0} \left[ \left( \frac{\partial p}{R \partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right)^2 \right] R d\theta dz}_{\text{Pressure induced power}} \quad (\text{IV.45})$$

Pour un fluide iso-visqueux à couple de contrainte, les équations (IV.43) se réduisent à :

$$\mathcal{P}_{\text{Couette \& Hagen-Poiseuille}} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{\theta_1^*}^{\theta_2^*} \frac{\mu(U_j - U_b)^2}{h} R d\theta dz + \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{\theta_1^*}^{\theta_2^*} \frac{G(h,l)}{12\mu} \left[ \left( \frac{\partial p}{R \partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right)^2 \right] R d\theta dz \quad (\text{IV.46})$$

et

$$\mathcal{P}_{\text{squeeze}} = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{e}} = F_X \cdot \dot{e}_X + F_Y \cdot \dot{e}_Y \quad (\text{IV.47})$$

qui est la puissance dissipée dans le contact.

Dans l'équation (IV.47),  $\dot{e}_X = \frac{de_X}{dt}$  et  $\dot{e}_Y = \frac{de_Y}{dt}$  sont les composantes cartésiennes de la vitesse du centre du palier (maneton) dans les directions X et Y, respectivement.

### IV. 3. Analyse Thermique : Approche Thermique Globale

Depuis les premiers travaux d'Osborne Reynolds en 1886 [40], la théorie isotherme basée sur l'hypothèse d'une viscosité constante à tous les points du film lubrifiant a été largement utilisée dans le calcul des paliers du système bielle-manivelle et en résolvant uniquement l'équation de Reynolds.

Les paliers doivent répondre à des exigences technologiques de plus en plus sévères, dues à l'augmentation des charges et des vitesses de rotation.

L'énergie dissipée dans le contact est importante et les températures dans le fluide et dans les matériaux contigus au film sont élevées. Il en résulte une chute de la viscosité et une diminution de la portance du palier, et parfois des caractéristiques mécaniques des matériaux. Dans ces conditions, la théorie isotherme n'est plus valable.

Puisqu'il est couramment connu que la viscosité d'un fluide varie sensiblement avec la température, en particulier lorsqu'il s'agit de fluides incompressibles tels que les huiles lubrifiantes. La viscosité des lubrifiants utilisés aujourd'hui dans les paliers de moteurs montre une forte dépendance avec la température. De même, les différents matériaux utilisés dans la fabrication des paliers de moteurs conduisent à des déformations thermiques différentielles, il convient donc de prendre en compte les phénomènes thermiques et de prévoir leur influence sur le comportement des paliers.

Historiquement, plusieurs analyses thermo-hydrodynamiques des paliers lisses ont été présentées. La première analyse connue sur les effets thermiques dans la

lubrification hydrodynamique a été réalisée par Kingsbury [41] en 1933 sur un viscosimètre absolu de Couette. Dans cette étude théorique et expérimentale, Kingsbury prend en compte les variations de température et de viscosité à travers l'épaisseur du film. Il montre que la charge calculée en régime isotherme est largement surestimée.

En 1962, Dowson [42] modifie l'équation classique de Reynolds pour tenir compte des variations de la viscosité et de la densité du fluide dans l'épaisseur du film. Il dérive l'équation dite de Reynolds généralisée qui, avec l'équation d'énergie fournie par le premier principe de la thermodynamique et l'équation de continuité, permet l'étude des phénomènes thermiques se produisant dans la lubrification hydrodynamique et élasto-hydrodynamique.

En général, il existe deux approches théoriques pour le problème de lubrification THD ou TEHD:

- approche THD ou TEHD globale basée sur le bilan thermique global et le «concept de température effective» ou «concept de viscosité effective»,
- analyse THD ou TEHD rigoureuse avec une viscosité localement variable dans le film lubrifiant.

La première approche est relativement rapide au détriment de la précision, alors que la seconde est relativement plus précise que la première, mais compliquée à appliquer en raison de sa nature multi-physique et de son caractère transitoire et non linéaire. En fait, l'analyse avec une viscosité localement variable n'est disponible que récemment, tandis que la "viscosité effective" est appliquée depuis les années trente [43].

La plupart des études de lubrification effectuées sur le comportement dynamique des paliers de moteur sont basées sur l'hypothèse isotherme, c'est-à-dire la viscosité du lubrifiant est uniforme pour tout point du film fluide. Cependant, les effets thermiques jouent un rôle important sur le comportement des paliers soumis à des charges dynamiques et plus précisément sur le comportement des paliers de bielle, car les performances des paliers dépendent fortement de la viscosité du lubrifiant qui est une fonction décroissante de la température. En effet, dans les paliers soumis à des conditions sévères de fonctionnement, l'élévation de température due au cisaillement du lubrifiant peut atteindre plusieurs dizaines de degrés Celsius, conduisant par l'effet combiné de la réduction de la viscosité et de déformation des solides à des changements significatifs de la géométrie du film. A l'équation de Reynolds généralisée, il est alors

nécessaire d'associer l'équation d'énergie dans le film et l'équation de conduction de chaleur dans les solides. Ces équations forment la base de la théorie complexe de la lubrification THD.

Le modèle THD dans le contexte de la lubrification cherche à trouver les solutions simultanées en termes de champs de pression et de température pour les fluides et les milieux solides en utilisant des conditions aux limites appropriées. Lorsque les déformations élastiques et thermo-élastiques des solides sont prises en compte en plus des phénomènes purement thermiques, le modèle est alors dit TEHD.

Comme mentionné précédemment, l'algorithme de calcul THD ou TEHD local est très complexe à mettre en œuvre et nécessite des efforts et des temps de calcul élevés. Pour cela, une approche thermique simplifiée ou globale basée sur le concept de «température effective» qui suppose que le régime de lubrification est isotherme et la température est égale à la température effective  $T_{eff}$  [44] telle que :

$$T_{eff} = \frac{T_{inlet} + T_{outlet}}{2} = T_{inlet} + \frac{\Delta T}{2} \quad (IV.48)$$

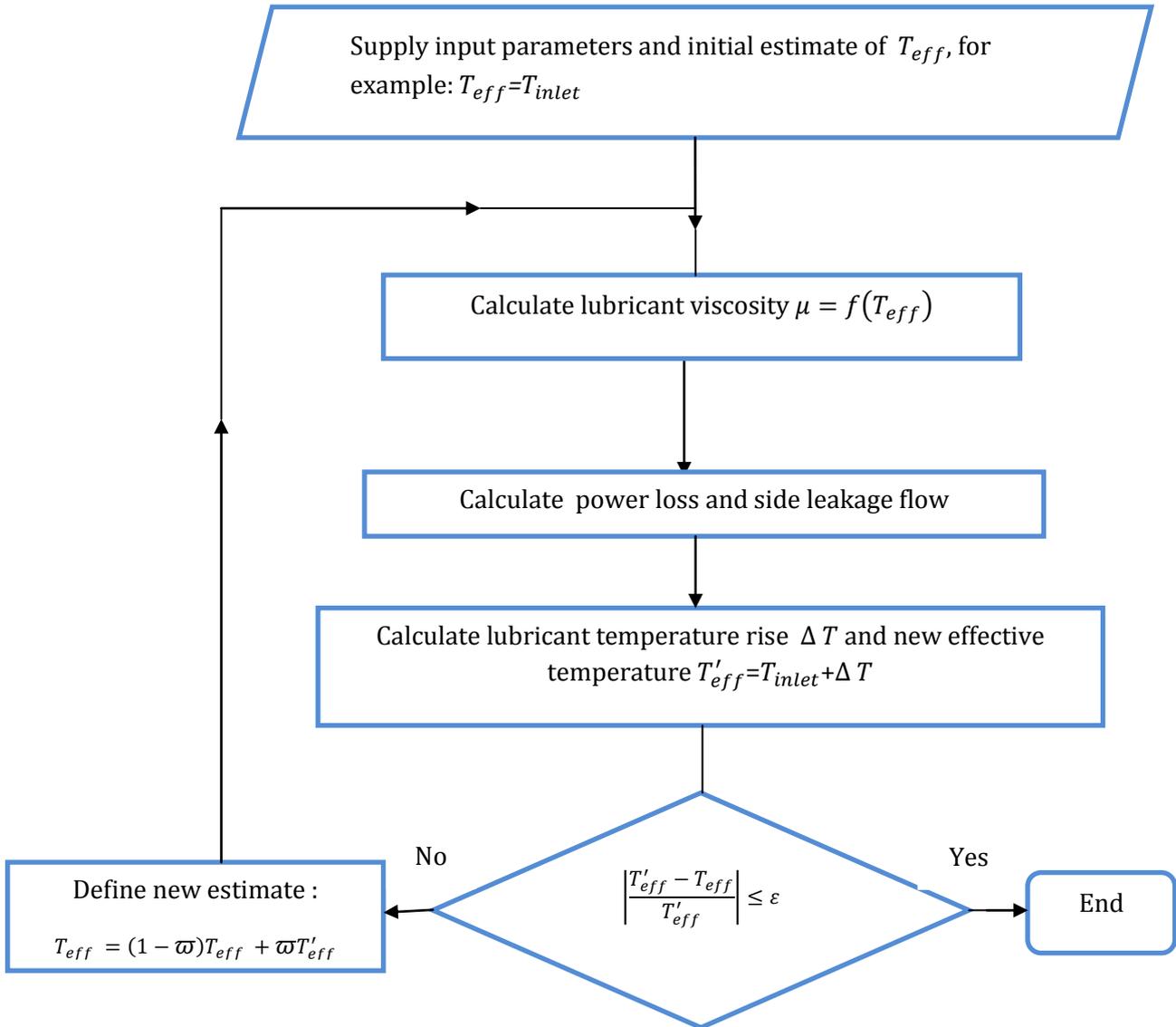
Lorsque  $T_{inlet}$  est la température d'entrée du lubrifiant, et  $\Delta T = T_{outlet} - T_{inlet}$  est la variation de température qui serait obtenue en égalant un pourcentage de l'énergie totale générée par les effets de contrainte de cisaillement et de couple de contrainte dans le palier à la quantité de chaleur évacuée par le flux de lubrifiant du palier:

$$\lambda \mathcal{P} = \rho C_p Q_z \Delta T \quad (IV.49)$$

où  $\rho$  est la masse volumique du lubrifiant,  $C_p$  est la chaleur spécifique du lubrifiant, et  $\lambda$  est un paramètre fixe allant de 0,5 à 1 qui reflète le pourcentage de chaleur générée qui est évacuée par le lubrifiant. Si  $\lambda = 1$ , l'élévation de la température  $\Delta T$  sera calculée en supposant des conditions aux limites adiabatiques pour le palier, c'est-à-dire que la puissance dissipée  $\mathcal{P}$  est drainée par l'écoulement de fluide  $Q_z$  à travers le palier.

Les concepteurs de moteurs préconisent que la valeur  $\lambda$  est d'environ 0,85 ce qui signifie que **85%** de la chaleur produite est éliminée par le lubrifiant et seulement **15%** de la chaleur est évacuée par conduction dans tout l'arbre et le palier.

Notons que pour les moteurs à combustion interne,  $\mathcal{P}$  et  $Q_z$  représentent les valeurs moyennes de puissance dissipée et de débit de fuite calculées sur un cycle complet du moteur. Comme pour une charge donnée, la puissance dissipée et le débit de fuite sont des fonctions non linéaires de viscosité du lubrifiant, l'équation (IV.49) doit être résolue itérativement. Le processus de calcul est représenté par le schéma suivant.



**Figure IV.6:** Schéma de calcul de la température effective

La convergence de ce processus itératif dépend de la valeur de  $T_{inlet}$  ainsi que de la forme de la relation  $\mu(T)$ . Lorsque le processus diverge ou converge vers la solution avec difficulté, on peut utiliser l'algorithme suivant avec un facteur de sous-relaxation:

$$T'_{eff} = (1 - \varpi)T_{eff} + \varpi T_{eff} \quad (IV.50)$$

Où  $\varpi$  est le facteur de sous-relaxation dont les valeurs sont comprises entre 0 et 1 et  $k$  est le nombre d'itérations. En pratique, une valeur  $\varpi$  égale à 0,5 et une valeur initiale nulle pour  $\Delta T$ , c'est-à-dire  $T_{eff}=T_{inlet}$ , assurent une convergence rapide du processus, à savoir. Dans les quatre cycles de charge indiqués à la figure (IV. 7).

Dans l'analyse thermique, on utilise la loi normalisée de Walther et Mac Coull [45], qui constitue la base du tableau de viscosité-température ASTM (ASTM D341) afin de tenir compte de la dépendance viscosité-température:

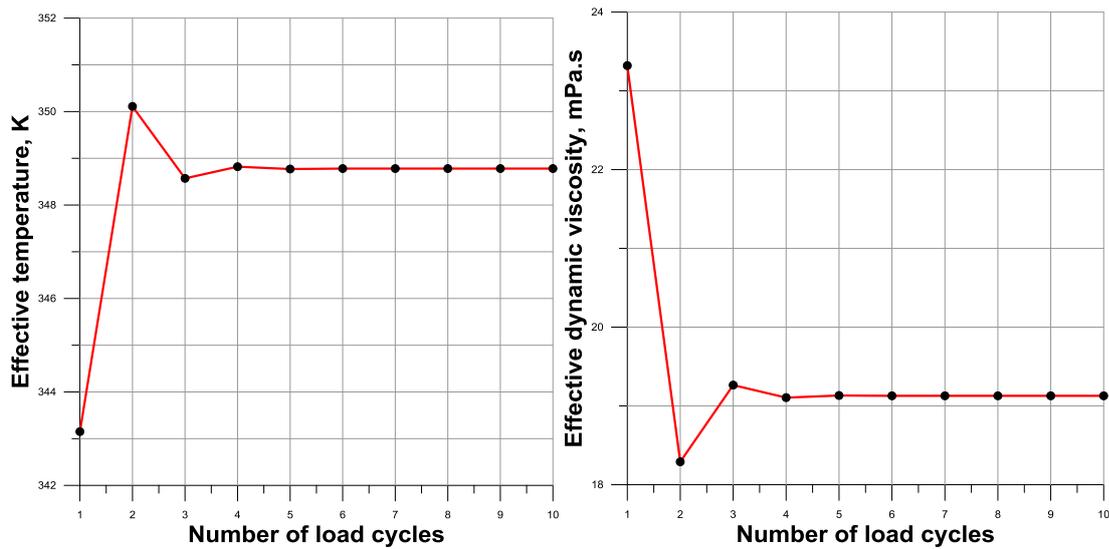
$$\log_{10} \left( \log_{10}(\nu + C) \right) = A - B \log_{10}(T) \quad (IV.51a)$$

où

$$\nu = 10^{10^{A-B\log_{10}(T)} - C} \quad (IV.51b)$$

où:

$\nu = \frac{\mu}{\rho}$  est la viscosité cinématique du lubrifiant en centistokes (cS) ou ( $mm^2/s$ ),  $T$  est la température absolue en (K),  $\rho$  est la masse volumique du lubrifiant, et  $A$  et  $B$  sont les paramètres dépendant du lubrifiant ( $B > 0$ ). La valeur de la constante  $C$  est prise égale à 0,6 ou 0,7. Connaissant la valeur de la constante  $C$ , on peut calculer les constantes  $A$  et  $B$ . Il faut noter que dans l'équation (IV.51a) ou (IV.51b), les valeurs de viscosité du lubrifiant à deux valeurs de température (*par exemple 40 °C et 100 °C*) doivent être connues pour déterminer les constantes  $A$  et  $B$ . Traditionnellement, l'équation de Walther a une valeur constante  $C = 0,7$  pour tous les lubrifiants. Cependant, on adopte une valeur de  $C$  différente pour chaque lubrifiant qui offre une meilleure corrélation viscosité-température [46].



*Figure IV. 7 : Variations de la température effective et de la viscosité dynamique effective correspondantes en fonction du nombre de cycles de charge.*

#### IV. 4. Procédure de calcul

Sur la base de l'analyse décrite dans le présent chapitre, un code de calcul en langage MS-Fortran 90 a été développé pour étudier le comportement thermo-élasto-hydrodynamique global (GTEHD) des paliers de bielle revêtus lubrifiés avec des fluides piézo-visqueux à couple de contraintes. La procédure numérique est détaillée sous forme de pseudo-code en **Annexe B** pour une meilleure compréhension de la stratégie de solution numérique adoptée dans cette étude.

La détermination de la position instantanée de l'arbre (maneton) à l'intérieur du coussinet (palier de tête de bielle) nécessite la résolution d'un problème inverse pendant tout le cycle thermodynamique d'une machine alternative (moteur thermique, compresseur). En résumé, la procédure de calcul nécessite les cinq étapes suivantes :

- **Etape 1:** A partir d'une position du centre de l'arbre  $\vec{e} = (e_x, e_y)$  on calcule l'épaisseur du film  $h$  et la pression correspondante  $p$ ,
- **Etape 2:** La charge hydrodynamique  $\vec{W}$  est calculée en intégrant la pression sur la surface du palier,
- **Etape 3:** La charge calculée est alors comparée à la charge appliquée  $\vec{F}$ : si la charge calculée est différente de la charge appliquée, on corrige la position de l'arbre, par la méthode itérative de Newton-Raphson, et nous relançons le calcul.

- **Etape 4:** Le processus itératif est poursuivi jusqu'à la convergence: la position centrale de l'arbre à l'intérieur du palier ainsi que les caractéristiques hydrodynamiques du palier sont ainsi déterminées à chaque instant  $t$ .

- **Etape 5:** Le cycle de charge est répété plusieurs fois jusqu'à ce que deux cycles de charge successifs donnent des centres d'arbre identiques.

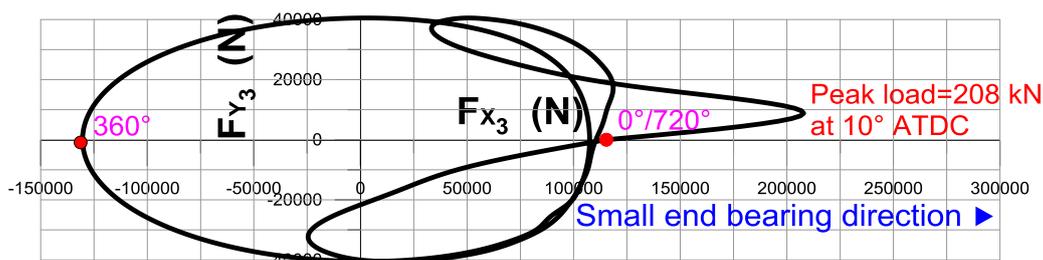
## V.5. Résultats

L'analyse thermique globale des paliers chargés dynamiquement de moteurs à combustion interne a été incorporée dans un programme informatique. Les résultats, calculés comprennent les orbites du centre de coussinet, les variations de l'épaisseur minimale du film, la pression maximale, la puissance dissipée et le débit de fuite latéral en fonction de l'angle de rotation du vilebrequin  $\theta_2$ .

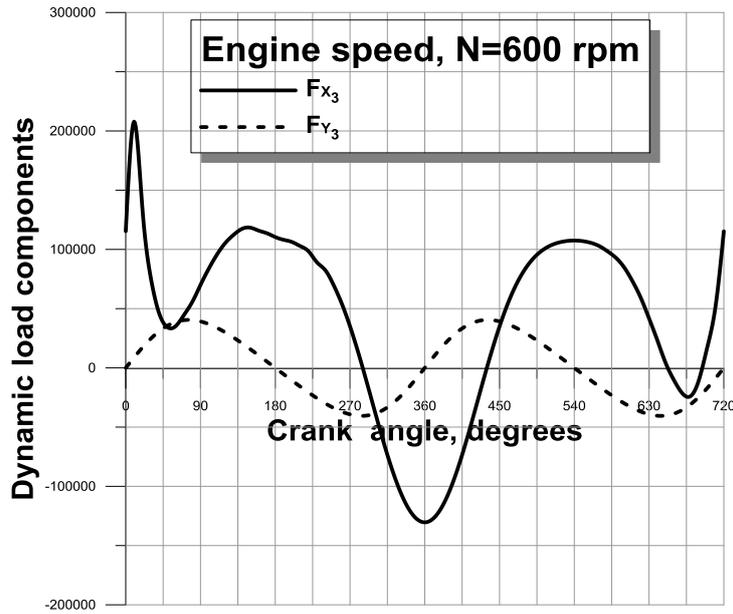
Dans cette section, les effets de couple de contraintes dans les paliers de tête de bielle avec un revêtement élastique mince du moteur Diesel marin 4 temps Ruston & Hornsby 6 VEB-X MK III sont étudiés à l'aide de l'approche thermique, les effets de piézo-viscosité et d'élasticité du revêtement de surface sont uniquement analysés par l'approche isotherme. Notons que le palier de bielle de ce type de moteur est le plus étudié dans la littérature technique [47].

Les diagrammes de charge, représentés sous formes polaire et cartésienne dans le repère mobile  $\mathbf{R}_3$  lié à la bielle, est donné par la figure (IV-8). Pour des raisons de convergence et pour une représentation fidèle du pic de charge, nous avons interpolé ces diagrammes en utilisant la méthode des splines cubiques pour chaque degré d'angle de rotation de vilebrequin ( $\Delta\theta_2 = 1^\circ$ ). Le tracé du diagramme indique un pic de charge de **208 kN** à  $\theta_2 = 10^\circ$ .

(a) Représentation polaire



(b) Représentation cartésienne



**Figure IV.8** : Chargement dynamique du palier de tête de la bielle du moteur Ruston et Hornsby 6 VEB-X (prise en considération les forces de gaz et d'inertie).

**Tableau IV.1** : Charges appliquées par le maneton sur le palier de tête de bielle pour  $N = 600$  tr/min adaptées à partir des références [27, 47]

$\theta_2(deg.)$	$F_{X_3}, (N)$	$F_{Y_3}, (N)$	$\psi(deg.)$ $= atan\left(\frac{F_{Y_3}}{F_{X_3}}\right)$	$\theta_2(deg)$	$F_{X_3}, (N)$	$F_{Y_3}, (N)$	$\psi(deg.)$
0	115336.60	0.000000	0.	370	-127301.80	8784.80	176.05
10	207899.50	8784.80	2.42	380	-118183.40	17107.01	171.76
20	134996.80	17107.01	7.22	390	-103593.90	24539.62	166.67
30	76594.56	24539.62	17.76	400	-84378.56	30744.58	159.98
40	46481.60	30744.58	33.48	410	-61738.24	35495.04	150.10
50	34343.01	35495.04	45.95	420	-37020.70	38670.91	133.75
60	35148.09	38670.91	47.73	430	-11720.48	40276.64	106.22
70	44524.48	40276.64	42.13	440	12699.04	40401.18	72.55
80	55511.04	40401.18	36.04	450	35014.66	39222.46	48.24
90	69967.04	39222.46	29.27	460	54354.56	36936.19	34.20
100	83755.84	36936.19	23.80	470	70233.92	33755.87	25.67
110	95809.92	33755.87	19.41	480	82643.84	29890.56	19.88
120	105506.60	29890.56	15.82	490	91895.68	25509.28	15.51
130	112401.00	25509.28	12.78	500	98434.24	20763.26	11.91
140	117382.70	20763.26	10.03	510	102837.80	15759.26	8.71

150	118361.30	15759.26	7.58	520	105551.00	10586.24	5.73
160	115870.40	10586.24	5.22	530	107018.90	5315.36	2.84
170	113646.40	5315.36	2.67	540	107508.20	0.000000	0.
180	110443.80	0.000000	0.	550	107018.90	-5315.36	357.16
190	108130.90	-5315.36	357.2	560	105551.00	-10586.24	354.27
200	106307.20	-10586.24	354.3	570	102837.80	-15759.26	351.29
210	102837.80	-15759.26	351.3	580	98434.24	-20763.26	348.09
220	98434.24	-20763.26	348.1	590	93007.68	-25509.28	344.66
230	89253.57	-25509.28	344.05	600	84912.32	-29890.56	340.61
240	82643.84	-29890.56	340.12	610	73258.56	-33755.87	335.26
250	70233.92	-33755.87	334.33	620	59247.36	-36936.19	328.06
260	54354.56	-36936.19	325.80	630	41811.20	-39222.46	316.83
270	35014.66	-39222.46	311.76	640	23267.49	-40401.18	299.94
280	12699.04	-40401.18	287.44	650	4087.712	-40276.64	275.79
290	-11720.48	-40276.64	253.78	660	-10399.42	-38670.91	254.95
300	-37020.70	-38670.91	226.25	670	-21443.81	-35495.04	238.87
310	-61738.24	-35495.04	209.89	680	-23872.42	-30744.58	232.18
320	-84378.56	-30744.58	200.02	690	-10270.43	-24539.62	247.29
330	-103593.90	-24539.62	193.32	700	17142.59	-17107.01	315.06
340	-118183.40	-17107.01	188.24	710	51774.72	-8784.80	350.37
350	-127301.80	-8784.80	183.94	720	115336.60	0.000000	0.
360	-130370.90	0.000000	189.				

Ce pic de charge se produisant à  $\theta_2=10^\circ$  degrés après le point mort haut (ATDC). Pour un moteur à quatre temps, l'angle de rotation  $\theta_2$  de la manivelle varie de **0** à **720** degrés dans un cycle de moteur correspondant à deux rotations complètes du vilebrequin et quatre courses du piston. L'intervalle de temps utilisé dans l'analyse est un angle de vilebrequin d'un degré. Donc, il y a **720** pas de temps ou d'intervalles dans un cycle de moteur, à savoir **nsteps=720**.

Les paramètres d'entrée du moteur, des paliers revêtus et des propriétés de l'huile moteur ISO VG 100 utilisée dans cette étude sont mentionnés dans les tableaux IV.2, IV.3 et IV. 4. Les détails relatifs aux calculs sont présentés dans le tableau IV.5.

Pour l'analyse du palier (Le coussinet de tête de bielle de ce moteur est muni d'une rainure circonférentielle totale ( $360^\circ$ ) de largeur égale à  $12,7\text{ mm}$  en vue d'alimenter le palier en lubrifiant.) usiné dans sa section médiane, nous le modélisons en

traitant chaque moitié du palier comme un seul palier et en supposant que la pression d'alimentation  $p_{supply}=0$ . En exploitant la symétrie, il suffit d'analyser une moitié de la surface de palier de 0,057 m de largeur soumise à la moitié du chargement. Ainsi, les données de charge indiquées dans le tableau IV. 1 doivent être divisées par deux.

**Tableau IV. 2** : Données des paramètres du moteur Diesel Ruston & Hornsby 6

Paramètre, Symbole	Unité	Valeur
Vitesse du moteur, $N$	<i>rpm</i>	600
Longueur du bras de vilebrequin (crank throw), $\ell_2$	<i>m</i>	0.184
Longueur de la bielle, $\ell_3$	<i>m</i>	0.782
Cycle moteur (angle de vilebrequin)	<i>degrés</i>	720

**Tableau IV.3** : Paramètres d'entrée (caractéristiques géométriques et conditions de fonctionnement) utilisés pour étudier les caractéristiques du palier de bielle

Paramètre, Symbole	Unité	Valeur
Diamètre du palier, $D$	<i>m</i>	0.2032
Longueur du palier, $L$	<i>m</i>	0.127
Jeu radial, $C$	<i>m</i>	$82.55 \times 10^{-6}$
Largeur de la gorge circonférentielle	<i>m</i>	0.0127
Amplitude angulaire de la gorge circonférentielle	<i>degrés</i>	360
Température d'entrée du lubrifiant, $T_{inlet}$	$^{\circ}K$	343.15
Pressions ambiante et de cavitation, $p_{atm}$ , $p_{cav}$	<i>Pa</i>	0.0
Pression d'alimentation, $p_s$	<i>Pa</i>	0.0
Modules de Young du revêtement, $E$ à $T=20^{\circ}C$ (68 °F) [53] -Babbitt, métal blanc à base de plomb -Polyéthylène à haute densité	<i>GPa</i>	29 0,9
Coefficient de Poisson du revêtement, $\sigma$ à $T=20^{\circ}C$ (68 °F) [53] -Babbitt, métal blanc à base de plomb -Polyéthylène à haute densité (PEHD)	-	0.33 0.35
Epaisseur du revêtement, $t_l$	<i>m</i>	$2 \times 10^{-3}$

**Tableau IV.4** : Propriétés rhéologiques et physiques de l'huile moteur ISO VG 100

Paramètre, Symbole	Unité	Valeur
Viscosité cinématique de l'huile de base à 313.15 °K, $\nu_{40}$	cS (mm <sup>2</sup> /s)	100
Viscosité cinématique de l'huile de base (ISO VG 100) 339.15 °K, $\nu_{66}$	cS (mm <sup>2</sup> /s)	30
Capacité thermique spécifique de l'huile à température constante, $Cp_0$	J/kg.K	2055
Masse volumique de l'huile à température constante, $\rho_0$	kg/m <sup>3</sup>	900
Les paramètres de la loi de Walther $A, B$ et $C$	- - -	$A=9.62028,$ $B=3.73378,$ $C=0.6$
Paramètre du couple de contraintes à température constante, $\eta$	N.s	0.0, $10^{-11}$
Coefficient de viscosité-pression à température constante, $\alpha$ (premier paramètre de Barus)	Pa <sup>-1</sup>	0.0, $2 \times 10^{-8}$
Viscosité dynamique à $p = 0$ et à température constante, $\mu_0$ (second paramètre de Barus)	Pa.s	$15 \times 10^{-3}$

**Tableau IV.5** : Caractéristiques des maillages par différences finies et données de calcul.

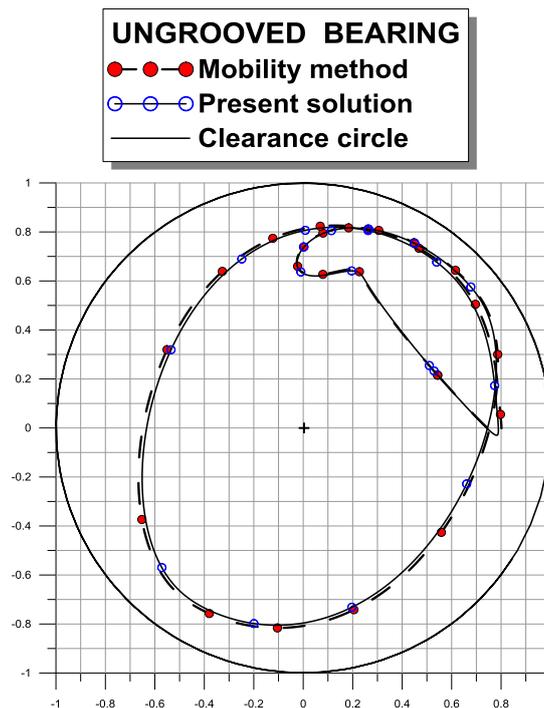
Paramètres	Symbole	Valeur
Nombre de cellules ou de mailles dans la direction circonférentielle du palier,	$N_x$	60
Nombre de cellules dans la direction axiale du demi-palier,	$N_z$	20
Proportion du flux de chaleur évacué par le lubrifiant,	$\lambda$	0.85
Facteur de sur-relaxation pour la méthode de Gauss-Seidel,	$\Omega_{GS}$	1.86
Facteur de sous-relaxation pour la méthode de substitution successive,	$\omega$	$10^{-3} - 10^0$
Critère de convergence de la méthode de substitution successive		$10^{-2}$
Critère de convergence de la méthode itérative de Newton-Raphson		$10^{-2}$
Coefficient d'amortissement pour la méthode de Newton-Raphson	$\omega_{NR}$	$10^{-1} - 10^0$
Critère de convergence pour la procédure de calcul de température efficace		$10^{-4}$
Coefficient de sous-relaxation pour la procédure de calcul de la température effective		0.5

### V.5.1. Validation

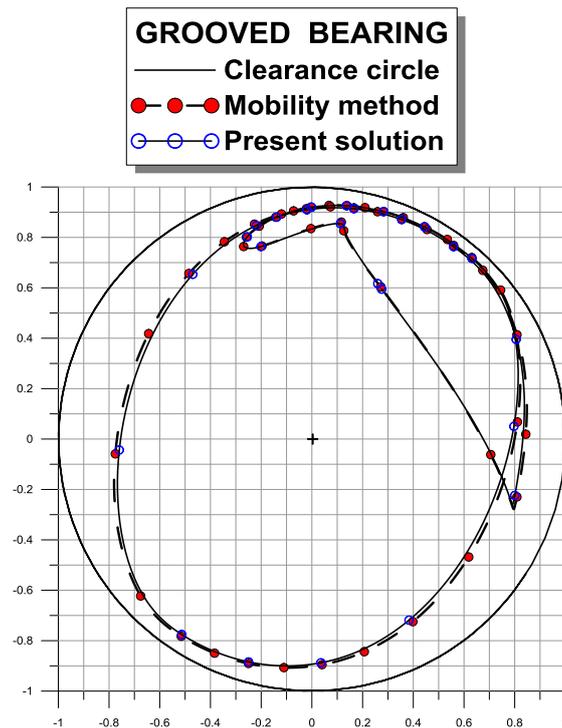
Afin de vérifier la méthode de résolution proposée, le cas spécifique choisi est également le palier de tête de bielle du moteur Ruston et Hornsby avec et sans rainure circonférentielle complète.

Dans la figure (IV.9), nous comparons les résultats obtenus dans le repère relatif à la bielle ( $X_3, Y_3$ ) par la méthode de résolution actuelle basée sur l'emploi de l'algorithme de Newton-Raphson amorti et la méthode de substitution successive sous-relaxée avec celle calculée par un programme informatique séparé utilisant la méthode de mobilité de Booker décrite en détail dans [16]. Les calculs ont été effectués en régime isotherme pour les paliers rainurés et non rainurés avec revêtement rigide pour un fluide newtonien de viscosité dynamique ( $\mu_0 = 15 \times 10^{-3} Pa.s$ ).

a) Orbites pour paliers non rainurés en régime stationnaire



b) Orbites pour paliers rainurés en régime stationnaire



**Figure IV.9 :** Comparaison des trajectoires du centre du maneton prédites pour les paliers de bielle Ruston & Hornsby 6 rainurés et non rainurés obtenues après 2 cycles de charge par les méthodes de mobilité de Booker et de Newton-Raphson.

Le tableau IV.6 donne une autre vérification de l'exactitude de l'algorithme et du programme de calcul développé en comparant les valeurs prédites de l'épaisseur minimale du film d'huile et de la pression maximale du film avec certains résultats issus de la littérature pour les paliers de bielle rainurés et non rainurés [48-52].

**Tableau IV.6:** Comparaison des résultats numériques obtenus dans la présente analyse utilisant la méthode itérative de Newton Raphson avec ceux fournis par la littérature technique.

	Palier sans rainure			Palier rainuré			
	Présente étude	Goenka et Paranjpe [48]	Vincent et Maspeyrot [50]	Présente étude	Goenka [51,52]	Vijayaraghavan [49]	Vincent et Maspeyrot [50]
$h_{min}$ (microns)	9.16 à $\theta_2=280^\circ$	8.78	8.74	3.74 à $\theta_2=272^\circ$	3.47	3.60	4.03
$p_{max}$ (MPa)	21.06 à $\theta_2=11^\circ$	-	-	34.59 à $\theta_2=11^\circ$	34.40	-	-

On observe un bon accord et on peut conclure que la méthode de résolution utilisée dans la présente analyse est validée pour un palier rigide lubrifié avec des fluides newtoniens iso-visqueux en régime isotherme. Notons que les écarts entre les résultats proviennent en partie de l'effet de la pression d'alimentation. En effet, nos calculs ont été effectués pour la configuration de palier rainuré en fixant la pression d'alimentation dans la rainure à zéro au lieu de  $p_s=0.294 \text{ MPa}$  comme indiqué dans la référence [52].

#### V.5.1.1 Analyse isotherme

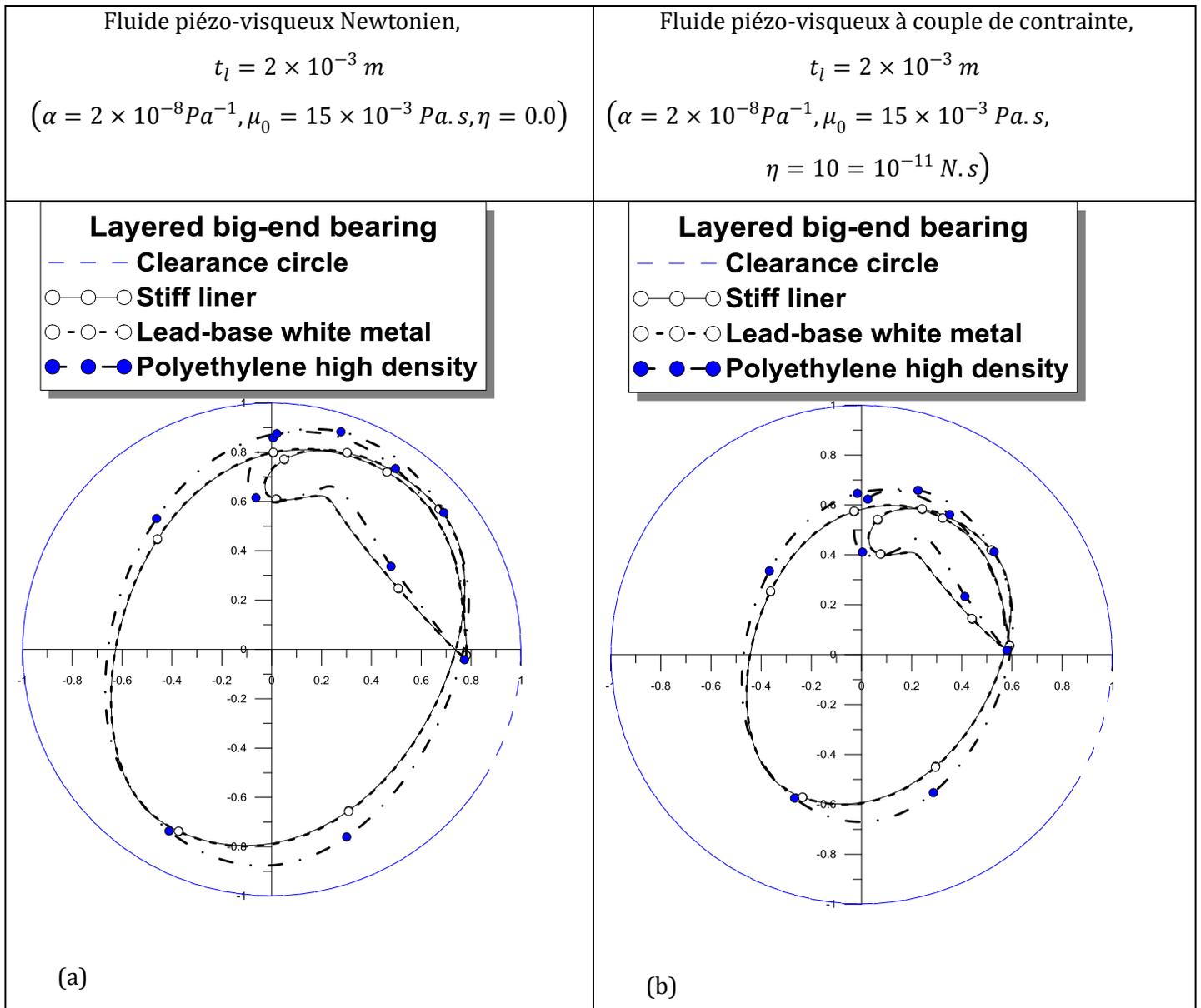
Pour l'analyse isotherme, on a utilisé trois configurations différentes du palier de tête de bielle revêtu du moteur Hornsby & Ruston non rainuré afin de mettre en évidence les effets de piézo-viscosité et la présence de couple de contraintes dans l'huile lubrifiante sur le comportement dynamique fortement non linéaire de ces paliers. Dans cette analyse, on calcule les réponses dynamiques d'un palier conventionnel avec une couche rigide de  $2 \text{ mm}$  d'épaisseur et on la compare à celles obtenues pour les paliers avec une couche en métal blanc à base de plomb (White metal ou Babbitt) et en polymères (PEHD). Les propriétés du lubrifiant et les caractéristiques élastiques des matériaux de revêtement du palier sont indiquées dans les tableaux (IV.3) et (IV.4).

##### • *Effets des couples de contraintes*

Dans la figure (IV.10), les trois orbites stationnaires sont représentées sous forme de diagrammes polaires correspondant aux trois configurations: un palier rigide en traits pleins et deux paliers avec des matériaux de revêtement différents (métal blanc qui est un matériau compressible et un polymère (PEHD) qui est un matériau quasi-incompressible respectivement en tirets et en traits mixtes, ainsi que le cercle de jeu  $e/C=1$  est également tracé en tirets.

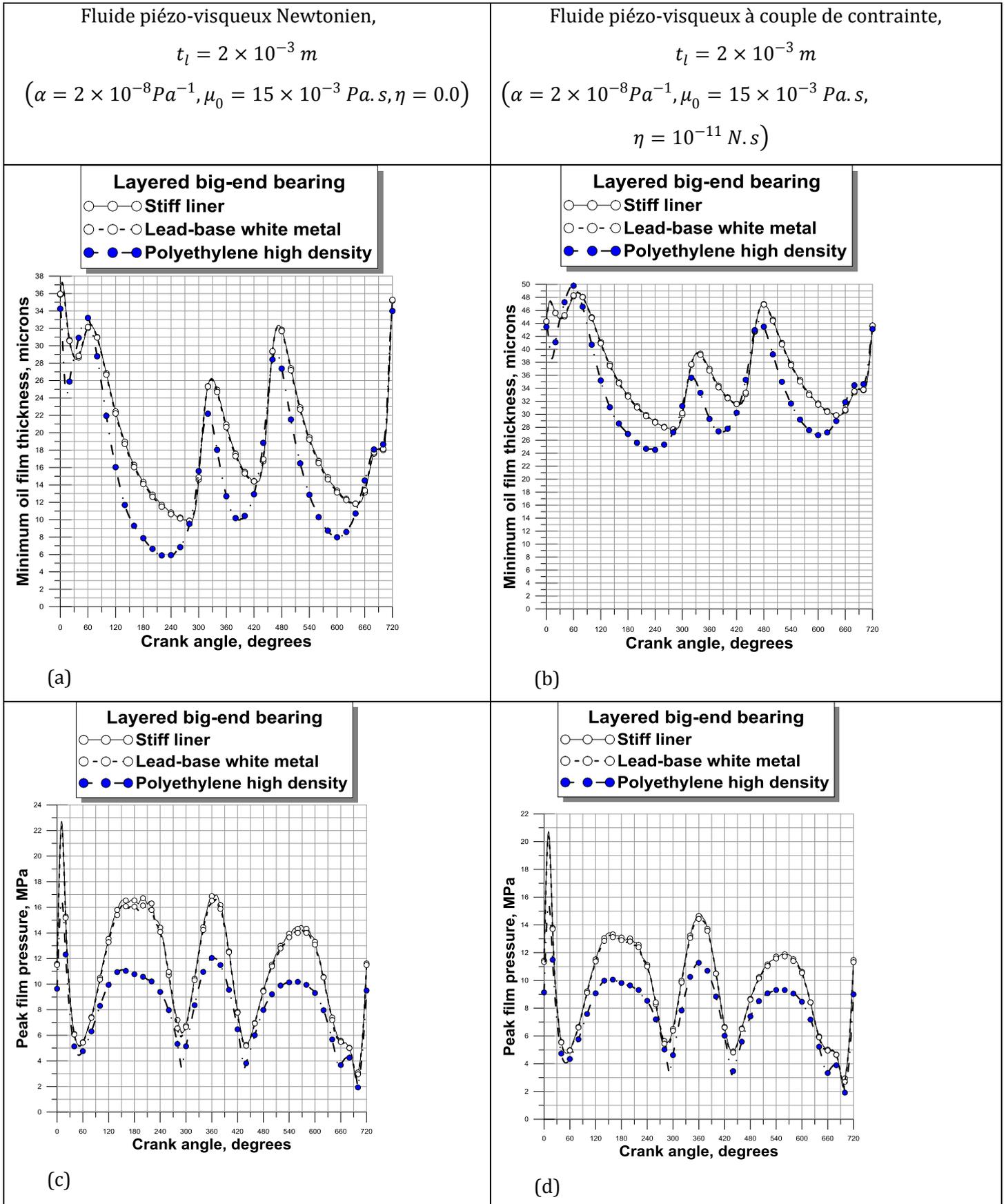
Pour chaque palier, le lubrifiant est considéré comme un fluide piézo-visqueux ( $\alpha = 20 \text{ GPa}^{-1}$ ), et le cycle de charge est répété plusieurs fois jusqu'à ce que deux cycles de charge successifs donnent des orbites identiques. On observe que les orbites du centre du maneton pour les lubrifiants newtoniens et non newtoniens ont des formes similaires, même si le palier est compliant. Mais les couples de contraintes produisent des trajectoires plus contractées du centre de l'arbre, ce qui conduit à des épaisseurs de

film d'huile minimales plus élevées, comme représentés sur les figures (IV.11 a) et (IV.11 b).



**Figure IV.10 :** Orbites stationnaires obtenues en régime établi du centre du maneton pour un cycle complet du moteur (deux tours de vilebrequin).

Bien que l'épaisseur minimale du film soit sensiblement augmentée par la présence des couples de contraintes, la pression maximale du film n'est pas vraiment affectée pour les paliers rigides et compliants, comme illustrés sur les figures(IV.11c) et (IV.11 d). Il est bien connu que la prise en compte des effets de couples de contraintes entraîne une augmentation de la répartition de pression.



*Figure IV.11 : Epaisseur minimale du film d'huile et pression maximale du film pendant le cycle de charge complet*

Les valeurs moyennes des épaisseurs minimales de film et des pressions maximales de film calculées sur le cycle sont respectivement d'environ **9,82** microns et **22,32**MPa pour l'huile newtonienne et de **27,61** microns et **20,39**MPa pour l'huile dopée avec des polymères (modèle de fluide à couple de contraintes). Par conséquent, les couples de contraintes entraînent une augmentation importante de l'épaisseur minimale du film d'environ **180%** et une très légère baisse de la pression maximale de film d'environ **9%**.

De même, pour le palier compliant avec un revêtement en polymère (PEHD) qui est un matériau plus déformable caractérisé par un faible module d'élasticité ( $E = 0,9$  GPa), les couples de contraintes conduisent à une augmentation beaucoup plus importante de l'épaisseur minimale de film d'environ 317% et une chute beaucoup plus faible de la pression maximale de film d'environ 6%, même si l'épaisseur minimale de film et la pression de film sont beaucoup plus faibles que celles obtenues dans le cas de palier précédent muni d'un revêtement en métal blanc (Babbitt).

Le tableau IV.7 résume les résultats obtenus pour les trois différentes configurations de paliers rigide et compliant.

La figure (IV.12) représente la variation du débit de fuite latéral et de la puissance dissipée en fonction de l'angle du vilebrequin pour les huiles **newtoniennes** ( $l = 0$ ) et **non newtoniennes** ( $l/C = 0.3$ ). On peut constater que pour la même charge dynamique appliquée, le fluide newtonien produit un débit de fuite latéral et une puissance dissipée beaucoup plus élevés que le fluide à couple de contraintes. Pour le palier compliant avec un revêtement en Babbitt (tableau IV.7), les valeurs moyennes du débit de fuite latéral et de la puissance dissipée pour le fluide newtonien sont plus élevées que celles du fluide à couple de contraintes d'environ 40% et 36%, respectivement. Notons que les pics du débit de fuite latéral et de la puissance dissipée se produisent à  $\theta_2 = 10^\circ$  ATDC auquel le pic de charge survient.

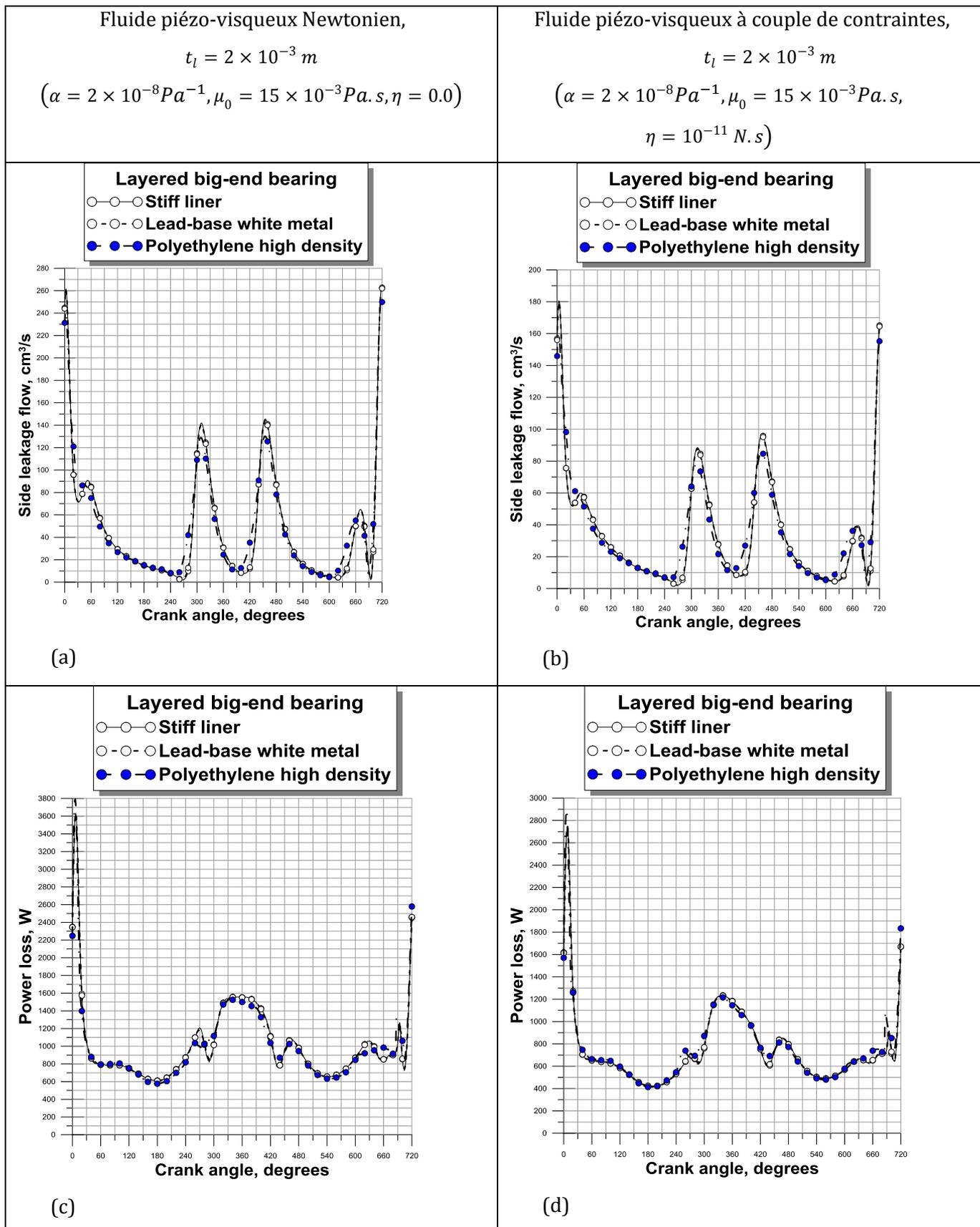


Figure IV. 12 : Débit de fuite latéral et puissance dissipée pendant le cycle complet de charge

- ***Effets de l'élasticité du palier compliant***

Les orbites stationnaires obtenues en régime de lubrification établi du maneton à l'intérieur des coussinets revêtus et non revêtus (rigides) calculés pour les fluides newtoniens et non newtoniens à couple de contraintes sont comparés sur la même figure (IV.10). Comme on peut l'observer, l'orbite calculée dans le cas du coussinet revêtu en PEHD est sensiblement affectée par la déformation locale de la couche élastique par comparaison à l'orbite obtenue pour le palier revêtu d'une couche en métal blanc caractérisée par un module d'élasticité naturellement supérieur à celui du PEHD.

A partir de la figure (IV.11), qui décrit l'historique de l'épaisseur minimale du film d'huile et de la pression hydrodynamique maximale prédites pour les fluides newtoniens et à couple de contraintes, il peut être observé qu'il y a des écarts significatifs à travers le cycle de charge aussi bien dans l'épaisseur minimale du film et que dans la pression maximale entre le palier compliant, à savoir le palier avec un revêtement en PEHD et le palier muni d'un revêtement en métal blanc.

Comme mentionné dans le tableau IV. 7, l'épaisseur minimale du film d'huile dans un cycle de moteur obtenue pour le cas du fluide newtonien piézo-visqueux est de **9,825** microns pour le palier compliant avec un revêtement en métal blanc et de **5,88** microns pour le palier compliant avec un revêtement en PEHD (variation d'environ 40%), et le pic de pression hydrodynamique est d'environ **22** MPa pour le palier compliant avec un revêtement en métal blanc (Babbitt) et **16**MPa pour le palier compliant avec un revêtement en PEHD (variation d'environ 27%). Cependant, l'épaisseur minimale du film d'huile dans un cycle de moteur calculée pour le fluide piézo-visqueux à couple de contraintes est de **27,61** microns pour le palier revêtu en métal blanc et **24,52** microns pour le palier muni d'une couche en PEHD (soit une variation d'environ 11% qui est beaucoup plus faible que celle du cas newtonien), et d'autre part le pic de pression hydrodynamique est d'environ **20** MPa pour le palier revêtu en métal blanc et **15** MPa pour le palier en PEHD (soit environ 25% de variation) qui est presque identique à celui du cas newtonien.

Sur la même figure, on peut également observer que les épaisseurs minimales du film calculées pour le palier avec un revêtement en métal blanc (la deuxième configuration de palier) et le palier avec un revêtement en PEHD (troisième configuration de palier) se surviennent à différentes valeurs de l'angle de rotation du vilebrequin dues à l'effet

d'élasticité du palier. En revanche, le pic de pression survient toujours au même angle de vilebrequin, c-à-d. au voisinage de  $\theta_2=10^\circ$  ATDC pour lequel la charge maximale apparaît comme illustré à la figure(IV.8). Notons que l'épaisseur minimale du film se situe au niveau des bords libres du palier et qu'elle est toujours inférieure à celle calculée dans la section médiane du palier compliant ou revêtu.

La Figure (IV. 12) compare également les variations du débit de fuite latéral et celles de la puissance dissipée avec l'angle de vilebrequin pour les trois configurations de paliers (paliers non revêtu et revêtu). Le débit de fuite ainsi que la puissance dissipée montrent peu de différence sur le cycle pour les cas newtoniens et non newtoniens. Notons que la puissance est calculée en considérant uniquement la zone avec un film complet. On peut conclure qu'il n'y a pas d'effet significatif de l'élasticité du revêtement sur le débit de fuite latéral et la puissance dissipée. Ces résultats concordent qualitativement avec ceux obtenus par Mc Ivor et Fenner [54] lorsque les déformations globales de l'ensemble de la structure du palier de tête de bielle du moteur Ruston & Hornsby sont prises en compte dans leur analyse par éléments finis.

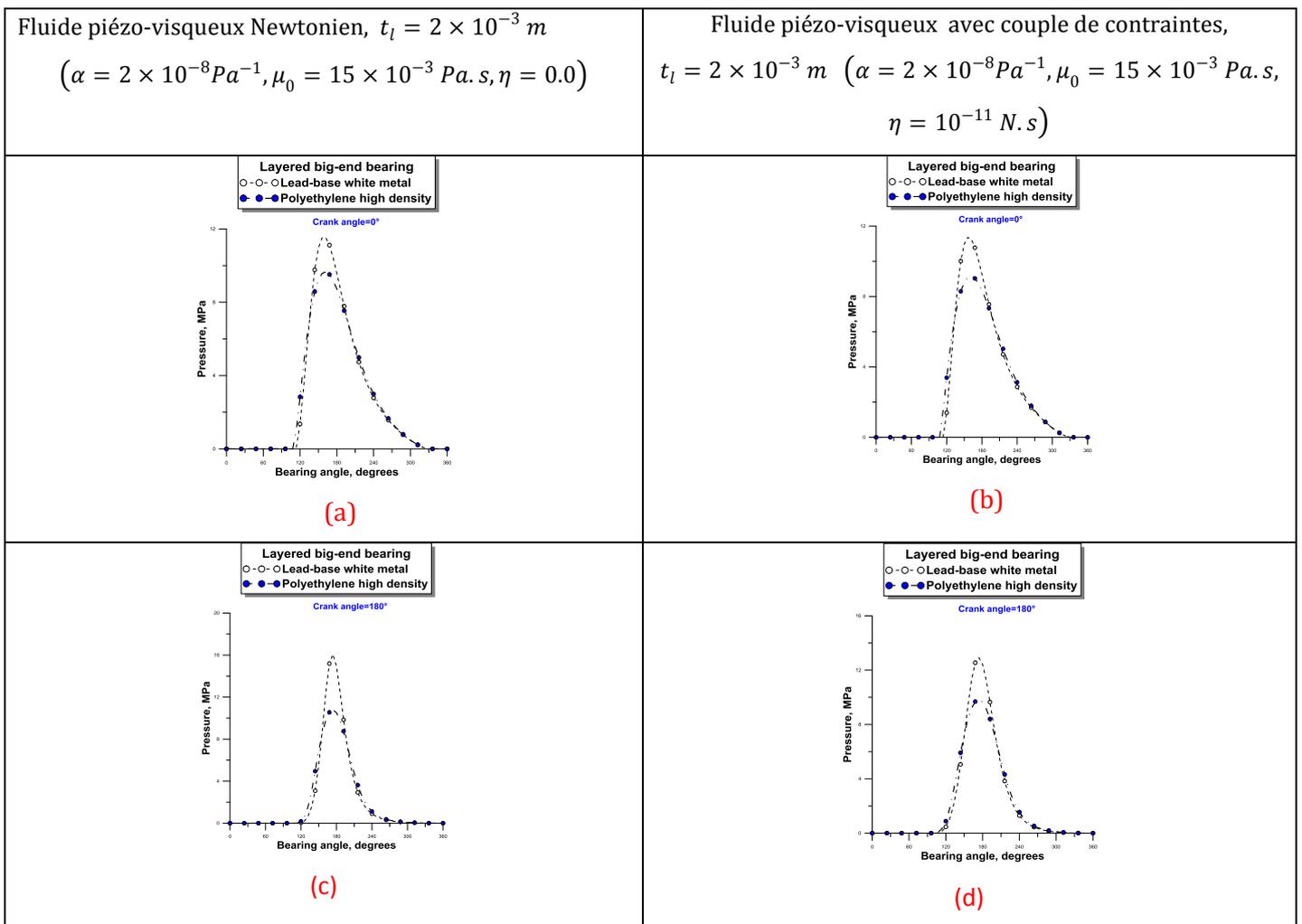
En raison de la déformation du revêtement de palier, l'écart entre la surface du palier déformée et l'arbre est géométriquement différent de celui qui existe entre la surface du palier rigide et l'arbre. En conséquence, le profil de pression hydrodynamique est également différent pour les deux configurations de palier. La figure (IV. 13) montre les profils de pression hydrodynamique dans le plan de la section médiane du palier, calculés pour les paliers revêtus en métal blanc et en PEHD pour certains angles de rotation du vilebrequin. Comme prévu, un seul pic de pression se produit dans la direction circonférentielle des paliers, car seules les déformations locales des revêtements de surface sont prises en compte. En outre, la pression hydrodynamique maximale pour le palier le plus compliant (palier à revêtement en PEHD) est inférieure à celle obtenue dans le cas du palier avec un revêtement en métal blanc présentant une plus grande élasticité.

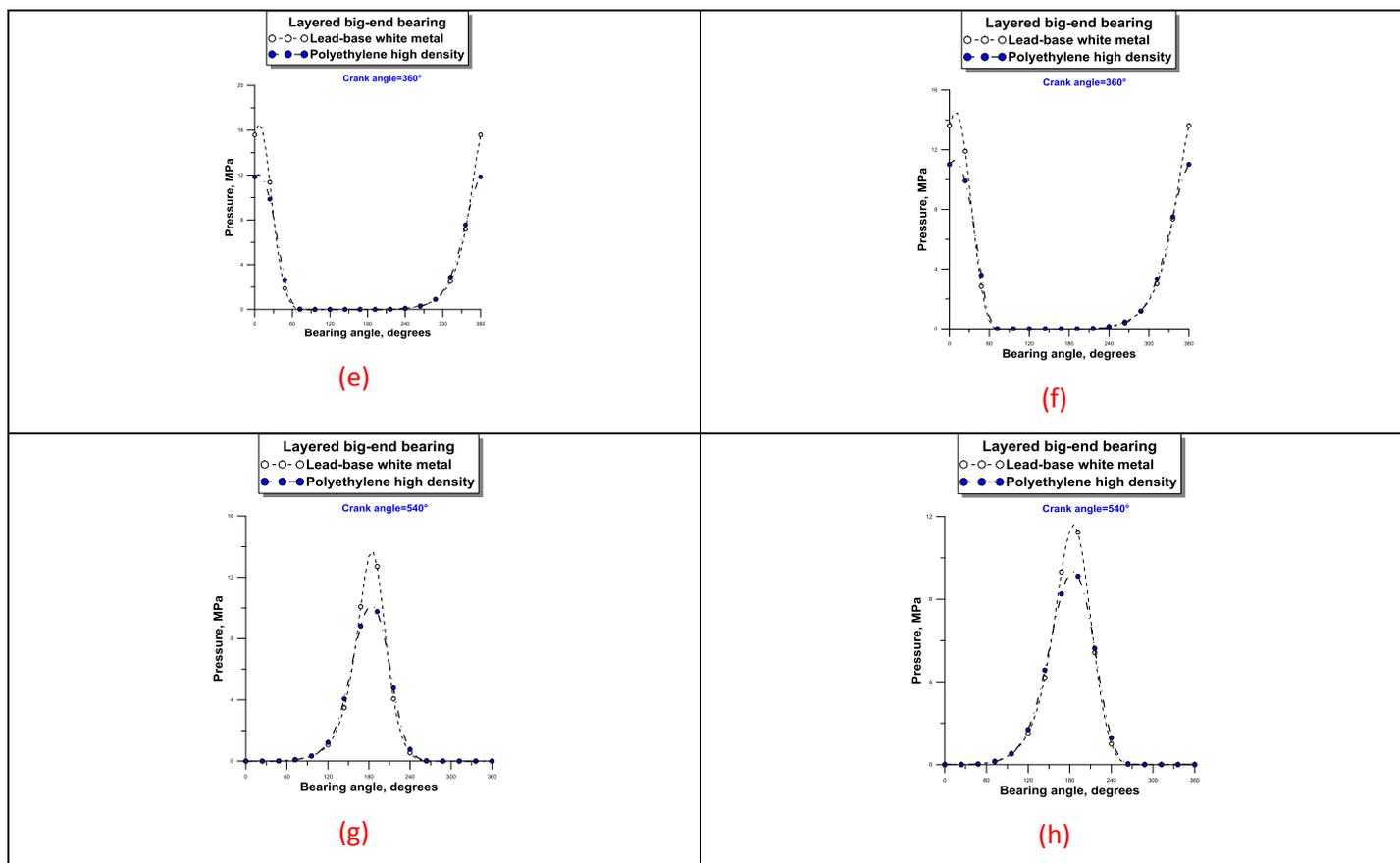
**Tableau IV. 7 : Comparaison des caractéristiques hydrodynamiques pour l'analyse**

Isotherme

		$h_{min}$ , microns	$p_{max}$ , MPa	$\epsilon_{max}$ , -	$\langle Q_2 \rangle$ , $cm^3/s$ or $cc/s$	$\langle \mathcal{P} \rangle$ , $W$
$\alpha = 2 \times 10^{-8} Pa^{-1}$ $\mu_0 = 15 \times 10^{-3} Pa.s$ $\eta = 0$	1 <sup>a</sup>	9.825	22.32	0.881	47.5	1010.
	2 <sup>b</sup>	5.88	16.55	0.93	48.	998.
	3 <sup>c</sup>	9.81	22.72	0.881	47.5	1012.
$\alpha = 2 \times 10^{-8} Pa^{-1}$ $\mu_0 = 15 \times 10^{-3} Pa.s$ $\eta = 10^{-11} N.s$	1 <sup>a</sup>	27.61	20.39	0.666	33.9	743.
	2 <sup>b</sup>	24.52	15.51	0.70	34.	759.
	3 <sup>c</sup>	27.55	20.73	0.67	33.9	743.

(a) Babbitt, lead-base white metal; (b) Polyethylene high density; (c) Stiff liner.





**Figure IV.13 :** Profils de pression hydrodynamique dans la partie médiane du palier pour certains angles de vilebrequin  $\theta_2$ .

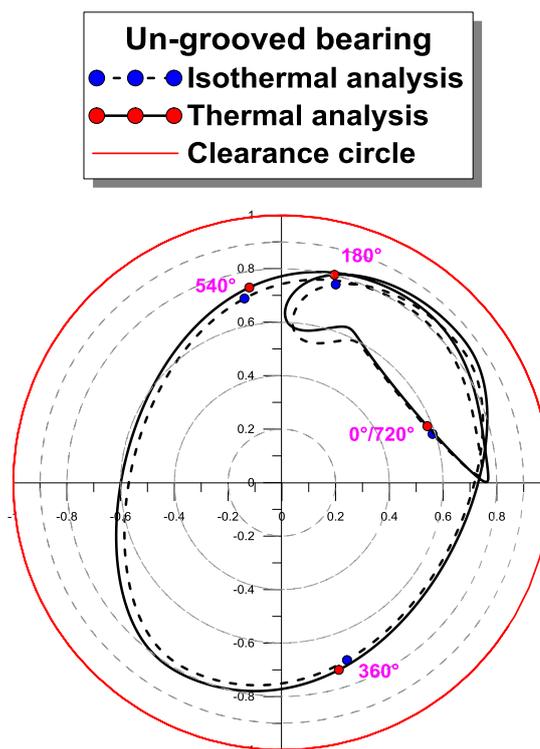
#### IV.5.1.2. Comparaison des analyses thermiques et isothermes

Les déplacements stationnaires au centre du maneton à l'intérieur du palier de tête de bielle avec un revêtement en métal blanc (Babbitt) obtenus à la fois pour les analyses thermiques (lignes pleines) et isothermes (lignes pointillées) sont comparés à la figure (IV.14). Les résultats numériques transitoires ont été omis. Dans ce cas, le lubrifiant est considéré comme fluide newtonien iso- visqueux avec  $(\alpha = \eta = 0)$ . Dans chaque orbite, quatre points correspondant à quatre angles de vilebrequin ( $\theta_2 = 0^\circ, 180^\circ, 360^\circ, \text{ et } 540^\circ$ ) sont marqués par des symboles. Le cercle de jeu est également tracé en trait plein. On observe que l'analyse thermique donne une orbite plus étendue car elle entraîne des températures plus élevées et par conséquent des viscosités de fluide plus faibles. Il en résulte, d'une part, que la rigidité du film d'huile diminue, permettant un déplacement plus important du centre du maneton. D'autre part, une diminution de l'épaisseur minimale de film d'huile au cours du cycle, c'est-à-dire pendant deux tours complets du vilebrequin, d'environ **15%**, comme le montrent la figure (IV. 15) et le

tableau IV.8 Cependant, le pic de pression dans le film d'huile est maximal à  $\theta_2 = 11^\circ$  pour les deux types d'analyse n'est pas vraiment affectée (voir tableau IV. 8).

Les valeurs du débit de fuite moyen et de la perte de puissance moyenne calculées pour les cas newtonien et non-newtonien sont présentées dans le tableau IV.8 et le tableau IV.9. Dans ces tableaux, les résultats de l'analyse thermique sont comparés à ceux obtenus par l'analyse isotherme. Les résultats obtenus pour le débit de fuite latéral sont assez similaires pour les cas newtoniens et non newtoniens, mais on peut observer que le débit de fuite latéral est sous-estimé lors de l'analyse isotherme dans laquelle la viscosité du lubrifiant est supposée constante. Par contre, l'analyse thermique entraîne une diminution des puissances dissipées moyennes d'environ **10%** dans le cas newtonien et de **14%** dans le cas non newtonien, en raison bien évidemment de la diminution de la viscosité de l'huile avec la température.

a) Représentation polaire



b) Représentation cartésienne

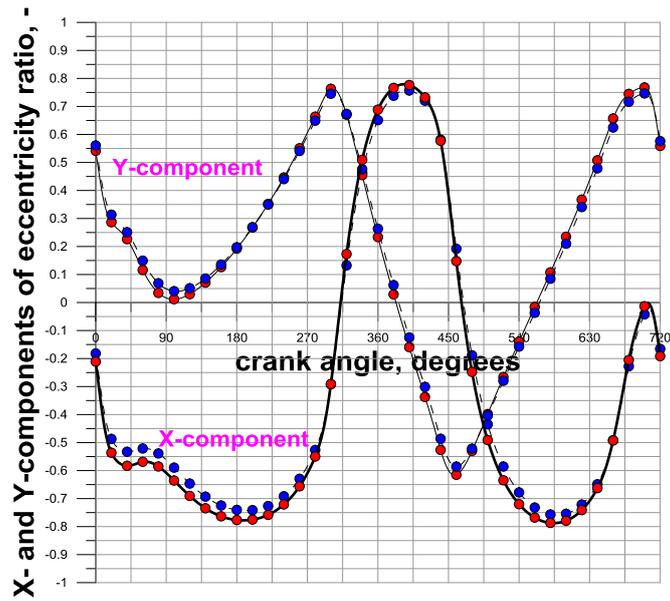
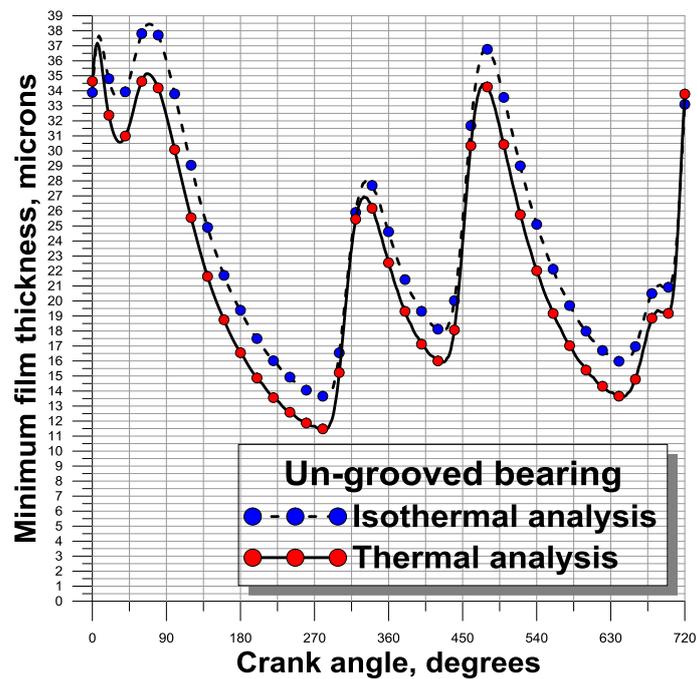
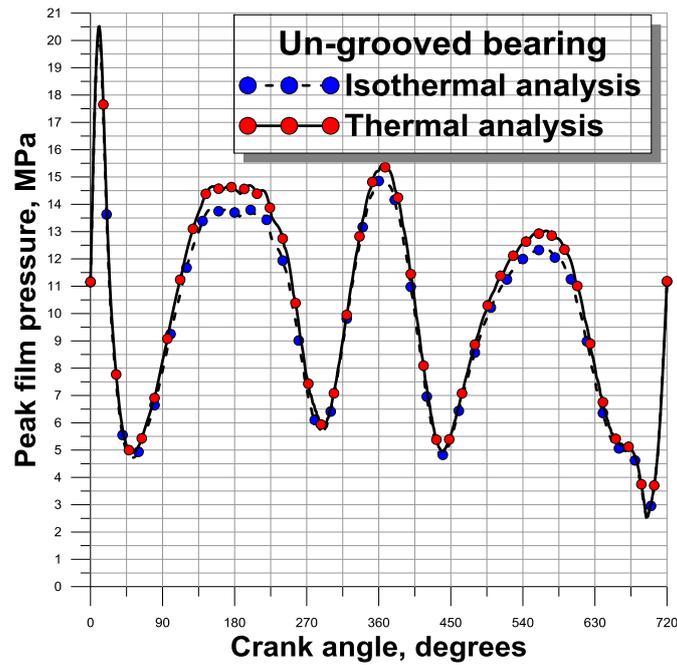
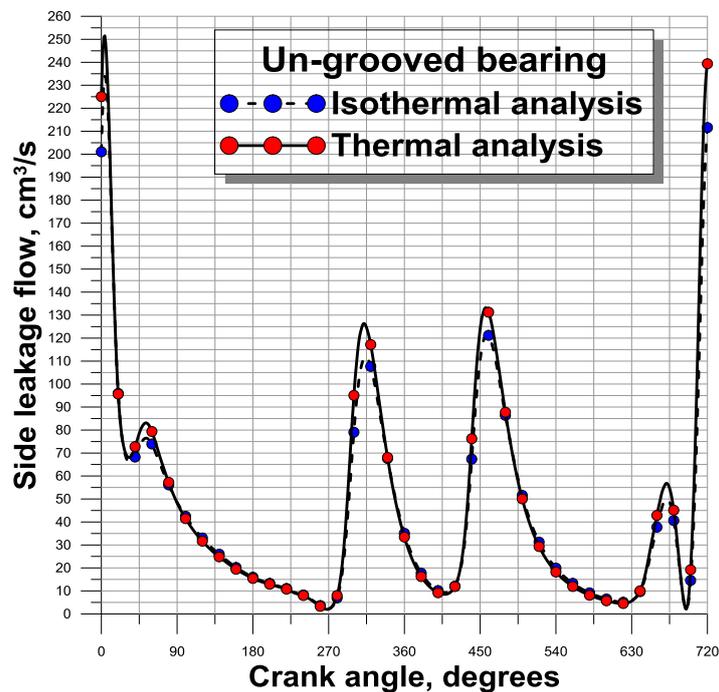


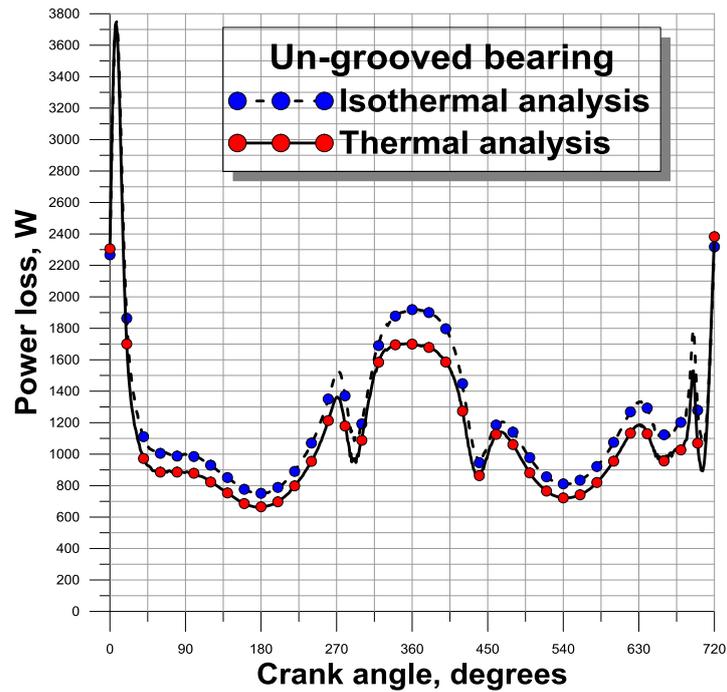
Figure IV.14 : Déplacements stationnaires du centre du maneton obtenus par analyses thermiques et isothermes





*Figure IV.15 : Variations cycliques de l'épaisseur minimale du film et de la pression maximale du film pour les paliers non rainurés obtenues par des analyses isothermes et thermiques.*





**Figure IV.16 :** Variations cycliques du débit de fuite latéral et de la puissance dissipée pour le palier non rainuré obtenues par des analyses isothermes et thermiques.

**Tableau IV.8** Comparaison des résultats obtenus par analyses isotherme et thermique

	Analyse isotherme		Analyse thermique	
	Cas Newtonien	Fluide à couple de contrainte	Cas Newtonien	Fluide à couple de contrainte
$h_{min}$ , microns	<b>13.56</b>	<b>29.02</b>	<b>11.45</b>	<b>28.2</b>
$\varepsilon_{max}$	<b>0.84</b>	<b>0.65</b>	<b>0.86</b>	<b>0.66</b>
$p_{max}$ , MPa	<b>20.12</b>	<b>19.90</b>	<b>20.52</b>	<b>20.05</b>
Débit de fuite moyen $\langle Q_z \rangle$ , cm <sup>3</sup> /s	<b>43</b>	<b>32</b>	<b>45</b>	<b>33</b>
Puissance dissipée moyenne $\langle \mathcal{P} \rangle$ , W	<b>1233</b>	<b>978</b>	<b>1109</b>	<b>844</b>

**Tableau IV.9:** Comparaison des résultats obtenus par analyses isotherme et thermique dans le cas du fluide non Newtonien

	<b>Analyse isotherme</b>	<b>Analyse thermique</b>
	Fluide à couple de contraintes, $\eta=10^{-11} N.s$	Fluide à couple de contraintes $\eta=10^{-11} N.s$
$h_{min}$ , microns	<b>29.02</b>	<b>28.2</b>
$\epsilon_{max}$	<b>0.65</b>	<b>0.66</b>
$p_{max}$ , MPa	<b>19.90</b>	<b>20.05</b>
Débit de fuite moyen $\langle Q_z \rangle$ , $cm^3/s$	<b>32</b>	<b>33</b>
Puissance dissipée moyenne $\langle \mathcal{P} \rangle$ , W	<b>978</b>	<b>844</b>

## IV.6. Conclusion

Dans ce chapitre, on a étudié les effets combinés de couples des contraintes et de la piézo-viscosité dans les paliers de tête de bielle dynamiquement chargés munis de revêtements élastiques minces à l'aide d'une approche thermique globale.

L'huile moteur utilisée pour lubrifier ces paliers a été modélisée comme un fluide à couple de contraintes afin de prendre en compte les couples de contraintes en plus des forces de surface dues à la présence de divers additifs de polymères. Nous avons montré que ce modèle de fluide se caractérise par un tenseur de contraintes anti-symétrique et se caractérise aussi par deux propriétés physiques,  $\mu$  et  $\eta$ , désignant respectivement la viscosité dynamique classique et le coefficient supplémentaire spécifiant le caractère de couple de contraintes du fluide. A ces deux coefficients, nous avons ajouté un troisième coefficient noté  $\alpha$  pour tenir compte de l'effet de piézo-viscosité. Comme le coefficient de piézo-viscosité  $\alpha$  est indépendant de la température dans le présent travail, les effets combinés de couple de contraintes de la piézo-viscosité sur la réponse dynamique de trois configurations de paliers de bielles ont uniquement été étudiés par une analyse isotherme. Ainsi, l'analyse thermique n'a été prise en compte que pour étudier les effets de couple de contraintes et d'élasticité sur le comportement dynamique de ces paliers. De plus, une méthode itérative de Newton-Raphson amortie

et améliorée a été proposée pour résoudre les équations d'équilibre afin de déterminer les trajectoires du centre du maneton dans les paliers compliants.

A partir des résultats obtenus, les conclusions qu'on peut faire sont les suivantes :

- 1- L'équation de pression obtenue est plus générale que l'équation classique de Reynolds pour l'étude des paliers compliants dynamiquement chargés lubrifiés par des fluides piézo-visqueux et à couple de contraintes.
- 2- Avec les mêmes charges dynamiques appliquées, les fluides à couple de contraintes produisent une épaisseur de film d'huile minimum plus élevée et des orbites plus contractées que les fluides newtoniens (lubrifiants non dopés).
- 3- Les effets de déformations élastiques se traduisent par une expansion de l'orbite et une diminution de la pression hydrodynamique maximale, en particulier pour les paliers munis de revêtements à faible module d'élasticité (par exemple, le cas du revêtement en PEHD).
- 4- Les effets thermiques donnent des orbites plus étendues et provoquent des baisses des puissances dissipées moyennes car elles induisent des températures plus élevées et par conséquent les viscosités des fluides diminuent sensiblement avec l'augmentation de la température.
- 5- Pour tous les cas étudiés, on a trouvé que les effets de couples de contraintes sur les performances hydrodynamiques des paliers dynamiquement chargés sont plus importants que les effets piézo-visqueux.

**CHAPITRE V**  
**ANALYSE DES EFFETS DE COUPLE DE CONTRAINTES DANS**  
**LES PALIERS A FEUILLES EN REGIME ISOTHERME**

## **V.1. Introduction**

Dans les analyses classiques de la lubrification aérodynamique et élasto-aérodynamique publiées dans la littérature technique depuis les années soixantes, les lubrifiants gazeux se comportent généralement comme des fluides non polaires (newtoniens), les couples de contraintes et de volume sont négligés, mais on tient compte seulement des forces de surface et de volume.

Dans ce cas, l'état des contraintes en un point du fluide supposé homogène et isotrope est décrit par un tenseur de contraintes symétrique du second ordre communément appelé tenseur de contraintes de Cauchy.

De nombreuses applications pratiques de lubrification peuvent être rencontrées lorsque le modèle de fluide non polaire ou newtonien ne constitue pas une approche technique satisfaisante pour mieux décrire le comportement des systèmes mécaniques lubrifiés tels que les paliers lubrifiés à gaz et aux liquides.

Les couples de volume peuvent résulter de l'action d'un champ magnétique externe sur des particules magnétisées ou de l'action d'un champ électrique sur la matière polarisée. Les couples de contrainte résultent des interactions entre les parties adjacentes du matériau en plus des forces colinéaires d'interaction. Dans cette situation, le tenseur de contrainte n'est plus symétrique et peut être exprimé par la somme d'une partie symétrique et d'une partie antisymétrique.

Autant que nous sachions, il n'existe pas des travaux traitant du comportement statique ou dynamique des paliers aérodynamiques reposant sur le concept du fluide polaire.

Dans ce chapitre, nous étudions théoriquement les performances en régime permanent et dynamique d'un palier à feuilles de première génération. Nous avons retenu le modèle de V. K. Stokes qui généralise la théorie classique et pour tenir compte des effets des couples de contraintes dus à la présence des additifs dans le fluide

lubrifiant. En outre, nous essayons de déterminer la variation de ces caractéristiques avec certaines conditions de fonctionnement, telles que la vitesse de rotation du rotor ainsi que la fréquence de fouettement (whirl) pour diverses valeurs du paramètre de couple de contraintes. Les coefficients dynamiques seront déterminés à partir de la théorie dynamique linéarisée en utilisant un processus de perturbation analytique de l'équation de Reynolds modifiée pour prendre en compte les déformations dynamiques des feuilles. Pour l'analyse dynamique, les calculs sont généralement effectués pour les paliers aérodynamiques rigides et compliants lorsque les déformations statiques et dynamiques sont prises en considération.

Par ailleurs, la méthode de Newton-Raphson amortie est utilisée, sous une forme améliorée, pour prédire les deux coordonnées cartésiennes de la position d'équilibre  $(X_0, Y_0)$ . Cependant, lors de l'utilisation de la méthode de Newton-Raphson, le problème de lubrification inverse doit être résolu au lieu du problème direct, c'est-à-dire que la charge appliquée est connue mais que les deux composantes de l'excentricité correspondantes doivent être calculées de manière itérative.

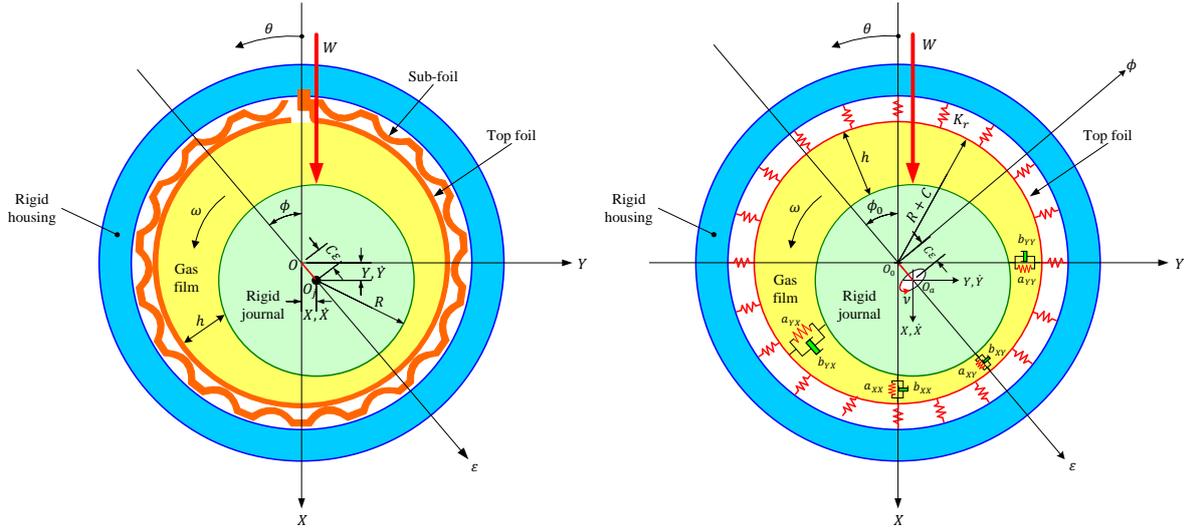
## V.2. Analyse théorique

### V.2.1. Équation de Reynolds modifiée et son processus de perturbation analytique

Dans le cas d'un problème de lubrification aérodynamique inverse (lorsque la charge statique extérieure est imposée), le mouvement du rotor dans un film gazeux auto-agissant est décrit dans le repère  $(X, Y)$  lié à la charge appliquée  $W$  située au centre du palier, comme il est illustré sur la figure (V.1). La pression dans le film peut être intégrée sur la surface du palier pour obtenir les composantes de la charge portante:

$$\begin{Bmatrix} F_X \\ F_Y \end{Bmatrix} = \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} P \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix} R d\theta dz \quad (V.1)$$

Lorsque  $p$  est la pression du film,  $R$  est le rayon de l'arbre,  $L$  est la longueur du palier et  $\theta$  est la coordonnée circonférentielle appelée angle du palier dont l'origine est située sur l'axe des  $X$ , comme indiqué sur la figure (V.1).



**Figure V.1:** Schématisation de la section transversale d'un palier à gaz de première génération

La pression du film est obtenue à partir de la résolution de l'équation de Reynolds modifiée obtenue à partir des équations de Navier-Stokes et de continuité pour un fluide à couple de contrainte non newtonien en utilisant la théorie des milieux continus de Vijay Kumar Stokes [1]:

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{Q}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\rho h) \quad (\text{V.2})$$

où  $\rho$  est la masse volumique du fluide,  $h$  est l'épaisseur du film,  $t$  est la variable temporelle, et

$$\mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_z \end{Bmatrix} = -\frac{G(h,l)}{12\mu} \begin{Bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{h}{2} \omega R \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{V.3})$$

$Q_x$  et  $Q_z$  étant respectivement les composantes du débit volumique par unité de longueur dans les directions  $x$  et  $z$ .

Dans l'équation (V.3), la fonction  $G$  est définie par

$$G(h,l) = h^3 - 12 l^2 \left[ h - 2l \operatorname{Tanh} \left( \frac{h}{2l} \right) \right] \quad (\text{V.4})$$

où  $l = \sqrt{\frac{\eta}{\mu}}$ , et  $\eta$  est la constante matérielle responsable de la propriété du couple de contrainte.

Selon les équations (V.3) et (V4), l'équation (V.2) devient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\rho G(h,l)}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\rho G(h,l)}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right] = \frac{\omega R}{2} \frac{\partial(\rho h)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} \quad (V.5)$$

où  $\mu$  est la viscosité absolue du fluide, et  $\omega R$  est la vitesse linéaire de la surface de l'arbre. L'équation (V.5) est connue sous le nom d'équation de Reynolds modifiée. Pour un fluide non polaire (newtonien) pour lequel  $\eta=0$ , l'équation (V.5) se réduit à l'équation classique de Reynolds, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right] = \frac{\omega R}{2} \frac{\partial(\rho h)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} \quad (V.6)$$

Pour un palier cylindrique utilisant de l'air ambiant comme lubrifiant, l'hypothèse d'un gaz parfait isotherme est valable, à savoir  $\rho \propto p$ . Dans ce cas, la forme appropriée de l'équation de Reynolds modifiée transitoire est donnée en coordonnées cylindriques par:

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{G(h,l)}{12\mu} p \frac{\partial p}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{G(h,l)}{12\mu} p \frac{\partial p}{\partial z} \right] = \frac{\omega}{2} \frac{\partial(ph)}{\partial \theta} + \frac{\partial(ph)}{\partial t} \quad (V.7)$$

où  $\mu$  est la viscosité dynamique,  $\omega$  est la vitesse angulaire du rotor,  $\theta$  est l'angle du palier, et  $t$  la variable temporelle.

Pour un palier cylindrique compliant (à feuilles), l'épaisseur du film  $h$  est définie par l'expression suivante:

$$h(\theta, z, t) = C + X(t)\cos\theta + Y(t)\sin\theta + \mathfrak{L}p(\theta, z, t) \quad (V.8)$$

où  $C$  est le jeu radial du palier,  $X$  et  $Y$  sont les coordonnées cartésiennes du centre de l'arbre, et  $\mathfrak{L} = \frac{2s}{E} \left( \frac{\ell}{t_b} \right)^3 (1 - \sigma^2)$  est l'opérateur scalaire de compliance des feuilles en (m/Pa) selon le modèle analytique de Heshmat [31-32] en modélisant la sous-feuille ondulée comme une simple barre élastique de Winkler avec une rigidité isotrope  $K_r$  comme le montre la figure (V. 1).

Les conditions aux limites associées à l'équation de Reynolds (V.7) peuvent être classées comme suit:

- Conditions limites liées à l'environnement dans lequel le système fonctionne:

$$p(\theta, z = \pm \frac{\ell}{2}, t) = p_a \quad , \text{ aux bords libres du palier} \quad (V.9a)$$

- Condition de périodicité:

$$p(\theta = 0, z, t) = p(\theta = 2\pi, z, t) \quad (\text{V.9b})$$

- Conditions limites liées à l'écoulement du gaz dans le palier (phénomène de dépression):

$$\begin{cases} p(\theta_{sub}, z, t) = p_a \\ \frac{\partial p}{\partial \theta}(\theta_{sub}, z, t) = \frac{\partial p}{\partial z}(\theta_{sub}, z, t) = 0 \end{cases} \quad (\text{V.9c})$$

Pour ces conditions, nous pouvons ajouter pour le cas de paliers alignés la condition suivante:

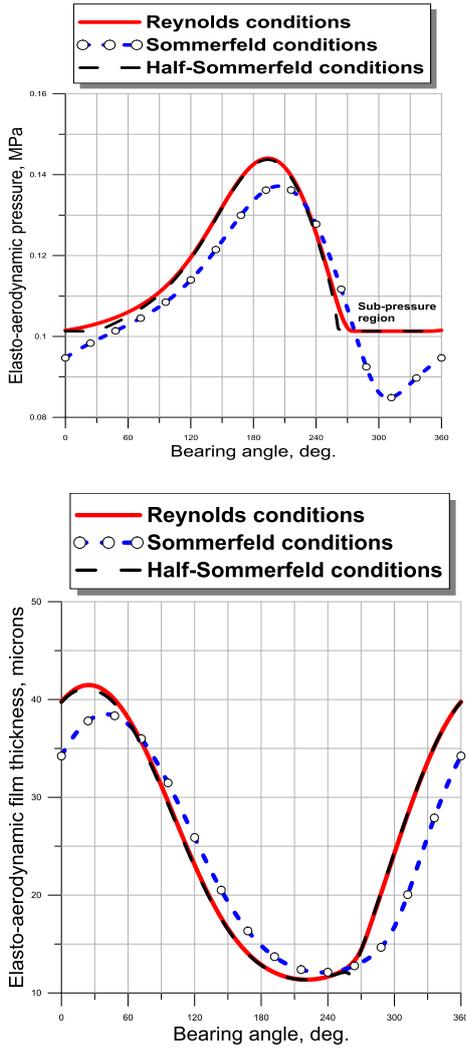
$$\frac{\partial p}{\partial z}(\theta, z = 0, t) = 0, \text{ au niveau de la section médiane} \quad (\text{V.9d})$$

L'équation (V.9a) résulte du fait que les extrémités du palier sont exposées à la pression ambiante ou atmosphérique absolue, tandis que les équations (V.9c) représentent les conditions de Reynolds (ou de Swift-Stieber). Ces conditions sont similaires à celles utilisées dans les paliers lisses lubrifiés par des fluides incompressibles. Pour les paliers aérodynamiques  $\theta_{sub}$  représente la position à laquelle la pression aérodynamique  $p$  devient inférieure à la pression ambiante, c'est-à-dire  $p < p_a$ . L'équation (V.9b) indique que la pression est périodique dans la direction circonférentielle.

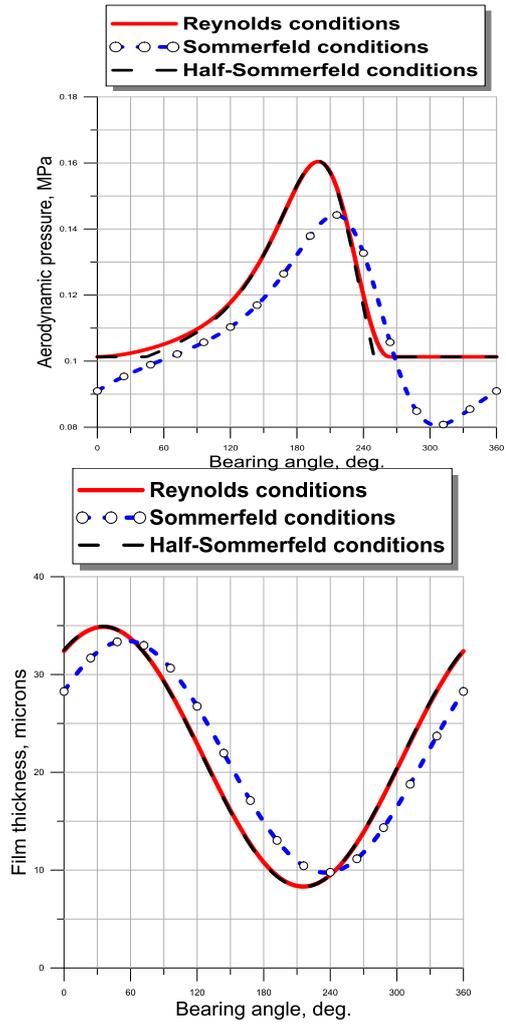
Notons que la solution de Sommerfeld peut être obtenue en résolvant l'équation (V.7) avec seulement les conditions (V.9a), (V.9b) et (V.9d), c'est-à-dire que les conditions (V.9c) sont omises.

L'influence des conditions aux limites liées à l'écoulement du lubrifiant sur le profil de pression et l'épaisseur du film fluide dans la section médiane des paliers rigide et à feuilles sont illustrées par la figure (V.2).

a) Palier à feuilles



b) Palier rigide



**Figure V.2 :** Courbes typiques de la pression et de l'épaisseur du film en fonction de l'angle du palier  $\theta$  calculées avec différentes conditions aux limites dans le cas rigide et déformable.

Pour les petites perturbations de déplacement et de vitesse  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ ,  $\Delta \dot{X}$ , et  $\Delta \dot{Y}$ , les composantes de la portance peuvent être développées en séries de Taylor au premier ordre autour de la position d'équilibre statique définie par les coordonnées cartésiennes  $(X_0, Y_0)$  :

$$F_X \approx F_{X0} + \left. \frac{\partial F_X}{\partial X} \right|_0 \Delta X + \left. \frac{\partial F_X}{\partial Y} \right|_0 \Delta Y + \left. \frac{\partial F_X}{\partial \dot{X}} \right|_0 \Delta \dot{X} + \left. \frac{\partial F_X}{\partial \dot{Y}} \right|_0 \Delta \dot{Y}$$

$$F_Y \approx F_{Y0} + \left. \frac{\partial F_Y}{\partial X} \right|_0 \Delta X + \left. \frac{\partial F_Y}{\partial Y} \right|_0 \Delta Y + \left. \frac{\partial F_Y}{\partial \dot{X}} \right|_0 \Delta \dot{X} + \left. \frac{\partial F_Y}{\partial \dot{Y}} \right|_0 \Delta \dot{Y} \quad (V.10)$$

En termes des coefficients de rigidité du film fluide et des coefficients dynamiques d'amortissement, l'équation (V.10) peut être réécrite comme :

$$\Delta F_X = F_X - F_{X0} \approx -a_{XX}\Delta X - a_{XY}\Delta Y - b_{XX}\Delta\dot{X} - b_{XY}\Delta\dot{Y} \quad (\text{V.11a})$$

$$\Delta F_Y = F_Y - F_{Y0} \approx -a_{YX}\Delta X - a_{YY}\Delta Y - b_{YX}\Delta\dot{X} - b_{YY}\Delta\dot{Y} \quad (\text{V.11b})$$

où  $a_{ij} = -\left.\frac{\partial F_i}{\partial X_j}\right|_0$  et  $b_{ij} = -\left.\frac{\partial F_i}{\partial \dot{X}_j}\right|_0$  ;  $(i, j) = (X, Y)$  qui sont respectivement les coefficients de rigidité et d'amortissement du film fluide.

et de même pour  $\Delta Y$  où  $\nu$  est la fréquence de fouettement (whirl). Ainsi, les équations (V.11a) et (V.11b) peuvent être écrites sous une forme complexe :

$$\begin{Bmatrix} F_X \\ F_Y \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} Z_{XX}(\nu) & Z_{XY}(\nu) \\ Z_{YX}(\nu) & Z_{YY}(\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \end{Bmatrix} \quad (\text{V.11c})$$

où  $Z_{ij}(\nu) = a_{ij}(\nu) + i\nu b_{ij}(\nu)$  ;  $(i, j) = (X, Y)$  qui sont les impédances complexes du système de palier telles que

$$a_{ij} = \text{Real}(Z_{ij}) \text{ et } b_{ij} = \text{Im}(Z_{ij})/\nu .$$

Le développement en série de Taylor de la pression de film fluide est donné par:

$$p \approx p_0 + \left.\frac{\partial p}{\partial X}\right|_0 \Delta X + \left.\frac{\partial p}{\partial Y}\right|_0 \Delta Y + \left.\frac{\partial p}{\partial \dot{X}}\right|_0 \Delta\dot{X} + \left.\frac{\partial p}{\partial \dot{Y}}\right|_0 \Delta\dot{Y} \quad (\text{V.12a})$$

ou

$$p \approx p_0 + p_X\Delta X + p_Y\Delta Y + p_{\dot{X}}\Delta\dot{X} + p_{\dot{Y}}\Delta\dot{Y} \quad (\text{V.12b})$$

où  $p_X = \left.\frac{\partial p}{\partial X}\right|_0$ ,  $p_{\dot{X}} = \left.\frac{\partial p}{\partial \dot{X}}\right|_0$ , etc. sont les pressions dynamiques.

En Substituant l'équation (V.12b) dans l'équation (V.1), et en tenant compte des équations (V.11), nous obtenons

$$\begin{bmatrix} a_{XX}(\nu) & a_{XY}(\nu) \\ a_{YX}(\nu) & a_{YY}(\nu) \end{bmatrix} = - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} p_X \cos\theta & p_Y \cos\theta \\ p_X \sin\theta & p_Y \sin\theta \end{bmatrix} R d\theta dz \quad (\text{V.13a})$$

$$\begin{bmatrix} b_{XX}(\nu) & b_{XY}(\nu) \\ b_{YX}(\nu) & b_{YY}(\nu) \end{bmatrix} = - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} p_{\dot{X}} \cos\theta & p_{\dot{Y}} \cos\theta \\ p_{\dot{X}} \sin\theta & p_{\dot{Y}} \sin\theta \end{bmatrix} R d\theta dz \quad (\text{V.13b})$$

ou encore sous une forme plus compacte

$$\begin{bmatrix} Z_{XX}(\nu) & Z_{XY}(\nu) \\ Z_{YX}(\nu) & Z_{YY}(\nu) \end{bmatrix} = - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} q_X \cos\theta & q_Y \cos\theta \\ q_X \sin\theta & q_Y \sin\theta \end{bmatrix} R d\theta dz \quad (\text{V.13c})$$

où  $q_X = p_X + i\nu p_{\dot{X}}$  et  $q_Y = p_Y + i\nu p_{\dot{Y}}$  sont les pressions dynamiques complexes.

Une fois les pressions dynamiques  $p_x, p_{\dot{x}}$ , etc., sont connues pour une fréquence de fouettement donnée, les coefficients de rigidité et d'amortissement peuvent être calculés à partir de l'équation (V.13). Pour déterminer les pressions dynamiques, nous supposons que les perturbations de déplacement et de vitesse peuvent être décrites par les fonctions harmoniques:

$$\Delta X = \Delta X^* e^{i\nu t}; \Delta Y = \Delta Y^* e^{i\nu t}; \Delta \dot{X} = i\nu \Delta X^* e^{i\nu t}; \text{ et } \Delta \dot{Y} = i\nu \Delta Y^* e^{i\nu t} \quad (\text{V.14})$$

où  $\Delta X^*$  et  $\Delta Y^*$  sont des amplitudes complexes.

En tenant compte de l'équation (V.14), la série de Taylor pour la pression du film fluide peut alors être exprimée comme

$$p = p_0 + (p_x \Delta X^* + p_y \Delta Y^* + p_{\dot{x}} i\nu \Delta X^* + p_{\dot{y}} i\nu \Delta Y^*) e^{i\nu t} \quad (\text{V.15})$$

La série de Taylor pour l'épaisseur du film est donnée par :

$$h \approx h_0 + \left. \frac{\partial h}{\partial X} \right|_0 \Delta X + \left. \frac{\partial h}{\partial Y} \right|_0 \Delta Y + \mathcal{L} \left( p_0 + \left. \frac{\partial p}{\partial X} \right|_0 \Delta X + \left. \frac{\partial p}{\partial Y} \right|_0 \Delta Y + \left. \frac{\partial p}{\partial \dot{X}} \right|_0 \Delta \dot{X} + \left. \frac{\partial p}{\partial \dot{Y}} \right|_0 \Delta \dot{Y} \right) \quad (\text{V.16a})$$

ou

$$h = h_0 + \mathcal{L} p_0 + \Delta X (h_x + \mathcal{L} p_x) + \Delta Y (h_y + \mathcal{L} p_y) + \mathcal{L} (p_{\dot{x}} \Delta \dot{X} + p_{\dot{y}} \Delta \dot{Y}) \quad (\text{V.16b})$$

où  $h_0 = C + X_0 \cos\theta + Y_0 \sin\theta$ ,  $h_x = \cos\theta$ , et  $h_y = \sin\theta$

En tenant compte de l'équation (V.14), l'équation (V.16b) prend la forme suivante :

$$h = H_0 + (\cos\theta + \mathcal{L} q_x) \Delta X^* e^{i\nu t} + (\sin\theta + \mathcal{L} q_y) \Delta Y^* e^{i\nu t} \quad (\text{V.16c})$$

où  $H_0 = h_0 + \mathcal{L} p_0$  qui est l'épaisseur statique du film incluant la déformation statique de la feuille. Les termes  $\mathcal{L} q_x$  et  $\mathcal{L} q_y$  figurant dans le second membre de l'équation (V.16c) représentent les déformations dynamiques complexes de la feuille. Lorsque les déformations dynamiques sont négligeables, l'équation (V.16c) se réduit à:

$$h = \underbrace{C + (X_0 + \Delta X) \cos\theta + (Y_0 + \Delta Y) \sin\theta}_{h_0 + \Delta h} + \mathcal{L} p_0 \quad (\text{V.16d})$$

En substituant les équations (V.15) et (V.16c) dans l'équation (V.7), nous obtenons

$$\mathcal{R}(p_0) = 6\mu\omega \frac{\partial(p_0 H_0)}{\partial\theta} \quad (\text{V.17})$$

où

$$H_0 = C + X_0 \cos\theta + Y_0 \sin\theta + \mathcal{L} p_0 \quad (\text{V.18})$$

et

$$\mathcal{R}(\quad) = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ G_0(H_0, l) p_0 \frac{\partial(\quad)}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ G_0(H_0, l) p_0 \frac{\partial(\quad)}{\partial z} \right]$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(q_X) + G_0(H_0, l) p_0 \left[ \frac{1}{R^2} \frac{\partial p_0}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{q_X}{p_0} \right) + \frac{\partial p_0}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{q_X}{p_0} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ 3H_0^3 p_0 \frac{H_X}{H_0} \frac{\partial p_0}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ 3H_0^3 p_0 \frac{H_X}{H_0} \frac{\partial p_0}{\partial z} \right] = \\ 6\mu\omega \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ p_0 H_0 \left( \frac{H_X}{H_0} + \frac{q_X}{p_0} \right) \right] - 6\mu\omega \frac{q_X}{p_0} \frac{\partial}{\partial \theta} (p_0 H_0) + 12i\mu\nu p_0 H_0 \left[ \frac{H_X}{H_0} + \frac{q_X}{p_0} \right] \end{aligned} \quad \text{V.19}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(q_Y) + G_0(H_0, l) p_0 \left[ \frac{1}{R^2} \frac{\partial p_0}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{q_Y}{p_0} \right) + \frac{\partial p_0}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{q_Y}{p_0} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ 3H_0^3 p_0 \frac{H_Y}{H_0} \frac{\partial p_0}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ 3H_0^3 p_0 \frac{H_Y}{H_0} \frac{\partial p_0}{\partial z} \right] = \\ 6\mu\omega \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ p_0 H_0 \left( \frac{H_Y}{H_0} + \frac{q_Y}{p_0} \right) \right] - 6\mu\omega \frac{q_Y}{p_0} \frac{\partial}{\partial \theta} (p_0 H_0) + 12i\mu\nu p_0 H_0 \left[ \frac{H_Y}{H_0} + \frac{q_Y}{p_0} \right] \end{aligned} \quad \text{(V.20)}$$

où  $H_X = \cos\theta + \mathcal{L}q_X$ , et  $H_Y = \sin\theta + \mathcal{L}q_Y$ .

Il convient de noter que lors de l'utilisation de la technique de la variable complexe, le processus de perturbation conduit à deux équations aux dérivées partielles non couplées de premier ordre au lieu de quatre équations aux dérivées partielles couplées, comme il est généralement publié dans la littérature technique [3- 4].

Pour le traitement numérique, il est recommandé de réécrire les équations (V.17) à (V.20) en variables sans dimension (variables réduites).

• **Equations aux dérivées partielles d'ordre zéro**

$$\tilde{\mathcal{R}}(P_0) = \Lambda \frac{\partial}{\partial \theta} (P_0 \tilde{H}_0) \quad \text{(V.21a)}$$

où  $P_0$  est la pression statique adimensionnelle, et

$$\tilde{H}_0 = \frac{H_0}{c} = 1 + X_0 \cos\theta + Y_0 \sin\theta + \tilde{\mathcal{L}} P_0 \quad \text{(V.21b)}$$

• **Equations aux dérivées partielles complexes de premier ordre**

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{R}}(Q_X) + \tilde{G}_0 P_0 \left[ \frac{\partial P_0}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{Q_X}{P_0} \right) + \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{z}} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left( \frac{Q_X}{P_0} \right) \right] + \Lambda \frac{\partial}{\partial \theta} (P_0 \tilde{H}_0) \left[ \frac{Q_X}{P_0} + 3 \frac{\tilde{H}_0^3}{\tilde{G}_0} \frac{\tilde{H}_X}{\tilde{H}_0} \right] \\ + 3\tilde{G}_0 P_0 \left[ \frac{\partial P_0}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\tilde{H}_0^3}{\tilde{G}_0} \frac{\tilde{H}_X}{\tilde{H}_0} \right) + \frac{\partial P_0}{\partial \tilde{z}} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left( \frac{\tilde{H}_0^3}{\tilde{G}_0} \frac{\tilde{H}_X}{\tilde{H}_0} \right) \right] - \\ \Lambda \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ P_0 \tilde{H}_0 \left( \frac{\tilde{H}_X}{\tilde{H}_0} + \frac{Q_X}{P_0} \right) \right] - 2i\Lambda\gamma P_0 \tilde{H}_0 \left[ \frac{\tilde{H}_X}{\tilde{H}_0} + \frac{Q_X}{P_0} \right] = 0 \end{aligned} \quad \text{(V.22)}$$

et

$$\begin{aligned}
R(Q_Y) + \tilde{G}_0 P_0 \left[ \frac{\partial P_0}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{Q_Y}{P_0} \right) + \frac{\partial P_0}{\partial \tilde{z}} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left( \frac{Q_Y}{P_0} \right) \right] + \Lambda \frac{\partial}{\partial \theta} (P_0 \tilde{H}_0) \left[ \frac{Q_Y}{P_0} + 3 \frac{\tilde{H}_0^3 \tilde{H}_Y}{\tilde{G}_0 \tilde{H}_0} \right] \\
+ 3 \tilde{G}_0 P_0 \left[ \frac{\partial P_0}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\tilde{H}_0^3 \tilde{H}_Y}{\tilde{G}_0 \tilde{H}_0} \right) + \frac{\partial P_0}{\partial \tilde{z}} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left( \frac{\tilde{H}_0^3 \tilde{H}_Y}{\tilde{G}_0 \tilde{H}_0} \right) \right] - \\
\Lambda \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ P_0 \tilde{H}_0 \left( \frac{\tilde{H}_Y}{\tilde{H}_0} + \frac{Q_Y}{P_0} \right) \right] - 2i\Lambda\gamma P_0 \tilde{H}_0 \left[ \frac{\tilde{H}_Y}{\tilde{H}_0} + \frac{Q_Y}{P_0} \right] = 0
\end{aligned} \tag{V.23}$$

où

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{R}}(\ ) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \tilde{G}_0 P_0 \frac{\partial(\ )}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left[ \tilde{G}_0 P_0 \frac{\partial(\ )}{\partial \tilde{z}} \right], \quad P_0 = \frac{p_0}{p_a}, \quad (Q_X, Q_Y) = \frac{c}{p_a} (q_X, q_Y) = (P_X + \\
i\gamma P_{X'}, P_Y + i\gamma P_{Y'}), \quad \tilde{G}_0 = \frac{G_0}{c^3} = \tilde{H}_0^3 - 12\tilde{l}^2 H_0 + 24\tilde{l}^3 \text{Tanh} \left( \frac{\tilde{H}_0}{2\tilde{l}} \right), \quad \Lambda = \frac{6\mu\omega \left( \frac{R}{c} \right)^2}{p_a} \text{ qui est le} \\
\text{nombre de compressibilité, } \gamma = \frac{v}{\omega} \text{ qui est la fréquence de fouettement relative, } \tilde{z} = \frac{z}{R}, \\
(\tilde{H}_X, \tilde{H}_Y) = (\cos\theta + \tilde{\mathfrak{L}}Q_X, \sin\theta + \tilde{\mathfrak{L}}Q_Y), \quad \tilde{l} = \frac{l}{c}, \quad \text{et } \tilde{\mathfrak{L}} = \frac{p_a}{c} \mathfrak{L} = \frac{2p_a s}{EC} \left( \frac{\ell}{t_b} \right)^3 (1 - \sigma^2) \text{ qui est} \\
\text{l'opérateur de compliance sans dimension.}
\end{aligned}$$

Contrairement aux équations (V.22) et (V.23), l'équation (V.21a) est fortement non linéaire couplée à l'équation (V.21 b), et doivent être résolues numériquement par iteration.

## V.2.2. Conditions aux limites associées aux équations normalisées d'ordre 0 et 1

La méthode de perturbation transforme également les conditions aux limites, à savoir :

$$P_0 = 1 \text{ à } \tilde{z} = \pm \frac{l}{D} \tag{V.24a}$$

$$P_0(\theta = 0, \tilde{z}) = P_0(\theta = 2\pi, \tilde{z}) \tag{V.24b}$$

$$\begin{cases} P_0(\theta_{sub}, \tilde{z}) = 1 \\ \frac{\partial P_0}{\partial \theta}(\theta_{sub}, \tilde{z}) = \frac{\partial P_0}{\partial \tilde{z}}(\theta_{sub}, \tilde{z}) = 0 \end{cases} \tag{V.24c}$$

$$\frac{\partial P_0}{\partial \tilde{z}}(\theta, \tilde{z} = 0) = 0 \tag{V.24d}$$

et

$$Q_X = Q_Y = 0 \text{ à } \tilde{z} = \pm \frac{l}{D} \tag{V.24e}$$

$$Q_X(\theta = 0, \tilde{z}) = Q_X(\theta = 2\pi, \tilde{z}) ; Q_Y(\theta = 0, \tilde{z}) = Q_Y(\theta = 2\pi, \tilde{z}) \quad (\text{V.24f})$$

Rappelons que  $Q_X$  et  $Q_Y$  sont des fonctions complexes qui présentent les pressions dynamiques adimensionnelles.

Il est supposé que les perturbations dues aux vibrations du rotor (arbre) n'affectent pas l'étendue de la région stationnaire. Les équations du premier ordre (V.22) et (V.23) sont donc résolues sur cette zone pour laquelle  $p_0 > p_a$  ou  $P_0 > 1$ .

### V.3. Détermination de la position d'équilibre statique par itération

Lorsque le palier est soumis à une charge statique  $\mathbf{W}_0 = \begin{Bmatrix} W_{X0} \\ W_{Y0} \end{Bmatrix}$ , le centre du rotor (arbre) occupe une position d'équilibre dans le palier (coussinet) définie par les coordonnées cartésiennes  $(X_0, Y_0)$ .

La détermination de cette position nécessite la résolution des équations d'équilibre non linéaire par itération. Une solution inverse de l'équation de Reynolds à l'état stationnaire (V.17) ou (V.21a) est alors requise.

Si le système de palier est parfaitement aligné, les équations d'équilibre peuvent être écrites comme suit:

$$\begin{cases} - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} (p_0 - p_a) \cos\theta R d\theta dz + W_{X0} = 0 \\ - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} (p_0 - p_a) \sin\theta R d\theta dz + W_{Y0} = 0 \end{cases} \quad (\text{V.25a})$$

où sous la forme adimensionnelle

$$\begin{cases} - \int_{-\frac{L}{D}}^{\frac{L}{D}} \int_0^{2\pi} (P_0 - 1) \cos\theta d\theta d\tilde{z} + \tilde{W}_{X0} = 0 \\ - \int_{-\frac{L}{D}}^{\frac{L}{D}} \int_0^{2\pi} (P_0 - 1) \sin\theta d\theta d\tilde{z} + \tilde{W}_{Y0} = 0 \end{cases} \quad (\text{V.25b})$$

où  $P_0 = p_0/p_a$  est la pression du film fluide en régime permanent sans dimension calculée à partir des équations couplées (V.21) et  $(\tilde{W}_{X0}, \tilde{W}_{Y0}) = (W_{X0}, W_{Y0})/p_a R^2$ .

La position statique du centre du rotor définie par le vecteur d'excentricité  $\mathbf{e}_0 = \begin{Bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{Bmatrix}$

est déterminée lorsque le vecteur force exprimant l'action du fluide sur l'arbre

$$\mathbf{F}_0 = \begin{Bmatrix} F_{X0} \\ F_{Y0} \end{Bmatrix} = - \iint_A (p_0 - p_a) \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{Bmatrix} dA \text{ est en équilibre avec la charge appliquée}$$

$\mathbf{W}_0 = \begin{Bmatrix} W_{X0} \\ W_{Y0} \end{Bmatrix}$ . L'équation (V.25a) peut être réécrite sous forme résiduelle

$$\begin{cases} r_X(X, Y) = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} (p_0(\theta, z) - p_a) \cos\theta R d\theta dz - W_{X0} = 0 \\ r_Y(X, Y) = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} (p_0(\theta, z) - p_a) \sin\theta R d\theta dz - W_{Y0} = 0 \end{cases} \quad (\text{V.26a})$$

où  $r_X$  et  $r_Y$  sont les composantes du vecteur résiduel  $\mathbf{r}$  qui est une fonction non linéaire de  $X$  et  $Y$ .

La méthode de Newton-Raphson amortie est utilisée pour résoudre l'ensemble des deux équations non linéaires (V.26a). Cette méthode est formulée sur la linéarisation d'équations d'équilibre à l'aide de développement de Taylor à 2 variables des équations (V.26a) au voisinage de la  $k$ ème solution  $\begin{Bmatrix} X^{(k)} \\ Y^{(k)} \end{Bmatrix}$ , c'est-à-dire :

$$\begin{cases} r_X^{(k+1)} \approx r_X^{(k)} + \left(\frac{\partial r_X}{\partial X}\right)_k \delta X^{(k)} + \left(\frac{\partial r_X}{\partial Y}\right)_k \delta Y^{(k)} = 0 \\ r_Y^{(k+1)} \approx r_Y^{(k)} + \left(\frac{\partial r_Y}{\partial X}\right)_k \delta X^{(k)} + \left(\frac{\partial r_Y}{\partial Y}\right)_k \delta Y^{(k)} = 0 \end{cases} \quad (\text{V.26b})$$

Dans la méthode relaxée de Newton-Raphson amortie, la  $(k+1)$  ième solution est :

$$\begin{Bmatrix} X^{(k+1)} \\ Y^{(k+1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X^{(k)} \\ Y^{(k)} \end{Bmatrix} + \Omega_{NR} \begin{Bmatrix} \delta X^{(k)} \\ \delta Y^{(k)} \end{Bmatrix} \quad (\text{V.26c})$$

où  $\Omega_{NR}$  est le facteur d'amortissement dont la valeur s'échelonne entre 0 et 1.

On note que la valeur  $\Omega_{NR}$  peut être ajustée automatiquement lors des itérations en fonction du taux de convergence de la solution. Donc, l'équation (V.26c) devient :

$$\begin{Bmatrix} X^{(k+1)} \\ Y^{(k+1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X^{(k)} \\ Y^{(k)} \end{Bmatrix} + \Omega_{NR}^{(k)} \begin{Bmatrix} \delta X^{(k)} \\ \delta Y^{(k)} \end{Bmatrix} \quad (\text{V.26d})$$

Les corrections  $\begin{Bmatrix} \delta X^{(k)} \\ \delta Y^{(k)} \end{Bmatrix}$  à  $\begin{Bmatrix} X^{(k)} \\ Y^{(k)} \end{Bmatrix}$  sont déterminées par la résolution du système algébrique linéaire suivant obtenu à partir l'équation (V.26b)

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial r_X}{\partial X} & \frac{\partial r_X}{\partial Y} \\ \frac{\partial r_Y}{\partial X} & \frac{\partial r_Y}{\partial Y} \end{bmatrix}_{(X^{(k)}, Y^{(k)})} \begin{Bmatrix} \delta X^{(k)} \\ \delta Y^{(k)} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} r_X(X^{(k)}, Y^{(k)}) \\ r_Y(X^{(k)}, Y^{(k)}) \end{Bmatrix} ; k=0, 1, 2, \dots, k_{max} \quad (\text{26e})$$

où la solution analytique du système peut être obtenue comme:

$$\begin{Bmatrix} \delta X^{(k)} \\ \delta Y^{(k)} \end{Bmatrix} = - \frac{\begin{bmatrix} \frac{\partial r_Y}{\partial Y} & -\frac{\partial r_X}{\partial Y} \\ -\frac{\partial r_Y}{\partial X} & \frac{\partial r_X}{\partial X} \end{bmatrix}_{(X^{(k)}, Y^{(k)})} \begin{Bmatrix} r_X(X^{(k)}, Y^{(k)}) \\ r_Y(X^{(k)}, Y^{(k)}) \end{Bmatrix}}{\left(\frac{\partial r_X}{\partial X} \frac{\partial r_Y}{\partial Y} - \frac{\partial r_X}{\partial Y} \frac{\partial r_Y}{\partial X}\right)_{(X^{(k)}, Y^{(k)})}} \quad (\text{V.26f})$$

La matrice jacobienne  $[J_k] = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_X}{\partial X} & \frac{\partial r_X}{\partial Y} \\ \frac{\partial r_Y}{\partial X} & \frac{\partial r_Y}{\partial Y} \end{bmatrix}_{(X^{(k)}, Y^{(k)})}$  du système (26e) à la  $k$ ème itération

est généralement une matrice non symétrique. En pré-multipliant les deux membres du système (V.26e) par  $[J_k]^T$ , on obtient un système équivalent avec une matrice symétrique définie positive partout où  $[J_k]$  est régulière qui a la même solution  $\begin{Bmatrix} \delta X^{(k)} \\ \delta Y^{(k)} \end{Bmatrix}$ . Ainsi, le système (V.26e) peut être ré-exprimé après des manipulations algébriques comme :

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial r_X}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial r_Y}{\partial X}\right)^2 & \frac{\partial r_X}{\partial X} \frac{\partial r_X}{\partial Y} + \frac{\partial r_Y}{\partial X} \frac{\partial r_Y}{\partial Y} \\ Sym. & \left(\frac{\partial r_X}{\partial Y}\right)^2 + \left(\frac{\partial r_Y}{\partial Y}\right)^2 \end{bmatrix}_{(X^{(k)}, Y^{(k)})} \begin{Bmatrix} \delta X^{(k)} \\ \delta Y^{(k)} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} r_X \frac{\partial r_X}{\partial X} + r_Y \frac{\partial r_Y}{\partial X} \\ r_X \frac{\partial r_X}{\partial Y} + r_Y \frac{\partial r_Y}{\partial Y} \end{Bmatrix}_{(X^{(k)}, Y^{(k)})} \quad (V.27)$$

Le critère d'arrêt de la méthode de Newton-Raphson améliorée ou amortie par laquelle le processus itératif peut être terminé sans perte de précision de la solution est :

$$\left| r_X^{(k)} \right| + \left| r_Y^{(k)} \right| \leq \varepsilon \quad \text{et } k < k_{max} \quad (V.28)$$

qui représente la norme  $L_1$  de Laplace du résidu.

où  $\varepsilon=10^{-3}$  et  $k_{max}$  sont respectivement la tolérance de convergence prédéfinie et le nombre maximal d'itérations.

Les coefficients de la matrice jacobienne sont évalués numériquement par des différences finies centrées, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial r_X}{\partial X}\right)_k &\approx \frac{r_X(X^{(k)}+\delta, Y^{(k)}) - r_X(X^{(k)}-\delta, Y^{(k)})}{2\delta}; & \left(\frac{\partial r_X}{\partial Y}\right)_k &\approx \frac{r_X(X^{(k)}, Y^{(k)}+\delta) - r_X(X^{(k)}, Y^{(k)}-\delta)}{2\delta}; \\ \left(\frac{\partial r_Y}{\partial X}\right)_k &\approx \frac{r_Y(X^{(k)}+\delta, Y^{(k)}) - r_Y(X^{(k)}-\delta, Y^{(k)})}{2\delta}; & \left(\frac{\partial r_Y}{\partial Y}\right)_k &\approx \frac{r_Y(X^{(k)}, Y^{(k)}+\delta) - r_Y(X^{(k)}, Y^{(k)}-\delta)}{2\delta} \end{aligned} \quad (V.29)$$

où  $\delta = 10^{-4}$  pour les calculs effectués en double précision.

## V.4. Performances statiques du palier

### V.4.1. Débit de fuite latéral

Le débit de fuite latéral aux extrémités libres du palier supposé parfaitement aligné ( $z = \pm \frac{L}{2}$ ) est calculé par la relation suivante:

$$Q_z = 2\rho \left| \int_0^{\theta_{sub}} H_0\left(\theta, z = \frac{L}{2}\right) \langle w(\theta, z = \frac{L}{2}) \rangle R d\theta \right| \quad (V.30)$$

Avec  $\theta = \frac{x}{R}$  est l'angle du palier,  $\theta_{sub} = \frac{x_{sub}}{R}$  est l'angle auquel la pression devient inférieure à la pression ambiante, et  $\rho$  est la masse volumique de l'air.

Dans l'équation ci-dessus,  $H_0$  est l'épaisseur du film statique et  $\langle w(\theta, z) \rangle = \frac{1}{H_0} \int_0^{H_0} w(\theta, y, z) dy$  est la vitesse moyenne axiale d'écoulement calculée par les relations suivantes:

**Fluide non newtonien à couple de contraintes (modèle V. K. Stokes):**

$$\langle w(\theta, z) \rangle = - \frac{G_0(H_0, l)}{12\mu H_0} \frac{\partial p_0}{\partial z} \quad (V.31a)$$

**Modèle de fluide newtonien ( $\eta = 0$ ):**

$$\langle w(\theta, z) \rangle = - \frac{H_0^3}{12\mu H_0} \frac{\partial p_0}{\partial z} \quad (V.31b)$$

La vitesse axiale d'écoulement  $w(\theta, y, z)$  ainsi que la vitesse circonférentielle  $u(\theta, y, z)$  sont déterminées à partir de l'intégration d'équations de champ régissant le mouvement du lubrifiant dans les directions  $x$  (ou  $\theta$ ) et  $z$  :

$$\eta \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = - \frac{\partial p_0}{\partial x} \quad (V.32a)$$

$$\eta \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = - \frac{\partial p_0}{\partial z} \quad (V.32b)$$

Les solutions générales des équations (V.32) prennent la forme suivante :

$$u(x, y, z) = A_0 + A_1 y + A_2 \cosh\left(\frac{y}{l}\right) + A_3 \sinh\left(\frac{y}{l}\right) + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p_0}{\partial x} y^2 \quad (V.33a)$$

$$w(x, y, z) = B_0 + B_1 y + B_2 \cosh\left(\frac{y}{l}\right) + B_3 \sinh\left(\frac{y}{l}\right) + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p_0}{\partial z} y^2 \quad (V.33b)$$

En utilisant les conditions aux limites suivantes:

$$u(x, 0, z) = 0, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, 0, z) = 0, u(x, h, z) = \omega R, \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, h, z) = 0 \quad (V.34a)$$

$$w(x, 0, z) = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, 0, z) = 0, w(x, h, z) = 0, \text{ and } \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, h, z) = 0 \quad (V.34b)$$

On a :

$$u(x, y, z) = \underbrace{\omega R \frac{y}{h}}_{\text{terme de Couette}} + \underbrace{\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p_0}{\partial x} \left\{ y(y-h) + 2l^2 \left[ 1 - \frac{\cosh\left(\frac{2y-h}{2l}\right)}{\cosh\left(\frac{h}{2l}\right)} \right] \right\}}_{\text{terme de Hagen-Poiseuille}} \quad (\text{V.35a})$$

$$w(x, y, z) = \underbrace{\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p_0}{\partial z} \left\{ y(y-h) + 2l^2 \left[ 1 - \frac{\cosh\left(\frac{2y-h}{2l}\right)}{\cosh\left(\frac{h}{2l}\right)} \right] \right\}}_{\text{terme de Hagen-Poiseuille}} \quad (\text{V.35b})$$

$$\text{où } \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

#### V.4.2. Puissance dissipée

La puissance dissipée totale est évaluée sur la totalité du palier lubrifié à air

$$\mathcal{P} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^h \Phi_1 dy R d\theta dz + \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^h \Phi_2 dy R d\theta dz \quad (\text{V.36})$$

$$\text{où } d\theta = dx/R$$

Dans l'équation (V.36),  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  sont respectivement les fonctions de dissipation dues aux contraintes de cisaillement et aux effets de couple de contraintes. Ces deux fonctions qui apparaissent dans le second membre de l'équation d'énergie modifiée (voir Annexe A pour plus de détails) peuvent être définies dans la théorie de la lubrification aérodynamique comme suit:

$$\Phi_1 = 2\mu D_{ij} D_{ij} = \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \approx \mu \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (\text{V.37})$$

$$\Phi_2 = 16\eta K_i K_i = \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_k} \approx \eta \left[ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] \quad (\text{V.38})$$

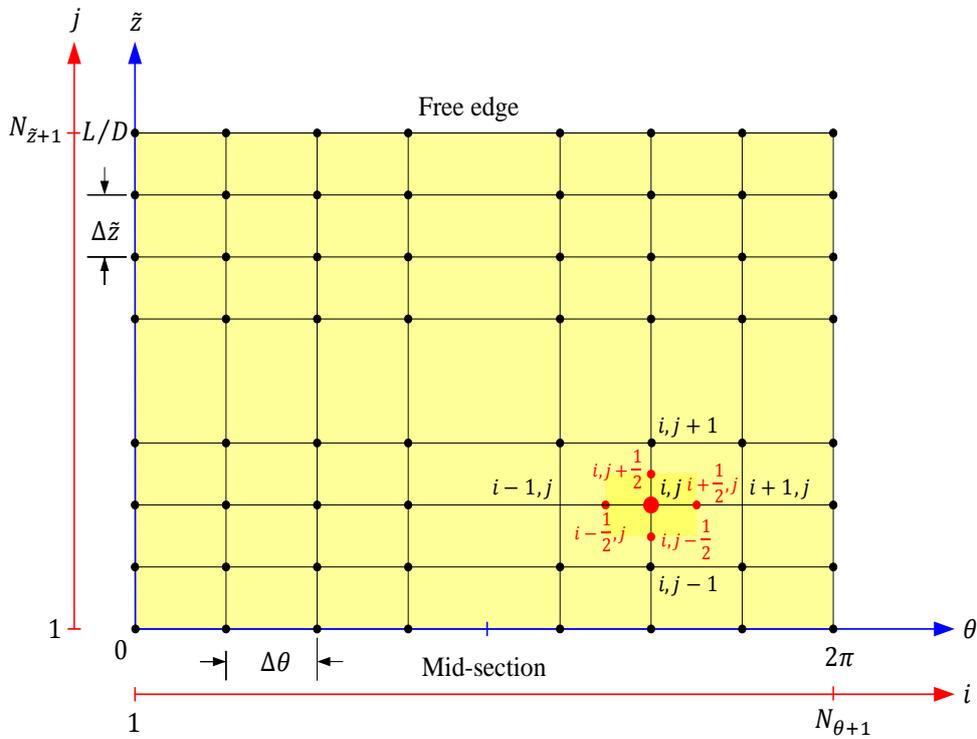
Après intégration par rapport à  $y$ , nous obtenons

$$\mathcal{P} = \underbrace{\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{\mu(\omega R)^2}{H_0} R d\theta dz}_{\text{Puissance due au cisaillement}} + \underbrace{\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{G_0(H_0, l)}{12\mu} \left[ \left( \frac{\partial p_0}{R \partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial p_0}{\partial z} \right)^2 \right] R d\theta dz}_{\text{Puissance due à la pression}} \quad (\text{V.39})$$

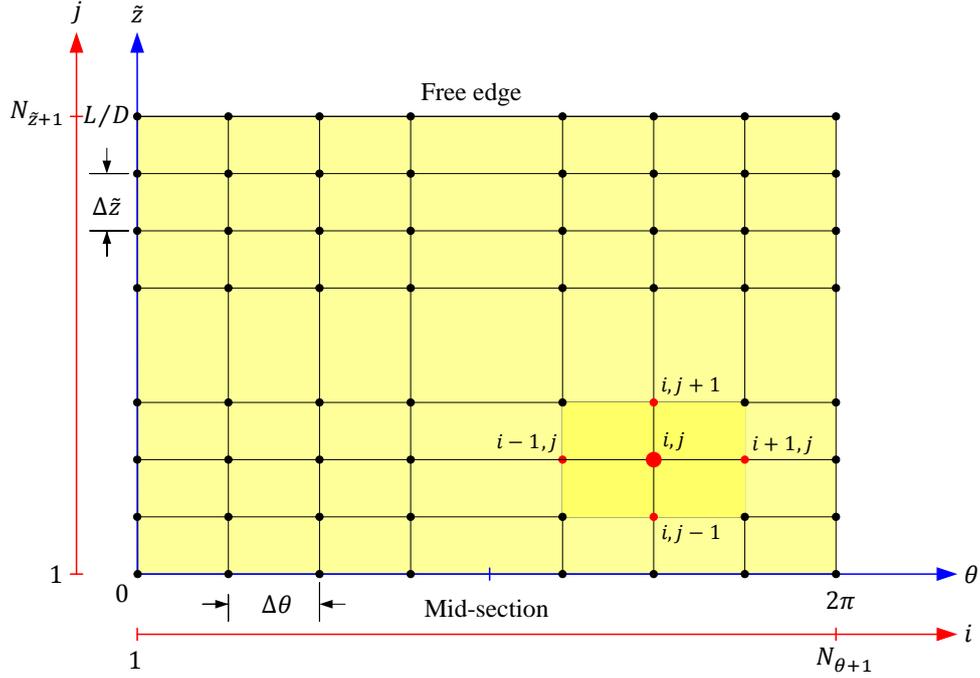
#### V.4.3. Formulation par différences finies des équations aux dérivées partielles gouvernantes

Les équations aux dérivées partielles gouvernantes normalisées sont résolues numériquement en utilisant la méthode des différences finies. Le demi-palier

développé est divisé en cellules rectangulaires appelées mailles ( $N_\theta \times N_z$ ) ayant chacune une taille de  $\Delta\theta \times \Delta\tilde{z}$  telle que  $\Delta\theta = \frac{2\pi}{N_\theta}$  et  $\Delta\tilde{z} = \frac{L}{N_z}$  (figures V.3 et V.4). Une grille de calcul de  $120 \times 60$  cellules est sélectionnée pour la présente étude. Cette taille donne un taux de convergence rapide avec un temps de calcul rapide.



**Figure V. 3 :** Représentation de la grille des différences finies pour la résolution de l'équation aux dérivées partielles d'ordre zéro sur le domaine du demi-film d'air.



**Figure V.4 :** Grille des différences finies pour la résolution des équations aux dérivées partielles du premier ordre sur le domaine du demi-film d'air codé.

**a) Equations aux dérivées partielles d'ordre zéro**

$$P_{0,i,j} = \left( B_{i,j}P_{0,i+1,j} + C_{i,j}P_{0,i-1,j} + D_{i,j}P_{0,i,j+1} + E_{i,j}P_{0,i,j-1} \right) / A_{i,j} \quad (V.40)$$

où

$$A_{i,j} = \frac{\tilde{G}_{0,i+\frac{1}{2},j}P_{0,i+\frac{1}{2},j} + \tilde{G}_{0,i-\frac{1}{2},j}P_{0,i-\frac{1}{2},j}}{\Delta\theta^2} + \frac{\tilde{G}_{0,i,j+\frac{1}{2}}P_{0,i,j+\frac{1}{2}} + \tilde{G}_{0,i,j-\frac{1}{2}}P_{0,i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta z^2}; B_{i,j} = \frac{\tilde{G}_{0,i+\frac{1}{2},j}P_{0,i+\frac{1}{2},j}}{\Delta\theta^2} - \Lambda \frac{\tilde{H}_{0,i+1,j}}{2\Delta\theta};$$

$$C_{i,j} = \frac{\tilde{G}_{0,i-\frac{1}{2},j}P_{0,i-\frac{1}{2},j}}{\Delta\theta^2} + \Lambda \frac{\tilde{H}_{0,i-1,j}}{2\Delta\theta}; D_{i,j} = \frac{\tilde{G}_{0,i,j+\frac{1}{2}}P_{0,i,j+\frac{1}{2}}}{\Delta z^2}; E_{i,j} = \frac{\tilde{G}_{0,i,j-\frac{1}{2}}P_{0,i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta z^2}.$$

où sous une forme plus commode puisque l'équation (V.21) est non linéaire en terme de  $P_0$

$$P_{0ij}^{(m)} = \left( B_{ij}^{(m-1)}P_{0i+1,j}^{(m-1)} + C_{ij}^{(m-1)}P_{0i-1,j}^{(m-1)} + D_{ij}^{(m-1)}P_{0i,j+1}^{(m-1)} + E_{ij}^{(m-1)}P_{0i,j-1}^{(m-1)} \right) / A_{ij}^{(m-1)} \quad (V.41)$$

où  $i=1, \dots, N_{\theta}+1, j=1, \dots, N_z$ ; and  $m=1,2, \dots, m_{max}$ .

Les coefficients  $A_{ij}^{(m-1)}, B_{ij}^{(m-1)}, C_{ij}^{(m-1)}, D_{ij}^{(m-1)}$ , et  $E_{ij}^{(m-1)}$  sont évalués pour  $P_{0ij}^{(m-1)}$ . L'exposant  $m$  indique le nombre d'itérations pour la méthode des substitutions successives sous-relaxées.

Le système d'équations algébriques non linéaires (V.41) résultant de la discrétisation spatiale de l'équation de Reynolds modifiée non linéaire à l'état stable est résolu par la méthode de substitution successive dite aussi méthode du point fixe avec un coefficient de sous-relaxation  $\Omega$  dont la valeur s'échelonne entre 0 et 1 similaire à la méthode de Wegstein pour la recherche itérative de la racine d'une équation non linéaire afin de déterminer le champ de pression du film d'air statique sans dimension  $P_{0ij}$ :

$$P_{0ij}^{(m)} = (1 - \Omega)P_{0ij}^{(m-1)} + \Omega P_{0ij}^{(m)} \quad (\text{V.42})$$

Selon l'équation (V.41), l'équation (V.42) prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} (P_{0ij}^{(m)})^{n+1} &= (1 - \Omega_{GS})(P_{0ij}^{(m)})^n + \\ \Omega_{GS} &\left( B_{ij}^{(m-1)} (P_{0_{i+1,j}}^{(m)})^n + C_{ij}^{(m-1)} (P_{0_{i-1,j}}^{(m)})^{n+1} + D_{ij}^{(m-1)} (P_{0_{i,j+1}}^{(m)})^n + E_{ij}^{(m-1)} (P_{0_{i,j-1}}^{(m)})^{n+1} \right) / A_{ij}^{(m-1)} \end{aligned} \quad (\text{V.43})$$

La valeur typique de  $\Omega$  sélectionnée pour les cas étudiés dans cette étude est  $10^{-1}$ . Cette méthode consiste à construire une série de solutions  $P_{0ij}^{(0)}, P_{0ij}^{(1)}, \dots, P_{0ij}^{(m-1)}, P_{0ij}^{(m)}$  où  $P_{0ij}^{(0)}$  est l'estimation de la solution initiale. Les pressions nodales  $P_{0ij}^{(m)}$  étant calculées en résolvant le système suivant par l'algorithme de Gauss-Seidel avec un coefficient de sur-relaxation  $\Omega_{GS}$  afin d'accélérer la convergence de la procédure et de satisfaire les conditions de Reynolds (V.24c). Lors du calcul itératif de la pression du film d'air statique, la pression normalisée est mise à **1** si la pression calculée devient inférieure à 1 (aspiration).

$$\begin{aligned} (P_{0ij}^{(m)})^{n+1} &= (1 - \Omega_{GS})(P_{0ij}^{(m)})^n + \Omega_{GS} \left( B_{ij}^{(m-1)} (P_{0_{i+1,j}}^{(m)})^n + C_{ij}^{(m-1)} (P_{0_{i-1,j}}^{(m)})^{n+1} + \right. \\ &D_{ij}^{(m-1)} (P_{0_{i,j+1}}^{(m)})^n + E_{ij}^{(m-1)} (P_{0_{i,j-1}}^{(m)})^{n+1} \left. \right) / A_{ij}^{(m-1)} \end{aligned} \quad (\text{V.44})$$

où  $(n)$  et  $(n+1)$  sont les numéros des itérations précédente et actuelle (en cours).

La procédure itérative de Gauss-Seidel est arrêtée lorsque, à chaque point de la grille (nœud  $i, j$ ), l'erreur relative maximale entre deux itérations successives est inférieure à l'erreur tolérée  $10^{-10}$  c'est-à-dire :

$$\max \left| \frac{P_{0ij}^{(n+1)} - P_{0ij}^{(n)}}{P_{0ij}^{(n+1)}} \right| \leq 10^{-10} \quad (\text{V.45})$$

Notons que dans les méthodes de relaxation, le temps d'exécution ou même la stabilité numérique sont sensiblement affectés par le coefficient de relaxation utilisé. La valeur optimale pour  $\Omega_{GS}$  n'est pas toujours prévisible.

La valeur optimale de  $\Omega_{GS}$  est celle qui permet de converger vers la solution pour une erreur tolérée en un nombre minimum d'itérations ou un temps de calcul réduit. En pratique, il est généralement déterminé par des simulations numériques.

Le critère d'arrêt des itérations dans l'algorithme des substitutions successives est

$$\|n\| = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_{\theta}+1} \sum_{j=1}^{N_z+1} (P_{0ij}^{(m)} - P_{0ij}^{(m-1)})^2}{\sum_{i=1}^{N_{\theta}+1} \sum_{j=1}^{N_z+1} (P_{0ij}^{(m)})^2}} \leq 10^{-6} \quad (\text{V.46})$$

$\|n\|$  étant la norme relative des moindres carrés.

### **b) Equations aux dérivées partielles du premier ordre**

$$Q_{X_{i,j}} = \left( \mathcal{A}_{i,j} Q_{X_{i+1,j}} + \mathcal{B}_{i,j} Q_{X_{i-1,j}} + \mathcal{C}_{i,j} Q_{X_{i,j+1}} + \mathcal{D}_{i,j} Q_{X_{i,j-1}} + \mathcal{E}_{i,j} \right) / \mathcal{F}_{i,j} \quad (\text{V.47})$$

$$Q_{Y_{i,j}} = \left( \mathcal{A}_{i,j} Q_{Y_{i+1,j}} + \mathcal{B}_{i,j} Q_{Y_{i-1,j}} + \mathcal{C}_{i,j} Q_{Y_{i,j+1}} + \mathcal{D}_{i,j} Q_{Y_{i,j-1}} + \mathcal{E}'_{i,j} \right) / \mathcal{F}_{i,j} \quad (\text{V.48})$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{i,j} &= \frac{P_{0i,j} \left( \frac{\partial \tilde{G}_0}{\partial \theta} \right)_{i,j} + \tilde{G}_{0i,j} \left( \frac{\partial P_0}{\partial \theta} \right)_{i,j}}{2\Delta\theta} + \frac{\tilde{G}_{0i,j} P_{0i,j}}{(\Delta\theta)^2} + \frac{\tilde{G}_{0i,j} \left( \frac{\partial P_0}{\partial \theta} \right)_{i,j}}{2\Delta\theta} + \frac{3\tilde{\Omega} P_{0i,j} \tilde{H}_{0i,j}^2 \left( \frac{\partial P_0}{\partial \theta} \right)_{i,j}}{2\Delta\theta} \\ &\quad - \Lambda \left( \frac{\tilde{H}_{0i,j} + \tilde{\Omega} P_{0i,j}}{2\Delta\theta} \right) \\ \mathcal{B}_{i,j} &= -\frac{P_{0i,j} \left( \frac{\partial \tilde{G}_0}{\partial \theta} \right)_{i,j} + \tilde{G}_{0i,j} \left( \frac{\partial P_0}{\partial \theta} \right)_{i,j}}{2\Delta\theta} + \frac{\tilde{G}_{0i,j} P_{0i,j}}{(\Delta\theta)^2} - \frac{\tilde{G}_{0i,j} \left( \frac{\partial P_0}{\partial \theta} \right)_{i,j}}{2\Delta\theta} - \frac{3\tilde{\Omega} P_{0i,j} \tilde{H}_{0i,j}^2 \left( \frac{\partial P_0}{\partial \theta} \right)_{i,j}}{2\Delta\theta} \\ &\quad + \Lambda \left( \frac{\tilde{H}_{0i,j} + \tilde{\Omega} P_{0i,j}}{2\Delta\theta} \right) \\ \mathcal{C}_{i,j} &= \frac{P_{0i,j} \left( \frac{\partial \tilde{G}_0}{\partial \tilde{z}} \right)_{i,j} + \tilde{G}_{0i,j} \left( \frac{\partial P_0}{\partial \tilde{z}} \right)_{i,j}}{2\Delta\tilde{z}} + \frac{\tilde{G}_{0i,j} P_{0i,j}}{(\Delta\tilde{z})^2} + \frac{\tilde{G}_{0i,j} \left( \frac{\partial P_0}{\partial \tilde{z}} \right)_{i,j}}{2\Delta\tilde{z}} + \frac{3\tilde{\Omega} P_{0i,j} \tilde{H}_{0i,j}^2 \left( \frac{\partial P_0}{\partial \tilde{z}} \right)_{i,j}}{2\Delta\tilde{z}} \\ \mathcal{D}_{i,j} &= -\frac{P_{0i,j} \left( \frac{\partial \tilde{G}_0}{\partial \tilde{z}} \right)_{i,j} + \tilde{G}_{0i,j} \left( \frac{\partial P_0}{\partial \tilde{z}} \right)_{i,j}}{2\Delta\tilde{z}} + \frac{\tilde{G}_{0i,j} P_{0i,j}}{(\Delta\tilde{z})^2} - \frac{\tilde{G}_{0i,j} \left( \frac{\partial P_0}{\partial \tilde{z}} \right)_{i,j}}{2\Delta\tilde{z}} - \frac{3\tilde{\Omega} P_{0i,j} \tilde{H}_{0i,j}^2 \left( \frac{\partial P_0}{\partial \tilde{z}} \right)_{i,j}}{2\Delta\tilde{z}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ij} &= 3\Lambda \left( P_{0,i,j} \left( \frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial \theta} \right)_{i,j} + \tilde{H}_{0,i,j} \left( \frac{\partial P_0}{\partial \theta} \right)_{i,j} \right) \\
&\frac{\tilde{H}_{0,i,j}^2}{\tilde{G}_{0,i,j}} \cos \theta_i + 3P_{0,i,j} \left( \frac{\partial P_0}{\partial \theta} \right)_{i,j} \left\{ 2\tilde{H}_{0,i,j} \left( \frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial \theta} \right)_{i,j} \cos \theta_i - \frac{\tilde{H}_{0,i,j}^2}{\tilde{G}_{0,i,j}} \left( \frac{\partial \tilde{G}_0}{\partial \theta} \right)_{i,j} \cos \theta_i - \tilde{H}_{0,i,j}^2 \sin \theta_i \right\} \\
&+ 3P_{0,i,j} \left( \frac{\partial P_0}{\partial \tilde{z}} \right)_{i,j} \left\{ \frac{\cos \theta_i}{\tilde{G}_{0,i,j}} \left( 2\tilde{H}_{0,i,j} \left( \frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial \tilde{z}} \right)_{i,j} \tilde{G}_{0,i,j} - \tilde{H}_{0,i,j}^2 \left( \frac{\partial \tilde{G}_0}{\partial \tilde{z}} \right)_{i,j} \right) \right\} \\
&- \Lambda \left\{ \left( \frac{\partial P_0}{\partial \theta} \right)_{i,j} \cos \theta_i - P_{0,i,j} \sin \theta_i \right\} - 2i\Lambda\gamma P_{0,i,j} \cos \theta_i \\
\varepsilon'_{ij} &= 3\Lambda \left( P_{0,i,j} \left( \frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial \theta} \right)_{i,j} + \tilde{H}_{0,i,j} \left( \frac{\partial P_0}{\partial \theta} \right)_{i,j} \right) \frac{\tilde{H}_{0,i,j}^2}{\tilde{G}_{0,i,j}} \sin \theta_i \\
&+ 3P_{0,i,j} \left( \frac{\partial P_0}{\partial \theta} \right)_{i,j} \left\{ 2\tilde{H}_{0,i,j} \left( \frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial \theta} \right)_{i,j} \sin \theta_i - \frac{\tilde{H}_{0,i,j}^2}{\tilde{G}_{0,i,j}} \left( \frac{\partial \tilde{G}_0}{\partial \theta} \right)_{i,j} \sin \theta_i \right. \\
&\left. + \tilde{H}_{0,i,j}^2 \cos \theta_i \right\} \\
&+ 3P_{0,i,j} \left( \frac{\partial P_0}{\partial \tilde{z}} \right)_{i,j} \left\{ \frac{\sin \theta_i}{\tilde{G}_{0,i,j}} \left( 2\tilde{H}_{0,i,j} \left( \frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial \tilde{z}} \right)_{i,j} \tilde{G}_{0,i,j} - \tilde{H}_{0,i,j}^2 \left( \frac{\partial \tilde{G}_0}{\partial \tilde{z}} \right)_{i,j} \right) \right\} \\
&- \Lambda \left\{ \left( \frac{\partial P_0}{\partial \theta} \right)_{i,j} \sin \theta_i + P_{0,i,j} \cos \theta_i \right\} - 2i\Lambda\gamma P_{0,i,j} \sin \theta_i
\end{aligned}$$

Avec l'application de l'algorithme de Gauss-Seidel, les équations (V.47) et (V.48) prennent les formes suivantes:

$$\begin{aligned}
Q_{X_{i,j}}^{(n+1)} &= (1 - \Omega_{GS}) Q_{X_{i,j}}^{(n)} \\
&+ \Omega_{GS} \left( \mathcal{A}_{i,j} Q_{X_{i+1,j}}^{(n)} + \mathcal{B}_{i,j} Q_{X_{i-1,j}}^{(n+1)} + \mathcal{C}_{i,j} Q_{X_{i,j+1}}^{(n)} + \mathcal{D}_{i,j} Q_{X_{i,j-1}}^{(n+1)} + \varepsilon_{i,j} \right) / \mathcal{F}_{i,j}
\end{aligned} \tag{V.49}$$

$$\begin{aligned}
Q_{Y_{i,j}}^{(n+1)} &= (1 - \Omega_{GS}) Q_{Y_{i,j}}^{(n)} + \Omega_{GS} \left( \mathcal{A}_{i,j} Q_{Y_{i+1,j}}^{(n)} + \mathcal{B}_{i,j} Q_{Y_{i-1,j}}^{(n+1)} + \mathcal{C}_{i,j} Q_{Y_{i,j+1}}^{(n)} + \mathcal{D}_{i,j} Q_{Y_{i,j-1}}^{(n+1)} + \varepsilon'_{i,j} \right) / \mathcal{F}_{i,j}
\end{aligned} \tag{V.50}$$

où  $n$  et  $\Omega_{GS}$  sont respectivement le nombre d'itérations et le facteur de sur-relaxation compris entre 1 et 2, c'est-à-dire  $1 \leq \Omega_{GS} < 2$ . Notons que pour  $\Omega_{GS} = 2$ , la méthode de Gauss-Seidel diverge.

## V.5. Procédure de calcul

Sur la base de l'analyse décrite dans le présent chapitre, un programme de calcul en MS-Fortran 90 a été développé pour étudier le comportement dynamique des paliers MITI de première génération lubrifiés avec de l'air contaminé est modélisé comme étant un fluide à couple de contraintes. La procédure numérique est détaillée sous forme de pseudo-code en **annexe C** pour une meilleure compréhension de la résolution numérique adoptée dans cette étude.

La prédiction de la position d'équilibre de l'arbre (rotor) dans le palier nécessite la résolution d'un problème inverse. En résumé, la procédure de calcul nécessite les cinq étapes suivantes:

- **Étape 1:** à partir d'une position du centre de l'arbre  $(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)$ , on calcule l'épaisseur du film en régime permanent  $\tilde{H}_0$  et la pression constante  $P_0$  en résolvant les équations couplées (V.21a) et (V.21b) exprimées en variables sans dimension avec la méthode du point fixe relaxée;

- **Étape 2:** La portance sans dimension  $\tilde{F}_0$  est calculée en intégrant la pression  $P_0$  sur la surface du palier:

$$\tilde{F}_0 = \sqrt{\left( \int_{-\frac{L}{D}}^{\frac{L}{D}} \int_0^{2\pi} (P_0(\theta, \tilde{z}) - 1) \cos\theta \, d\theta d\tilde{z} \right)^2 + \left( \int_{-\frac{L}{D}}^{\frac{L}{D}} \int_0^{2\pi} (P_0(\theta, \tilde{z}) - 1) \sin\theta \, d\theta d\tilde{z} \right)^2}$$

- **Étape 3:** La force calculée  $\tilde{F}_0$  est alors comparée à la charge appliquée  $\tilde{W}_0$ : si la charge calculée est différente de la charge appliquée, nous corrigeons la position de l'arbre, c'est à dire au moyen de la méthode itérative Newton-Raphson améliorée, et nous reprenons le calcul;

- **Étape 4:** Le processus itératif est poursuivi jusqu'à la convergence: la position d'équilibre du centre de l'arbre à l'intérieur du palier ainsi que les performances en régime permanent du palier sont ainsi déterminées;

- **Étape 5:** L'épaisseur du film en régime permanent et les distributions de pression  $\tilde{H}_0$  et  $P_0$  sont ensuite substituées dans les équations dynamiques complexes non linéaires couplées (V.22) et (V.23). Ces équations sont également résolues par la

méthode des différences finies pour obtenir les pressions dynamiques complexes  $Q_x$  et  $Q_y$ .

Les huit coefficients de raideur et d'amortissement du palier  $A_{ij}$  et  $B_{ij}$ , en fonction de la fréquence de fouettement relative  $\gamma=v/\omega$ , peuvent alors être obtenus par intégration numérique des distributions de pressions dynamiques.

## V.6. Résultats et discussion

Les tableaux V.1 et V.2 montrent les détails de la géométrie et des conditions de fonctionnement du palier à feuilles, ainsi que les détails relatifs aux calculs.

Il convient de noter que toutes les études de simulations sont effectuées en considérant les conditions de Reynolds.

### V.6.1. Validation

Afin de valider le code de calcul développé, la formulation mathématique du problème de lubrification élasto-aérodynamique inverse, et la formulation numérique dans le cas newtonien (non polaire), en régime permanent et dynamique, comme  $\phi_0 = \text{Tan}^{-1}\left(\frac{y_0}{x_0}\right)$ , la pression statique maximale et les coefficients de rigidité et d'amortissement ont été calculés et comparés aux résultats obtenus par Heshmat et al. [5], et Peng et Carpino [6] pour différentes valeurs adimensionnelles de la charge statique appliquée. Les résultats obtenus sont rapportés et comparés avec ceux publiés par les auteurs mentionnés ci-dessus dans les tableaux (V.3 et V5). On peut constater que les résultats obtenus sont en bon accord, même à des valeurs élevées de charge statique appliquée, c'est-à-dire pour des valeurs élevées de l'excentricité relative.

**Tableau V.1-** Caractéristiques géométriques et conditions de fonctionnement utilisées pour étudier les performances du palier à feuilles.

Paramètre, Symbole	Unité	Valeur
Rayon du palier, $R$	$m$	$0.025$
Longueur du palier, $L$	$m$	$0.050$
Jeu radial, $C$	$m$	$21.6 \times 10^{-6}$
Épaisseur de la feuille supérieure, $t_b$	$m$	$0.102 \times 10^{-3}$
Pas de la feuille ondulée, $s$	$m$	$4.572 \times 10^{-3}$

Longueur du bump, $2\ell$	$m$	$3.556 \times 10^{-3}$
Viscosité dynamique de l'air at 20 °C	$Pa.s$	$18.2 \times 10^{-6}$
Masse volumique de l'air, $\rho$	$kg/m^3$	$1.2$
Constante matérielle responsable du couple de contrainte, $\eta$	$N.s$ ou $kg.m/s$	$0.0$ $182 \times 10^{-9}$ $2912 \times 10^{-9}$
Module de Young de la feuille, $E$	$Pa$	$2.07 \times 10^{11}$
Coefficient de Poisson de la feuille, $\sigma$	-	$0.30$
Pression ambiante, $p_a$	$Pa$	$1.013 \times 10^5$

**Tableau V.2** - Caractéristiques du maillage par différences finies et données de calculs.

Paramètres	Symbole	Valeur
Nombre de cellules dans la direction circonférentielle du demi-palier,	$N_\theta$	$120$
Nombre de cellules dans la direction axiale du demi-palier,	$N_z$	$60$
Facteur de sur-relaxation pour la méthode de Gauss-Seidel ,	$\Omega_{GS}$	$1.2$
Facteur de sous-relaxation pour la méthode des substitutions successives	$\Omega$	$10^{-1}$
Critère de convergence de la méthode de substitutions successives,		$10^{-6}$
Critère de convergence de la méthode itérative de Newton-Raphson,		$10^{-3}$
Coefficient d'amortissement pour la méthode de Newton-Raphson,	$\Omega_{NR}$	$0.75$
Critère de convergence pour le calcul de la pression en régime permanent,		$10^{-10}$
Critère de convergence pour le calcul des pressions dynamiques		$10^{-5}$

**Tableau V.3-** Comparaison de l'excentricité relative statique, de l'angle de calage statique et du pic de la pression statique sans dimension pour

$$L/D = \Lambda = 1, C/R = 8.64 \times 10^{-4}.$$

$\tilde{\xi}$	$\tilde{W}_0 = W_0 / p_a R^2$	$\varepsilon_0$	$\phi_0$ (degré)	$P_{0_{\max}} = p_{0_{\max}} / p_a$	Note
<b>0.</b> (Palier rigide)	5.055	<b>0.897</b>	<b>13.1</b>	<b>4.716</b>	<b>(1)</b>
		0.900	12.8	4.850	(2)
<b>1.</b> (Palier à feuille compliant)	1.020	<b>0.904</b>	<b>22.03</b>	<b>1.438</b>	<b>(1)</b>
		0.900	22.4	1.485	(2)

**(1) Présente étude,** (2) Résultats publiés par Heshmat *et al* [5] en utilisant les conditions aux limites de Reynolds.

**Tableau V.4-** Comparaison des coefficients de rigidité normalisés

$$L/D = \Lambda = 1, C/R = 8.64 \times 10^{-4}, \gamma = 0., \text{ et } \tilde{\xi} = 0.$$

$\tilde{W}_0$	$\varepsilon_0$	$A_{XX} = C_{a_{XX}} / p_a R^2$	$A_{XY} = C_{a_{XY}} / p_a R^2$	$A_{YX} = C_{a_{YX}} / p_a R^2$	$A_{YY} = C_{a_{YY}} / p_a R^2$	Note
1.894	<b>0.747</b>	<b>8.855</b>	<b>4.179</b>	<b>1.289</b>	<b>3.408</b>	<b>(1)</b>
	0.75	8.981	3.989	1.166	3.416	(2)
5.055	<b>0.897</b>	<b>43.259</b>	<b>10.268</b>	<b>5.878</b>	<b>7.118</b>	<b>(1)</b>
	0.900	44.593	10.151	6.024	7.202	(2)

**(1) Présente étude,** (2) Résultats publiés par Heshmat *et al* [5] en utilisant les conditions aux limites de Reynolds.

**Tableau V.5** Comparaison des coefficients d'amortissement synchrones normalisés

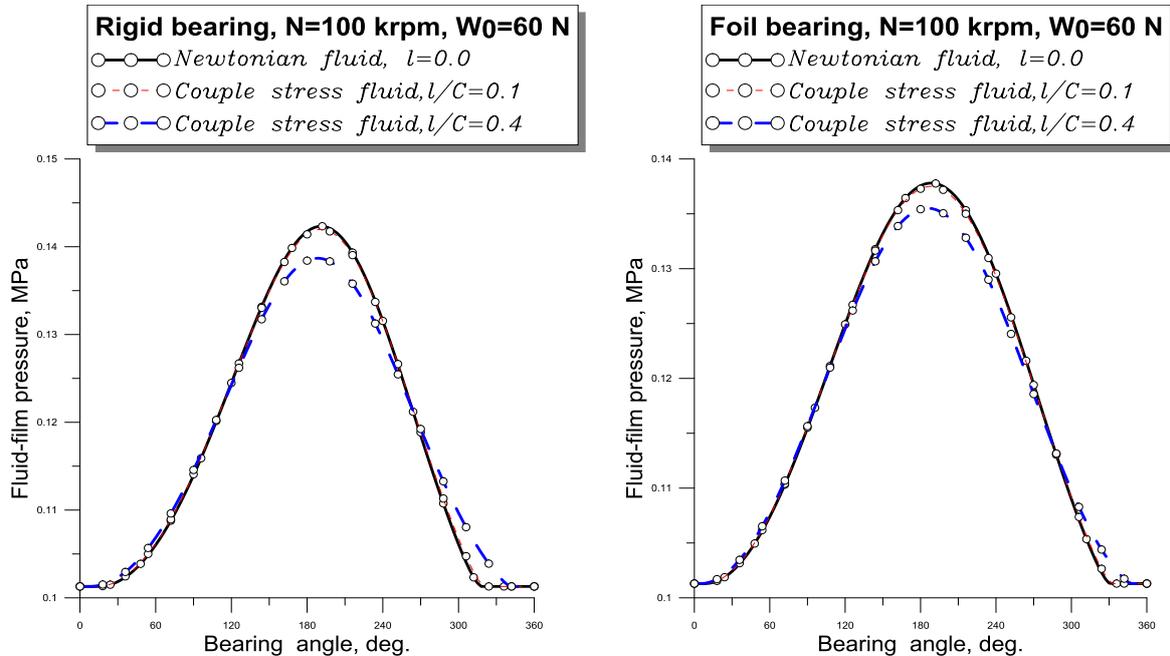
pour  $l/D = \Lambda = 1.$ ,  $c/R = 8.64 \times 10^{-4}$ ,  $\gamma = 1.$ , et  $\tilde{\xi} = 0$  (palier rigide)

$\tilde{W}_0$	$\varepsilon_0$	$B_{XX} = C_{ob_{xx}}/P_a R^2$	$B_{XY} = C_{ob_{xy}}/P_a R^2$	$B_{YX} = C_{ob_{yx}}/P_a R^2$	$B_{YY} = C_{ob_{yy}}/P_a R^2$	Note
1.922	<b>0.749</b>	<b>2.365</b>	<b>-0.948</b>	<b>0.776</b>	<b>0.905</b>	<b>(1)</b>
	0.75	2.322	-1.005	0.511	0.747	(2)
5.055	<b>0.897</b>	<b>4.036</b>	<b>-1.761</b>	<b>0.615</b>	<b>1.118</b>	<b>(1)</b>
	0.900	5.126	-1.585	0.846	0.955	(2)

(1)Présente étude, (2) Résultats publiés par Peng et Carpino [6] en utilisant les C.L. de demi -Sommerfeld.

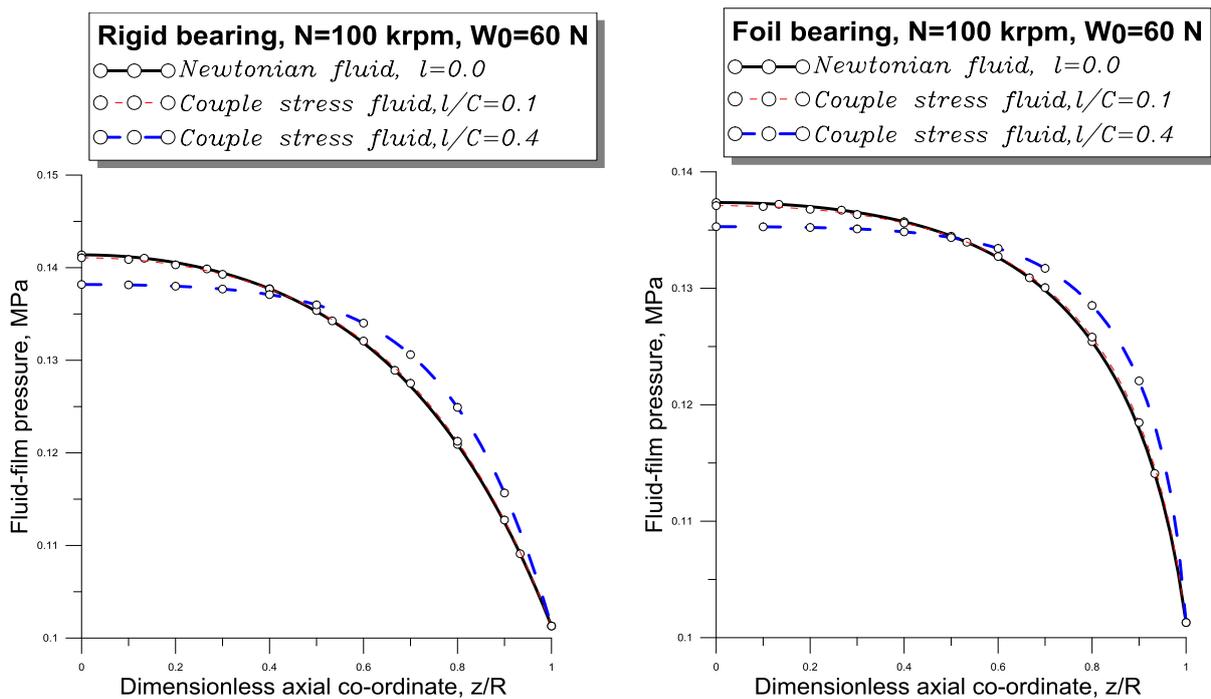
### V.6.2. Effets des couples de contraintes sur les performances du palier à feuilles en régime permanent

La figure (V.5) montre le champ de pression en régime permanent suivant la direction circonférentielle dans la section du plan médian du palier obtenu pour une vitesse de rotation du rotor  $N= 100 \text{ krpm}$  et différentes valeurs du paramètre du couple de contraintes.



**Figure V. 5 :** Distribution de la pression statique le long de la direction circonférentielle au niveau du plan médian du palier pour différentes valeurs du paramètre de couple des contraintes.

Les distributions de pression dans la direction axiale sont représentées sur la figure (V.6) pour les paliers rigides et à feuille qui sont soumis à la même charge statique, à savoir  $W_0=60\text{ N}$ . On observe que plus la taille de la particule solide est grande, (c'est à dire pour les valeurs de  $\tilde{l}$  élevées), plus son effet sur la valeur de la pression maximale est important. Pour une même valeur du paramètre de couple de contraintes, la valeur de la pression maximale pour un palier rigide est supérieure à celle d'un palier à feuilles. Comme prévu, les valeurs de la pression maximale diminuent avec l'augmentation de  $\tilde{l}$ . Cependant, la valeur de  $\theta_{sub}$  pour laquelle la pression chute à la pression ambiante  $p_a$  augmente avec l'augmentation du paramètre du couple de contrainte  $\tilde{l}$  pour les paliers rigide et à feuilles. Cela est dû à la diminution de l'excentricité de fonctionnement lorsque le couple de contraintes augmente, comme le montre clairement la figure (V.7).

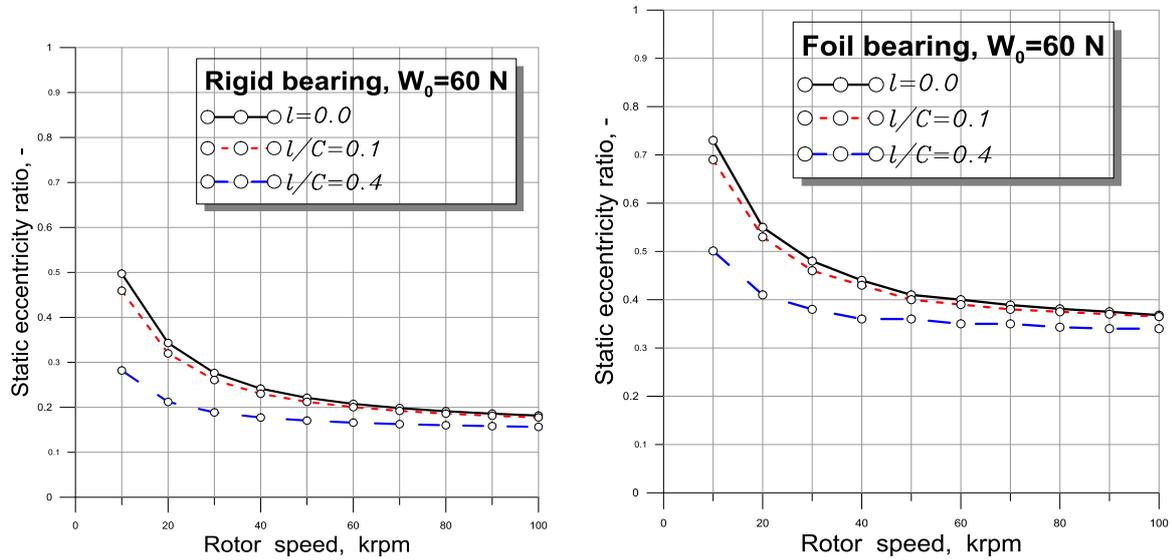


**Figure V.6 :** Distribution de la pression statique le long de la direction axiale dans le plan de la pression maximale pour différentes valeurs du paramètre de couple des contraintes.

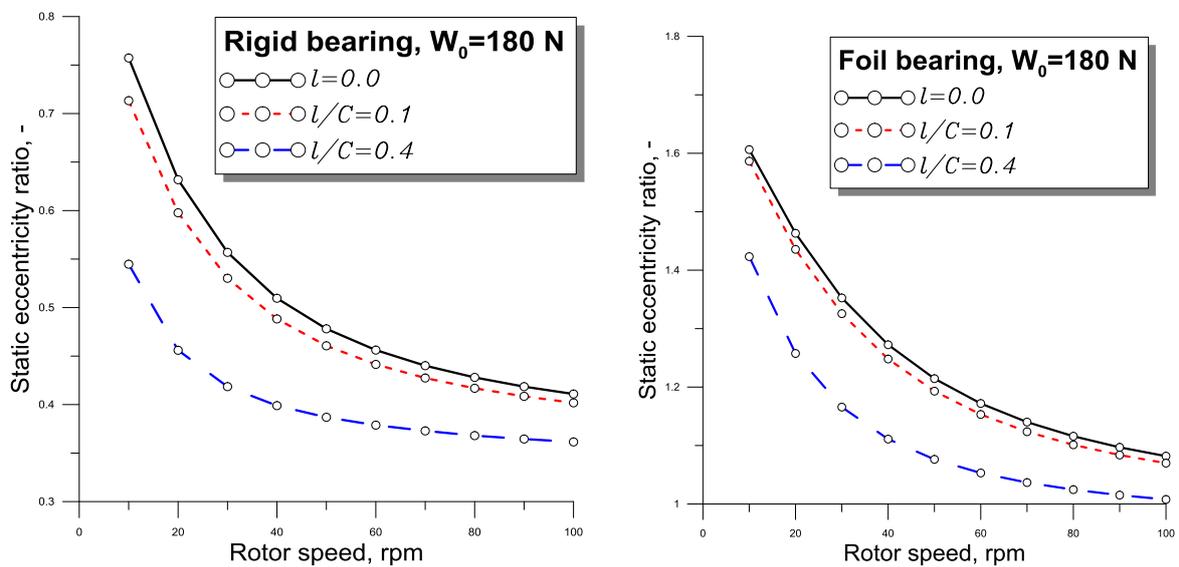
D'autre part la figure (V.7b) montre que l'excentricité relative calculée pour le palier compliant (palier à feuilles) fonctionnant dans des conditions sévères peut dépasser l'unité provoquant un étalement du champ de pression statique sur une plus grande surface du palier. De plus, on observe que l'excentricité relative diminue à

mesure que la vitesse du rotor augmente pour le palier à charge modérée ainsi que pour le palier fortement chargé.

### a) Palier modérément chargé

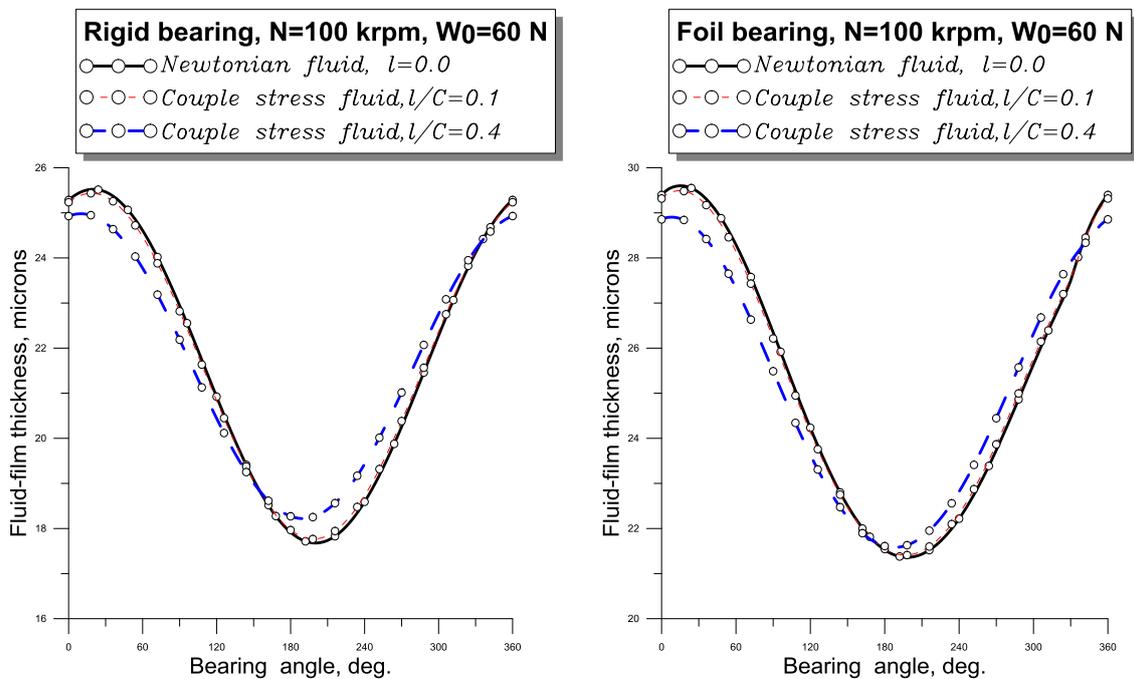


### b) Palier lourdement chargé

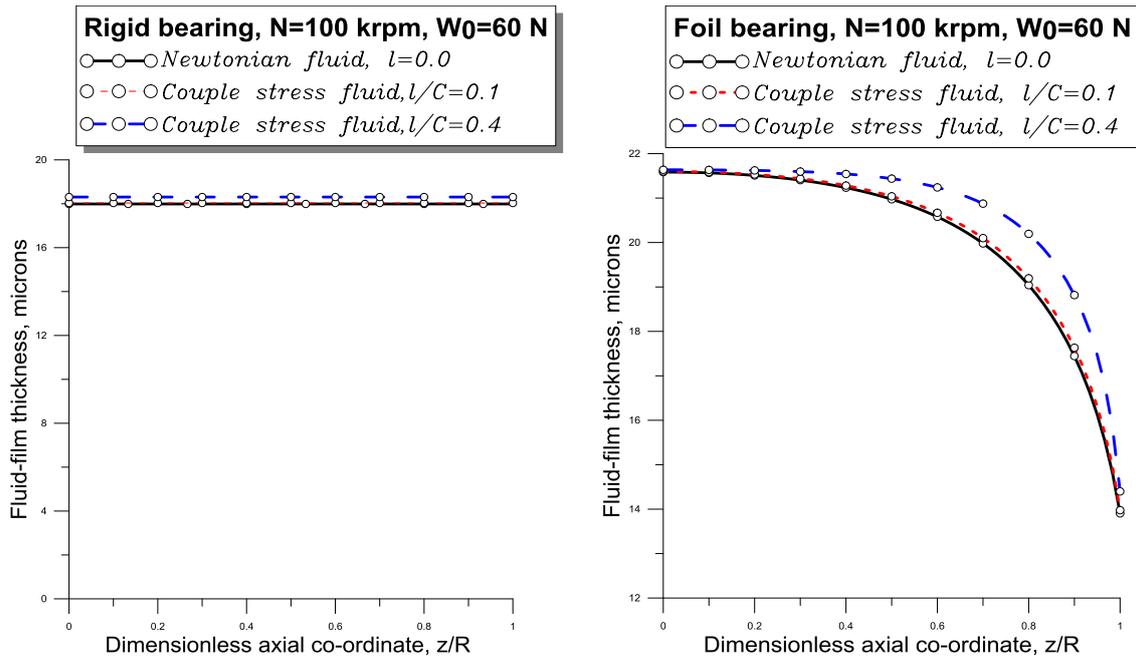


**Figure V.7 :** Evolution de l'excentricité relative statique des paliers rigides et des paliers à feuilles avec la vitesse de rotation pour différentes valeurs du paramètre du couple des contraintes.

Les figures (V.8) et (V.9) présentent la comparaison de la géométrie du film entre un palier à feuilles et un palier rigide de même taille fonctionnant à la même vitesse de rotation pour différentes valeurs du paramètre du couple de contraintes. On constate que la géométrie du film est affectée de manière sensible sur toute la surface portante du palier par la présence des couples de contraintes dans le fluide, surtout pour les grandes valeurs du paramètre du couple de contraintes. L'augmentation de l'épaisseur minimale du film explique la chute de pression illustrée par les figures (V.5 et V6). On peut conclure que les couples de contraintes produisent une épaisseur de film d'air supérieure à celle prédite par la théorie de la mécanique des milieux continus classique, en particulier pour le palier à feuilles compliant. Cela permet au palier de fonctionner en toute sécurité sans aucun dommage dû au contact métal -métal, etc.

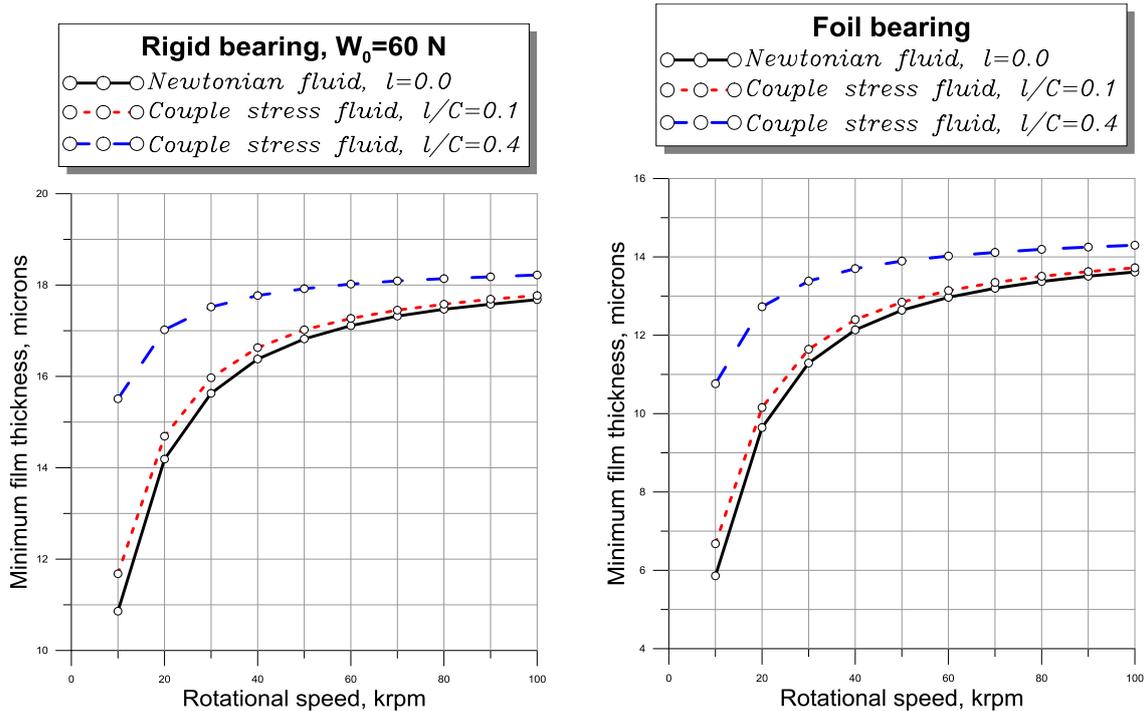


**Figure V.8 :** Distribution statique de l'épaisseur du film de gaz le long de la direction circonférentielle au niveau du plan médian du palier pour différentes valeurs du paramètre de couples des contraintes.

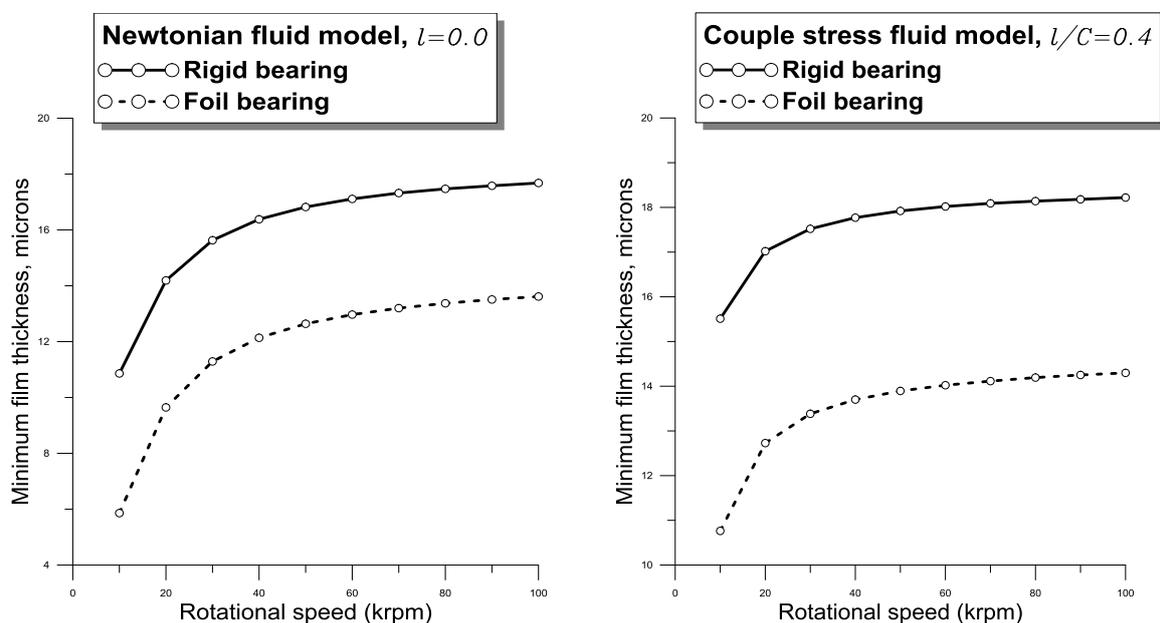


**Figure V.9 :** Distribution de l'épaisseur du film statique le long de la direction axiale dans le plan de la pression maximale pour différentes valeurs du paramètre des couples des contraintes.

La figure (V.10) montre l'épaisseur minimale du film calculée sur une plage de vitesses de rotation du rotor pour les paliers rigide et à feuilles soumis à la même charge statique  $W_0$ . Comme le montre cette figure, l'épaisseur minimale du film calculée pour les deux paliers est largement améliorée par la présence des couples de contraintes même pour des vitesses de rotation faibles. Pour la même vitesse, la valeur de l'épaisseur minimale du film pour un palier rigide est supérieure à celle d'un palier à feuilles et l'augmentation est plus prononcée pour les valeurs élevées de  $l$  qui représente la taille caractéristique des particules solides présentes dans le lubrifiant comme le montre clairement la figure (V. 11). L'augmentation de l'épaisseur minimale du film avec la vitesse du rotor est principalement due à la diminution de l'excentricité de fonctionnement car le système fonctionne avec une charge imposée (problème inverse) et non avec une excentricité imposée (problème direct).

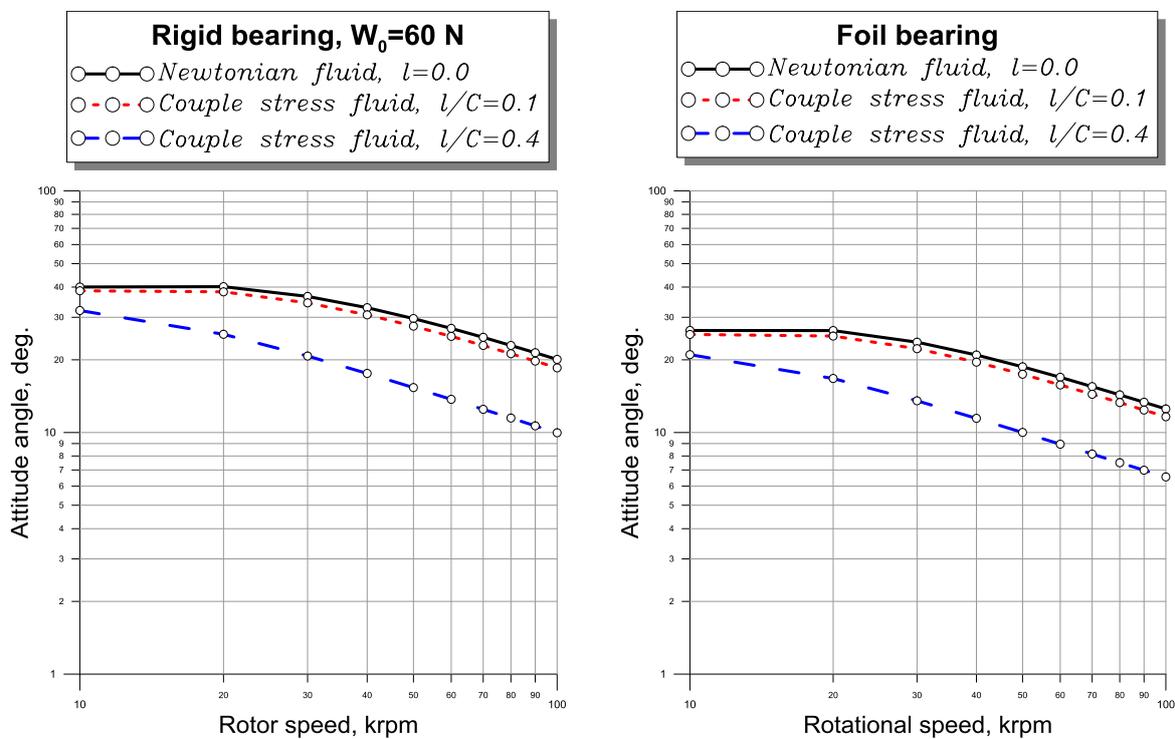


**Figure V.10 :** Evolution de l'épaisseur minimale du film des paliers rigide et à feuilles sur une plage de vitesses de rotation calculée pour différentes valeurs du paramètre des couples des contraintes.

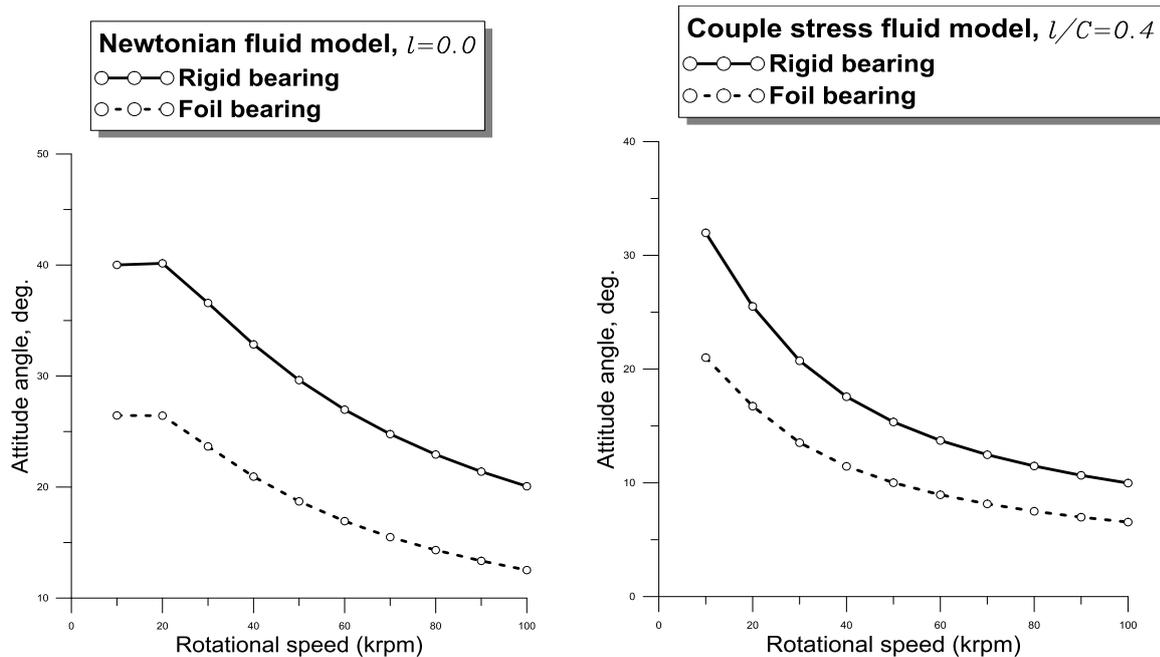


**Figure V.11 :** Comparaison de l'épaisseur minimale du film entre les paliers rigide et à feuilles calculée en fonction de de la vitesse de rotation pour les fluides newtonien et à couple de contrainte.

La figure (V. 12) montre la variation de l'angle de calage statique en fonction de la vitesse de rotation pour différentes valeurs du paramètre de couple de contraintes, les lignes en trait continu pour le fluide non polaire ou newtonien et les lignes en tirets pour le cas polaire ou non newtonien. Cette figure montre que l'effet des couples de contraintes entraîne une diminution de la valeur de l'angle de calage, en particulier à grande vitesse. Notons que l'angle de calage du palier à feuilles compliant est nettement inférieur à celui d'un palier rigide sur l'ensemble des vitesses simulées, comme le montre la figure (V.13). Nous concluons que les couples de contraintes donnent des angles de calage plus faibles, ce qui se traduit par une meilleure stabilité du palier, en particulier lorsque les déformations élastiques des feuilles sont prises en compte.

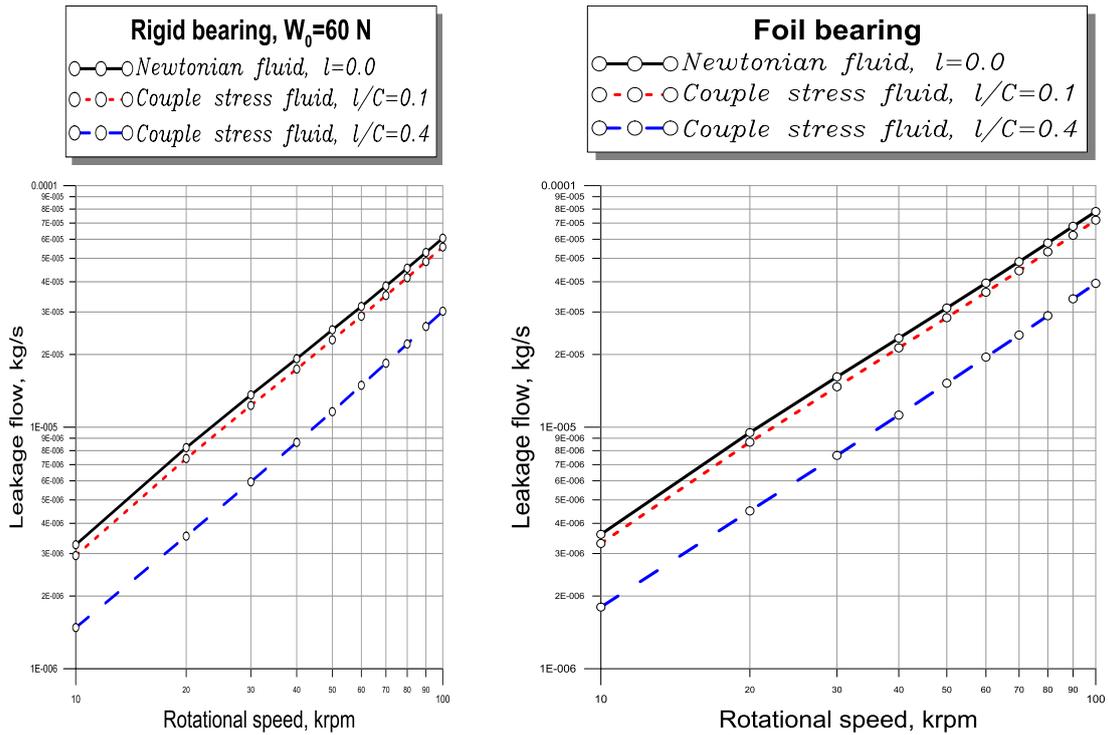


**Figure V. 12 :** Variations de l'angle de calage statique des paliers rigide et à feuilles en fonction de la vitesse de rotation pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes.

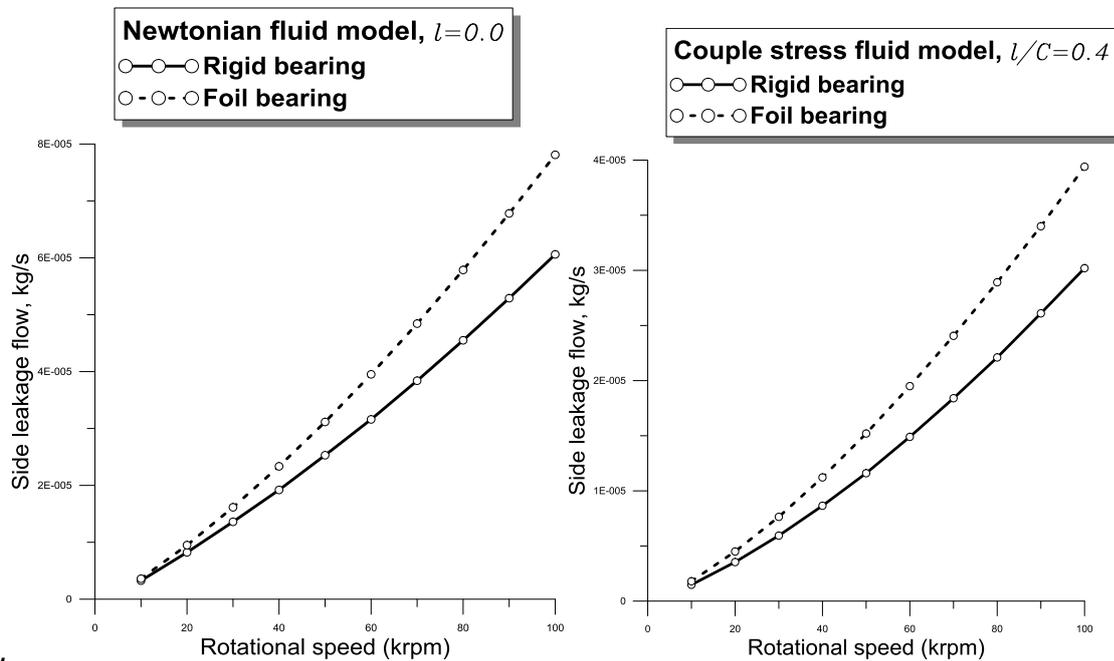


**Figure V. 13 :** *Comparaison des angles de calage entre les paliers rigide et à feuilles calculés en fonction de la vitesse de rotation pour les fluides Newtonien et à couple de contraintes.*

Les variations du débit de fuite latéral avec la vitesse de rotation pour différentes valeurs du couple de contraintes sont illustrées à la figure (V.14). L'écoulement axial de fuite est obtenu par intégration de la vitesse axiale moyenne de l'écoulement au niveau des bords libres du palier. Pour la même vitesse, l'écoulement latéral diminue avec l'augmentation du paramètre du couple de contraintes. Le débit latéral calculé pour un palier à feuille est plus important que celui obtenu pour un palier rigide tout au long des vitesses simulées de manière évidente en raison des déformations de la feuille, comme le montre la figure (V. 15).



**Fig. V.14** Variations du débit de fuite latéral des paliers rigide et à feuilles en fonction de la vitesse de rotation pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes

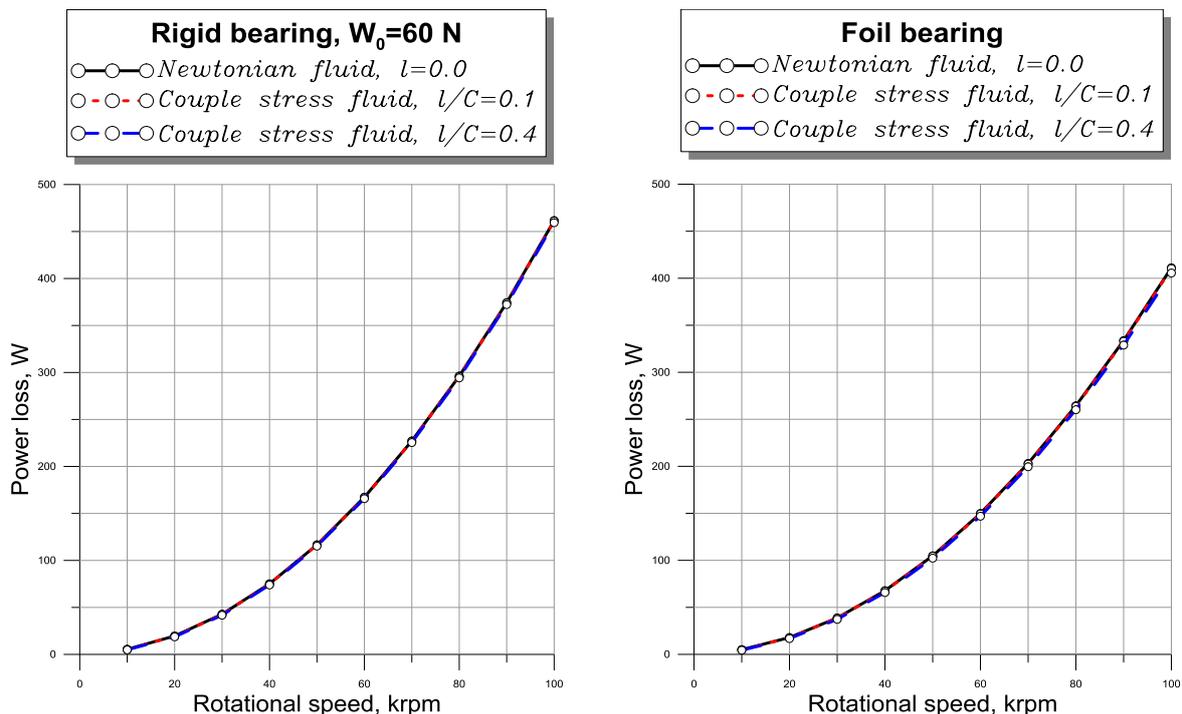


**Figure V. 15 :** Comparaison des débits de fuite latéraux entre un palier rigide et un palier à feuilles en fonction de la vitesse de rotation pour les fluides Newtoniens et à couple de contraintes

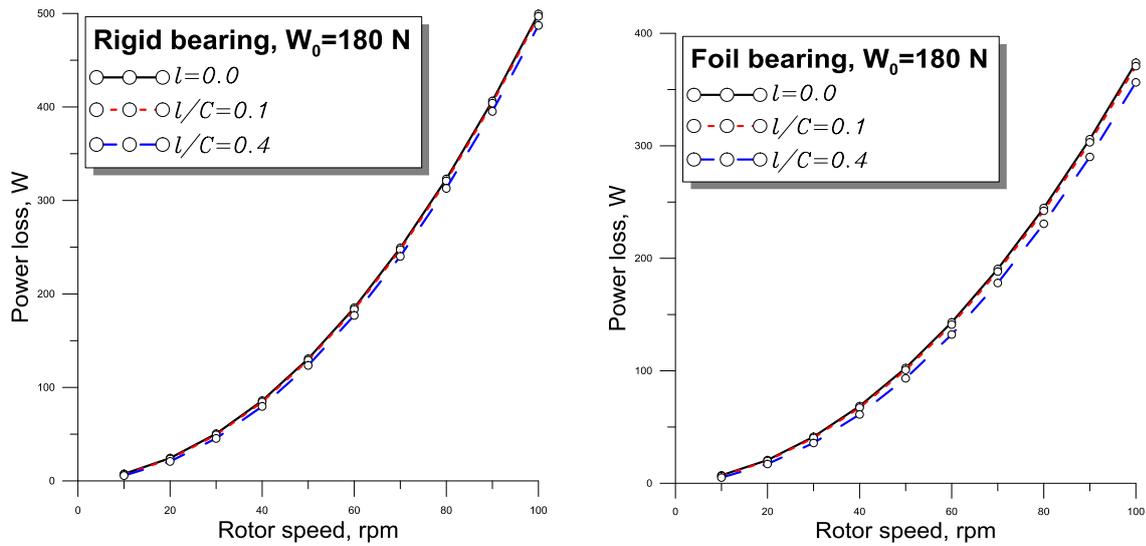
La figure (V.16) montre les variations de la puissance dissipée du film en fonction de la vitesse du rotor pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes considérées pour un palier modérément chargé et un palier fortement chargé. Cette figure montre que le palier à charge modérée n'affecte pas la puissance dissipée dans les deux paliers rigide et compliant. Cependant, pour les fortes sollicitations, l'effet des couples de contraintes entraîne une diminution de la valeur de la puissance dissipée, en particulier à des vitesses de rotor plus élevées. De plus, l'élasticité des feuilles conduit à des puissances dissipées légèrement inférieures à celles obtenues dans le cas rigide, comme le montre la figure (V.17). Ces résultats sont qualitativement en accord avec ceux obtenus pour les paliers lubrifiés par des liquides [2].

Rappelons que la puissance dissipée est obtenue par intégration de la fonction de dissipation visqueuse apparaissant dans le second membre de l'équation d'énergie modifiée sur le volume de fluide contenu dans l'espace de jeu des paliers.

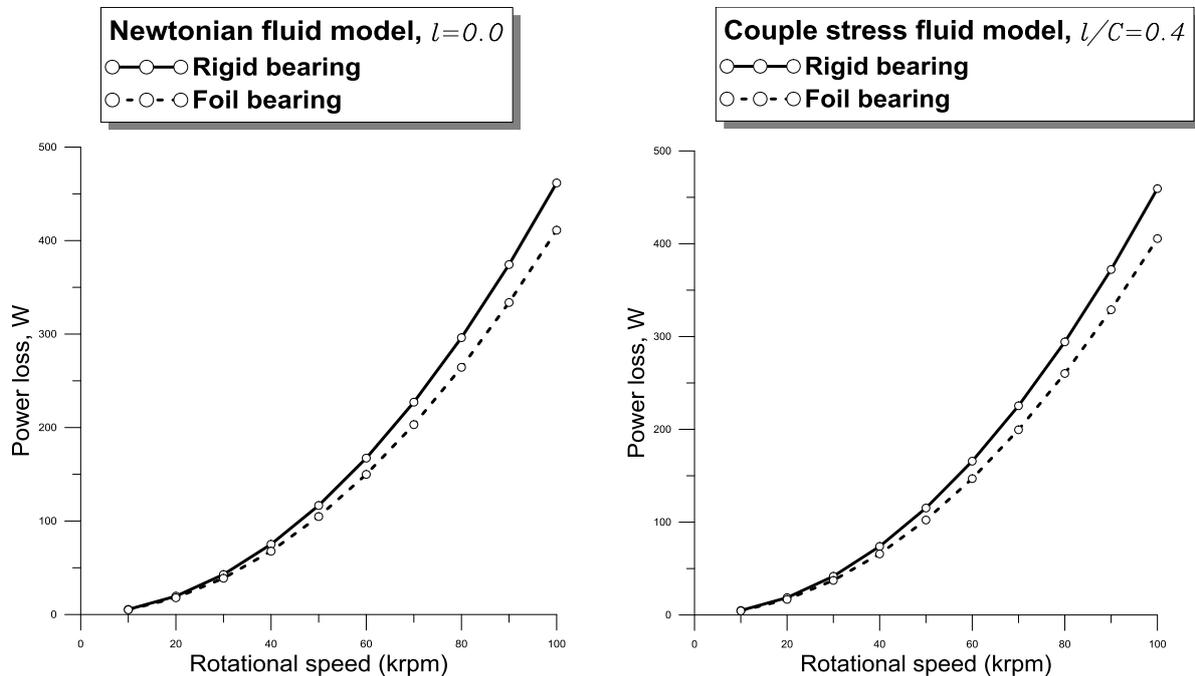
#### a) Palier modérément chargé



### b) Palier lourdement chargé



**Fig. V.16 :** Variations de la puissance dissipée des paliers rigide et à feuilles en fonction de la vitesse de rotation pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes.

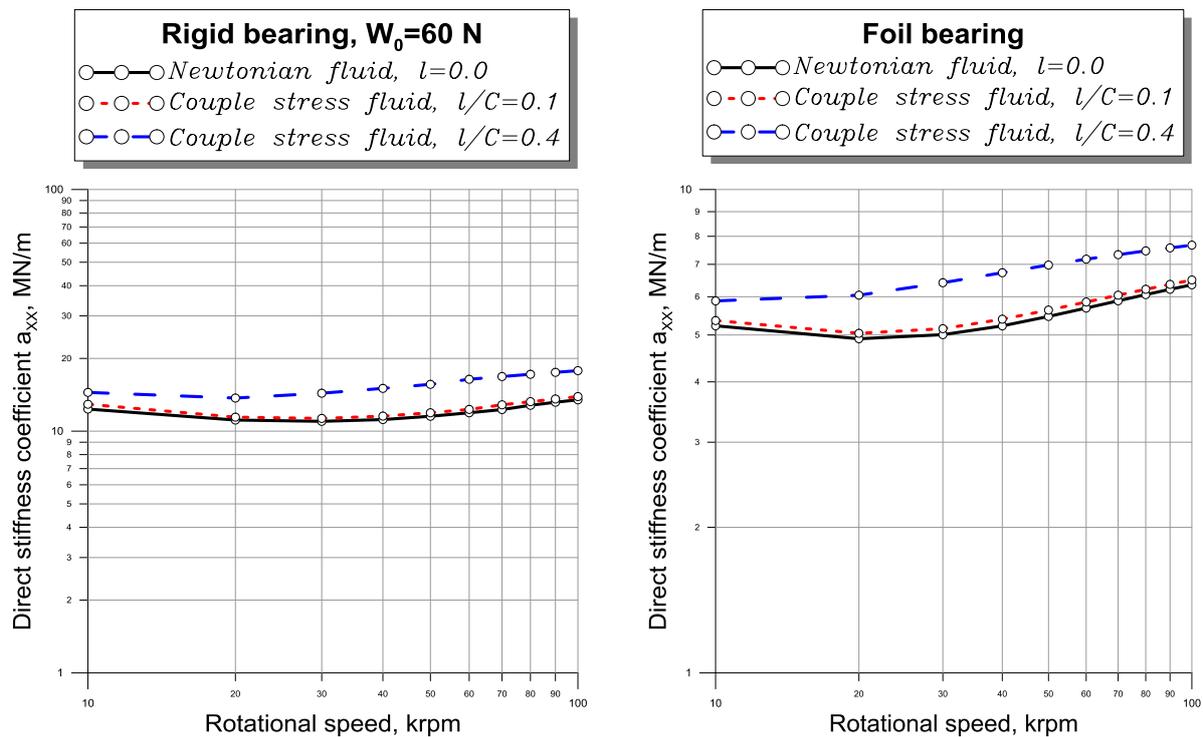


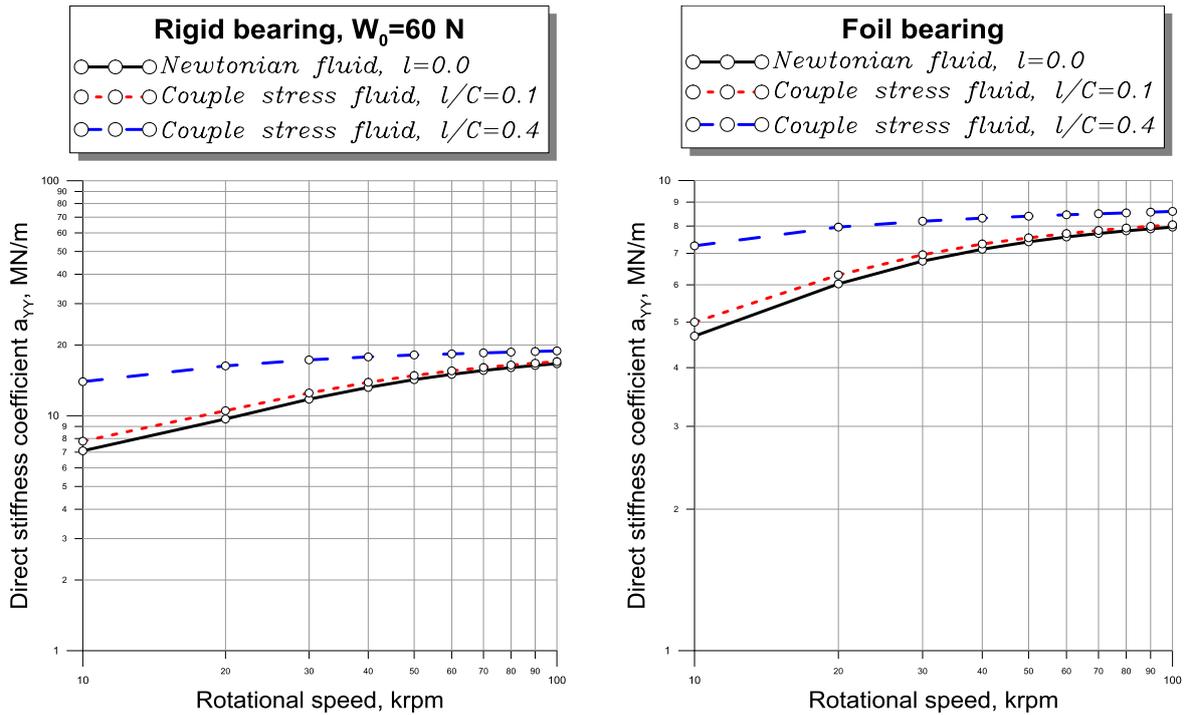
**Figure V.17 :** Comparaison des puissances dissipées entre les paliers rigide et à feuilles calculées sur une plage de vitesses de rotation pour les fluides newtonien et à couple de contraintes.

### V.6.3. Effets des couples de contraintes sur les coefficients dynamiques du film d'air

Sur la figure (V.18), les coefficients de raideur directe synchrones d'un palier rigide et d'un palier à feuilles sont présentés en fonction de la vitesse du rotor. Pour le palier à feuilles, tous les coefficients dynamiques sont calculés en tenant compte des déformations statiques et dynamiques des feuilles.

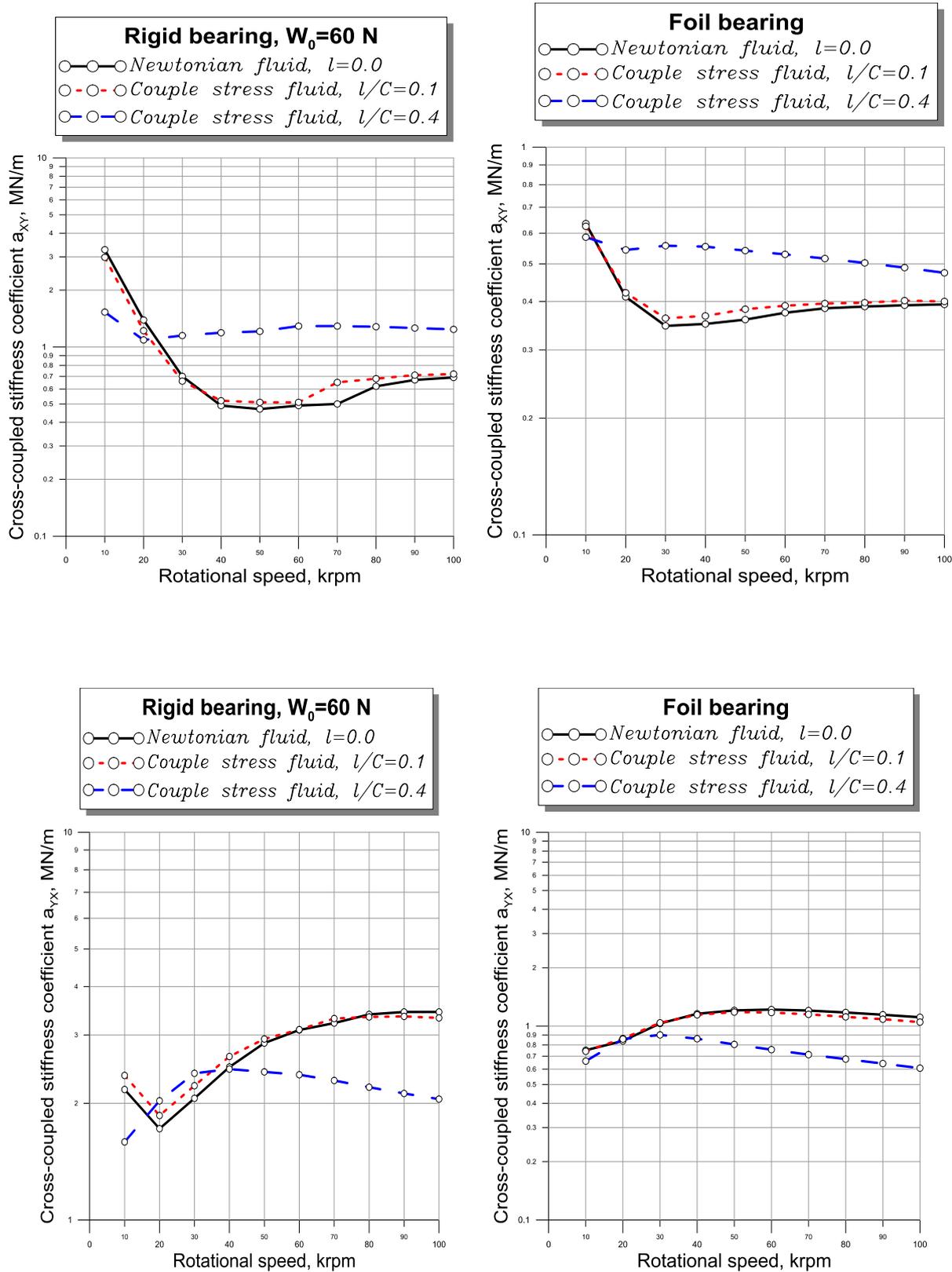
Les résultats montrent que les coefficients de raideur directe augmentent de façon monotone avec la vitesse de rotation des deux paliers lubrifiés avec des fluides polaire et non polaire. Pour la même vitesse, la rigidité directe dans la direction de la charge statique (axe X) est toujours inférieure à la rigidité directe dans la direction non chargée (axe Y). En revanche, les deux coefficients de raideur directe  $a_{XX}$  et  $a_{YY}$  augmentent à mesure que le paramètre du couple de contraintes  $l$  augmente sur toute la plage de vitesses de rotation étudiées.





**Figure V.18 :** Evolution des coefficients de rigidité directe synchrone des paliers rigide et à feuilles en fonction de la vitesse de rotation pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes.

La figure (V.19) montre l'évolution des coefficients de raideur synchrones croisés  $a_{xy}$  et  $a_{yx}$  en fonction de la vitesse de rotation pour les paliers rigide et à feuilles. Ces coefficients sont nettement inférieurs aux coefficients de raideur directe sur toute la plage de vitesses du rotor simulée. Comme représenté sur la figure (V. 19), les déformations statiques et dynamiques de la feuille ondulée affectent de manière significative les coefficients de raideur croisés transversalement, même lorsque le palier est lubrifié par un fluide à couple de contraintes.

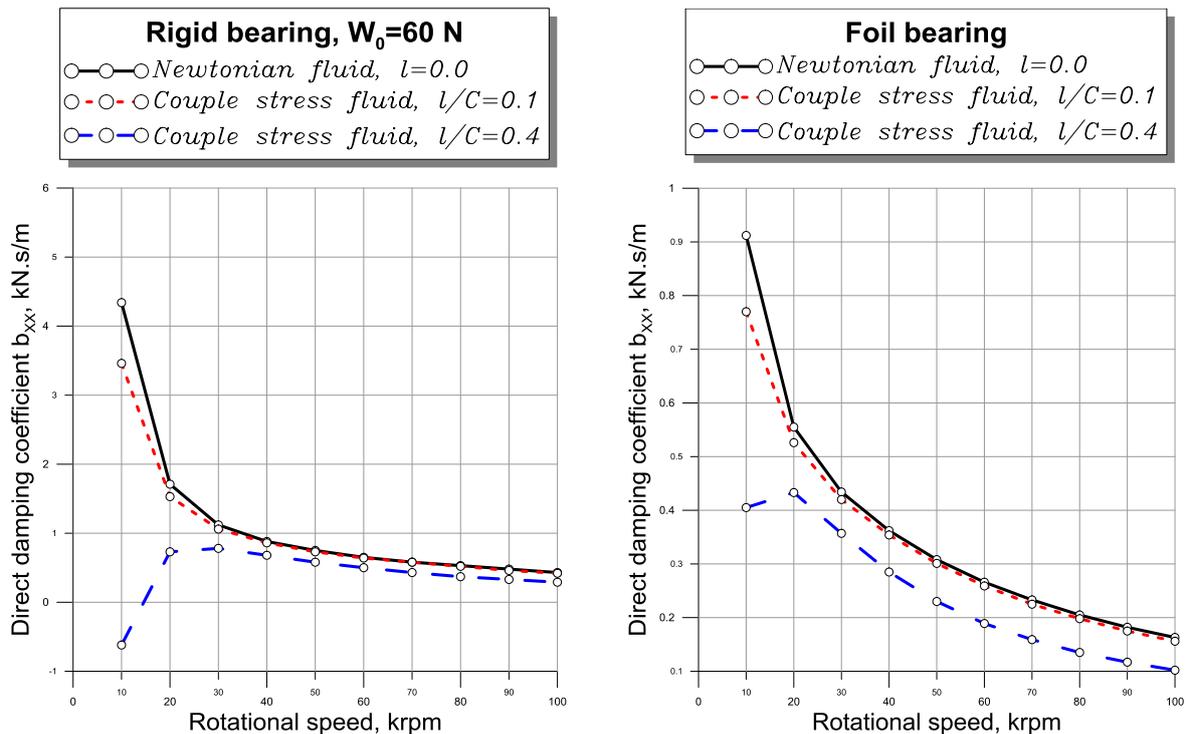


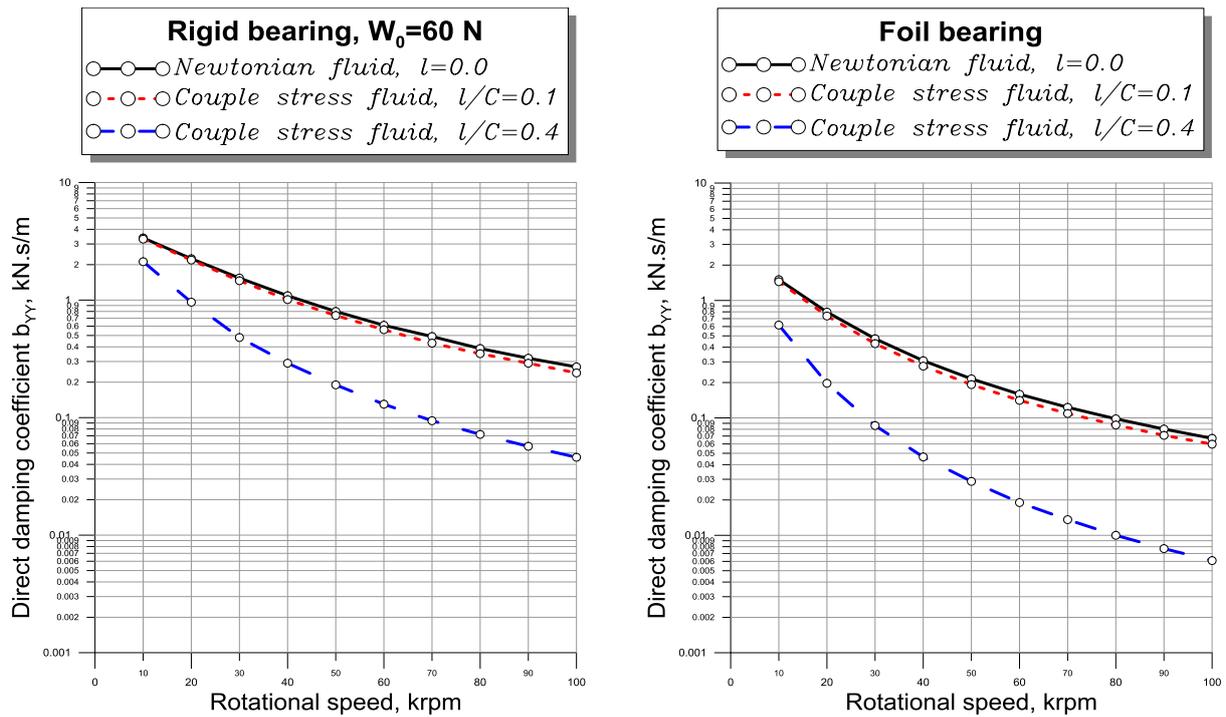
**Figure V.19 :** Evolution des coefficients de rigidité croisés, synchrone, des paliers rigide et à feuilles, en fonction de la vitesse de rotation pour diverses valeurs du paramètre des couples de contraintes.

Sur les figures (V.20 et V.21), les coefficients d'amortissement synchrones directs et croisés d'un palier rigide et d'un palier à feuilles de même taille sont présentés en fonction de la vitesse de rotation du rotor. Les résultats montrent que les coefficients d'amortissement diminuent tous de manière monotone avec l'augmentation de la vitesse du rotor pour les deux paliers en utilisant soit des fluides non polaire (newtonien) ou à couple de contraintes comme lubrifiants.

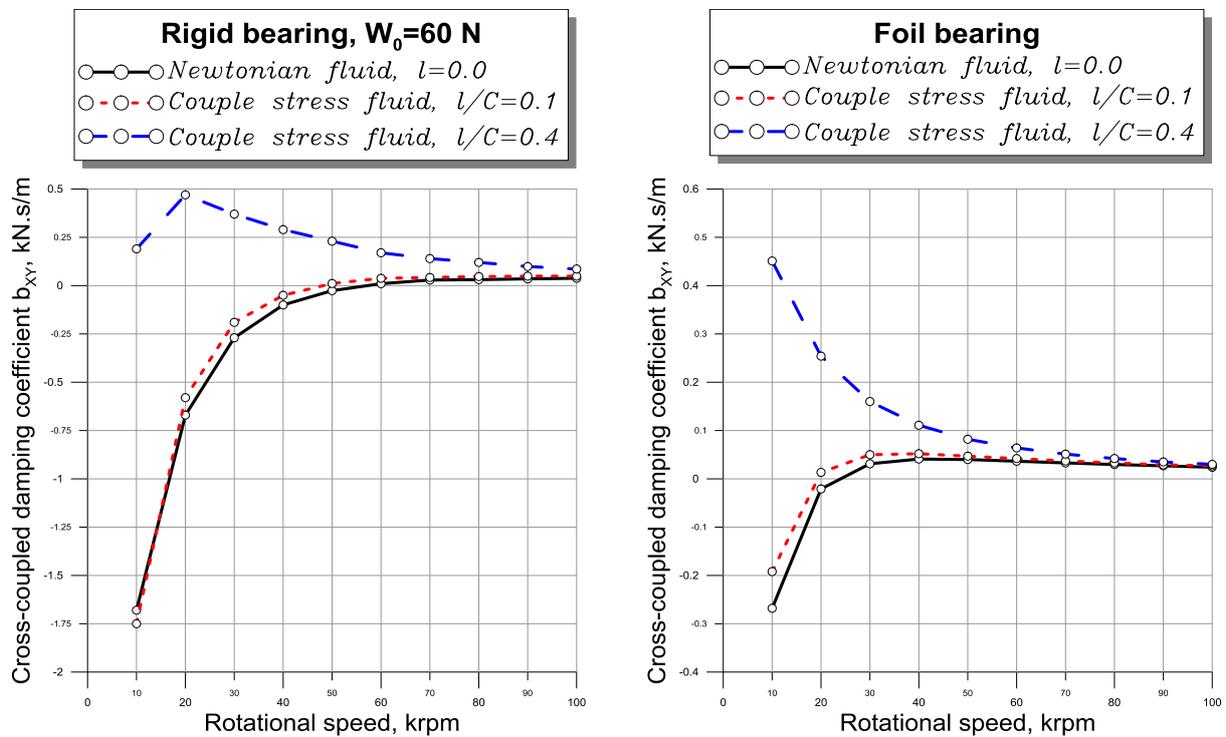
Le coefficient d'amortissement croisé  $b_{XY}$  calculé pour un fluide newtonien est négatif, tandis que celui calculé pour un fluide polaire avec une valeur du paramètre de couple de contraintes plus élevée ( $\tilde{l} = 0.4$ ) est positif sur toute la plage des vitesses du rotor.

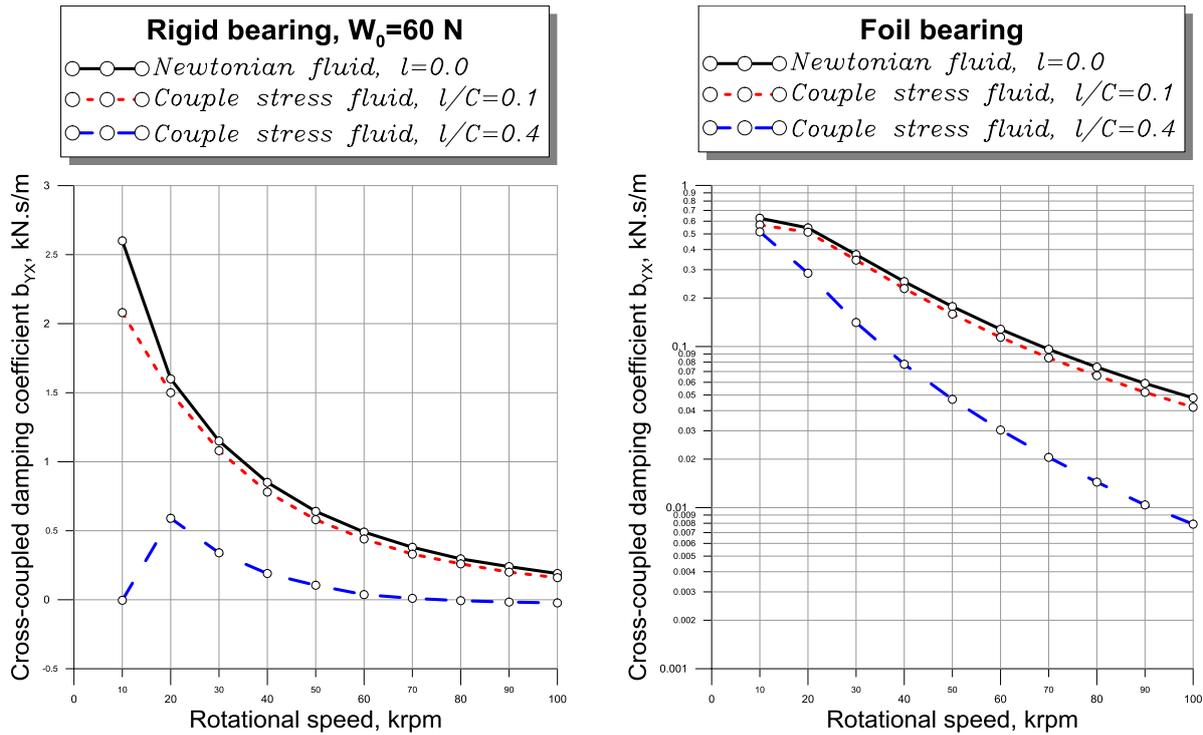
Pour la même vitesse, les coefficients d'amortissement  $b_{XX}$ ,  $b_{YY}$ , et  $b_{YX}$  calculés pour un fluide polaire avec une valeur du couple de contrainte plus élevée sont inférieurs à ceux obtenus pour un fluide non polaire (newtonien) dans les paliers rigide et à feuilles.





**Figure V. 20 :** Evolution des coefficients d'amortissement directs synchrones des paliers à film d'air rigide et à feuilles en fonction la vitesse de rotation pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes.





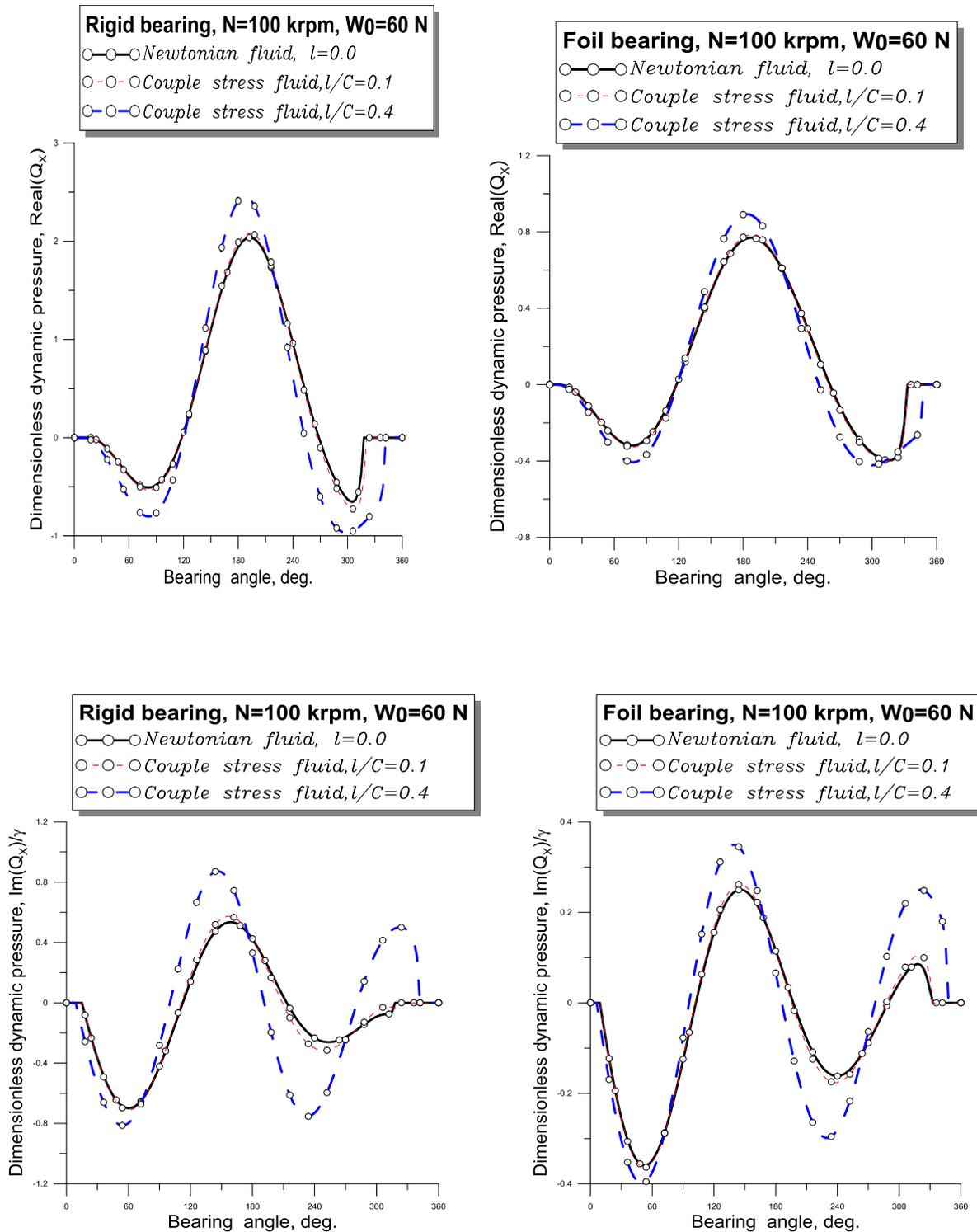
**Figure V.21 :** Evolution des coefficients d'amortissement croisés des paliers rigide et à feuilles, en fonction de la vitesse de rotation pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes

Dans les figures (V.22 et V. 23), nous comparons les distributions des parties réelles et imaginaires des pressions dynamiques complexes sans dimension  $Q_x$  et  $Q_y$  calculées pour les paliers rigides et compliants lubrifiés avec des fluides newtonien et à couple de contrainte. Comme on le constate en régime permanent, les déformations élastiques de la feuille affectent également les valeurs maximales et minimales des deux pressions dynamiques, et cet effet est plus prononcé lorsque la déformation dynamique est considérée en plus de la déformation statique.

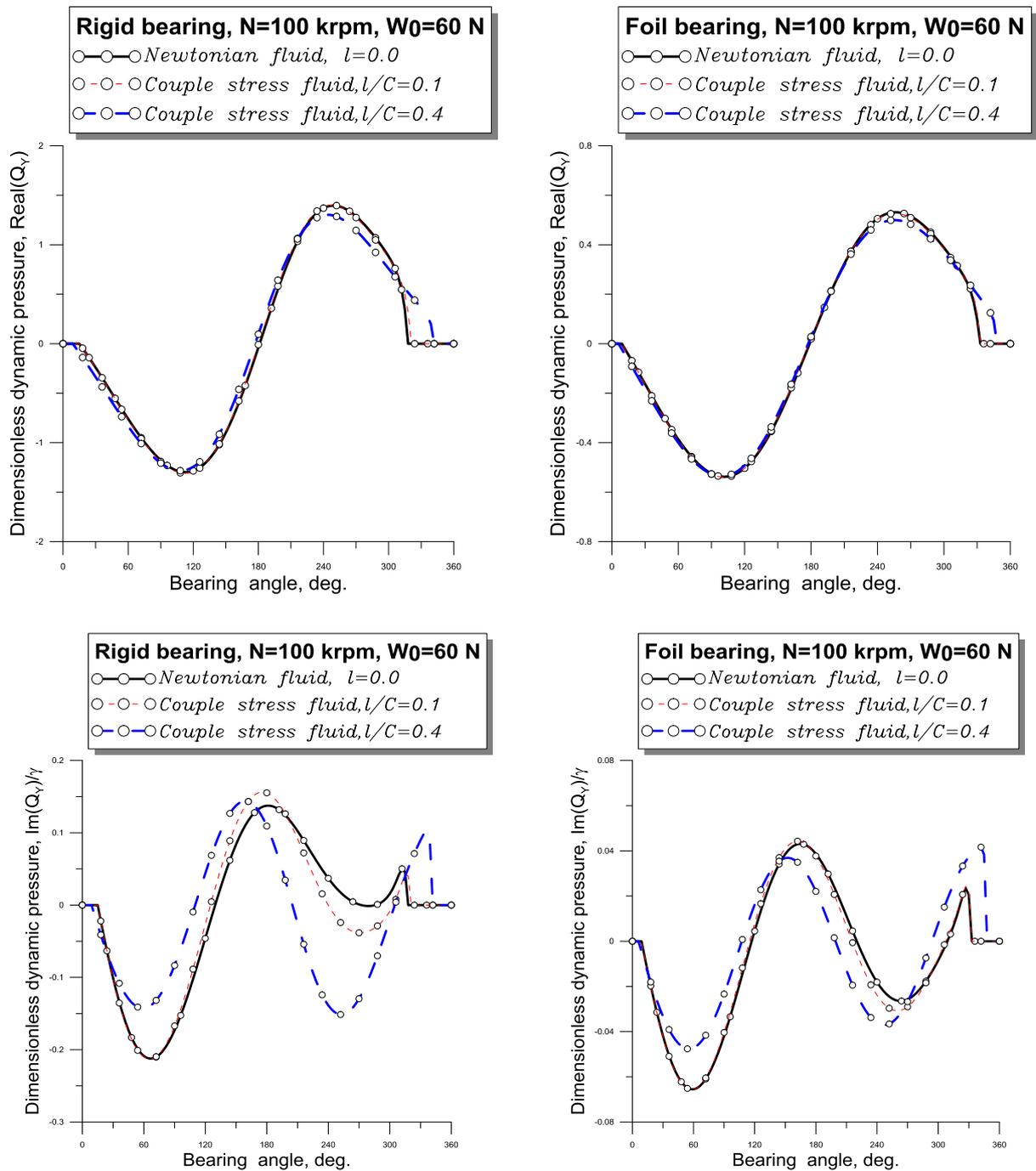
On voit que les pressions dynamiques sont toutes significativement affectées par les couples de contraintes sauf la partie réelle de  $Q_y$  ou  $P_y$  qui est la pression dynamique dans la direction non chargée du palier.

Il convient de noter que les pressions dynamiques ont été calculées sur une région codée pour laquelle la pression statique est supérieure à la pression ambiante. L'intégration numérique des pressions dynamiques sur la surface du palier nous permet de déterminer les impédances complexes du palier pour une valeur donnée de la fréquence de fouettement. Ces coefficients serviront de prédire la réponse dynamique

du palier ou la stabilité dynamique du palier au moyen du critère de stabilité de Routh-Hurwitz ou de Lund simplifié.



**Fig. V. 22** Variations circonférentielles dans le plan médian du palier des parties réelles et imaginaires de la pression complexe sans dimension  $Q_x$  des paliers rigide et à feuilles calculées pour  $\gamma = 1$  (excitation synchrone) pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes.



**Figure V. 23** Variations circonférentielles dans plan médian du palier des parties réelles et imaginaires de la pression complexe sans dimension  $Q_y$  des paliers rigide et à feuilles calculées pour  $\gamma = 1$  (excitation synchrone) pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes.

Sur les figures (V.24 et V.25), les coefficients de rigidité et d'amortissement sont présentés en fonction du rapport de fréquence de fouettement à la fois pour les paliers rigide et à feuilles en utilisant des fluides newtoniens et polaires comme lubrifiants. La vitesse du rotor est de 100 krpm et la charge appliquée est de 60 N.

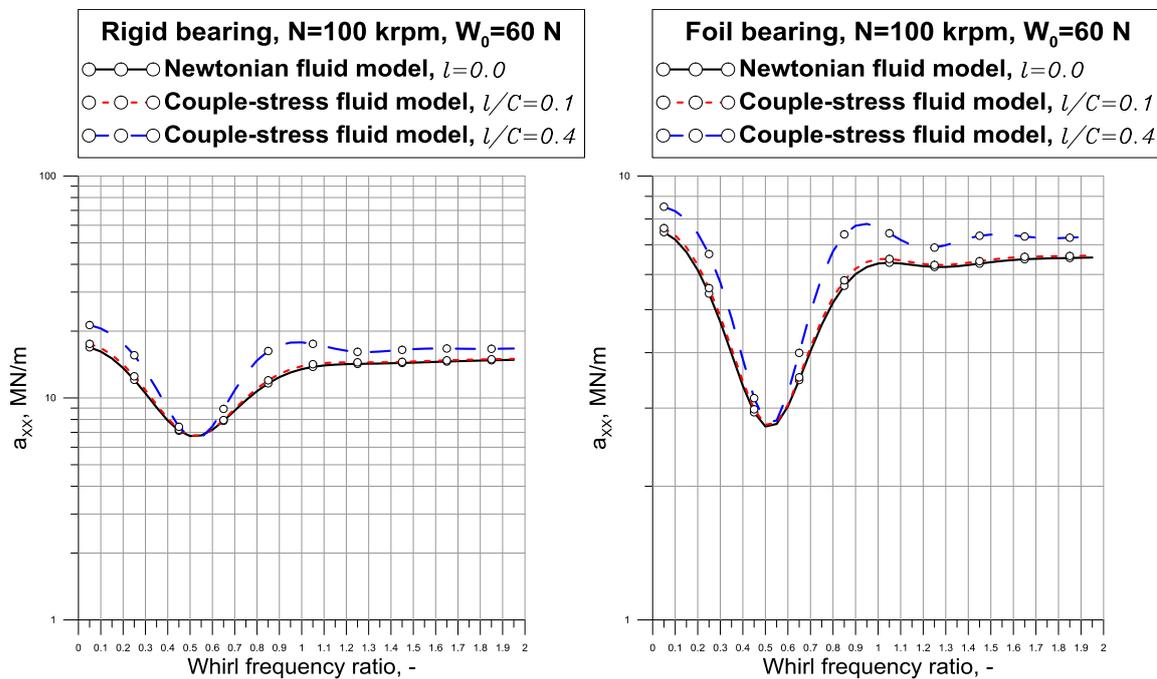
Sur les figures (V.24 et V.25), les résultats montrent que les quatre coefficients de rigidité se rapprochent asymptotiquement d'une valeur non nulle avec une fréquence de fouettement relative croissante  $\gamma$ . Cependant, nous observons une évolution non linéaire de ces coefficients pour des fréquences relatives inférieures.

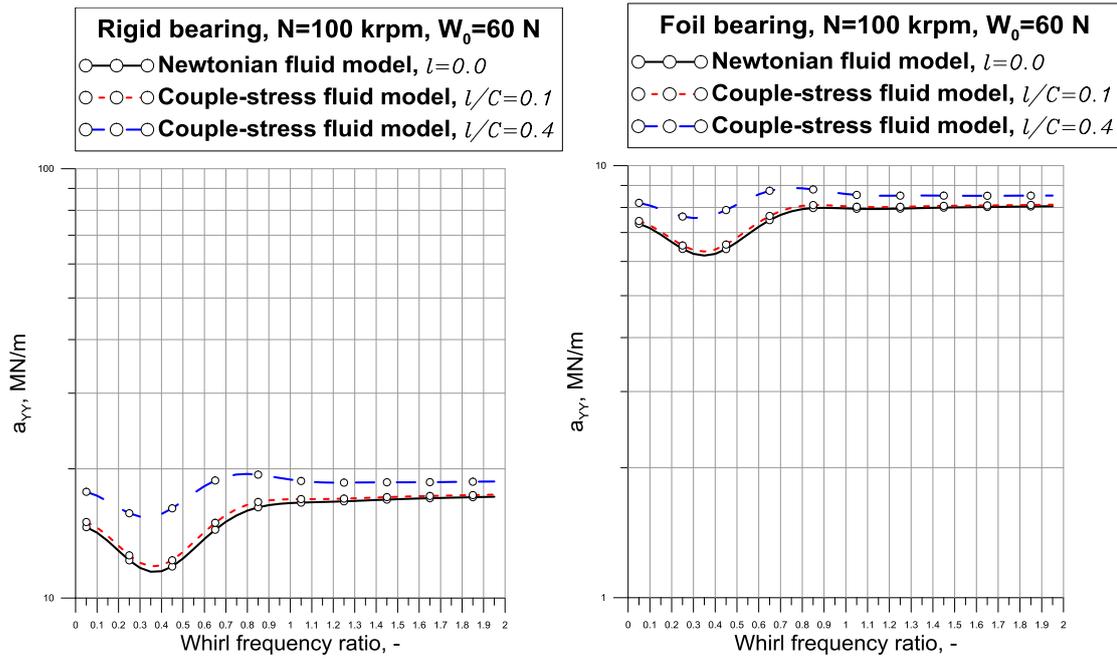
Pour les deux paliers, le coefficient de raideur directe dans la direction verticale ( $a_{XX}$ ) calculé pour différentes valeurs du paramètre de couple des contraintes diminue lorsque la fréquence de fouettement relative augmente de 0 à environ 0,5 (figure V. 24). À ce stade, le coefficient atteint sa valeur minimale et augmente avec de nouvelles augmentations de fréquence de fouettement relative.

La tendance similaire est observée pour le coefficient de raideur directe dans la direction horizontale ( $a_{YY}$ ) et la rigidité croisée ( $a_{XY}$ ) obtenue pour différentes valeurs du paramètre de couple de contraintes figures (V.24 et V. 25). À l'inverse, le coefficient de rigidité croisée ( $a_{YX}$ ) atteint son maximum deux fois pour les basses fréquences relatives (figure V.25).

a) Palier rigide

b) Palier à feuilles compliant

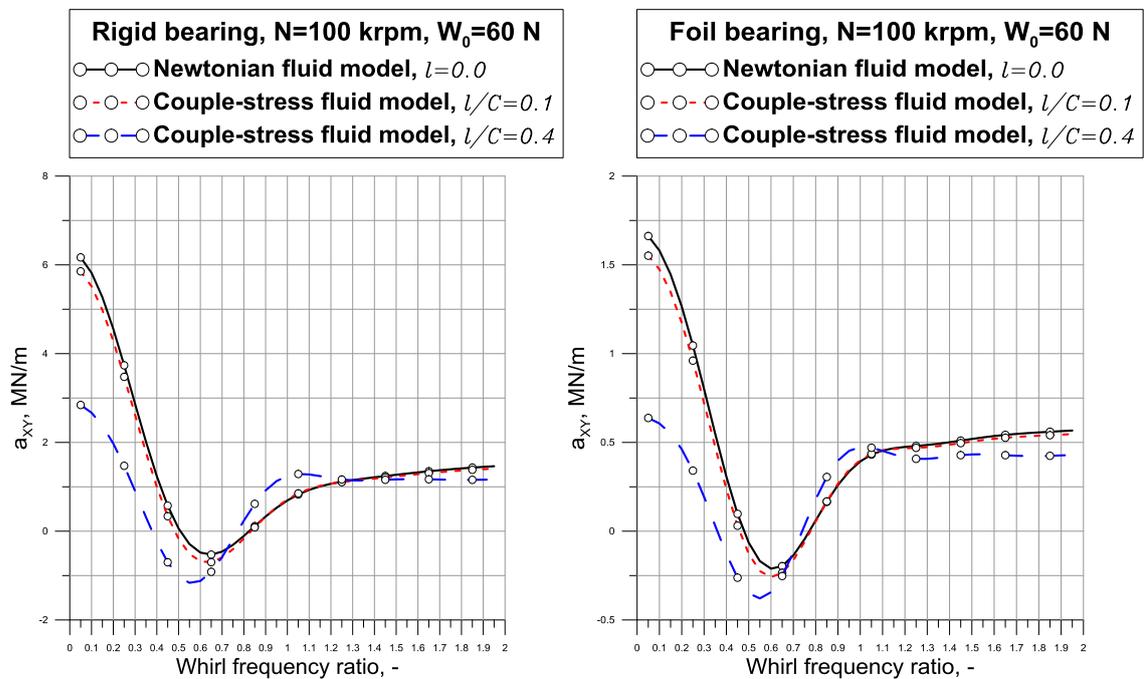


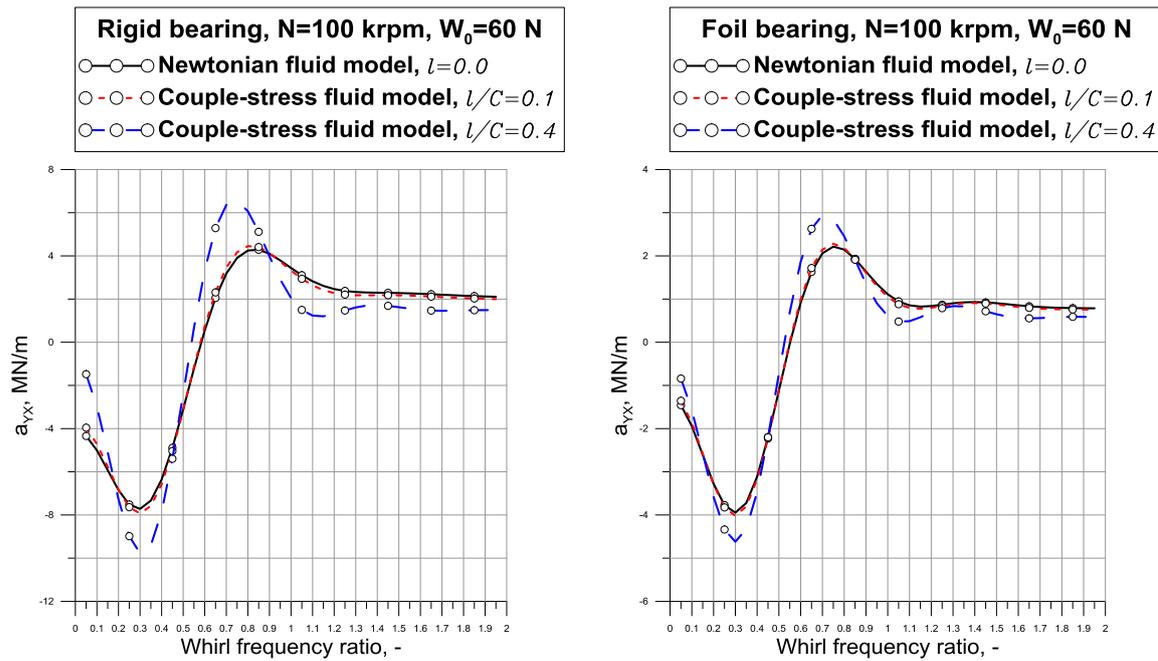


**Fig. V. 24** Coefficients de rigidité directe des paliers rigide et à feuille calculés sur une plage de fréquences de fouettement relatives pour différentes valeurs du paramètre du couple des contraintes.

a) Palier rigide

b) palier à feuilles compliant





**Figure. V.25** Coefficients de rigidité croisés des paliers rigides et à feuilles calculés sur une plage de fréquences de fouettement pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes.

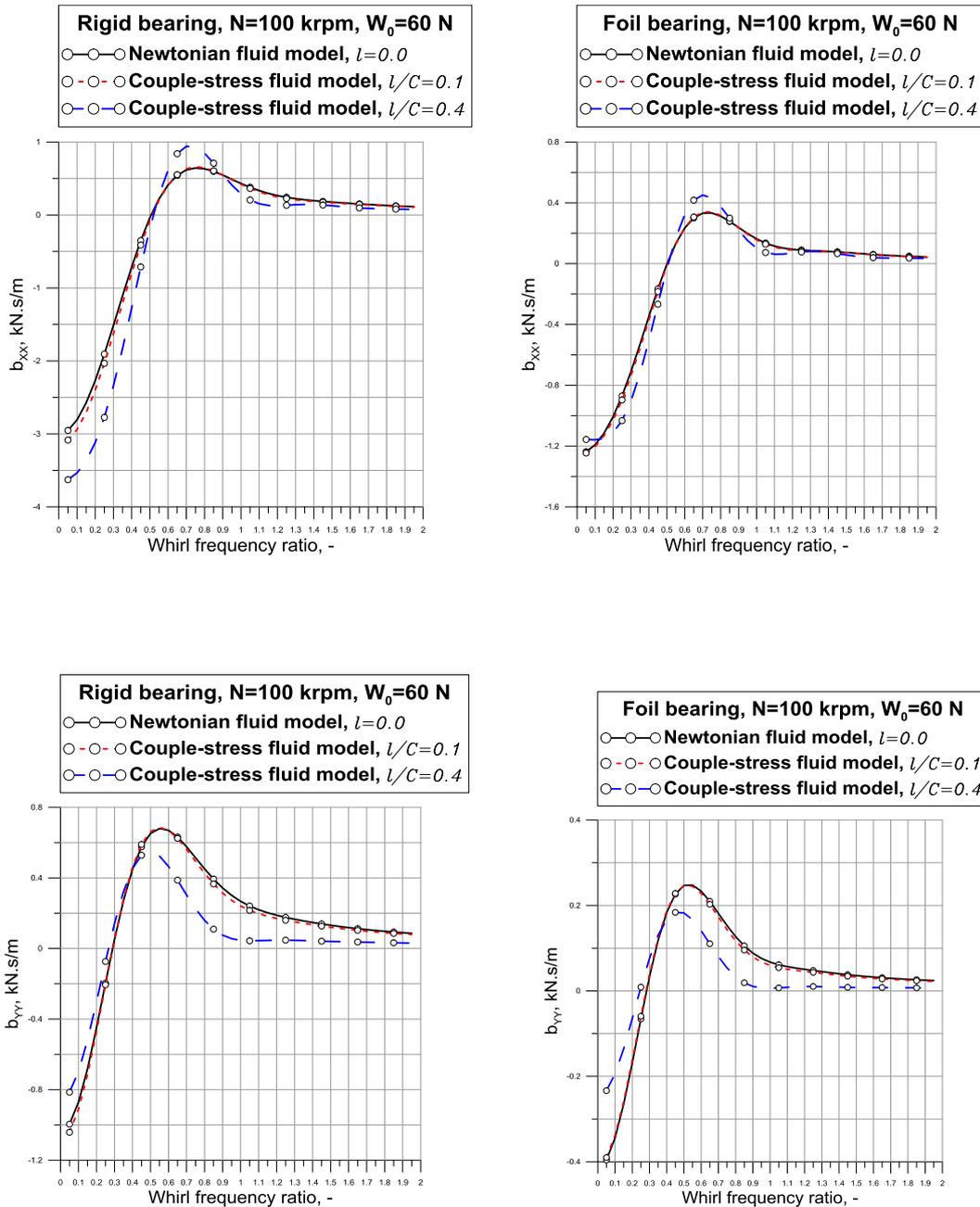
Les coefficients d'amortissement présentés sur les figures (V.26 et V.27) diminuent avec l'augmentation de fréquence de fouettement relative  $\gamma$  et disparaissent lorsque la fréquence de fouettement tend vers l'infini. Le coefficient d'amortissement direct dans la direction verticale ( $b_{xx}$ ) est le plus grand.

De plus, les valeurs des coefficients d'amortissement ( $b_{xy}$  et  $b_{yx}$ ) diffèrent sensiblement les uns des autres, même pour le palier rigide. Par conséquent, la matrice d'amortissement apparaissant dans les équations de la dynamique de rotation est anti-symétrique pour les paliers rigides et à feuilles.

On observe que tous les coefficients dynamiques sont sensiblement affectés par la présence des couples de contraintes sur une gamme de fréquences de fouettement simulées, en particulier pour des valeurs plus élevées du paramètre du couple de contraintes.

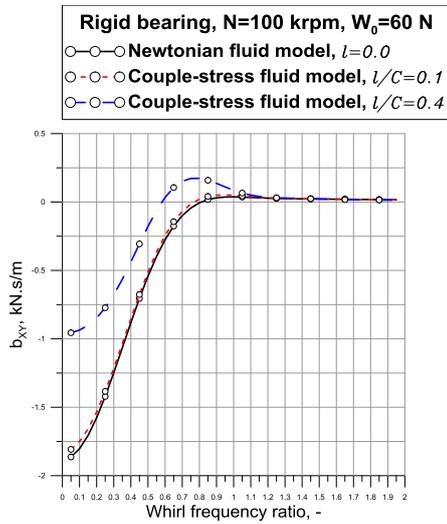
a) Palier rigide

b) Palier à feuilles compliant

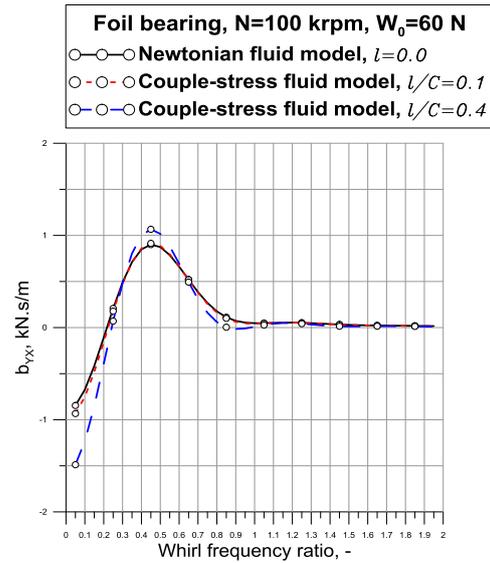
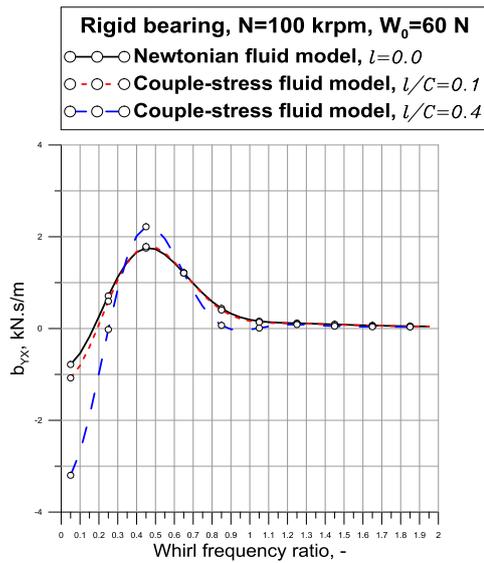
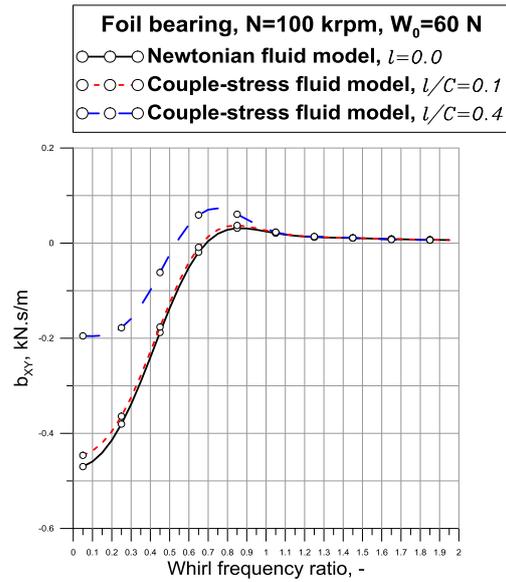


**Figure V.26 :** Evolutions des coefficients d'amortissement directs des paliers rigides et des paliers à feuille calculés sur une plage de fréquences de fouettement relatives pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes.

a) Palier rigide



b) Palier à feuilles compliant



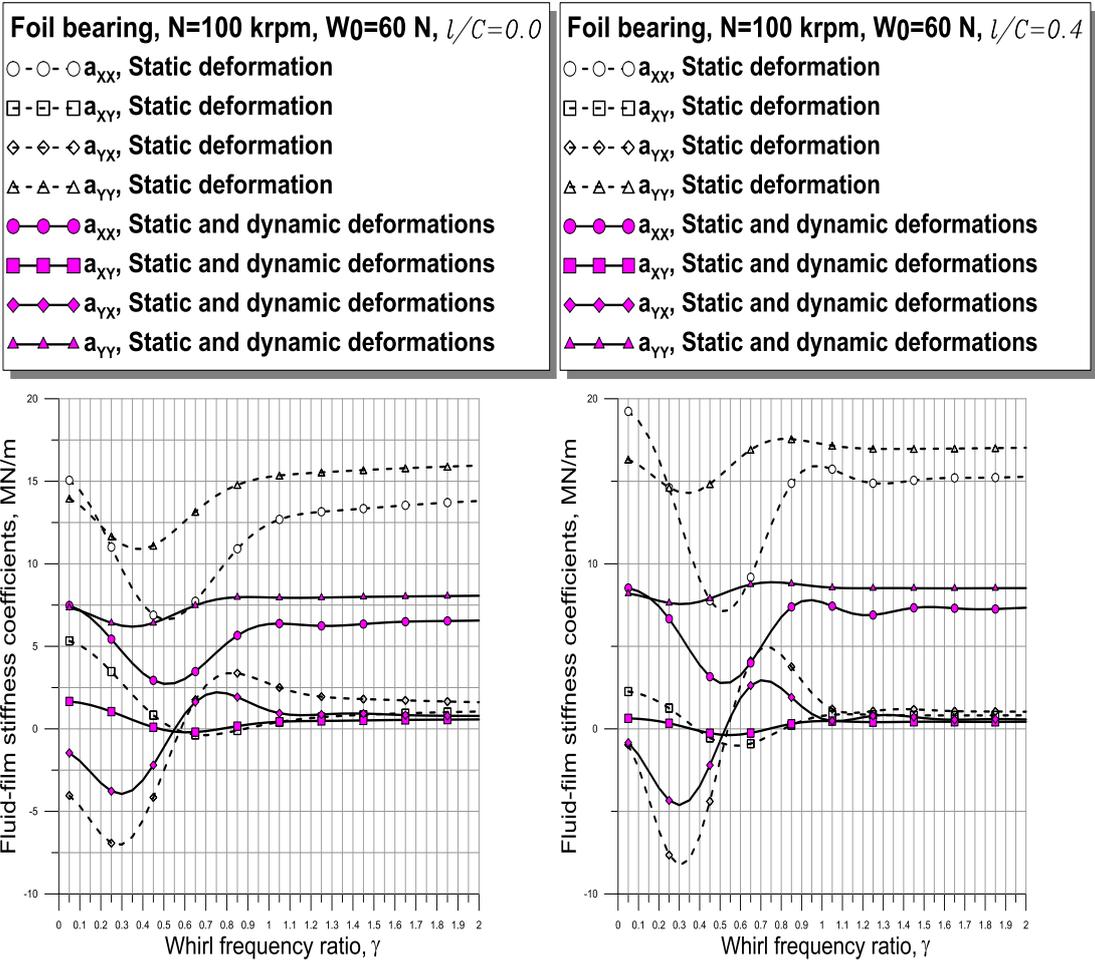
**Figure V. 27 :** Evolutions des coefficients d'amortissement croisés des paliers rigides et des paliers à feuilles calculés sur une plage de fréquences de fouettement relatives pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes.

Sur les figures (V.28 et V.29), les coefficients de rigidité et d'amortissement calculés pour un palier à feuilles compliant lubrifié avec des fluides newtoniens ( $\bar{l} = 0.$ ) et avec un fluide à couple de contraintes ( $\bar{l} = 0.4$ ) sont représentés en fonction de la fréquence d'excitation relative. Les calculs sont effectués en considérant uniquement la déformation statique ou les déformations statique et dynamique des feuilles. La vitesse du rotor et la charge statique appliquée sont respectivement de 100 krpm et 60 N.

Nous observons que les déformations élastiques des feuilles affectent significativement les huit coefficients dynamiques sur toute la plage des fréquences d'excitation, et cet effet est plus prononcé lorsque la déformation dynamique est considérée en plus de la déformation statique. Par rapport aux résultats obtenus pour un palier à feuilles et ne tenant compte que de la déformation statique, la prise en compte de la déformation dynamique des feuille entraîne une réduction importante des coefficients de rigidité et d'amortissement. Il est à conclure que la déformation dynamique des feuilles doit être prise en compte dans les calculs des performances des palies aérodynamiques à feuilles.

a) Fluide Newtonien

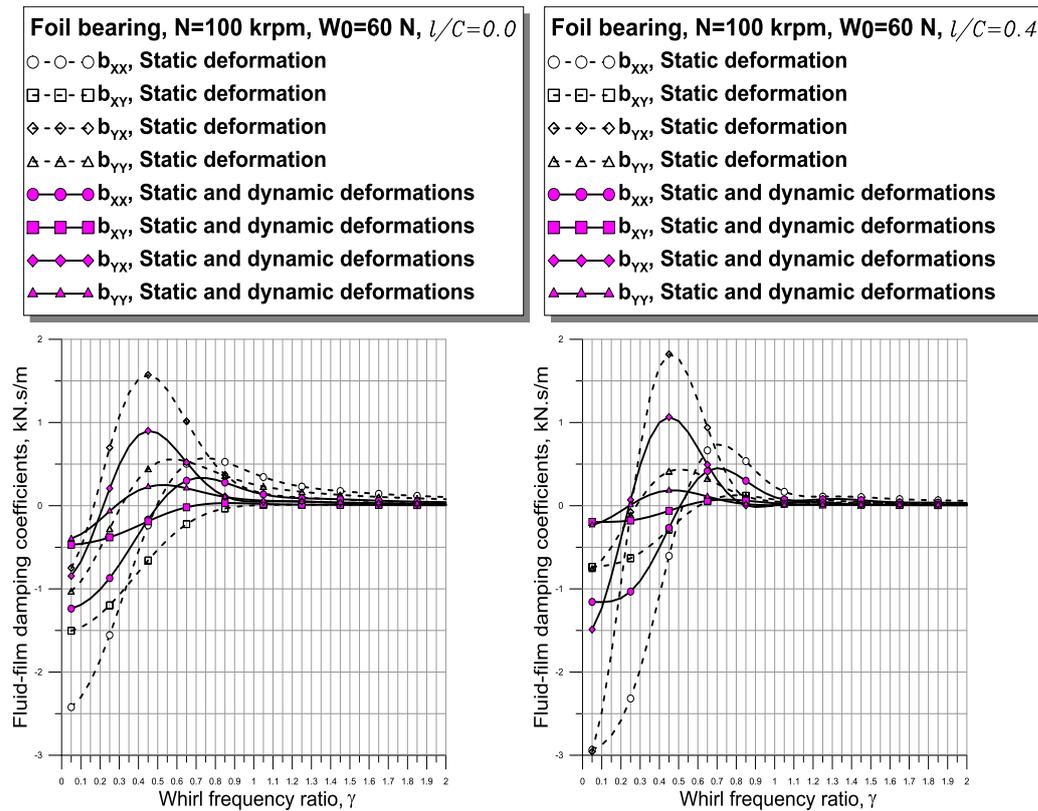
b) Fluide polaire



**Figure V. 28 :** Evolutions des coefficients de rigidité d'un palier à feuilles lubrifiés par des fluides newtonien et non newtonien à couple de contraintes en fonction de la fréquence de fouettement relative avec et sans déformations dynamiques des feuilles..

a) Fluide Newtonien

b) Fluide polaire



**Figure V. 29 :** Evolutions des coefficients d'amortissement d'un palier lubrifié par des fluides newtonien et non newtonien à couple de contraintes en fonction de la fréquence de fouetttement relative avec et sans déformations dynamiques des feuilles.

## V.7. Conclusion

Les effets des couples de contraintes dans un palier aérodynamique à feuilles de première génération statiquement chargé en utilisant la théorie du micro-continuum de V.K. Stokes ont été considérés. Le lubrifiant gazeux supposé pollué a été modélisé comme un fluide non-newtonien à couple de contrainte afin de prendre en compte les couples de contraintes en plus des forces de surface. Nous avons montré que ce modèle de fluide se caractérise par un tenseur de contrainte asymétrique composé de deux propriétés physiques,  $\mu$  et  $\eta$  désignant respectivement la viscosité dynamique classique et le coefficient supplémentaire spécifiant le caractère de couple de contraintes du fluide.

La méthode de perturbation analytique a été utilisée pour tenir compte des effets non négligeables de la fréquence de fouetttement et des déformations dynamiques des

feuilles sur les performances dynamiques de ces paliers. En utilisant la technique de la variable complexe, le processus de perturbation analytique de l'équation de Reynolds modifiée transitoire et les conditions aux limites associées conduit à deux équations aux dérivées partielles de premier ordre non couplées.

De plus, la méthode itérative de Newton-Raphson améliorée et amortie a été proposée pour résoudre les équations d'équilibre afin de déterminer les coordonnées cartésiennes de la position d'équilibre pour une charge statique appliquée donnée.

Pour les paliers à feuilles lubrifiés par de l'air contaminé modélisé comme fluide à couple de contraintes ou fluide polaire, les conclusions suivantes peuvent être tirées:

- 1- lorsque le palier fonctionne à charge imposée, le pic de pression statique diminue avec le paramètre du couple de contraintes.
- 2- L'angle statique  $\theta_{sub}$  pour lequel la pression statique devient inférieure à la pression atmosphérique augmente avec l'augmentation du paramètre du couple de contraintes.
- 3- Les couples de contraintes produisent des épaisseurs de film d'air supérieures à celles prédites par la théorie non polaire, en particulier pour les paliers à feuille compliant, même pour des vitesses de rotation faibles.
- 4- La présence de couples de contraintes donne des angles de calage plus petits, en particulier pour les paliers à feuilles souples fonctionnant à des vitesses élevées.
- 5-- Le débit de fuite latéral diminue lorsque le paramètre du couple de contraintes augmente.
- 6- Les couples de contraintes permettent de réduire les pertes par frottements, surtout si le palier est fortement sollicité.
- 7- Les coefficients de raideur directe augmentent lorsque le paramètre du couple de contraintes augmente.
- 8- Les coefficients d'amortissement calculés pour les fluides polaires avec un paramètre du couple de contraintes plus élevé sont inférieurs à ceux obtenus pour un fluide non polaire (newtonien).
- 9- Les déformations élastiques de la feuille ondulée affectent également les champs de pressions dynamiques, et cet effet est plus prononcé lorsque la déformation dynamique est considérée en plus de la déformation statique.

10- Les pressions dynamiques sont toutes significativement affectées par les couples de contraintes sauf  $P_Y$  qui est la pression dynamique dans la direction non chargée.

11- On constate que les coefficients dynamiques sont tous sensiblement affectés par la présence des couples de contraintes sur une gamme de fréquences de fouettement étudiées, en particulier pour les valeurs plus élevées du paramètre des couples de contraintes.

12- La prise en compte de la déformation dynamique des feuilles entraîne une réduction importante des coefficients de rigidité et d'amortissement.

On peut conclure de ce qui précède que les fluides pollués ou mélangés à des microparticules solides sont de meilleurs lubrifiants pour les paliers aérodynamiques. Les résultats montrent également que la déformation dynamique des feuilles doit être prise en compte dans le calcul des performances dynamiques des paliers aérodynamiques à feuilles.

## CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Dans cette recherche, nous nous sommes intéressés à l'étude théorique des effets de la rhéologie des lubrifiants compressibles et incompressibles contenant des particules ou de polymères ainsi que les effets thermiques sur le comportement statique et dynamique des paliers fluides à géométrie rigide et déformable (compliant).

Ce travail comprend deux parties :

Dans la première partie, nous avons étudié les effets combinés du paramètre de couple des contraintes (fluide polaire), de la variation viscosité-pression (piézoviscosité) du fluide sur le comportement dynamique d'un palier de bielle compliant déformable d'un moteur à combustion interne par une approche thermique globale basée sur le concept de «température effective».

Le fluide utilisé pour lubrifier ces paliers a été modélisée comme étant un fluide à couple de contraintes afin de prendre en compte les couples de contraintes en plus des forces de surface dues à la présence de divers additifs de polymères. Ce modèle de fluide se caractérise par un tenseur de contraintes anti-symétrique et se caractérise par deux propriétés physiques,  $\mu$  et  $\eta$ , désignant respectivement la viscosité dynamique et le coefficient supplémentaire spécifiant le caractère de couple de contraintes du fluide. A ces deux coefficients, nous avons ajouté un troisième noté  $\alpha$  pour tenir compte de l'effet de piézo-viscosité. Comme le coefficient de piézo-viscosité  $\alpha$  est indépendant de la température dans le présent travail, les effets combinés de couple de contraintes de la piézo-viscosité sur la réponse dynamique de trois configurations de paliers de bielles revêtus ont été étudiés au travers une analyse isotherme. Ainsi, l'analyse thermique simplifiée a été considérée pour étudier les effets de couple de contraintes et d'élasticité sur le comportement dynamique de ces paliers. De plus, une méthode itérative de Newton-Raphson amortie et améliorée a été proposée pour résoudre les équations d'équilibre afin de déterminer les trajectoires du centre du maneton dans les paliers compliants en négligeant les forces d'inertie de celui-ci. Les résultats obtenus dans cette partie nous a permis d'aboutir aux conclusions suivantes :

1. L'équation de pression dérivée dans ce travail est plus générale que l'équation classique de Reynolds pour l'étude des paliers dynamiquement chargés revêtus d'une couche élastique lubrifiés par des fluides piézo-visqueux à couple de contraintes.

2. Avec les mêmes charges dynamiques appliquées, les fluides à couple de contraintes produisent une épaisseur de film d'huile minimum plus élevée et des orbites plus contractées que les fluides newtoniens. Ce résultat est d'une importance industrielle certaine.

3. Les effets de déformations élastiques se traduisent par une expansion de l'orbite et une diminution de la pression hydrodynamique maximale, en particulier pour les paliers compliant avec des revêtements à faible module d'élasticité (exemple le revêtement en PEHD).

4. Les effets thermiques donnent des orbites plus étendues et provoquent des baisses des puissances dissipées moyennes car elles induisent des températures plus élevées et par conséquent les viscosités des fluides diminuent sensiblement avec l'augmentation de la température.

5. Pour les cas étudiés, il a été trouvé que les effets de couple des contraintes sont plus importants que les effets piézo-visqueux.

La seconde partie de cette recherche est consacrée à l'étude des effets des couples de contraintes dans un palier aérodynamique à feuille de première génération dynamiquement chargé en utilisant la théorie du micro-continuum de V.K. Stokes. Le lubrifiant gazeux supposé pollué a été modélisé comme un fluide non-newtonien à couple de contrainte afin de prendre en compte les couples de contraintes dus à la présence des polluants solides dans l'air.

De même, le modèle de fluide compressible (gaz) se caractérise également par un tenseur de contrainte asymétrique composé de deux propriétés physiques,  $\mu$  et  $\eta$  désignant respectivement la viscosité dynamique classique et le coefficient supplémentaire spécifiant le caractère de couple des contrainte du fluide.

La méthode analytique de perturbation a été utilisée pour tenir compte des effets non négligeables de la fréquence d'excitation et des déformations dynamiques des feuilles sur les caractéristiques dynamiques de ces paliers. En utilisant la technique de la variable complexe, le processus de perturbation analytique de l'équation de Reynolds modifiée transitoire conduit à deux équations aux dérivées partielles de premier ordre non couplées. De plus, la méthode itérative de Newton-Raphson améliorée et relaxée a été proposée pour résoudre les équations d'équilibre afin de déterminer les

coordonnées cartésiennes de la position d'équilibre pour une charge statique appliquée donnée.

Les résultats obtenus par le programme ont abouti aux conclusions suivantes :

1- Lorsque le palier fonctionne à charge imposée, la pression statique maximale diminue avec l'augmentation du paramètre du couple de contraintes.

2- L'angle statique  $\theta_{sub}$  pour lequel la pression statique devient inférieure à la pression atmosphérique augmente avec l'augmentation du paramètre du couple de contraintes.

3- Le couple de contraintes produit des épaisseurs de film d'air supérieures à celles prédites par la théorie non polaire, en particulier pour les paliers à feuille compliants, même pour des vitesses de rotation faibles.

4- La présence de couples de contraintes donne des angles de calage plus petits, en particulier pour les paliers à feuilles compliants fonctionnant à des vitesses élevées.

5- Le débit de fuite latéral diminue lorsque le paramètre du couple de contraintes augmente.

6- Les couples de contraintes permettent de réduire les pertes par frottements, surtout si le palier est fortement sollicité.

7- Les coefficients de raideur directe augmentent avec le paramètre du couple de contraintes.

8- Les coefficients d'amortissement calculés pour les fluides polaires avec un paramètre du couple de contraintes plus élevé sont inférieurs à ceux obtenus pour un fluide non polaire (newtonien).

9- Les déformations élastiques de la feuille affectent également les champs de pressions dynamiques, et cet effet est plus prononcé lorsque la déformation dynamique est considérée en plus de la déformation statique.

10- Les pressions dynamiques sont toutes sensiblement affectées par le couple de contraintes sauf  $P_Y$  qui est la pression dynamique dans la direction non chargée.

11- On constate que les coefficients dynamiques sont tous significativement affectés par la présence de contraintes sur la gamme de fréquences

d'excitation étudiées ( $0,05 \leq \gamma \leq 2$ ), en particulier pour les valeurs plus élevées du paramètre de contrainte de couple.

12- La prise en compte de la déformation dynamique de la feuille entraîne une réduction importante des coefficients de rigidité et d'amortissement. Il convient de souligner que les déformations dynamiques induites par le mouvement vibratoire du rotor sont souvent ignorées par les auteurs dans les études de simulations dynamiques de ce type de paliers.

Il est à conclure que les fluides mélangés à des microparticules solides sont les meilleurs lubrifiants pour les paliers aérodynamiques à air. Les résultats montrent également que la déformation dynamique de la feuille doit être prise en compte dans le calcul des performances dynamiques des paliers aérodynamiques à feuilles.

Cette recherche nous a permis de mettre en évidence à travers les résultats obtenus les effets non négligeables de la rhéologie des lubrifiants compressible et incompressible contenant des particules ou des polymères ainsi que les effets thermiques sur le comportement statique & dynamique des paliers fluides compliants. Ces effets doivent être pris en considération lors de la conception des paliers à film fluide.

### **Perspectives**

Les prolongements de cette étude pouvant être envisagés sont :

■ Cas des paliers de tête de bielle :

- Etude locale du problème TEHD, fortement non linéaire.
- Prise en considération du mésalignement statique et dynamique.
- Utilisation des algorithmes de conservation pour bien définir la zone activée.

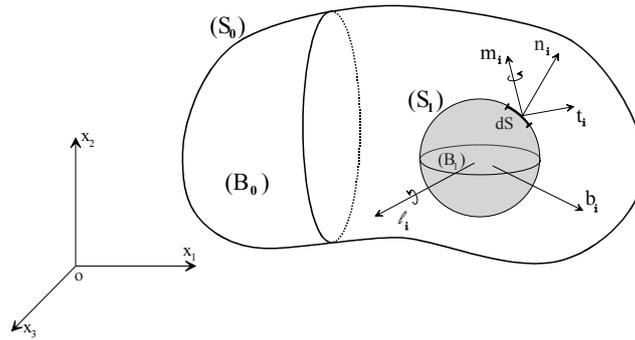
■ Cas des paliers à feuilles :

- Etude du comportement dynamique non linéaire du palier à feuilles.
- Prise en considération des effets thermiques et de la turbulence, et du mésalignement.
- Utilisation de la théorie du chaos pour l'étude de la stabilité dynamique non linéaire du système rotor-palier.

## Annexe A

### **Equations générales de la théorie du micro-continuum de V. K. Stokes pour les fluides compressibles**

Lorsque les forces du volume  $b_i$  et les couples de volume  $\ell_i$  par unité de masse du continuum sont considérés figure A1, le mouvement du fluide à couple de contraintes compressible isotrope et homogène est régi par les équations suivantes:



**Figure. A1 :** Bilan des forces et des couples agissant sur un volume élémentaire selon la théorie du micro-continuum de V. K. Stokes.

#### **Equation de continuité:**

Considérons une partie arbitraire d'un continuum (milieu fluide compressible) occupant un volume fixe ( $V$ ) délimité par la surface ( $S$ ) à la configuration actuelle à l'instant  $t$ . L'équation de continuité est :

$$\int_S \rho v_i n_i dS + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = 0 \quad (A1)$$

où  $\rho$  est la masse volumique et  $v_i$  le champ de vitesse du continuum en coordonnées cartésiennes. En appliquant le théorème de divergence, et en remarquant que le volume ( $V$ ) est arbitraire, on obtient la forme différentielle de l'équation de continuité:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho v_{i,i} = 0 \quad (A2)$$

ou  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j}$  présente la derive matérielle ou particulière ou encore totale et  $ij=1,2,3$

#### **Equations du mouvement :**

Les équations de bilan de mouvement linéaire et angulaire sont :

$$\int_S t_i^{(n)} dS + \int_V \rho b_i dV = \frac{D}{Dt} \int_V \rho v_i dV \quad (A3)$$

$$\int_S \left( \varepsilon_{ijk} x_j t_k^{(n)} + m_i^{(n)} \right) dS + \int_V \left( \varepsilon_{ijk} x_j \rho b_k + \rho c_i \right) dV = \frac{D}{Dt} \int_V \rho \varepsilon_{ijk} x_j v_k dV \quad (A4)$$

où  $t_i^{(n)} = T_{ji} n_j$  et  $m_i^{(n)} = M_{ji} n_j$  sont des vecteurs de force et de moment de traction, respectivement. Les forces de surface et les couples sont ensuite représentés par des tenseurs du second ordre non-symétriques  $T_{ji}$  et des couples de contraintes  $M_{ji}$ , respectivement.  $\varepsilon_{ijk}$  étant le tenseur de permutation de troisième ordre non symétrique ou le symbole de Levi-Cevita.

En appliquant le théorème de divergence pour les intégrales de surface et en remarquant que le volume  $V$  est arbitraire, nous obtenons la forme différentielle des équations des mouvements linéaires et angulaires:

$$T_{ji,j} + \rho b_i = \rho \frac{Dv_i}{Dt} \quad (A5)$$

$$M_{ji,j} + \varepsilon_{ijk} T_{jk} + \rho c_i = 0 \quad (A6)$$

où  $M_{ji} = -8\eta K_{ji} = 8\eta K_{ij} = 4\eta(\omega_{i,j} - \omega_{j,i})$  puisque  $K_{ij} = \omega_{[i,j]} = \frac{1}{2}(\omega_{i,j} - \omega_{j,i})$  qui est le tenseur de courbure antisymétrique.

Dans les équations suivantes ci-dessus, la virgule indique la différenciation partielle par rapport aux coordonnées spatiales ou eulériennes.

Le vecteur de spin  $\omega_i$  dual du tenseur de spin non symétrique  $\Omega_{ij}$  est défini par :

$$\omega_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} v_{k,j} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \Omega_{kj} \quad (A7)$$

Le bilan d'énergie basé sur la première loi de la thermodynamique polaire du continuum est

$$\frac{D}{Dt} \int_V \frac{1}{2} \rho v_i v_i dV + \frac{D}{Dt} \int_V \rho e dV = \int_S t_i^{(n)} v_i dS + \int_S m_i^{(n)} \omega_i dS + \int_V \rho b_i v_i dV + \int_V \rho c_i \omega_i dV - \int_S q_i n_i dS + \int_V \rho s dV \quad (A8)$$

où  $e$  est l'énergie interne par unite de masse,  $q_i$  est le vecteur du flux de chaleur, et  $s$  est la source de chaleur par unite de masse.

Cette équation montre que le taux de variation de l'énergie totale du système en volume  $V$  est équivalent à la puissance des forces et des couples externes, de la chaleur générée et de la chaleur introduite.

La forme différentielle de l'équation d'énergie est :

$$\rho \frac{De}{Dt} = T_{ji} D_{ij} + M_{ji} K_{ij} - q_{i,i} + \rho s \quad (A9)$$

où  $D_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i})$  est le tenseur des taux de déformation symétrique, et  $q_i = -kT_{,i}$  est la relation du Fourier.  $k$  et  $T$  étant respectivement la conductivité du fluide et la température du fluide.

Les termes  $\Phi_1 = T_{ji} D_{ij} = T_{(ji)} D_{ij}$  et  $\Phi_2 = M_{ji} K_{ij}$  sont respectivement appelés puissance de force de contraintes et couple de contraintes par unité de volume.

Pour un milieu sans source, l'équation d'énergie (A9) peut être réécrite comme suit:

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \beta T \frac{Dp}{Dt} + \nabla \cdot (k \nabla T) + \Phi \quad (A10)$$

$$\text{où } \Phi = \lambda D_{kk} D_{pp} + 2\mu D_{ij} D_{ij} + 16\eta K_i K_i \quad (A11)$$

et  $K_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \omega_{k,j} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} K_{kj} = \frac{1}{2} \Omega_{ji,j} = \frac{1}{4} v_{k,ki} - \frac{1}{4} \nabla^2 v_i = \frac{1}{4} v_{k,ki} - \frac{1}{4} v_{i,jj}$  est le vecteur du taux de courbure moyen.

$C_p$  et  $\beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$  sont respectivement la chaleur spécifique et la dilatation thermique du fluide à pression constante.

### **Equation constitutives :**

Nous pouvons démontrer que le tenseur de contraintes total peut être écrit ainsi: [9] chapitre V

$$T_{ji} = \underbrace{-p\delta_{ij} + \lambda D_{kk} \delta_{ij} + 2\mu D_{ij}}_{\text{Partie symétrique}} + \underbrace{2\eta \nabla^2 \Omega_{ji}}_{\text{Partie anti-symétrique}} \quad (A12)$$

$$\text{Où } \Omega_{ji} = -\Omega_{ij} = -v_{[i,j]} = -\frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i})$$

L'équation (A10) peut également être écrite comme suit:

$$T_{ji} = -p\delta_{ij} + \lambda D_{kk} \delta_{ij} + 2\mu D_{ij} - 2\eta \nabla^2 \Omega_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda v_{k,k} \delta_{ij} + \mu(v_{i,j} + v_{j,i}) - \eta \nabla^2 (v_{i,j} - v_{j,i}) \quad (A13)$$

### **Équations de mouvement:**

Lorsque le tenseur des contraintes(A13) est appliqué aux équations du mouvement linéaire (A5), on obtient :

$$-p_{,i} + (\lambda + \mu + \eta \nabla^2) v_{k,ki} + (\mu - \eta \nabla^2) \nabla^2 v_i + \rho b_i = \rho \frac{Dv_i}{Dt} \quad (A14)$$

## Annexe B

### Pseudo-code of the global thermal approach

#### Preprocessing step: Selection of input parameters of the problem and initializations

$nsteps, N_x, N_z, \Delta x, \Delta z, k_{max}, n_{max}, \omega, \Omega_{GS}, \omega_{NR}, \varpi, \lambda, L, R, C, \mu_0, T_{inlet}, \alpha, N, \ell_2, \ell_3, \Delta\theta_2, \Delta t, E, \sigma, t_l, \rho_0, C_{p0}, \eta, A, B, C,$

$\theta_2(n), F_x(n), F_y(n); n=1, \dots, nsteps+1$

Choose initial values of the crankpin centre position:  $e_x(1), e_y(1)$

Choose initial estimates for the Newton-Raphson method:  $e_x^{(0)}(1) = e_x(1), e_y^{(0)}(1) = e_y(1)$

**Do 1**  $i=1, \dots, N_x+1$ ; **Do 1**  $j=1, \dots, N_z+1$  ! Loop over the grid nodes

$p_{ij} = 0.; p_{old_{ij}} = 0.; h_{old_{ij}} = C - e_x(1)\cos\theta_i - e_y(1)\sin\theta_i$

**End do 1** ! End Loop over the grid nodes

Set  $e_x^{old} = e_x(1); e_y^{old} = e_y(1); T_{eff} = T_{inlet}$  and  $icycle = 0$

#### Processing step

**1**  $icycle \leftarrow icycle + 1$  ! Counter of cycles

Compute the fluid dynamic viscosity  $\mu$  at  $T = T_{eff}$  using Eq. (IV.51b), and  $l = \left(\frac{\eta}{\mu}\right)^{1/2}$

**Do 2**  $n=1, \dots, nsteps+1$  ! Loop over time steps

Compute the average angular velocity  $\langle\omega\rangle$  using Eq. (IV.5)

Set  $k=0$

**2**  $k \leftarrow k + 1$  ! Counter of iterations for the Newton-Raphson method

Set  $J=0$

**3**  $J \leftarrow J + 1$

$norm=1.$  ! initial norm-value

$m=0$

**Do while** ( $norm > 10^{-2}$  and  $m < m_{max}$ )

$m \leftarrow m + 1$  ! Counter of iterations for the successive substitutions method

**Do 3**  $i=1, \dots, N_x+1$ ; **Do 3**  $j=1, \dots, N_z+1$

$$h_{ij} = C - e_x^{(k)}(n)\cos\theta_i - e_y^{(k)}(n)\sin\theta_i + C p_{ij}^{old}$$

**If** ( $\eta=0$ ) **then** ! Newtonian case

$$G_{ij} = h_{ij}^3 \exp(-\alpha p_{ij}^{old})$$

**Else** ! non-Newtonian case

$$G_{ij} = h_{ij}^3 \exp(-\alpha p_{ij}^{old}) - 12l^2 \left[ h_{ij} \exp(-2\alpha p_{ij}^{old}) - 2l \exp(-\frac{5}{2}\alpha p_{ij}^{old}) \tanh\left(\frac{h_{ij} \exp(\frac{1}{2}\alpha p_{ij}^{old})}{2l}\right) \right]$$

**Endif**

**End do 3**

Calculate  $p_{ij}$  using the Gauss – Seidel algorithm Eq. (IV.23)

$$\text{Calculate the relative least square norm} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_x+1} \sum_{j=1}^{N_z+1} (p_{ij} - p_{ij}^{old})^2}{\sum_{i=1}^{N_x+1} \sum_{j=1}^{N_z+1} p_{ij}^2}}$$

! Update the initial solution with the current solution:

**Do 4**  $i=1, \dots, N_x+1$ ; **Do 4**  $j=1, \dots, N_z+1$

$$p_{ij}^{old} = (1 - \omega)p_{ij}^{old} + \omega p_{ij} \quad \text{Eq.(IV. 21)}$$

**End do 4**

**End do while**

Evaluate the pressure gradients  $\left. \frac{\partial p}{\partial \theta} \right|_{ij}$  and  $\left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{ij}$  at each grid-node  $ij$  by central finite differences

Calculate the lift force components  $\begin{Bmatrix} W_X(n) \\ W_Y(n) \end{Bmatrix} = - \iint_A p \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{Bmatrix} dA$  using the trapezoidal rule

Calculate the residual components:  $r_X^{(k)}(n) = F_X(n) - W_X(n)$ ;  $r_Y^{(k)}(n) = F_Y(n) - W_Y(n)$

Evaluate the coefficients of Jacobian matrix  $[J_k]$ :

**If**  $(J=1)$  **then**

$$e_X^{(save)} = e_X^{(k)}(n); e_Y^{(save)} = e_Y^{(k)}(n); r_X^{(save)} = r_X^{(k)}(n) \text{ and } r_Y^{(save)} = r_Y^{(k)}(n)$$

$$\text{Set } e_X^{(k)}(n) = e_X^{(save)} + \delta X; e_Y^{(k)}(n) = e_Y^{(save)}$$

**Return to label 3**

**Else if**  $(J=2)$  **then**

$$r_{X+\delta X} = r_X^{(k)}; r_{Y+\delta Y} = r_Y^{(k)}$$

$$\text{Set } e_X^{(k)}(n) = e_X^{(save)} - \delta X; e_Y^{(k)}(n) = e_Y^{(save)}$$

**Return to label 3**

**Else if**  $(J=3)$  **then**

$$r_{X-\delta X} = r_X^{(k)}; r_{Y-\delta Y} = r_Y^{(k)}$$

$$\text{Set } e_X^{(k)}(n) = e_X^{(save)}; e_Y^{(k)}(n) = e_Y^{(save)} + \delta Y$$

**Return to label 3**

**Else if**  $(J=4)$  **then**

$$r_{X+\delta Y} = r_X^{(k)}; r_{Y+\delta Y} = r_Y^{(k)}$$

$$\text{Set } e_X^{(k)}(n) = e_X^{(save)}; e_Y^{(k)}(n) = e_Y^{(save)} - \delta Y$$

**Return to label 3**

**Else if**  $(J=5)$  **then**

$$r_{X-\delta Y} = r_X^{(k)}; r_{Y-\delta Y} = r_Y^{(k)}$$

**Endif**

$$(\partial r_X / \partial e_X)^{(k)} = \frac{r_{X+\delta X} - r_{X-\delta X}}{2\delta X}; (\partial r_Y / \partial e_X)^{(k)} = \frac{r_{Y+\delta X} - r_{Y-\delta X}}{2\delta X}; (\partial r_X / \partial e_Y)^{(k)} = \frac{r_{X+\delta Y} - r_{X-\delta Y}}{2\delta Y} \text{ and}$$

$$(\partial r_Y / \partial e_Y)^{(k)} = \frac{r_{Y+\delta Y} - r_{Y-\delta Y}}{2\delta Y} \text{ where } \delta X = \delta Y = \delta = 10^{-10} \text{ for calculations made in double precision.}$$

Solve the linear system (IV.32) for  $\delta e_X^{(k)}(n)$  and  $\delta e_Y^{(k)}(n)$

Update the solutions according to:  $e_X^{(k+1)}(n) = e_X^{(k)}(n) + \omega_{NR} \delta e_X^{(k)}(n)$  and

$$e_Y^{(k+1)}(n) = e_Y^{(k)}(n) + \omega_{NR} \delta e_Y^{(k)}(n)$$

**if** ( $|r_x^{(k)}(n)| + |r_y^{(k)}(n)| > 10^{-2}$  and  $k < k_{max}$ ) **then**

**Return** to label **2** to do another iteration

**Else if** ( $k > k_{max}$ ) **Stop**

**Endif**

$$\text{Calculate : } \dot{e}_x(n) = \frac{(e_x(n) - e_x^{old}(n))}{\Delta t} \quad \text{and} \quad \dot{e}_y(n) = \frac{(e_y(n) - e_y^{old}(n))}{\Delta t}$$

Calculate the hydrodynamic characteristics:  $p_{max}(n)$ ,  $h_{min}(n)$ ,  $\mathcal{P}(n)$ ,  $Q_z(n)$

Memorize:  $h_{ij}^{old} \leftarrow h_{ij}$  ;  $e_x^{old}(n) \leftarrow e_x(n)$  and  $e_y^{old}(n) \leftarrow e_y(n)$

**End do 2** ! End Loop over time steps

$$\text{Compute } \mathcal{P}_{average} = \frac{\sum_{n=1}^{nsteps+1} \mathcal{P}(n)}{nsteps+1}, \quad Q_{average} = \frac{\sum_{n=1}^{nsteps+1} Q_z(n)}{nsteps+1} \quad \text{and} \quad \Delta T = \frac{\lambda \mathcal{P}_{average}}{\rho_0 c_{po} Q_{average}}$$

$$\text{Calculate } T'_{eff} = T_{inlet} + \Delta T/2$$

**if** ( $\left| \frac{T'_{eff} - T_{eff}}{T_{eff}} \right| > 10^{-4}$  or  $\left| \frac{e_x(nsteps+1) - e_x(1)}{e_x(nsteps+1)} \right| > 10^{-2}$  or  $\left| \frac{e_y(nsteps+1) - e_y(1)}{e_y(nsteps+1)} \right| > 10^{-2}$ ) **then**

$$T_{eff} = (1 - \varpi)T_{eff} + \varpi T'_{eff}$$

Set  $e_x(1) \leftarrow e_x(nsteps + 1)$  ;  $e_y(1) \leftarrow e_y(nsteps + 1)$  and  $T_{eff} \leftarrow T'_{eff}$

**Return** to label **1** ! to do another load cycle

**Endif**

**End program**

## Annexe C

### Pseudo-code of the solution method of inverse elasto-aerodynamic lubrication problem

#### Preprocessing step: Selection of input parameters of the problem and initializations

$L, R, C, \omega, \mu, \rho, W_{X0}, W_{Y0}, E, \sigma, t_l, s, \ell, l, N_\theta, N_z, k_{max}, n_{max}, \Omega_{GS}, \Omega_{NR}, \Omega$

Choose initial estimates for the Newton-Raphson method:  $X_0^{(0)}, Y_0^{(0)}$

**Do** 1  $i=1, \dots, N_x+1$ ; **Do** 1  $j=1, \dots, N_z+1$  ! Loop over the grid nodes

$p_{0ij} = 0.$ ;  $p_{oldij} = 0.$  ! Initializations

**End do** 1 ! End Loop over the grid nodes

#### Processing step

Set  $k=0$

**1**  $k \leftarrow k + 1$  ! Counter of iterations for the Newton-Raphson method

Set  $J=0$

**2**  $J \leftarrow J + 1$

$norm=1.$  ! initial norm-value

$m=0$

**Do while** ( $norm > 10^{-6}$  and  $m < m_{max}$ )

$m \leftarrow m + 1$  ! Counter of iterations for the successive substitutions method

**Do** 3  $i=1, \dots, N_\theta+1$ ; **Do** 3  $j=1, \dots, N_z+1$

$$h_{0ij} = C + X^{(k)} \cos\theta_i + Y^{(k)} \sin\theta_i + \Omega p_{ij}^{old}$$

**If** ( $\eta=0$ ) **then** ! Newtonian case

$$G_{ij} = h_{0ij}^3$$

**Else** ! non-Newtonian case

$$G_{ij} = h_{ij}^3 - 12l^2 \left[ h_{0ij} - 2l \operatorname{Tanh}\left(\frac{h_{0ij}}{2l}\right) \right]$$

**Endif**

**End do** 3

Calculate the steady-state pressure  $p_{0ij}$  using the Gauss – Seidel algorithm

$$\text{Calculate the relative least square norm} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_\theta+1} \sum_{j=1}^{N_z+1} (p_{0ij} - p_{ij}^{old})^2}{\sum_{i=1}^{N_\theta+1} \sum_{j=1}^{N_z+1} p_{0ij}^2}}$$

! Update the initial solution with the current solution:

**Do** 4  $i=1, \dots, N_\theta+1$ ; **Do** 4  $j=1, \dots, N_z+1$

$$p_{ij}^{old} = (1 - \Omega)p_{ij}^{old} + \Omega p_{0ij}$$

**End do** 4

**End do while**

Evaluate the steady-state pressure and film thickness gradients  $\left. \frac{\partial p_0}{\partial \theta} \right|_{ij}$ ,  $\left. \frac{\partial p_0}{\partial z} \right|_{ij}$ ,  $\left. \frac{\partial H_0}{\partial \theta} \right|_{ij}$ , and  $\left. \frac{\partial H_0}{\partial z} \right|_{ij}$  at each

grid-node  $ij$  by central finite differences

Calculate the lift force components  $\begin{Bmatrix} F_{X0} \\ F_{Y0} \end{Bmatrix}$  using the trapezoidal rule

Calculate the residual components:  $r_X^{(k)} = F_{X0} - W_{X0}$ ;  $r_Y^{(k)} = F_{Y0} - W_{Y0}$

Evaluate the coefficients of Jacobian matrix  $[J_k]$ :

**If** ( $J=1$ ) **then**

$X^{(save)} = X^{(k)}$ ;  $Y^{(save)} = Y^{(k)}$ ;  $r_X^{(save)} = r_X^{(k)}$  and  $r_Y^{(save)} = r_Y^{(k)}$

Set  $X^{(k)} = X^{(save)} + \delta X$ ;  $Y^{(k)} = Y^{(save)}$

**Return** to label 2

**Else if** ( $J=2$ ) **then**

$r_{X+\delta X} = r_X^{(k)}$ ;  $r_{Y+\delta Y} = r_Y^{(k)}$

Set  $X^{(k)} = X^{(save)} - \delta X$ ;  $Y^{(k)} = Y^{(save)}$

**Return** to label 2

**Else if** ( $J=3$ ) **then**

$r_{X-\delta X} = r_X^{(k)}$ ;  $r_{Y-\delta Y} = r_Y^{(k)}$

Set  $X^{(k)} = X^{(save)}$ ;  $Y^{(k)} = Y^{(save)} + \delta Y$

**Return** to label 2

**Else if** ( $J=4$ ) **then**

$r_{X+\delta Y} = r_X^{(k)}$ ;  $r_{Y+\delta Y} = r_Y^{(k)}$

Set  $X^{(k)} = X^{(save)}$ ;  $Y^{(k)} = Y^{(save)} - \delta Y$

**Return** to label 2

**Else if** ( $J=5$ ) **then**

$r_{X-\delta Y} = r_X^{(k)}$ ;  $r_{Y-\delta Y} = r_Y^{(k)}$

**Endif**

Calculate the Jacobian matrix components:

$(\partial r_X / \partial X)^{(k)} = \frac{r_{X+\delta X} - r_{X-\delta X}}{2\delta X}$ ;  $(\partial r_Y / \partial X)^{(k)} = \frac{r_{Y+\delta X} - r_{Y-\delta X}}{2\delta X}$ ;  $(\partial r_X / \partial Y)^{(k)} = \frac{r_{X+\delta Y} - r_{X-\delta Y}}{2\delta Y}$  and

$(\partial r_Y / \partial Y)^{(k)} = \frac{r_{Y+\delta Y} - r_{Y-\delta Y}}{2\delta Y}$  where  $\delta X = \delta Y = \delta = 10^{-4}$  for calculations made in double precision.

Solve the linear system for  $\delta X^{(k)}$  and  $\delta Y^{(k)}$

Update the solutions according to:  $X^{(k+1)} = X^{(k)} + \Omega_{NR} \delta X^{(k)}$  and

$Y^{(k+1)} = Y^{(k)} + \Omega_{NR} \delta Y^{(k)}$

**if** ( $|r_X^{(k)}| + |r_Y^{(k)}| > 10^{-3}$  and  $k < k_{max}$ ) **then**

**Return** to label 1 to do another iteration

**Else if** ( $k > k_{max}$ ) **Stop**

**Endif**

Calculate the steady-state performance characteristics:  $p_{max}$ ,  $h_{min}$ ,  $\mathcal{P}$ , and  $Q_z$

Solve the first-order dynamic equations for  $q_x$  and  $q_y$

Calculate the eight dynamic coefficients  $a_{ij}$  and  $b_{ij}$ .

**End program**

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

### CHAPITRE I

- [1] **Bell J C.** Gasoline engine valve train design evolution and the antiwear requirement of motor oils. *J Engine Tribology, ProcInst Mech Engrs, part J* (1998) 243 -257.
- [2] **Coy RC.** Practical applications of lubrication models in engines. *New Dir Tribology, MEP.* (1997) 197 - 209.
- [3] **J. M. Georges,** Frottement , usure et lubrification , 2000, Sciences et techniques de l'ingénieur , Editions Eyrolles, CNRS Editions.
- [4] **J Weissmann.** Carburants et combustibles pour moteurs à combustion interne. *Edition Technip.* (1970) 557-579.
- [5] **Mark A. Nicholls, Than Do, Peter R. Norton, MasoudKasrai, G. Michael Bancroft.** Review of the lubrication of metallic surfaces by Zinc dialkyl-dithiophosphates. *Elsevier.Tribology International* 38 (2005) 15 -39.
- [6] **MridulGautam, Karthik Chitoor, MuraliDurbha, Jerry C. Summers.** Effect of diesel soot contaminated oil on engine wear - investigation of novel oil formulation. *Elsevier Tribology Intenational.* 32 (1999) 687-699.
- [7] **John J. Truhan, Jun Qub, Peter J. Blau.** The effect of lubricating oil condition on the friction and wear of piston ring and cylinder liner materials in a reciprocating benchtest. *Elsevier. Wear* 259 (2005). 1048-1055.
- [8] **Hans Banckstrm.** Combinaison appropriée d'inhibiteurs pour une meilleure stabilité à l'oxydation. *Nynas Naphthenics.* 1 (2001).
- [9] **J. S. Kim, B. S. Min, D. S. Lee, D. Y. Oh, J. K. Choi.** The characteristics of carbon deposit trop ring groove of gasoline and diesel engine. *SAE Technical Paper Series, SAE 980526* (1998).
- [10] **R. M. Mortier, S. T. Orszulik,** Chemistry and technology of lubricants, second edition, *Edmundsbury Press, Suffolk,* (1997) 98 -144, ISBN: 0-7514-0246-X.
- [11] **J. Igarashi, T. Yoshida, H. Watanabe,** Prepr.—*Am. Chem. Soc., Div. Pet. Chem.*42 (1997) 211.
- [12] **R.T. Mookken, D. Saxena, B. Basu, S. Satapathy, S.P. Srivastava, A.K. Bhatnagar,** *Lubr. Eng.* 53 (1997) 19.
- [13] **T. Yoshida, J. Igarashi, H. Watanabe, A.J. Stipanovic, C.Y.Thiel,** G.P. Firmstone, *SAE Warrendale, PA, Technical Paper No. 981405* (1998).
- [14] **A. Adhvaryu, Y.K. Sharma, I.D. Singh,** *Fuel* 78 (1999)1293.

- [15] **Brajendra K. Sharma, Arthur J. Stiponavic.** Development of a new Oxidation stability test method for lubricating oils using high-pressure differential scanning calorimetry. Elsevier. *Thermodynamica Acta*. 402 (2003) 1 - 18.
- [16] **Mainwaring R.** Soot and wear in heavy duty Diesel engines. SAE Paper 971631 (1997).
- [17] **M. Priest, D. Dowson, C. M. Taylor.** Predictive wear modelling of lubricated piston rings in a diesel engine. Elsevier. *Wear* 231 (1999) 89-101.
- [18] **G.S Cholakov, K. G. Stanulov, P. Dski, H. A. Jontchev.** Quantitative estimation and prediction of tribological performance of pure additive compounds through computer modelling. Elsevier. *Wear* 216 (1998) 194-201.
- [19] **Mark A. Nicholls, Than Do, Peter R. Norton, Masoud Kasrai, G. Michael Bancroft** Review of metallic surfaces by zinc dialkyl-dithiophosphates. Elsevier. *Tribology International* 38 (2005) 15-39.
- [20] **N. Allinger, M. Cava, D. C. De jongh, C. R. Johnson, N. A. Lebel, C. L. Stevens,** *Chimie organique, vol. III : Applications, Mc GRAW-HILL, 1983.*
- [21] **R. Gojon,** Matériaux pour paliers lisses, Techniques de l'ingénieur, traité Sciences fondamentales, Doc. B 5330,
- [22] **J M. Piau,** Fluides non newtoniens, Techniques de l'ingénieur, traité Sciences fondamentales, Doc. A 710,
- [23] **J Frêne, D. Nicolas,** Lubrification hydrodynamique, cours de DEA, laboratoire de mécanique des solides, université de Poitiers, 1986
- [24] **D. Nicolas,** Paliers hydrodynamiques soumis à un torseur de forces quelconques, Thèse de doctorat, INSA - Lyon, 1972.
- [25] **J. Groff,** ABC du graissage, Technip.
- [26] **BARUS. C ,** Isothermals isopiestic and isometrics relative to viscosity *American Journal of Science*, vol.45, p87-96, 1893
- [27] **J. Frêne, D. Nicolas, B. Degueurce, D. Berthe, M. Godet,** Lubrification hydrodynamique : Paliers et Butées, Editions Eyrolles , 1990.
- [28] **J. M. Georges,** Frottement, usure et lubrification, Eyrolles, 2000
- [29] **V. K. Stokes,** Couple stresses in fluids, the physics of fluids, vol. 9, n° 9, September 1966.
- [30] **G. Couarraze, J. L. Grossiord-** " Initiation à la rhéologie ". Technique et Documentation, Lavoisier, Paris, 1983.

[31] **N. X. Toàn**, - Etude de l'écoulement d'un fluide de Bingham dans un contact Hydrodynamique : Modélisation de la zone de séparation du film, Thèse de Doctorat, Université de Poitiers (France) 1990.

## CHAPITRE II

[1] **Cauchy, A. L.**: Sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps considérés comme des masses continues. Ex. de Math. 4, 293-319 (1828)

[2] **Voigt, W.**: Allgemeine Formeln für die Bestimmung der Elasticitäts-constanten von Krystallen durch die Beobachtung der Biegung und Drillung von Prismen Ann. Phys. 16, 273--310, 398--415 (1882)

[3] **Voigt, W.**: Theoretische Studien über die Elastizitätsverhältnisse der Kristalle ( Theoretical studies on the elasticity relations of crystals). Abh. der Ges. der Wiss. 34, 3-51 (1887).

[4] **Cosserat, E., Cosserat, F.**: Theories des corps déformables (Theory of deformable bodies). A. Hermann et Fils, Paris (1909).

[5] **Dahler, J.S., Scriven, L.E.**: Theory of structured continua. I. General consideration of angular momentum and polarization. Proc. R. Soc. Lond. Ser. A 275, 504-527 (1963)

[6] **Condiff, D.W., Dahler, J.S.**: Fluid mechanical aspects of antisymmetric stress. Phys. Fluids 7, 842-854 (1964)

[7] **Eringen, A.C.**: Theory of micropolar fluids. J. Math. Mech. 16, 1-18 (1966)

[8] **Eringen, A.C.**: Theory of micropolar elasticity. In: Liebowitz, H. (ed.) Fracture, vol. 2, pp. 621-729. Academic Press, New York (1968)

[9] **Cowin, S.C.**: The theory of polar fluids. Adv. Appl. Mech. 14, 279-347 (1974)

[10] **Nowacki, W.**: Theory of asymmetric elasticity. Pergamon Press, Oxford (1986)

[11] **Mindlin, R.**: Micro-structure in linear elasticity. Adv Arch. Ration. Mech. Anal. 16, 51-78 (1964)

[12] **Eringen, A.C., Suhubi, E.S.**: Nonlinear theory of simple micro-elastic solids-I. Int. J. Eng. Sci. 2, 189-203 (1964)

[13] **Nikolaevskiy, V.N.**: Asymmetric fluid mechanics and averaged description of turbulent flow. Dok. Akad. Nauk SSSR [Sov. Phys. Dkl] 14, 120-122 (1969)

[14] **Nikolaevskiy, V.N.**: Angular momentum in geophysical turbulence. Kluwer, Dordrecht (2003)

[15] **Mattioli, G.D.**: Ricerche sulla meccanica dei moti fluidi turbolenti. RSMUP 4, 67-91 (1933)

- [16] **Mattioli, G.D.:** Teoria dinamica deiregimi fluidi turbolenti. ( CEDAM, Padua 1937)
- [17] **Ferrari, C :** The transport of vorticity through fluids in turbulent motion, NACA TM 799, (1936)
- [18] **Dahler, J.S.:** Transport phenomena in a fluid composed of diatomic molecules. J. Chem. Phys. 30, 1447-1475 (1959)
- [19] **Aero, E.L., Bulygin, A.N., Kuvshinsky, E.V.:** Asymmetric hydrodynamics. J. Appl. Math. Mech. (PMM) 29, 297-308 (1964)
- [20] **Lumley, J. L :** Invariants in turbulent flow. Phys. Fluids 9, 2111 -2113 (1966)
- [21] **Condiff, D.W., Brenner, H:** Transport mechanics in systems of orientable particles Phys. Fluids 12, 539-551 (1969)
- [22] **Rae, W.:** Flows with significant orientation effects. AIAA J. 14, 11-16 (1976)
- [23] **Toupin, R.A.:** Elastic materials with couple-stresses. Arch. Ration. Mech. Anal. 11, 38 385-414 (1962)
- [24] **Mindlin, R.D., Tiersten, H.F.:** Effects of couple-stresses in linear elasticity. Arch. Ration. Mech. Anal. 11, 415-448 (1962)
- [25] **Koiter, W.T :** Couple stresses in the theory of elasticity, I and II. Proc. Ned. Akad. Wet. Ser B. 67, 17-44 (1964)
- [26] **Stokes, V.K.:** Couple stresses in fluids. Phys. Fluids 9, 1709-1715 (1966)
- [27] **Valanis, K.C., Sun, C.T.:**Poiseuille flow of a fluid with couple stress with applications to blood flow. Biorheology 6, 85-97 (1969)
- [28] **Ariman, T., Turk, M.A., Sylvester, N.D.:** Applications of micro-continuum fluid mechanics. Int. J. Eng. Sci. 12, 273-293 (1974)
- [29] **Ramanaiah, G., Sarkar, P.:** Squeeze films and thrust-bearings lubricated by fluids with couple stress. Wear 48, 309-316 (1978)
- [30] **Sinha, P., Singh, C., Prasad, K.R.:** Couple stresses in journal bearing lubricants and the effect of cavitation. Wear 67, 15-24 (1981)
- [31] **Srivastava, L.M.:** Flow of couple stress fluid through stenotic blood- vessels. J. Biomech. 18, 479-486 (1985)
- [32] **Lin, J.R.:** Squeeze film characteristics of finite journal bearings; couple stress fluid model. Trib.Int. 31, 201-207 (1998)
- [33] **Mekheimer, Kh. S.;** Effect of the induced magnetic field on peristaltic flow of a couple stress fluid. Phys. Lett. A 372, 4271-4278 (2008)

- [34] **Napoli, G., Vergori, L.:** Equilibrium of nematic vesicles. *J. Phys. A Math. Theory* 43, 445207 (2010)
- [35] **Hadjefandiari, A.R., Dargush, G.F.:** Couple stress theory for solids. *Int. J. Solids Struct.* 48, 2496-2510 (2011)
- [36] **Wit, R. de:** Continuous and discrete disclinations in anisotropic elasticity. Theory of disclinations: II. *J. Res. Natl. Bur. Stand. Sec. A* 77, 49-99 (1973)
- [37] **Hamilton, W.R.:** Elements of Quaternions. Longmans, Green and Co., London (1866)
- [38] **Hadjefandiari Ali R. and Hadjesfandiari Arezoo.** Skew –symmetric couple stress fluid mechanics, *Acta Mech*, Springer-Verlag Wien, 2014.
- [39] **Upadhyay, M.V., Capolungo, L., Taupin, V., Fressengeas, C. :** Elastic constitutive laws for incompatible crystalline media: the contributions of dislocations disclinations and G –disclinations. *Philos. Mag.* 93, 797-832 (2013)
- [40] **Taupin, V., Capolungo, L., Fressengeas, C., Das, A., Upadhyay, M:** Grain boundary modeling using an elasto- plastic theory of dislocation and disclination fields. *J. Mech. Phys. Solids* 61, 370-384 (2013)
- [41] **Jameson, A., Schmidt, W., Turkel, E.:** Numerical solutions of the Euler equations by finite volume methods using Runge-Kutta time stepping schemes. *AIAA Paper* 81--1259 (1981)
- [42] **Swanson, R.C., Turkel, E.:** On central-difference and upwind schemes. *J. Comput. Phys.* 101, 292-306 (1992)
- [43] **Ducros, F., Ferrand, V., Nicoud, F., Weber, C., Darracq, D., Gacherieu, C., Poinso, T:** Large-eddy simulation of the shock /turbulence interaction. *J. Comput. Phys.* 152, 517-549 (1992)
- [44] **Hadjefandiari, AR, Dargush, Hadjesfandiari, H :** Consistent skew – symmetric couple stress theory for size –dependent creeping flow . *J. Non Newtonian Fluid Mech* 196, 83-94(2013).
- [45] **Inge L.** Ryhming, *Dynamique des fluides*, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lavoisier, 1991.

### CHAPITRE III

- [1] **Ezzat H.A., Rohde S.M.,** "Thermal Transient in Finite Slider Bearings", *ASME Journal of Lubrication Technology*, pp. 315-321, 1974.
- [2] **Boncompain R., Frêne J.,** "Thermohydrodynamic of Finite Journal Bearing Static and Dynamic Characteristics", *Proc. of the 6<sup>th</sup> Leeds-Lyon Symposium on Tribology*, pp 34-42, 1979.

- [3] **Ettles, C.M.McC.**, "Transient Thermoelastic effects in Fluid Film Bearings", *Wear*, Vol. 79, pp 53-71, 1982.
- [4] **J. Ferron, J. Frene and R. Boncompain** . A study of the thermodynamic performance of plain journal bearing- comparaison between theory and experiments. *ASME Journal of Lubrication Technology*, 105: 422-428, 1983.
- [5] **M. M. Khonsari and J. J. Beaman**- Tthermohydrodynamic analysis of laminar incompressible journal bearings. *ASLE Transactions*, 29(2) : 141-150 , 1985
- [6] **Kinght J.D., and Barrett L.E.**, "Analysis of Axially Grooved Journal Bearings with Heat Transfer Effects", *ASLE Transaction*, Vol. 30, pp 316-323, 1987
- [7] **Oes H., Ten Hoeve P.B.Y., Van der Helm J.**, "Thermal Effects in Dynamically Loaded Flexible Journal Bearings", *ASME Journal of Tribology*, Vol. 111, 49-55, 198
- [8] **Khonsari M.M., Wang S.H.**, Notes on Transient THD Effects in a Lubricating Film, *Tribology Transaction*, Vol. 35, pp 369-378, 1992
- [9] **Pascovici M.D., Khonsari M.M., Jang J.Y.**, "On the Modeling of a Thermo-Mechanical Seizure" *ASME Journal of Tribology*, Vol. 117, pp 744-747, 1995
- [10] **Paranjpe R.S., Han T.**, "A Transient Thermohydrodynamic Analysis including Mass Conserving Cavitation for Dynamically Loaded Journal Bearings", *ASME Journal of Tribology*, Vol. 117, pp 369-378, 1995
- [11] **Zhang C., Jiang J.X., Cheng H.S.**, "A Transient Thermohydrodynamic Analysis of Dynamically Loaded Finite Journal Bearings with Rough Surface Including Mass Conserving Cavitation", *Proc. of the 25<sup>th</sup> Leeds-Lyon Symposium on Tribology*, pp 367- 378, 1998
- [12] **Wang X., Wen S., Gui C.**, " An Analysis of the Thermoelasto hydrodynamic performance of Dynamically Loaded Bearing", *Proc. of Asiatrib 98*, pp 25-29; 1998
- [13] **Kucinschi B.**, "Etude des Instabilités Thermiques des Paliers à Frottement Fluide", Thèse de troisième cycle de l'Université de Poitiers, 1998
- [14] **Piffeteau S.**, "Modélisation du Comportement Thermoélastohydrodynamique d'un palier de Tête de Bielle Soumis à un Chargement Dynamique", Thèse de doctorat de l'Université de Poitiers, 1999 .
- [15] **Pascovici M.D., Kucinschi B., Khonsari M.M.**, "A Thermohydrodynamic Model for the Early Seizure", *Journal of The Balkan Tribological Association*, Vol.6 pp 78-88, 2000
- [16] **Bouyer J.**, "Etude des performances thermoélastohydrodynamique de paliers soumis à des conditions sévères", Thèse de Doctorat de l'Université de Poitiers, 2003
- [17] **Michaud P.**, " Modélisation Thermoélastohydrodynamique Tridimensionnelle des Paliers de Moteurs . Mise en place d'un Banc d'Essais pour Paliers Sous Conditions Sévères, Thèse de doctorat de l'Université de Poitiers, 2004

- [18] **Szeri A. Z.** Some Extensions of the Lubricant Theory of Osborne Reynolds. *Journal of Tribology*, 109: p21-36, 1987.
- [19] **Barus, C.** Isotothermals, Isopiestic and Isometric Relative to Viscosity, *American Journal of Science* 45 (1893), 1893.
- [20] **R.F Crouchand and A. Cameron**, Viscosity – Temperature Equations for Lubricants, *Journal for the Institute of Petroleum*, Vol.47, 1961 , pp. 307- 313.
- [21] **A. Cameron**, *Basic Lubrication Theory*, Ellis Horwood Limited, 1981.
- [22] **L. B. Sargent Jr**, Pressure- Viscosity Coefficients Liquid Lubricants, *ASLE Transactions*, Vol.26, 1983, pp. 1-10
- [23] **P.S.Y. Chu and A. Cameron**, Pressure Viscosity Characteristics of Lubricating Oils, *Journal for the Institute of Petroleum*, Vol.48,1962, pp. 147- 155.
- [24] **A. Cameron**, *The Principles of Lubrication*, Longmans Green and Co. Ltd, 1966.
- [25] **B. Y. C, So and E. E. Klaus**, Viscosity – Pressure Correlation of Liquids, *Asle Transactions*, Vol. 23, 1980, pp. 409 – 421.
- [26] **D. Klamann**, *Lubricants and Related Products*, Publ. Verlag Chemie, Weinheim, 1984, pp. 51-58
- [27] **H. Van Leeuwen**, Discussion to the Paper by L.B. Sargent on Pressure-Viscosity coefficients of Liquid lubricants, *ASLE Transactions*, Vol 26, 1983, pp. 1-10.
- [28] **C. T. A. Roelands**, Correlational Aspect of Viscosity-Temperature -Pressure- Relationships of Lubricating Oils , PhD Thesis, Delft University of Technology, The Netherlands, 1966.
- [29] **R. Gohar**, *Elastohydrodynamics*, Ellis Horwood Limited, 1988.
- [30] **L. Houpert**, New Results of Traction Force Calculation in EHD Contacts, *Transactions ASME, Journal of Lubrication Technology*, Vol.24, 1981, pp. 241-248.
- [31] **R. Boncompain J. Frêne**, Thermodynamic Analysis of a Finite Journal Bearings' Static and Dynamic Characteristics, on *Tribology Thermal Effects in Tribology*, sep 1979.

#### CHAPITRE IV

- [1] **J. Briant**, Comportement rhéologique des lubrifiants avec additif de VI, Journée d'études sur l'influence du lubrifiant dans les pertes par frottement et l'usure dans les moteurs, Institut Français du Pétrole (IFP), 22 novembre 1978, Collection Colloques et Séminaires 33, Editions Technip-Paris.
- [2] **A. S. Lodge**, *Elastic liquids*, Academic Press, London and New York, 1964.

- [3] **R. C. Rosenberg**, A method for determining the influence of multigrad oils on journal bearing performance, SAE Transactions, Vol. 82, 1973, Paper 730483.
- [4] **R. C. Rosenberg**, The influence of polymer additives on journal bearings performance, fuels and Lubricants Meeting, Houston Texas, June 3-5 1975, SAE, Paper750692
- [5] **M. Robin**, Etude de la lubrification des paliers de longueur finie: Influence des additifs de viscosité, Thèse de doctorat, Janvier 1978, Editions Technip.
- [6] **D. R. Oliver**, Load enhancement effects due to polymer thickening in a short model journal bearings, J. Non-Newtonian Fluid Mech., 1988, 30, 185-196.
- [7] **Scott W. ,Suntiwattana P.** Effect of oil additives on the performance of a wet friction clutch material. Wear 1995, 181-183, 850-855.
- [8] **V. K. Stokes**, Couple-stresses in fluids, The physics of fluids, 1966, 9, 1709-1715.
- [9] **Hadjesfandiari Ali R. and Hadjesfandiari Arezoo.** Skew-symmetric couple-stress fluid mechanics, Acta Mech, Springer-Verlag Wien 2014.
- [10] **Mokhiamer U.M., Crosby W. A., and El-Gamel H. A.,** A study of a journal bearing lubricated by fluids with couple stress considering the elasticity of the liner, Wear, 224, 1999, 194-201.
- [11] **Boucherit H., Lahmar M., and Bou-Saïd B.,** Misalignment effects on steady-state and dynamic behaviour of compliant journal bearings lubricated with couple stress fluids, Lubrication Science, 20, 2008, 241-268.
- [12] **Lin J. R.,** Static and dynamic characteristics of externally pressurized circular step thrust bearings lubricated with couple-stress fluids, Tribology International, 32, 1999, 207-216.
- [13] **Lahmar M.,** Elastohydrodynamic analysis of double-layered journal bearings lubricated with couple-stress fluids, J. of Engineering Tribology, proc. of the I Mech E, Part J, 219, 2005, 145-171.
- [14] **Wang, X. L., Zhu, K. Q. and Wen, S. Z.,** (2001), Thermohydrodynamic Analysis of Journal Bearings Lubricated with Couple-Stress Fluids, Tribology Int., **34**, 335-343.
- [15] **Wang, X. L., Zhu, K. Q., and Wen, S. Z.,** (2002), On the performance of dynamically Loaded journal bearings lubricated with couple-stress fluids, Tribology Int., **35**, 185-191.
- [16] **Lahmar M., and Bou-Saïd B.,** Couple stress effects on the dynamic behaviour of connecting-rod bearings in both gasoline and Diesel engines, Tribology Transaction, 51, 2008, 44-56.

- [17] **El Sharkawi A. A., and Guedouar L. H.**, An inverse solution for finite journal Bearings lubricated with couple-stress fluids, *Tribology International*, 2001, 34, 107-118.
- [18] Lahmar M., and Bou-Saïd B., Nonlinear dynamic response of an unbalanced flexible rotor supported by elastic bearings lubricated with piezo-viscous polar fluids, *Lubricants*, 2015.
- [19] Barus C., Isotherms, isopiestic, and isometrics relative to viscosity, *American Journal of Science*, 45, 87-96, 1893.
- [20] Fatu A., Hajjam M., and Bonneau D. Analysis of non-Newtonian and piezoviscous effects in dynamically loaded connecting-rod bearings, *Proc. IMechE, Part J, J. Engineering Tribology*, 219, 2005, 209-224.
- [21] Gecim B. A. Non-Newtonian effects of multigrade oils on journal bearing performance, *Tribology Trans.*, 1990, 33, 384-394.
- [22] Chu P. S. Y., Cameron A., Pressure viscosity characteristics of lubricating oils. *Journal of the Institute of Petroleum*, 48, 1962, 147-155.
- [23] **Paranjpe R. S.** Analysis of non-Newtonian effects in dynamically loaded finite journal bearings including mass conserving cavitation. *J. of Tribology*, 1992, 114, 736-746.
- [24] **Wang P., Keith T. G.**, and Vaidyanathan K., Non-Newtonian effects on the performance of dynamically loaded elliptical journal bearings using a mass-conserving finite element algorithm. *J. of Tribology Trans.*, 44, 2001, 4, 533-542.
- [25] **Wang P., Keith T. G.**, and Vaidyanathan K., Combined surface roughness pattern and non-Newtonian effects on the performance of dynamically loaded journal bearings, *Tribology Trans.*, 45, 2002, 1, 1-10.
- [26] **Booker, J. F.**, Dynamically-loaded journal bearings : Mobility method of solution, *ASME J. Basic Eng.* 87(3), 1965, 537-546.
- [27] **Booker, J. F.**, Dynamically Loaded Journal Bearings: Numerical Application of the Mobility Method, *ASME Journal of Tribology*, ser. F, pp 168-174, 1971
- [28]. **Booker J. F.**, Mobility/ Impedance methods: A guide for application, *Journal of tribology*, *Transactions of the ASME*, 136, 2014.
- [29] **Mouassa A., Boucherit H., Bou-Saïd B., Lahmar M., Bensouilah H. and Ellagoune S.** steady-state behaviour of finite compliant journal bearing using a piézo-viscous polar fluid as lubricant, *Mechanics and Industry*, 16, 6, 2015.
- [30] **Stachowiak Gwidon W., Batchelor Andrew W.**, *Engineering tribology*, Elsevier Butterworth Heinemann, Burlington, 2005.

- [31] **L.B. Sargent Jr**, Pressure-Viscosity Coefficients of Liquid Lubricants, ASLE Transactions, Vol. 26, 1983, pp. 1-10.
- [32] **Lahmar M., Ellagoune S. and Bou-Saïd**, Elastohydrodynamic lubrication analysis of compliant journal bearing considering static and dynamic deformations of the bearing liner, Tribology Transactions, 53, 2010, 349-368.
- [33] **Boucherit H., Lahmar M. and Bou-Saïd**, Misalignment effects on steady-state and dynamic behaviour of compliant journal bearings lubricated with couple stress fluids Lubrication Science, 20, 2008, 241-268.
- [34] **Lahmar M., Belbah A. and Nicolas D.**, Effets des déformations élastiques des revêtements de surface sur le comportement dynamique et la stabilité des paliers hydrodynamiques. Matériaux& Techniques, 11-12, 2002, in French.
- [35] **Thomsen K. and Klit P.**, A study on compliant layers and its influence on dynamic Response of a hydrodynamic journal bearing, Tribology International, 44, 2011, 1872-1877.
- [36] **Christopherson D. G.** A new mathematical method for the solution of oil film lubrication problems. Proc. IMechE, 141, 1941, 126-135.
- [37] **Curtis F. Gerald, Patrick O. Wheatley**, Applied numerical analysis, Addison- Wesley publishing company, third edition, 1984, ISBN 0-201-11577-8.
- [38] **A. Gourdin, M. Boumahrat**, Méthodes numériques appliquées, Office des publications universitaires, Alger.
- [39] **Chang L., Conry T. F and Cusano C.**, An efficient, robust, multi-level computational algorithm for elastohydrodynamic lubrication, Transactions of the ASME, 1988.
- [40] **Reynolds O.**, On the theory of lubrication and its application to M. Beauchamp Tower's experiments, Phil. Trans. Roy. Soc., London, A 117, 1886, 157-234.
- [41] **Kingsbury A.**, Heat effects in lubricating films, Mechanical Engineering, 55, 1933, 685-688.
- [42] **Dowson D.** A generalized Reynolds equation for fluid film lubrication, Int. J. Mech. Science, Pergamon Press Ltd, 4, 1962, 159-170.
- [43] **Swift H. W.**, Theory and experiment applied to journal bearing design, 1, 1937, 309-316.
- [44] **Naffin R. K., Chang L.**, An analytical model for the basic design calculations of journal bearings, Journal of Tribology, 132, 2010.
- [45] **ASTM D341-09**, Standard practice for viscosity-temperature charts for liquid petroleum products. ASTM International, 2009.

- [46] **M. Sanchez-Rubio, F. Chinas-Castillo, F. Ruiz-Aquino and J. Lara-Romero**, A new focus on the Walther equation for lubricant viscosity determination, *Lubrication Science*, 2006, 18, 95-107.
- [47] **Campbell J., Love P. P., Martin F., A., and Rafique S. O.** Bearings for reciprocating machinery : A review of the present state of theoretical and experimental, and service knowledge, *Proc. Of the IMechE*, 1967-1968, 182, Part 3A.
- [48] **Goenka P. K. and Paranjpe R. S.**, Discussion of the paper a finite element cavitation algorithm by Kumar A. and Booker J. F. , *ASME J. of Tribology*, 113, 1991, 284-285
- [49] **Vijayaraghavan D. E., Brewe and Keith T. G.**, Effect of out-of-roundness on the performance of a diesel engine connecting-rod bearing, *ASME J. of Tribology*, 115 1993, 538-543.
- [50] **Vincent B., Maspeyrot P., and Frêne J.**, Cavitation in dynamically loaded journal bearings using mobility method, *Wear*, 193, 1996, 155-162.
- [51] **Goenka P. K.**, Dynamically loaded journal bearings: Finite element method analysis *ASME J. of Tribology*, 106, 1984, 429-439.
- [52] **Zhang C., Zhang H., and Qiu Z.**, Fast analysis of crankshaft bearings with a database including shear thinning and viscoelastic effects, *Tribology Trans.*, 42, 1999, 922-928.
- [53] **Hamrock B. J., Schmid S. R., Jacobson Bo**, *Fundamentals of fluid film lubrication*, CRC Press: New York, USA, 2004.
- [54] **Mc Ivor J. D. C., Fenner D. N.** Finite element analysis of dynamically loaded flexible journal bearings: A fast Newton-Raphson method, *Journal of Tribology*, 111, Oct. 1989, 597-604.

## CHAPITRE V

- [1] **V.K. Stokes**; Couple stresses in fluids, *The Physics of fluids*, vol. 9, Number 9, 1709-1715, Sept. 1966.
- [2] **Boucherit H., Lahmar M., and Bou-Saïd B.**, Misalignment effects on steady-state and dynamic behaviour of compliant journal bearings lubricated with couple stress fluids, *Lubrication Science*, 20, 2008, 241-268.
- [3] **Lund J. W.**, Calculation of stiffness and damping properties of gas bearings, *J. of Lubrication Technology*, 793-803, Oct. 1968.
- [4] **Lund J. W.**, Review of the concept of dynamic coefficients for fluid film journal bearings, *J. of Lubrication Technology*, *Trans. Of the ASME*, 109, 37-41, 1987.
- [5] **Heshmat H., Walowit J. A., Pinkus O.**, Analysis of gas -lubricated compliant foil

journal bearings, J. of Lubrication Tech., Trans. Of the ASME, 105 , 647-655, 1983.

**[6] Peng J.P, Carpino M.**, Calculation of stiffness and damping coefficients for elastically supported gas foil bearings, J. of Tribology-Trans. of the ASME, 115, 20-27, 1993.

#### **Références Additives**

**i. Gwidon W. Stachowiak and Andrew W.** Engineering Tribology Butterworth Heinemann. In press 2005.

**ii. Dominique Bonneau, Aurelian Fatu, Dominique Souchet.** Paliers Hydrodynamiques 2 Modèles thermohydrodynamiques calcul des paliers de moteur et de compresseur. Lavoisier, 2011

## Principales notations utilisées

### *Symboles latins*

$a_{XX}, a_{XY}, a_{YX}, a_{YY}$	coefficients de raideur, (N/m)
$b_{XX}, b_{XY}, b_{YX}, b_{YY}$	coefficients d'amortissement, (N. s/m)
$A_{ij}$	coefficients de raideur, (N/m)
$B_{ij}$	coefficients d'amortissement, (N. s/m)
$a, b, c, m, n$	constantes dépendant du lubrifiant
$C$	jeu radial du palier, (m)
$D$	diamètre du palier, (m)
$D_{ij}$	tenseur des taux de déformation symétrique
$D_{kk}$	taux de dilatation cubique
$E$	module d'élasticité du matériau, (Pa)
$e$	excentricité, $e =  \overrightarrow{O_a O_c} $ , (m)
$e_X, e_Y$	composantes de déplacement du centre de l'arbre (maneton), (m)
$e$	excentricité, $e = \sqrt{e_X^2 + e_Y^2}$ , (m)
$e_{ijk}$	tenseur de permutation d'ordre trois
$F_X, F_Y$	composantes de la charge appliquée, (N)
$F$	charge dynamique appliquée sur le palier de tête de bielle, $F = \sqrt{F_X^2 + F_Y^2}$ , (N)
$I, I_2, J, J_2$	coefficients intervenant dans l'expression des vitesses du fluide
$G$	module de cisaillement, (Pa)
$h$	épaisseur du film lubrifiant, (m)
$h_0$	épaisseur statique du lubrifiant, (m)
$\tilde{h}$	épaisseur du film lubrifiant sans dimension
$\delta h$	déformations élastiques et thermiques, (m)
$h_c$	coefficient de convection, (W/m <sup>2</sup> °K)
$\frac{\partial h}{\partial t}$	vitesse d'écrasement du film (squeeze velocity), (m. s <sup>-1</sup> )
$K$	conductivité thermique du matériau, (W m <sup>2</sup> °K <sup>-1</sup> )
$K$	numéro d'itération

$K_{ij}$	tenseur des taux de courbure
$\tilde{k}$	conductivité thermique du matériau sans dimension
$L$	longueur du palier, (m)
$\ell_2$	longueur du bras de vilebrequin, (m)
$\ell_3$	longueur de bielle, (m)
$\ell$	demi longueur de la bosse, (m)
	paramètre du couple des contraintes, (m)
$M_{ij}$	tenseur des couples de contraintes
$N$	vitesse de rotation du moteur (vilebrequin), (rpm)
$nsteps$	nombre de pas de temps dans un cycle de chargement nombre d'étapes d'un cycle moteur
$N_x$	nombre de cellules ou de mailles dans la direction circonférentielle du demi palier
$N_z$	nombre de cellules ou de mailles dans la direction axiale du demi palier
$N_\theta$	nombre de cellules ou de mailles dans la direction circonférentielle du demi palier
$Q_z$	débit de fuite dans le sens axial, ( $m^3/s$ )
$q_x, q_y$	pressions dynamiques complexes
$Q_x, Q_y$	déformations dynamiques complexes adimensionnelles
$p$	pression du film d'huile, (Pa) pression aérodynamique dans le film lubrifiant, (Pa)
$p_a$	pression atmosphérique, (Pa)
$\tilde{p}$	pression aérodynamique adimensionnelle, $\tilde{p} = \frac{p}{p_a}$
$p_s$	pression d'alimentation, (Pa)
$p_0$	pression statique, (Pa)
$p_{max}$	pression maximale du film lubrifiant, (Pa)
$p_s$	pression maximale du film instantanée, (Pa)
$\tilde{p}$	pression hydrodynamique sans dimension
$p_{cav}$	pression de cavitation, (Pa)
$p_x, p_y, p_{\dot{x}}, p_{\dot{y}}$	pressions dynamiques, (Pa/m)
$R$	rayon de l'arbre, (m)
$R_a$	rayon de l'arbre, (m)

$R_c$	rayon du coussinet, (m)
$R_b$	rayon du palier, (m)
$s$	pas de la feuille ondulée, (m)
$T$	température, (°K)
$T_{eff}$	température effective, (°K)
$T_{inlet}$	température d'entrée, (°K)
$T_0$	température de référence, (°K)
$\bar{T}_a$	température moyenne d'arbre, (°K)
$\bar{T}_c$	température moyenne du coussinet, (°K)
$\tilde{T}$	température sans dimension
$\Delta T$	accroissement de température, (°K)
$t$	temps, (s)
$\tilde{t}$	temps adimensionné
$t_l$	épaisseur du revêtement, (m)
$t_h$	épaisseur de la couche élastique, (m)
$\tilde{t}_h$	épaisseur relative de la couche adimensionnelle
$t_b$	épaisseur de la feuille supérieure, (m)
$\Delta t$	incrément de temps, (s)
$U$	vitesse linéaire de la surface de l'arbre, $U=\omega R$ , (m s <sup>-1</sup> )
$u, v$ et $w$	composantes du champ de vitesse dans le repère lié à l'arbre, (m s <sup>-1</sup> )
$u_i$	composantes du vecteur vitesse, (m/s)
$u_1$ et $u_2$	composantes du champ de vitesse de l'écoulement suivant $x_1$ et $x_2$ , (m s <sup>-1</sup> )
$\tilde{u}, \tilde{v}$ et $\tilde{w}$	composantes du champ de vitesse adimensionnées
$\bar{u}$ et $\bar{w}$	vitesse d'écoulement moyennes en régime laminaire, (m s <sup>-1</sup> )
$V$	vitesse linéaire de l'arbre en rotation, (m s <sup>-1</sup> )
$W$	charge portante du palier, (N)
$W_0$	charge statique appliquée au palier, (N)
$W_{x,y}$	composantes de la charge dans le repère lié à l'arbre, (N)
$\bar{W}$	charge portante adimensionnée, $\bar{W} = \frac{W}{(p_a R^2)}$
$x_i$	variables d'espaces, (m)
( $x, y, z$ )	variables d'espaces, (m)
( $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ )	variables d'espaces adimensionnées

X,Y	coordonnées du centre de l'arbre, (m)
z	coordonnée axiale du palier, (m)
$T_{ij}$	tenseur des contraintes symétrique
S	Nombre de Sommefed, $S = \frac{\mu\omega RL(R/C)^2}{\pi W_0}$

### **Symboles grecs**

$\mathcal{C}$	opérateur de complaine de la structure, $\mathcal{C} = \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)t_h}{1-\sigma} \frac{1}{E}$ , (m <sup>3</sup> /N)
$\mathcal{Q}$	opérateur scalaire de la bosse de feuille, $\mathcal{Q} = \frac{2s}{E} \left(\frac{\ell}{t_b}\right)^3 (1 - \sigma^2)$ , (m / Pa)
$\mathcal{P}_e$	nombre du Peclet, $\mathcal{P}_e = \rho_0 \mathcal{C} \rho_0 \frac{v h^2}{L k_0}$
$\zeta$	vecteur vorticité ou tourbillon
$\mathcal{P}$	puissance dissipée totale, (W)
$\mathcal{P}_{shear}$	puissance dissipée par cisaillement, (W)
$\mathcal{P}_{squeeze}$	puissance dissipée par écrasement, (W)
$\mathfrak{R}_L$	nombre de Reynolds local
$\alpha$	coefficient de piézo-viscosité, (Pa <sup>-1</sup> )
$\alpha_a$ et $\alpha_c$	coefficients de dilatation de l'arbre et du (°K <sup>-1</sup> )
$\varepsilon$	excentricité relative, ( $\varepsilon = \frac{e}{c}$ )
$\varepsilon_0$	excentricité relative statique
$\tau$	contrainte de cisaillement
$\beta$	coefficient de thermo viscosité, (°K <sup>-1</sup> )
$\delta_{ij}$	symbole de Kronecker
$\eta$	constante physique due à la présence des couples de contrintes, (N.s)
$\eta'$	constante physique due à la présence des couples de contrintes, (N.s)
$\gamma$	fréquence de fouettement relative, $\gamma = v/\omega$
$\dot{\gamma}$	taux de cisaillement, (s <sup>-1</sup> )
$\Phi$	fonction de dissipation, (W m <sup>-3</sup> )
$\Omega_{ij}$	tenseur tourbillon antisymétrique
$\Omega_{GS}$	coefficient de sur-relaxation pour la méthode de Gauss-Seidel
$\mathfrak{S}$	constante de Stephan Boltzmann, $\mathfrak{S} = (5.67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \text{ K}^{-4})$

$\rho$	masse volumique du lubrifiant, (kg/m <sup>3</sup> )
$\tilde{\rho}$	masse volumique adimensionnée
$s$	source de chaleur par unité de masse
$\mathcal{Q}q_X, \mathcal{Q}q_Y$	déformations dynamiques complexes de la feuille de protection
$\theta$	position angulaire, (rad)
$\theta_2$	angle de vilebrequin, (rad)
$\Delta\theta_2$	pas angulaire du vilebrequin
$\theta_3$	angle entre l'axe X <sub>1</sub> lié au bloc moteur et la bielle, (rad)
$\theta_1^*(t), \theta_2^*(t)$	angles délimitant la zone active du palier
$\theta_{C_0}$	angle de cavitation stationnaire, (rad)
$\omega$	vitesse angulaire de l'arbre ( $\omega = \frac{2\pi N}{60}$ ), (rad/s)
$\omega_2$	vitesse angulaire du vilebrequin, $\omega_2 = \frac{d\theta_2}{dt}$ , (rad/s)
$\omega_s$	vitesse angulaire de l'arbre (maneton), (rad/s)
$\omega_b$	vitesse angulaire du palier, ( $\omega_b = \frac{d\theta_3}{dt}$ ), (rad/s)
$\langle\omega\rangle$	vitesse angulaire moyenne de l'arbre et du palier, ( $\langle\omega\rangle = \frac{\omega_s + \omega_b}{2}$ ), (rad/s)
$\varpi$	facteur de sous de sous-relaxation pour la méthode de substitution successive
$\psi$	angle entre la direction de la charge appliquée F et la direction X, (rad)
$\emptyset$	angle de calage du palier, (rad)
$\emptyset_0$	angle de calage statique, (rad)
$\nu$	fréquence de fouettement, (rad s <sup>-1</sup> )
$l$	Longueur caractéristique de la taille des particules solides en suspension dans le fluide, $l = (\eta/\mu)^{\frac{1}{2}}$ , (m)
$\tilde{l}$	paramètre du couple des contraintes adimensionné, $\tilde{l} = l/C$
$\lambda$	proportion du flux de chaleur évacuée par le lubrifiant
$\omega_{NR}$	coefficient d'amortissement pour la méthode de Newton-Raphson
$\Lambda$	nombre de compressibilité
$\sigma$	coefficient de Poisson du coussinet
$\mu_0$	viscosité dynamique à la température de référence T <sub>0</sub> , (Pa. s)
$\mu$	viscosité dynamique du lubrifiant, (Pa. s)
$\vartheta$	viscosité cinématique du lubrifiant, (m <sup>2</sup> /s)

## ***Symbols mathématiques***

$\langle \bullet \rangle$  quantité moyenne

$\begin{bmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{bmatrix}$  matrice carrée

$\begin{Bmatrix} \bullet \\ \bullet \end{Bmatrix}$  vecteur colonne

$\begin{bmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{bmatrix}^T$  transposé d'une matrice

$(\tilde{\square})$  variable sans dimension

## ***Repères***

### **Repères du mécanisme bielle manivelle**

$(O_1, X_1, Y_1, Z_1)$  : Repère fixe lié au bloc moteur ou au cylindre (1)

$(O_2, X_2, Y_2, Z_2)$  : Repère mobile lié au vilebrequin (2)

$(O_3, X_3, Y_3, Z_3)$  : Repère lié à la bielle (3)

### **Repères du palier**

$(O_b, X_3, Y_3)$  ou  $(O_b, X, Y)$  : Repère lié à la bielle (3)

$(x, y, z)$ : Repère local

$(\xi, \eta)$  : Repère lié à la charge dynamique

## **Abbreviations**

**B.C** : Conditions aux limites

**MITI** : Mohawk Innovative Technology Inc

**ASTM** : American Society for Testing and Materials

**AT** : After Top Dead Center

**ISO** : International Organization for Standardization

**PEHD** : Polyéthylène à haute densité

**rpm** : Tours par minute

**THD** : Thermo- hydrodynamique

**TEHD** : Thermoélastohydrodynamique

## Liste des figures

### Chapitre I

<b>Figure I.1</b> Structure des huiles de base.....	8
<b>Figure I.2</b> : Organisation des additifs dispersants et détergents dans l'huile [20].....	15
<b>Figure I.3</b> : Ecoulement laminaire de Couette entre deux plans parallèles.....	18
<b>Figure I.4</b> :Variation de la viscosité avec la température pour une huile minérale Paraffinique (huile Totale Presilia 32) [23].....	20
<b>Figure I.5</b> : Définition de l'indice de viscosité.....	22
<b>Figure I.6</b> : Variation de la viscosité avec le taux de cisaillement .....	23
<b>Figure I.7</b> : Rhéogramme d'un fluide newtonien ( $\mu = tg\alpha$ et $\dot{\gamma} = \frac{du}{dy}$ ).....	25
<b>Figure I.8</b> : Rhéogramme d'un fluide rhéofluidifiant .....	27
<b>Figure I.9</b> : Rhéogramme d'un fluide rhéoépaississant.....	28
<b>Figure I.10</b> : Modèle de Maxwell.....	29
<b>Figure I.11</b> : Réponse d'un fluide à une contrainte de cisaillement.....	30
<b>Figure I.12</b> : Rhéogramme d'un fluide plastique de Bingham .....	31

### Chapitre II

<b>Figure II.1</b> : Composantes des tenseurs des contraintes et des couples de contraintes selon la théorie incohérente.....	36
<b>Figure II.2</b> : Composantes des tenseurs des contraintes et des couples de contraintes selon la théorie cohérente.....	38
<b>Figure II.3</b> : Représentation du vecteur contrainte $t^{(n)}$ et du vecteur couple de contrainte $m^{(n)}$ sur un élément de surface.....	52

### Chapitre III

<b>Figure III.1</b> : Coussinets.....	68
<b>Figure III.2</b> : Section droite d'un palier lisse revêtu .....	68
<b>Figure III.3a</b> : Schéma de principe d'un palier à film amortisseur (SFDB).....	70
<b>Figure III.3b</b> : Amortisseur à film fluide .....	70
<b>Figure III.4a</b> : Photographie d'un palier à trois patins oscillants.....	71

<b>Figure III.4b</b> : Palier à patins oscillants de grand groupe turboalternateur .....	72
<b>Figure III .5</b> : Schématisation d'un palier à trois patins oscillants.....	73
<b>Figure III .6</b> : Géométrie et système de repérage d'un palier cylindrique.....	83
<b>Figure III.7</b> : Visualisation du phénomène de cavitation dans un palier hydrodynamique.....	91
<b>Figure III.8</b> : Courbes de pression hydrodynamique obtenues avec différentes conditions aux limites.....	92
<b>Figure III .9</b> : Vue d'un palier compliant d'hélice marine.....	92
<b>Figure III.10</b> : Schéma d'un palier compliant.....	95
<b>Figure III.11</b> : Action d'un fluide sur les parois d'un contact.....	96
<b>Figure III.12</b> : Exemple de diagramme normalisé ASTM 341 .....	99
<b>Figure III.13</b> : Schéma de calcul THD d'un palier .....	104
<b>Figure III.14</b> : Exemple de distribution de champ de température calculée dans un palier hydrodynamique.....	105
<b>Figure III .15</b> : Systèmes d'axes .....	106
<b>Figure III .16</b> : Schéma de calcul de la viscosité effective.....	108
 <b>Chapitre IV</b>	
<b>Figure IV.1</b> : Schéma de principe du système bielle manivelle avec définition de diffé- rents repères (1: Cylindre, 2: Vilebrequin, 3: Bielle).....	111
<b>Figure IV. 2</b> : Schéma d'un palier de tête de bielle et systèmes d'axes.....	117
<b>Figure IV.3</b> : Maillages (2-D) par différences finies du demi-palier.....	121
<b>Figure IV.4</b> : Nombre d'itérations en fonction du coefficient de sur-relaxation pour une erreur tolérée égale à $10^{-6}$ .....	123
<b>Figure IV .5</b> : Représentation schématique d'un palier dynamiquement chargé soumis à un torseur arbitraire.....	124
<b>Figure IV. 6</b> : Schéma de calcul de la température effective.....	133
<b>Figure IV.7</b> : Variations de la température effective et de la viscosité dynamique effec- tive correspondantes en fonction du nombre de cycles de charge.....	135
<b>Figure IV.8</b> : Chargement dynamique du palier de tête de la bielle du moteur Ruston & Hornsby 6 VEB-X (prise en considération les forces de gaz et d'inertie).....	136-137
<b>Figure IV.9</b> : Comparaison des trajectoires du centre du maneton prédites pour les paliers de bielle Ruston & Hornsby 6 rainurés et non rainurés obtenus après 2 cycles de charge par les méthodes de mobilité de Booker et de Newton –Raphson....	141-142

<b>Figure IV.10</b> : Orbites stationnaires en régime établi du centre du maneton pour un cycle complet du moteur (deux tours de vilebrequin).....	144
<b>Figure IV.11</b> : Epaisseur minimale du film d'huile et pression maximale du film pendant le cycle de charge comple.....	145
<b>Figure IV.12</b> : Débit de fuite latéral et puissance dissipée pendant le cycle complet de charge.....	147
<b>Figure IV.13</b> : Profils de pression hydrodynamique dans la partie médiane du palier pour certains angles de vilebrequin $\theta_2$ .....	150-151
<b>Figure IV.14</b> : Déplacements stationnaires du centre du maneton obtenus par analyses thermiques et isothermes.....	152-153
<b>Figure IV.15</b> : Variations cycliques de l'épaisseur minimale du film et de la pression maximale du film pour les paliers non rainurés obtenues par des analyses isothermes et thermiques.....	153-154
<b>Figure IV.16</b> : Variations cycliques du débit de fuite latéral et de la puissance dissipée pour le palier non rainuré obtenues par des analyses isothermes et thermiques. ....	154-155

## Chapitre V

<b>Figure V.1</b> : Schématisation de la section transversale d'un palier à gaz de première génération .....	160
<b>Figure V.2</b> : Courbes typiques de la pression et de l'épaisseur du film en fonction de l'angle $\theta$ du palier calculées avec différentes conditions aux limites dans le cas rigide et déformable.....	163
<b>Figure V.3</b> : Représentation de la grille des différences finies pour la résolution de l'équation aux dérivées partielles d'ordre zéro sur le domaine du demi-film d'air.....	173
<b>Figure V.4</b> : Grille des différences finies pour la résolution des équations aux dérivées partielles du premier ordre sur le domaine du demi-film d'air codé.....	174
<b>Figure V.5</b> : Distribution de la pression statique le long de la direction circonférentielle au niveau du plan médian du palier pour différentes valeurs du paramètre de couple des contraintes.....	182
<b>Figure V.6</b> : Distribution de la pression statique le long de la direction axiale dans le	

plan de la pression maximale pour différentes valeurs du paramètre de couple des contraintes.....	183
<b>Figure V.7 :</b> Evolution de l'excentricité relative statique des paliers rigides et des paliers à feuilles avec la vitesse de rotation pour différentes valeurs du paramètre des couples des contraintes.....	184
<b>FigureV.8 :</b> Distribution statique de l'épaisseur du film de gaz le long de la direction circonférentielle au niveau du plan médian du palier pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes.....	185
<b>Figure V. 9 :</b> Distribution de l'épaisseur du film statique le long de la direction axiale dans le plan de la pression maximale pour différentes valeurs du paramètre des couple de contraintes.....	186
<b>FigureV.10 :</b> Evolution de l'épaisseur minimale du film des paliers rigide et à feuilles sur une plage de vitesses de rotation calculée pour différentes valeurs du paramètre des couples de contrainte.....	187
<b>Figure V.11 :</b> Comparaison de l'épaisseur minimale du film entre les paliers rigide et à feuilles calculée en fonction de la vitesse de rotation pour les fluides newtonien et à couple de contrainte.....	187
<b>FigureV.12 :</b> Variations de l'angle de calage statique des paliers rigide et à feuilles en fonction de la vitesse de rotation pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes.....	188
<b>Figure V.13 :</b> Comparaison des angles de calage entre les paliers rigide et à feuilles calculés en fonction de la vitesse de rotation pour les fluides Newtonien et à couple de contraintes.....	189
<b>FigureV.14 :</b> Variations du débit de fuite latéral des paliers rigide et à feuilles en fonction de la vitesse de rotation pour différentes valeurs du paramètre du couple de contraintes.....	190
<b>FigureV.15 :</b> Comparaison des débits de fuite latéraux entre un palier rigide et un palier à feuilles en fonction de la vitesse de rotation pour les fluides Newtoniens et à couple de contraintes.....	190
<b>Figure V.16 :</b> Variations de la puissance dissipée des paliers rigide et à feuilles en fonction de la vitesse de rotation pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes.....	191-192
<b>Figure V.17 :</b> Comparaison des puissances dissipées entre les paliers rigide et à feuilles	

calculées sur une plage de vitesses de rotation pour les fluides newtonien et à couple des contraintes.....	192
<b>Figure V.18</b> : Evolution des coefficients de rigidité directe synchrone des paliers rigide et à feuilles en fonction de la vitesse de rotation pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes.....	193-194
<b>Figure V.19</b> : Evolution des coefficients de rigidité croisés, synchrone, des paliers rigide et à feuilles, en fonction de la vitesse de rotation pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes.....	195
<b>Figure V.20</b> : Evolution des coefficients d'amortissement directs synchrones des paliers à film d'air rigide et à feuilles en fonction de la vitesse de rotation pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes.....	196-197
<b>Figure V.21</b> : Evolution des coefficients d'amortissement croisés des paliers rigide et à feuilles, en fonction de la vitesse de rotation pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes.....	197-198
<b>Figure V.22</b> : Variations circonférentielles dans le plan médian du palier des parties réelles et imaginaires de la pression complexe sans dimension $Q_x$ des paliers rigide et à feuilles calculées pour $\gamma = 1$ (excitation synchrone) pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes.....	199
<b>Figure V.23</b> : Variations circonférentielles dans le plan médian du palier des parties réelles et imaginaires de la pression complexe sans dimension $Q_y$ des paliers rigide et à feuilles calculées pour $\gamma = 1$ (excitation synchrone) pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes.....	200
<b>Figure V.24</b> : Coefficients de rigidité directe des paliers rigide et à feuilles calculés sur une plage de fréquences de fouettement relatives pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes.....	201-202
<b>Figure V.25</b> : Coefficients de rigidité croisés des paliers rigides et à feuilles calculés sur une plage de fréquences de fouettement pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes.....	202-203
<b>Figure V.26</b> Evolutions des coefficients d'amortissement directs des paliers rigides et à feuilles calculés sur une plage de fréquences de fouettement relatives pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes.....	204

**Figure V. 27 :** Evolutions des coefficients d'amortissement croisés des paliers rigides et à feuilles calculés sur une plage de fréquences de fouettement relatives pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes.....205

**Figure V.28 :** Evolutions des coefficients de rigidité d'un palier à feuilles lubrifiés par des fluides newtonien et non newtonien à couple de contraintes en fonction de la fréquence de fouettement relative.....206

**Figure V.29:** Evolutions des coefficients d'amortissement d'un palier lubrifiés avec des Fluides newtonien et non newtonien à couple de contraintes en fonction de la fréquence de fouettement relative.....207

## Liste des tableaux

<b>Tableau III.1</b> : Relations viscosité- pression.....	100
<b>Tableau IV.1</b> : Charges appliquées par le maneton sur le palier de tête de bielle pour N = 600 tr / min adaptées à partir des références [27, 47].....	137
<b>Tableau IV.2</b> : Données des paramètres du moteur Diesel Ruston & Hornsby 6.....	139
<b>Tableau IV.3</b> : Paramètres d'entrée (caractéristiques géométriques et conditions de fonctionnement) utilisés pour étudier les caractéristiques du palier de bielle.....	139
<b>Tableau IV. 4</b> : Propriétés rhéologiques et physiques de l'huile moteur ISO VG 100 .....	140
<b>Tableau IV.5</b> : Caractéristiques des maillages des différences finies et données de calcul.....	140
<b>Tableau IV. 6</b> : Comparaison des résultats numériques obtenus dans la présente analyse avec ceux fournis par la littérature technique.....	142
<b>Tableau IV.7</b> : Comparaison des caractéristiques hydrodynamiques pour l'analyse isotherme.....	150
<b>Tableau IV .8</b> : Comparaison des résultats obtenus par analyses isotherme et thermique.....	155
<b>Tableau IV.9</b> : Comparaison des résultats obtenus par analyses isotherme et thermique dans le cas du fluide Non Newtonien.....	156
<b>Tableau V.1</b> : Caractéristiques géométriques et conditions de fonctionnement utilisées pour étudier les performances du palier à feuilles.....	179
<b>Tableau V.2</b> : Caractéristiques de maillage par différences finies et données de calculs.....	180
<b>Tableau V.3</b> : Comparaison de l'excentricité relative statique, de l'angle de calage statique et du pic de la pression statique sans dimension pour $L/D = \Lambda = 1, C/R = 8.64 \times 10^{-4}$ .....	181
<b>TableauV.4</b> Comparaison des coefficients de rigidité normalisés $L/D = \Lambda = 1., C/R = 8.64 \times 10^{-4}, \gamma = 0.,$ et $\tilde{\alpha} = 0$ .....	181
<b>TableauV.5</b> : Comparaison des coefficients d'amortissement synchrones normalisés pour :	
$L/D = \Lambda = 1., C/R = 8.64 \times 10^{-4}, \gamma = 1.,$ et $\tilde{\alpha} = 0$ ( <i>palier rigide</i> ).....	181-182