République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : Analyse Mathématiques appliquées

Par :

DEBBOUCHE Nadjette

Intitulé

ÉTUDE THÉORIQUE ET NUMÉRIQUE D'UN PROBLÈME INVERSE DE LA CHALEUR INTERVENANT UNE VARIABLE SPATIALE DÉVIÉE.

Dirigé par : Prof. BOUSSETILA Nadjib

Devant le jury

PRESIDENT	AZZOUZA N.e	MCB	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	BOUSSETILA Nadjib	Prof	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	BENRABAH Abderrafik	MCB	Univ-Guelma

Session Juin 2016

REMERCIEMENTS

Je tiens à adresser ma profonde reconnaissance à ma directeur de mémoire le professeur Bousstila Nadijb dont ses conseil, ses qualités mathématiques ainsi que sa patience m'ont permis de bien mener ce travail.

Je remercie tout particulièrement le Docteur Azzouza Noureddine et le Docteur Benrabah Abderrafik, d'avoir accepté d'examiner ce mémoire et de participer à ce jury.

RÉSUMÉ

Dans le présent travail, on étudie une classe de problèmes d'évolution mal posés.
Notre objectif est de présenter quelques extensions de la méthode de régularisation de type Sobolev pour un problème de la chaleur non classique.
En se basant sur la méthode de régularisation de type Sobolev, on construit une solution approchée stable à notre problème mal-posé.
On termine cette investigation par quelques résultats de convergences de cette méthode de régularisation, et on établit aussi d'estimation d'erreur entre la solution générale et la solution approchée sous certaines hypothèses de régularité sur les données.

Mots clés : Problèmes inverses, problèmes mal-posés, problème parabolique, régularisation, méthode de régularisation de type Sobolev.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Les problèmes inverses, parfois appelés problèmes d'identifiabilité, se rencontrent dans diverses disciplines et sont d'origines variées.
D'après J.B. Keller [1], deux problèmes sont dits inverses l'un de l'autre si la formulation de l'un met l'autre en cause. Cette définition comporte une part d'arbitraire, et fait jouer un rôle symétrique aux deux problèmes considérés. Une définition plus opérationnelle est qu'un problème inverse consiste à déterminer des causes connaissant des effets. Ainsi, ce problème est l'inverse de celui appelé problème direct, consistant à déduire les effets, les causes étant connues.

▶ Les problèmes inverses sont souvent classés dans la catégorie des problèmes mal-posés introduite par Hadamard [11]au début de siècle dernier [2].
Un problème bien posé au sens d'Hadamard doit satisfaire les trois conditions suivantes : la solution existe, elle est unique et elle est stable. Dés lors que l'une de ces conditions est violée le problème est considéré comme mal posé.

▶ La réalité expérimentale montre que les problèmes inverses sont le plus souvent mal-posés car il ne répondent pas à la troisièmes condition(la stabilité). Le problème est instable que des petites variations sur les données entraînent de grandes variations sur la solution.

1. J. B. Keller, *Inverse problems*, Amer. Math. Monthly, **83** (1976), 107-118.
2. Le premier problème mal-posé date en fait de 1932 d'un fameux article d'Hadamard , il s'agissait de reconstruire la solution d'un problème de Cauchy à partir de la condition initiale

▶ Dans la littérature mathématiques, plusieurs méthodes de régularisation ont été utilisées pour résoudre certains problèmes de Cauchy mal posés. Parmi elles, on peut citer :

• La méthode itérative alternative initialement proposée par Kozolov et al. [16]. Cette méthode consiste à résoudre une suite de problèmes bien posés dont la solution converge, pour des données appartenant à certaines classes admissibles, vers la solution du problème original.

• La méthode de *quasi-réversibilité* initialement introduite par Lattès et Lions [21] consiste à transformer le problème de Cauchy mal posé d'ordre 2 en un problème bien posé d'ordre plus élevé (d'ordre 4) en introduisant un certain paramètre (terme de correction), la convergence au problème d'origine est assurée quand ce paramètre tend vers 0. Cette méthode a été ensuite reprise par plusieurs auteurs pour résoudre le problème de Cauchy, notamment Klibanov et Santosa [24], Bourgeois [3, 4]. Pour plus de détails, on renvoie le lecteur à la référence de base [21].

• La régularisation par les conditions non locales (*QBV.-method*) introduite par Abdulkerimov [1] et qui a été ensuite développée récemment par Hao et *al.* [9]. Le principe de cette approche consiste à perturber légèrement le problème original par un problème nonlocal bien posé, sans modifier l'opérateur différentiel. Dans le livre [30], on trouve un bon exposé accompagné d'une série d'expérimentations justifiant l'efficacité de cette méthode.

▶ L'étude des problème inverses a connu un dévellopement trés important au cours ses dernières années. Cela est du à la richesse du sujet et au fait que ces problèmes sont réellement présents dans des nombreux domaines. Les mathématiques bien sur, avec la base fondamentale que forme la théorie des opérateurs, et les équations aux dérivées partielles. La physique, où naturellement les chercheurs se sont trouvés confrontés à des observations indirectes, les amenant à résoudre des problèmes inverses.

CHAPITRE 1

RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES ET NOTATIONS

L'objectif de ce chapitre est de rappeler quelques notions et résultats qui seront utilisés tout au long de ce travail.

Pour plus de détails, des références à la littérature seront systématiquement données.

On se place dans un un cadre hilbertien ($H_1 \longrightarrow H_2$), où H_i est un espace de Hilbert sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, muni de la norme $|.|_i$ et le produit scalaire $(.,.)_i$, $(i = 1, 2)$.

1.1 Éléments de théorie spectrale

Références

- ☐ H. Brezis ; Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications, Masson (1993).
- ☐ R. Dautray, J.-L. Lions ; Analyse mathématique et calcul numérique. Tome **5** (spectre des opérateurs), Edt. Masson, (1988). [§3. page 136-180].
- ☐ E.B. Davies ; Linear Operator and their Spectra, Cambridge University Press (2007).
- ☐ I. Gohberg, S. Goldberg and M.A. Kaashoek ; Basic Classes of Linear Operators, Birkhäuser (2003).
- ☐ D. Huet ; Décomposition Spectrale et Opérateurs, PUF (1976).
- ☐ P. Lévy-Bruhl ; Introduction à la Théorie Spectrale : Cours et Exercices Corrigés, Dunod (2003).

1.1.1 Opérateurs linéaires

De manière générale, un opérateur linéaire est une application $A : \mathcal{D}(A) \subseteq H_1 \longrightarrow H_2$ linéaire, où $\mathcal{D}(A)$ est le domaine de définition de l'application linéaire A, qui est un sous-espace vectoriel de H_1, que l'on suppose en général dense dans H_1. L'opérateur $A : \mathcal{D}(A) = H_1 \longrightarrow H_2$ est dit borné si la quantité

$$\|A\| = \sup\left\{|Au|_{H_2},\ u \in \mathcal{D}(A),\ |u|_{H_1} = 1\right\}$$

est finie. Dans ce cas A est une application linéaire continue sur $\mathcal{D}(A)$, et lorsque $\mathcal{D}(A)$ est dense dans H_1, A s'étend de manière unique à un opérateur borné sur H_1.

- Tout opérateur A est complètement défini par son graphe $\mathbf{G}(A)$ qui est un sous-espace vectoriel de $H_1 \times H_2$ défini par $\mathbf{G}(A) = \left\{(v, Av),\quad v \in \mathcal{D}(A)\right\}$.

Pour tout opérateur linéaire $A : \mathcal{D}(A) \subseteq H_1 \longrightarrow H_2$, on note par :

$$\mathbf{N}(A) = \left\{h \in \mathcal{D}(A),\ Ah = 0\right\} \text{ (noyau de } A\text{)},$$

$$\mathbf{R}(A) = \left\{h_2 = Ah_1,\ h_1 \in \mathcal{D}(A)\right\} \text{ (image de } A\text{)}.$$

1.1.2 Opérateurs bornés

On note $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ (resp. $\mathcal{L}(H_1)$) l'espace vectoriel des ***opérateurs linéaires continus*** de H_1 dans H_2 (resp. des ***endomorphismes continus*** de H_1) muni de la topologie de la convergence uniforme :

$$B \in \mathcal{L}(H_1, H_2), \quad \|B\|_{\mathcal{L}(H_1,H_2)} = \sup_{u \in H_1 \setminus \{0\}} \frac{|Bu|_2}{|u|_1}.$$

Définition 1.1.1. On dit qu'une application linéaire continue $S \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est ***inversible*** *ssi* il existe une application $S' \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ telle que

$$S' \circ S = I_{H_1}, \quad S \circ S' = I_{H_2}.$$

L'application S' si elle existe est unique. On notera $S' = S^{-1}$ et

$$\mathbf{Inv}(H_1, H_2) := \left\{S \in \mathcal{L}(H_1, H_2),\ S \text{ inversible}\right\}.$$

Théorème 1.1.1. ***[Théorème des isomorphismes de Banach]***
Toute bijection linéaire continue $S \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est inversible.

Définition 1.1.2. Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. On appelle ***ensemble résolvant*** de A, l'ensemble

$$\rho(A) := \left\{\lambda \in \mathbb{C};\ A_\lambda = (\lambda I - A) \text{ est inversible } (\Longleftrightarrow \text{ bijectif })\right\}.$$

Son complémentaire dans le plan complexe s'appelle le ***spectre*** de A et sera noté $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

On appelle ***rayon spectral*** (noté spr(A)) la borne supérieure du spectre en module, i.e.,

$$\operatorname{spr}(A) := \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

▶ Le spectre d'un opérateur borné est un compact non vide.

Le spectre ponctuel de A (noté $\sigma_p(A)$) est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que A_λ soit non injectif :

$$\lambda \in \sigma_p(A) \Longleftrightarrow \mathbf{N}(A_\lambda) \neq \{0\}.$$

Un élément $\lambda \in \sigma_p(A)$ est dit valeur propre de A, il lui correspond un $0 \neq h \in H$ tel que $Ah = \lambda h$ que l'on appelle vecteur propre correspondant à λ.

Définition 1.1.3. (et proposition) Soit $S \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Alors il existe un unique opérateur

$S^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$, appelé adjoint de S, qui vérifie la relation suivante :

$$(Sh_1, h_2)_2 = (h_1, S^*h_2)_1, \quad \forall h_1 \in H_1,\ \forall h_2 \in H_2.$$

De plus, on a les propriétés suivantes :

$$\|S\| = \|S^*\|, \quad S^{**} = (S^*)^* = S.$$

Si S est bijectif ($\Longrightarrow$ inversible), alors S^* l'est aussi, et $(S^*)^{-1} = (S^{-1})^*$.

Définition 1.1.4. Soit H un espace de Hilbert. On dit que $A \in \mathcal{L}(H)$ est ***auto-adjoint*** si $A = A^*$.

$$A = A^* \Longleftrightarrow (Ax, y) = (x, Ay), \quad \forall x, y \in H.$$

1.1.3 Opérateurs non-bornés

Définition 1.1.5. On dit qu'un opérateur A est fermée si son graphe $G(A)$ est fermé dans $H_1 \times H_2$, i.e., pour toute suite $(u_n) \subset \mathcal{D}(A)$ telle que $u_n \longrightarrow u$ dans H_1 et $Au_n \longrightarrow v$ dans H_2, alors $u \in \mathcal{D}(A)$ et $v = Au$.

▶ L'opérateur fermé A peut être considéré comme un opérateur borné de son domaine de définition $\mathcal{D}(A)$ muni de la norme du graphe ($|u|_G := |u|_{H_1} + |Au|_{H_2}$) dans H_1.

Théorème 1.1.2. *[Théorème du graphe fermé] Si l'opérateur fermé A est définit sur tout l'espace H_1, alors A est borné*

$$(A \text{ fermé et } \mathcal{D}(A) = H_1 \Longrightarrow A \text{ borné}).$$

Définition 1.1.6. (et proposition) Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$ un opérateur non-borné à domaine dense. On peut définir l'opérateur non-borné A^* adjoint de l'opérateur A, comme suit :

$$A^* : \mathcal{D}(A^*) \subset H_2 \longrightarrow H_1$$

$$\mathcal{D}(A^*) = \Big\{v \in H_2 : \exists c > 0 \text{ tel que } |\langle v, Au\rangle| \leq c|u|_{H_1}, \quad \forall u \in \mathcal{D}(A)\Big\}.$$

Dans ce cas la fonctionnelle $u \longmapsto g(u) = \langle v, Au\rangle$ elle se prolonge de façon unique en une fonctionnelle linéaire $f : H_1 \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que $|f(u)| \leq c|u|_{H_1}, \quad \forall u \in H_1$. Par suite $f \in H_1' \simeq H_1$. On a par conséquent la relation fondamentale qui lie A et A^*

$$\langle v, Au\rangle_{H_2} = \langle A^*v, u\rangle_{H_1}, \quad \forall u \in \mathcal{D}(A), \forall v \in \mathcal{D}(A^*).$$

▶ Si $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$ est un opérateur non-borné à domaine dense, alors A^* est fermé.

Définition 1.1.7. On dit qu'un opérateur $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$ est symétrique lorsque

$$\forall u, v \in \mathcal{D}(A), \ (Au, v) = (u, Av)$$

Définition 1.1.8. L'opérateur $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$ est dit auto-adjoint si $A = A^*$, i.e.,

$$\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*) \text{ et } (v, Au) = (Av, u), \quad \forall u, v \in \mathcal{D}(A).$$

Théorème 1.1.3. *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur fermé symétrique. A est auto-adjoint si et seulement si $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.*

Théorème 1.1.4. *[Caractérisation des opérateurs à image fermé]*
Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$ un opérateur non-borné, fermé, avec $\overline{\mathcal{D}(A)} = H_1$.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) $\mathbf{R}(A)$ *est fermé,* *(ii)* $\mathbf{R}(A^*)$ *est fermé,* *(iii)* $\mathbf{R}(A) = \mathbf{N}(A^*)^\perp$, *(iv)* $\mathbf{R}(A^*) = \mathbf{N}(A)^\perp$.

Le résultat qui suit est une caractérisation utile des opérateurs surjectifs.

Théorème 1.1.5. *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$ un opérateur non-borné, fermé, avec $\overline{\mathcal{D}(A)} = H_1$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) A est surjectif, i.e., $\mathbf{R}(A) = H_2$,

(b) il existe une constante $k > 0$ telle que

$$|v| \leq k|A^*v|, \quad \forall v \in \mathcal{D}(A^*),$$

(c) $\mathbf{N}(A^*) = \{0\}$ et $\mathbf{R}(A^*)$ est fermé.

Corollaire 1.1.1. *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$ un opérateur non-borné, fermé, avec $\overline{\mathcal{D}(A)} = H_2$. L'opérateur A admet un inverse borné A^{-1} sur H_2 si et seulement s'il existe deux constantes m_1 et m_2 telles que*

$$|u| \leq m_1 |Au|, \quad \forall u \in \mathcal{D}(A),$$

$$|v| \leq m_2 |A^*v|, \quad \forall v \in \mathcal{D}(A^*).$$

1.1.4 Spectre et résolvante d'un opérateur non borné

Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur non borné que l'on suppose fermé [1] [2] [3] et à domaine dense.

Définition 1.1.9. On appelle *ensemble résolvant* de A, l'ensemble

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A_\lambda = \lambda I - A \text{ est bijectif}\}.$$

Son complémentaire dans le plan complexe s'appelle le *spectre* de A et sera noté $\sigma(A) = \mathbb{C} \backslash \rho(A)$.

• On note que si $\lambda \in \rho(A)$, l'inverse $R(\lambda; A) = A_\lambda^{-1}$ est défini sur tout l'espace et est fermé. Par le théorème du graphe fermé, il est borné, i.e., $A_\lambda^{-1} \in \mathcal{L}(H)$. Cet opérateur est appelé la *résolvante* de A.

1. L'hypothèse de fermeture est nécessaire pour faire une théorie spectrale raisonnable.
2. Si A n'est pas fermé, alors $\rho(A) = \emptyset$.
3. Si $A = A^*$, alors $\sigma(A) \neq \emptyset$ et $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.

• L'ensemble résolvant $\rho(A)$ est un ouvert du plan complexe et l'application $\rho(A) \ni \lambda \longmapsto R(\lambda; A)$ est analytique sur chaque composante connexe de $\rho(A)$. La résolvante satisfait à l'équation fonctionnelle suivante dite *identité de la résolvante* :

$$R(\lambda_1; A) - R(\lambda_2; A) = (\lambda_2 - \lambda_1) R(\lambda_1; A) R(\lambda_2; A).$$

• Le spectre de A est donc un fermé de $\mathbb{C}$, et si de plus l'opérateur A est borné, alors $\sigma(A)$ est un compact non vide.

Examinons à présent de plus prés la structure du spectre.

• Le premier sous-ensemble important du spectre est le *spectre ponctuel* :

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A_\lambda \text{ n'est pas injectif}\}.$$

Un élément λ de $\sigma_p(A)$ est dit *valeur propre* de A, il lui correspond un $0 \neq \vartheta \in \mathcal{D}(A)$ tel que $A_\lambda \vartheta = 0$, que l'on appelle *vecteur propre* (fonction propre quand H est un espace de fonctions) correspondant à λ.

• Si $\lambda \in \sigma(A) \backslash \sigma_p(A)$ donc A_λ est injectif mais non surjectif. Deux cas se présentent :

. Si $\mathbf{R}(A_\lambda)$ n'est pas dense, on dit alors que $\lambda \in \sigma_r(A)$ le spectre *résiduel* de A.

. Si $\mathbf{R}(A_\lambda)$ est dense, on dit alors que $\lambda \in \sigma_c(A)$ le spectre *continu* de A.

1.2 Théorie de Riesz-Fredholm

1.2.1 Diagonalisation des opérateurs auto-adjoints compacts

Définition 1.2.1. On dit qu'un opérateur $K \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est ***compact*** si $K(B_{H_1}(0,1))$ est relativement compact pour la topologie forte. On désigne par $\mathcal{K}(H_1, H_2)$ l'ensemble des opérateurs compacts de H_1 dans H_2 et on pose $\mathcal{K}(H_1, H_1) = \mathcal{K}(H_1)$.

► La compacité d'un opérateur $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est caractérisée comme suit :

$$T \in \mathcal{K}(H_1, H_2) \Longleftrightarrow \forall (x_n) \subset H_1,\ \ x_n \rightharpoonup 0 \text{ (faiblement)} \implies Tx_n \longrightarrow 0 \text{ (fortement)}.$$

► Soient E, F et G trois espaces de Banach. Si $S_1 \in \mathcal{L}(E, F)$ et $S_2 \in \mathcal{K}(F, G)$ (resp. $S_1 \in \mathcal{K}(E, F)$ et $S_2 \in \mathcal{L}(F, G)$), alors $S_2 S_1 \in \mathcal{K}(E, G)$.

► [Théorème de Shauder] Si K est compact, alors K^* est compact. Et réciproquement.

Théorème 1.2.1. *Soit* $K \in \mathcal{K}(H)$ *avec* $\dim(H) = \infty$. *Alors on a :*

(a) $0 \in \sigma(K)$,

(b) $\sigma(K)\backslash\{0\} = \sigma_p(K)\backslash\{0\}$,

(c) l'une des situations suivantes :

- *ou bien* $\sigma(K) = \{0\}$,
- *ou bien* $\sigma(K)\backslash\{0\}$ *est fini,*
- *ou bien* $\sigma(K)\backslash\{0\}$ *est une suite qui tend vers* 0.

Théorème 1.2.2. *On suppose que H est séparable. Soit $T \in \mathcal{K}(H)$ un opérateur auto-adjoint compact. Alors H admet une base Hilbertienne formée de vecteurs propres de T :*

$$\forall x \in H, \quad x = x_0 + \sum_{k\geq 1}(x, e_k)e_k,\ x_0 \in \mathbf{N}(A), \quad Tx = \sum_{k\geq 1}\lambda_k e_k.$$

1.3 Problèmes mal posés et problèmes inverses

Problèmes directs. Si on note par **P** l'espace des paramètres, **E** l'espace des excitations et **R** l'espace des états (réponses), alors le problème direct $L : \mathbf{P} \times \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{R}$, consiste à calculer la réponse d à partir de la donnée des sollicitations x et des paramètres p. Les équations de la physique donnent en général la réponse d comme fonction de x et p : $L(x,p) = d$, la notation L symbolise les équations de la physique du problème considéré ; on parle parfois du modèle physique.

Problèmes inverses. D'un point de vue "physique" ou "expérimental", on dit qu'on a un problème inverse toute situation où l'on souhaite évaluer une certaine grandeur physique p inaccessible à l'expérience à partir de la mesure d'une autre grandeur d directement accessible à l'expérience, connaissant un modèle mathématique du problème direct qui donne explicitement d à partir de p (ce que l'on note symboliquement $d = G(p)$). Réf [4]

▶ **Problèmes directs et Problèmes inverses en EDP**

☐ Dans le cas de problèmes directs, étant donné un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, on s'intéresse

4. Marc Bonnet, Problèmes inverses : Cours de DEA Dynamique des Structures et Couplages (2004).

aux solutions $u : \Omega \times [0, \infty[\ni (x,t) \longrightarrow u(x,t) \in E$ de

$$\begin{cases} u_t + F\left(t, x, \partial_{x_1}^{\alpha_1} u, \ldots, \partial_{x_p}^{\alpha_p} u\right) = f, & \text{dans } \Omega \\ \{B_i\}_{i=1}^{q} u = g_i, & \text{sur } \partial\Omega \times [0, \infty[, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

⊡ Dans le cas de problèmes inverses ; à partir d'une connaissance partielle de la solution u de l'EDP (mesures internes, mesures frontières), on doit retrouver par exemple :

- $f, g_1, \ldots, g_q$ $\longrightarrow$ problème d'identification de sources.
- u_0 $\longrightarrow$ problème d'identification de données initiales.
- F $\longrightarrow$ problème d'identification de coefficients.
- Ω $\longrightarrow$ problème d'identification géométrique.

La difficulté principale des problèmes inverses est leur caractère généralement mal posé. [5]

Définition 1.3.1. [13], Soient X, Y deux espaces de Banach, et $A : X \supseteq D(A) \longrightarrow Y$ un opérateur (linéaire ou non-linéaire). Le problème inverse $Ax = y$ est **bien posé** au sens de HADAMARD si

Existence :	Pour tout $y \in Y$ il existe $x \in X$ tel que $Ax = y$.
Unicité :	Pour tout $y \in Y$, il y a au plus une solution $x \in X$.
Stabilité :	La solution x dépend continûment de la donnée y.

Si au moins une de ces trois conditions n'est pas vérifiée, alors le problème est dit **mal posé**. En pratique, cela veut souvent dire qu'il n'existe pas de solution unique ou que, si elle existe, une légère modification des données conduit à des solutions très différentes.

Remarque 1.3.1. Le choix des espaces de départ et d'arrivée X et Y est bien sûr très important dans cette définition. La stabilité est une condition primordiale. En effet, s'il y a un problème de stabilité, le calcul numérique de la solution peut devenir impossible à cause des erreurs de mesures ou d'arrondis.

Remarque 1.3.2. La définition donnée par Hadamard est très contraignante dans la pratique. Il faut donc relaxer la définition d'un problème bien posé.

Définition 1.3.2 (Lavrentiev 1959). (Stabilité conditionnelle) Soit $A : X \supseteq D(A) \longrightarrow Y$ un opérateur fermé, densément défini. On dit que le problème $Ax = y$ est conditionnellement stable (ou correct au sens de TIKHONOV) sur $M \subset \mathcal{D}(A)$ s' il existe une

5. Alors que les mêmes causes provoquent les mêmes effets, des effets identiques peuvent avoir de multiples causes : les problèmes inverses sont mal posés.

fonction

$$\omega : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+, \text{ continue en 0 avec } \omega(0) = 0,$$

telle que l'on ait

$$\|x_2 - x_1\| \leq \omega(\|Ax_2 - Ax_1\|), \forall x_2, x_1 \in M.$$

L'ensemble M est appelée ensemble des contraintes (ou ensemble des informations a priori). L'appartenance de u à M signifie une certaine régularité ou une certaine bornitude.

On donne ici quelques exemples de problèmes mal posés.

***Exemple* 1.3.1. Problème de Cauchy pour l'équation de Laplace.** Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x,y) \in \mathbb{R} \times (0,\infty), \\ u(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ \partial_y u(x,0) = \varphi_\varepsilon(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1.3.1}$$

où $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \varepsilon > 0$. On vérifie aisément que $u_\varepsilon(x,y) = \varepsilon^2 \sinh\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ est une solution du problème (1.3.1). On remarque que $(\varphi_\varepsilon \longrightarrow 0, \varepsilon \longrightarrow 0)$ mais $(u_\varepsilon(x,y) \longrightarrow \infty, \varepsilon \longrightarrow 0)$ pour tout $x > 0$ fixé. Ce qui prouve que les solutions de (1.3.1) ne dépendent pas continûment des données initiales, d'où le problème est mal posé.

***Exemple* 1.3.2. Problème rétrograde pour l'équation de la chaleur.** Ce problème consiste à déterminer $u(x,0) = u_0(x)$ (condition initiale inconnue), sachant que le champ de temperature $u(x,t)$ vérifié :

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0,\pi), t \in (0,T), \\ u(x,T) = \psi(x), & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & 0 \leq t \leq T, \end{cases} \tag{1.3.2}$$

où $\psi \in L_2(0,\pi)$ est une fonction donnée. Par la méthode de Fourier, on peut expliciter la solution du problème (1.3.2) sous la forme :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{(T-t)n^2} \psi_n e_n(x),$$

où ψ_n est le coefficient de Fourier d'ordre n de ψ :

$$\psi_n = \langle \psi, e_n \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi \psi(x) \sin(nx)\, dx, \quad e_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx).$$

Soit $\varphi(x) = u_0(x,0)$ la temperature initiale. Alors d'après l'égalité de Parseval, on a :

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} e^{2n^2T} |\psi_n|^2.$$

On considère maintenant le problème (1.3.2) avec des données bruitées :

$$\psi_k = \psi + \frac{1}{k} e_k(x).$$

On remarque que $\|\psi_k - \psi\| = \dfrac{1}{k} \longrightarrow 0, k \longrightarrow +\infty$ mais $\|u(\psi_k;0) - u(\psi;0)\| = \dfrac{1}{k} e^{k^2T} \longrightarrow +\infty, k \longrightarrow +\infty$. On voit très clairement que le problème (1.3.2) est instable donc mal posé. C'est pour cela, qu'on dit que les phénomènes de la chaleur sont **irréversibles.**
La solution de l'équation de la chaleur avec la condition initiale $u(x,0) = \varphi(x)$, telle que $\varphi(x) \in L_2(0,\pi)$ est donnée par la formule :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2t} \varphi_n e_n(x) = \int_0^{\pi} \left\{ \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2t} \sin(nx) \sin(n\xi) \right\} \varphi(\xi) d\xi.$$

Ainsi, u est solution du problème (1.3.2) si et seulement si φ satifait l'équation de Fredholm de première espèce :

$$\mathcal{K}\varphi = \psi, \quad u(xT) = \int_0^{\pi} K(x,\xi) \varphi(\xi) d\xi = \psi(x), \quad 0 \le x \le \pi,$$

où $K(x,\xi) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2T} \sin(nx) \sin(n\xi)$.

L'opérateur intégral K est du type Hilbert-Schmidt (donc compact), d'où $\mathcal{K}^{-1}$ n'est pas borné. Ce qui montre le caractère mal posé du problème (1.3.2).

***Exemple* 1.3.3. Equation hyperbolique avec conditions de Dirichlet.** Considérons le problème suivant :

$$(1.3.3) \qquad \begin{cases} u_{tt}(t) + Au(t) = 0, & 0 < t < T, \\ u(0) = \varphi, \quad u(T) = \psi, \end{cases}$$

où φ, ψ sont des fonctions données dans H, et $A : \mathcal{D}(A) : H \longrightarrow H$ tel que $A = A^*$ et $A \ge \delta > 0$. Si $\lambda_k = \dfrac{(k\pi)^2}{T^2}, k = 1, 2, \ldots,$ ne sont pas des valeurs propres de A, alors l'opérateur $\left(\sin\left(T\sqrt{A}\right)\right)$ est injectif, et la solution formelle du problème (1.3.3) est donnée par :

$$u(t) = \sin\left((T-t)\sqrt{A}\right)\left(\sin\left(T\sqrt{A}\right)\right)^{-1} \psi + \sin\left(t\sqrt{A}\right)\left(\sin\left(T\sqrt{A}\right)\right)^{-1} \varphi.$$

Inversement, si $\left\{\lambda_k = \frac{(k\pi)^2}{T^2}, k = 1, 2, \ldots,\right\} \cap \sigma_p(A) \neq \emptyset$, alors la solution du problème (1.3.3) n'est pas unique. Le problème (1.3.3) est mal posé au sens d'HADAMARD dans les deux cas : les valeurs $\lambda_k = \frac{(k\pi)^2}{T^2}, k = 1, 2, \ldots,$ peuvent être proches des valeurs propres de A :

$$[\delta, +\infty[\ni \lambda \longmapsto \frac{1}{\sin\left(T\sqrt{\lambda}\right)} \text{ n'est pas bornée au voisinage des } \lambda_k.$$

► On remarque d'après les exemples donnés, qu'il y a deux questions sérieuses liées à cette catégorie de problèmes :

1. **La non unicité.** Pour cette question, il nous faut des informations supplémentaires sur la solution et une bonne connaissance de la nature physique du problème, pour récupérer l'unicité (conditions a priori).
2. **L'instabilité.** Ce caractère est le plus problématique, surtout dans l'implémentation numérique.

   Cela veut dire qu'il est impossible de donner un schéma numérique convergent et stable quel que soit la performance de la méthode proposée. Pour traiter ce caractère d'instabilité, on approxime le problème original par un problème proche (dans un certain sens) qui est stable. Les méthodes de régularisation sont variées. Chaque problème nécessite un traitement spécifique selon sa complexité et son degré de position incorrecte (voir [10])

1.4 Méthodes de régularisation

La régularisation des problèmes mal posés, due initialement à TIKHONOV [32], cherche à redéfinir les notions d'inversion et de solution (quasi-solution, solution approchée, ...), de façon que la « solution régularisée » obtenue par « inversion régularisée » dépende continûment des données et soit proche de la solution exacte (supposant que celle-ci existe pour des données proches des valeurs effectivement obtenues par la mesure). En d'autres termes, on remplace le problème initial mal posé par un autre « proche dans un certain sens » du premier et qui est bien posé.
Considérons le problème inverse $Kh_1 = h_2$ où $K : H_1 \longrightarrow H_2$ est un opérateur compact

injectif. [6] On suppose que $h_2 \in \mathbf{R}(K)$, i.e., le problème inverse possède une solution unique. [7]

Définition 1.4.1. Une famille d'opérateurs linéaires bornés $R_\alpha : H_1 \longrightarrow H_2, (\alpha > 0)$ est dite "famille régularisante" pour l'opérateur K si

$$\forall h_1 \in H^1, \lim_{\alpha \longrightarrow 0} (R_\alpha K) h_1 = h_1, \text{ i.e., } R_\alpha K \longrightarrow I \text{ simplement.}$$

Remarque **1.4.1. (1.3.3)** Si R_α est une famille régularisante pour l'opérateur $K : H^1 \longrightarrow H^2$, où H^1 est de dimension infinie, alors les opérateurs R_α ne sont pas uniformément bornés, i.e., il existe une suite $(\alpha_n) \subset \mathbb{R}_+$ telle que $\lim_{n \longrightarrow \infty} \left\| R_{\alpha_n} \right\| = +\infty$.

La donnée initiale $h_2 \in H^2$ n'est jamais connue exactement : il y a toujours un bruit qui vient la perturber. Notons h_2^η la donnée perturbée où le nombre $\eta > 0$ est le niveau du bruit, i.e., $\left| h_2 - h_2^\eta \right| \leq \eta$.
Notons $h_1^{\alpha,\eta} = R_\alpha h_2^\eta$ l'approximation de la solution du problème inverse $Kh_1 = h_2$ obtenue avec l'opérateur de régularisation et la donnée perturbée. En utilisant l'inégalité triangulaire sur $\left| h_1 - h_1^{\alpha,\eta} \right|$, on obtient

$$\left| h_1 - h_1^{\alpha,\eta} \right| = \left| (h_1 - R_\alpha h_2) + \left(R_\alpha h_2 - h_1^{\alpha,\eta} \right) \right| \leq \eta \left\| R_\alpha \right\| + \left| (h_1 - R_\alpha h_2) \right|. \tag{1.4.1}$$

Le premier terme de droite de l'équation (1.4.1) représente la majoration de l'erreur due au niveau de bruit. Par la Remarque 1.4.1, nous avons vu que $\left\| R_{\alpha_n} \right\| \longrightarrow +\infty$ quand $\alpha \longrightarrow 0$. Donc il ne faut pas choisir α trop petit sinon l'erreur peut devenir très grande. Par contre le second terme de droite de (1.4.1) tend vers 0 quand α tend vers 0 par définition de R_α. Nous allons faire tendre le niveau de bruit η vers 0 et nous allons choisir une stratégie de régularisation de manière à ne pas commettre une trop grande erreur sur la vraie solution h_1.

Définition 1.4.2. Une stratégie de régularisation $\eta \longrightarrow \alpha(\eta)$ est admissible si pour tout $h_1 \in H_1$

$$\lim_{\eta \longrightarrow 0} \alpha(\eta) = 0 \text{ et } \lim_{\eta \longrightarrow 0} \left(\sup_{h_2^\eta \in H^2} \left\{ \left| R_{\alpha(\eta)} h_2^\eta - h_1 \right| \text{ tel que } \left| Kh_1 - h_2^\eta \right| \leq \eta \right\} \right) = 0 \tag{1.4.2}$$

6. Le fait de choisir K injectif n'est pas très contraignant car on peut toujours restreindre l'espace H^1 au complément orthogonal de $\mathbf{N}(K)$, où $\mathbf{N}$ désigne le noyau.

7. Il faut noter que notre problème inverse $Kh_1 = h_2$ est toujours mal posé à cause de la non continuité de K^{-1}.

Les stratégies de régularisation sont variées. Chaque problème nécessite un traitement spécifique selon son degrée de complexité. (Voir. [10]). Parmi les méthodes les plus connues en problèmes inverses et en calcul matriciel mal conditionné, on a la méthode de Tikhonov et la méthode de la troncature spectrale.

CHAPITRE 2

ETUDE D'UN PROBLÈME MIXTE DE LA CHALEUR MAL POSÉ

2.1 Position du problème

Notation. On note par $H = L^2((-1,1),\mathbb{R})$ l'espace de Hilbert muni du produit scalaire et de la norme associée :

$$\langle u,v\rangle := \int_{-1}^{1} u(x)v(x)dx, \quad \|u\|^2 := \int_{-1}^{1} |u(x)|^2 dx.$$

Dans le rectangle $Q = (-1,1)\times(0,T)$, on considère le problème de la chaleur non classique suivant :

$$u_t(x,t) - \alpha u_{xx}(x,t) - \beta u_{xx}(-x,t) = 0, \quad x \in (-1,1),\ t \in (0,T), \tag{2.1.1}$$

avec les conditions aux limites périodiques :

$$u(-1,t) = u(1,t),\ u_x(-1,t) = u_x(1,t), \quad t \in (0,T), \tag{2.1.2}$$

et la condition initiale :

$$u(x,0) = f(x), \quad x \in (-1,1). \tag{2.1.3}$$

Ici α est un réel strictement positif ($\alpha > 0$) et $\beta \in \mathbb{R}$.

Les équations intervenant les termes $u(\sigma(x),t)$, $u_x(\sigma(x),t)$ et $u_{xx}(\sigma(x),t)$, où $\sigma : [-1,1] \longrightarrow [-1,1]$ avec $\sigma([-1,1]) = [-1,1]$, sont appelées équations avec variables déviées. Pour plus de détails concernant le développement théorique et la motivation physique de ces équations, on renvoie le lecteur aux références [33, 5, 28, 29, 18, 19, 20, 31] et le livre de base [34].

• Il est important de signaler que la littérature mathématique dans cette direction est caractérisée par la rareté des travaux traitant les problèmes inverses et les problèmes mal posés avec des variables déviées. Ce travail est donc une continuité naturelle du travail initié par Kalmenov 2007 [18].

2.2 Analyse du problème

Le problème (2.1.1), (2.1.2) et (2.1.3) peut s'écrire sous la forme :

(2.2.1) $$u_t(x,t) + (\alpha I + \beta S)Au(x,t) = 0, \quad 0 < t < T,\ x \in (-1,1), \quad u(x,0) = f(x),$$

où $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ avec

$$D(A) = \{w \in H^2(-1,1) : w(-1) = w(1), w'(-1) = w'(1)\}, \quad Aw(x) = -w_{xx}(x),$$

et

$$S : H \longrightarrow H, w \longmapsto S(w) = v, v(x) = w(-x).$$

Définition 2.2.1. Soit $S : H \longrightarrow H$ un opérateur linéaire.

1. S est une involution si $S^2 = I$.
2. S est unitaire si $SS^* = S^*S = I$, où S^* est l'adjoint de l'opérateur S.

Proposition 2.2.1. *L'opérateur S est une involution unitaire.*

Preuve. Montrons tout d'abord que S est borné. En effet, le changement de variable :

$$x = -y,\ dx = -dy$$

nous permet d'écrire pour tout $u \in H$:

(2.2.2) $$\|Su\|^2 = \int_{-1}^{1} |u(-x)|^2 dx = -\int_{1}^{-1} |u(y)|^2 dy = \|u\|^2.$$

D'où S est borné et $\|S\| = 1$.
D'autre part,
(2.2.3)

$$\langle u, S^*v\rangle = \langle Su, v\rangle = \int_{-1}^{1} u(-x)v(x)dx = -\int_{1}^{-1} u(y)v(-y)dy = \int_{-1}^{1} u(y)v(-y)dy = \langle u, Sv\rangle,$$

ce qui montre que $S = S^*$.
La relation $S^2u(x) = S(Su(x)) = S(u(-x)) = u(x)$ nous permet de conclure que $S^2 = I = S^*S = SS^*$.
D'où le résultat souhaité. ∎

Remarque 2.2.1. En appliquant l'opérateur S sur les deux côtés de l'équation $Su = v$, on obtient $SSu = u = Sv$, i.e., $S^{-1} = S$.

Considérons le problème aux valeurs propres $Au = \lambda u$, $u \neq 0$:

(2.2.4) $$-u_{xx}(x) = \lambda u(x),\ x \in [-1, 1], \quad u(-1) = u(1),\ u'(-1) = u'(1).$$

Si (u, λ) est un couple propre, alors on a

$$\begin{aligned}\lambda(u,u) = (Au,u) = \int_{-1}^{1} -u_{xx}(x)u(x)dx &= -u_xu(x)\,|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} u_x(x)u_x(x)dx \\ &= \underbrace{-(u'(1)u(1) - u'(-1)u(-1))}_{=0} + \int_{-1}^{1} |u_x(x)|^2dx \\ &= \int_{-1}^{1} |u_x(x)|^2 dx \geq 0,\end{aligned}$$

ce qui implique que $\lambda = \omega^2 \geq 0$.
La solution générale de l'équation différentielle (2.2.4) est donnée par la combinaison

$$u(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x),$$

et les conditions de périodicité $u(-1) = u(1), u'(-1) = u'(1)$ fournissent les équations :

$$a\cos(-\omega) + b\sin(-\omega) = a\cos(\omega) - b\sin(\omega) = a\cos(\omega) + b\sin(\omega)$$

$$-\omega a\sin(-\omega)+\omega b\cos(-\omega)=\omega a\sin(\omega)+\omega b\cos(\omega)=-\omega a\sin(\omega)+\omega b\cos(\omega)$$

Ce système homogène possède une solution non triviale si la condition suivante est remplie :

$$\omega\sin(\omega)=0.$$

- Pour $w=0=\lambda$, on obtient $\psi_0(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
- $\sin(\omega)=0 \Longrightarrow \omega=k\pi, k\in\mathbb{Z}^*$. Dans ce cas, on obtient les couples propres

$$\lambda_k=(k\pi)^2,\ \{\varphi_k(x)=\sin(k\pi x), \psi_k(x)=\cos(k\pi x)\},\ k=1,2,\ldots.$$

Soient

$$\varphi_n(x)=\sin(n\pi x),\ \ n\in\mathbb{N}^*,\quad \psi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \ \psi_m=\cos(m\pi x),\ \ m\in\mathbb{N}^*,$$

et

$$\lambda_n=(n\pi)^2,\ \ n\in\mathbb{N}.$$

Montrons que l'ensemble $\mathbb{B}=\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}\bigcup\{\psi_m\}_{m=0}^{\infty}$ est une base hilbertienne de H. La démonstration de cette propriété repose sur le théorème de caractérisation des bases hilbertiennes suivant :

Théorème 2.2.1. [12, Critère de Vitali-Dalzell, p. 39]. *Soit $\mathbb{B}=(\zeta)_{n=0}^{\infty}$ une suite orthonormale de l'espace de Hilbert $H=L^2((a,b),\mathbb{R})$, où (a,b) est un intervalle borné de $\mathbb{R}$. Alors, la suite $\mathbb{B}$ est totale (et donc une base hilbertienne) ssi :*

$$\frac{2}{(b-a)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b\left|\int_a^x\zeta_n(t)dt\right|^2dx=1. \tag{2.2.5}$$

Proposition 2.2.2. *Les éléments de l'ensemble $\mathbb{B}$ forment une base orthonormée dans l'espace de Hilbert H.*

Preuve. On a les propriétés suivantes :

$$\int_{-1}^{1}\varphi_i(x)\varphi_j(x)=\delta_{i,j},\quad \forall(i,j)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^* \tag{2.2.6}$$

$$\int_{-1}^{1}\psi_i(x)\psi_j(x)=\delta_{i,j},\quad \forall(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} \tag{2.2.7}$$

$$\int_{-1}^{1} \varphi_i(x)\psi_j(x) = o, \quad \forall (i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}. \tag{2.2.8}$$

De (2.2.6)-(2.2.8), on voit que la suite $\mathbb{B} = \{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty} \bigcup \{\psi_m\}_{m=0}^{\infty}$ est orthonormale dans $H = L^2(-1,1),\mathbb{R})$. Il reste à vérifier le critère de de Vitali-Dalzell pour conclure que $\mathbb{B}$ est une base hilbertienne de l'espace de Hilbert $H = L^2(-1,1),\mathbb{R})$. En effet,

$$b_n = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{x} \sin(n\pi t)dt\right)^2 dx = \frac{3}{n^2\pi^2}, \quad b_0 = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{x} \frac{1}{\sqrt{2}}dt\right)^2 dx = \frac{4}{3},$$

$$a_n = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{x} \cos(n\pi t)dt\right)^2 dx = \frac{1}{n^2\pi^2},$$

ce qui donne

$$\frac{2}{(-1-1)^2}\left\{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)\right\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{4}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{4}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right\} =$$

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{4}{3} + \frac{4}{\pi^2} \times \frac{\pi^2}{6}\right\} = 1.$$

Ce qui achève la preuve de la Proposition 2.2.2. ∎

Pour $u \in H$, on a la décomposition :

$$u = \sum_{n=1}^{\infty}\langle u, \varphi_n\rangle \varphi_n + \sum_{m=0}^{\infty}\langle u, \psi_m\rangle \psi_m,$$

ce qui donne

$$A\varphi_n = \lambda_n \varphi_n, \quad A\psi_m = \lambda_m \psi_m,$$

et

$$A_{\alpha,\beta}\varphi_n = (\alpha I + \beta S)A\varphi_n = \lambda_n(\alpha I + \beta S)\varphi_n = \lambda_n(\alpha - \beta)\varphi_n = (\alpha - \beta)\lambda_n \varphi_n,$$

$$A_{\alpha,\beta}\psi_m = (\alpha I + \beta S)A\psi_m = \lambda_m(\alpha I + \beta S)\psi_m = \lambda_m(\alpha + \beta)\psi_m = (\alpha + \beta)\lambda_m \psi_m.$$

On sait bien que toute fonction u définie sur l'intervalle $[-1,1]$ s'écrit sous la forme $u = u_i + u_p$, où u_i est impaire et u_p est paire. La même chose pour l'espace $H = L^2((-1,1),\mathbb{R})$, on a $H = H_s \oplus H_c$, où

$$H_s = \overline{\mathrm{span}(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}}, \quad H_c = \overline{\mathrm{span}(\psi_n)_{m=0}^{\infty}}.$$

Remarque 2.2.2. Si on note par $P_s = \frac{1}{2}(I - S)$ et $P_c = \frac{1}{2}(I+S)$, alors on a les propriétés suivantes :

$$P_c\varphi_n = 0, \quad P_c\psi_m = \psi_m, \tag{2.2.9}$$

et

$$P_s\varphi_n = \varphi_n, \quad P_s\psi_m = 0, \tag{2.2.10}$$

c'est-à-dire, P_s et P_c sont des projections orthogonales :

$$I = P_s + P_c, \quad P_sP_c = P_cP_s = 0,$$

et

$$P_s(H) = H_s, \quad P_c(H) = H_c.$$

Cette décomposition nous permet de décomposer le problème

$$u_t + A_{\alpha,\beta}u = 0,\ 0 < t < T, \quad u(0) = f \tag{2.2.11}$$

en deux problèmes dont la somme de leur solutions donne la solution du problème globale 2.2.11. En effet, on peut écrire grâce à la méthode de Fourier (séparation des variables) :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\varphi_n + \sum_{m=0}^{\infty} u_m(t)\psi_m,$$

et

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\varphi_n + \sum_{m=0}^{\infty} f_m(t)\psi_m.$$

En injectant ces expressions dans le problème 2.2.11, on obtient les deux problèmes suivants :

(2.2.12) $$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(u_n'(t)+(\alpha-\beta)\lambda_n u_n(t))\varphi_n = 0, \quad 0<t<T, \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(0)\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} f_n\varphi_n, \end{cases}$$

(2.2.13) $$\begin{cases} \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}(u_m'(t)+(\alpha+\beta)\lambda_m u_m(t))\psi_m = 0, \quad 0<t<T, \\ \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} u_m(0)\psi_m = \sum_{m=0}^{\infty} f_m\psi_m. \end{cases}$$

On obtient donc la famille des équations différentielles suivante :

(2.2.14) $$\begin{cases} u_n'(t)+(\alpha-\beta)\lambda_n u_n(t)) = 0, \quad 0<t<T, \\ u_n(0) = f_n, \end{cases}$$

pour $n \in \mathbb{N}^*$, et

(2.2.15) $$\begin{cases} u_m'(t)+(\alpha+\beta)\lambda_m u_m(t) = 0, \quad 0<t<T, \\ u_m(0) = f_m. \end{cases}$$

pour $m \in \mathbb{N}$.

Remarque 2.2.3. Pour tout n (resp. m) fixé, le problème (2.2.14) (resp. (2.2.15)) est une équation différentielle du premier, qui admet une solution unique donnée par la formule exponentielle.

D'où les solutions uniques de ces problèmes sont données respectivement par :

(2.2.16) **Composante impaire :** $u_n(t) = e^{-(\alpha-\beta)\lambda_n t} f_n, \quad n \in \mathbb{N}^*,$

et

(2.2.17) **Composante paire :** $u_m(t) = e^{-(\alpha+\beta)\lambda_m t} f_m, \quad m \in \mathbb{N}.$

Définition 2.2.2. On dit que l'ensemble $\mathcal{A} \subseteq H$ est admissible pour le problème 2.2.11, si pour tout $f \in H$, le problème 2.2.11 est résoluble, i.e., l'ensemble des solutions $\mathcal{S} \subset H$ associées à f est non vide.

On distingue ici deux cas :

- Si $\beta \in [-\alpha, \alpha]$, alors le problème 2.2.11 est bien posé, de plus sa solution est donnée par :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\alpha-\beta)\lambda_n t} f_n \varphi_n(x) + \sum_{m=0}^{\infty} e^{-(\alpha+\beta)\lambda_m t} f_m \psi_m(x). \tag{2.2.18}$$

et on a aussi la relation de continuité

$$\|u(t,.)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2(\alpha-\beta)\lambda_n t}|f_n|^2 + \sum_{m=0}^{\infty} e^{-2(\alpha+\beta)\lambda_m t}|f_m|^2 \leq \|f\|^2.$$

Ce qui implique que

$$\sup_{0\leq t\leq T} \|u(.,t)\| \leq \|f\|.$$

- Si $\beta \in]-\infty, -\alpha[\cup]\alpha, +\infty[$, alors le problème 2.2.11 est mal posé, et sa solution formelle est donnée par :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\alpha-\beta)\lambda_n t} f_n \varphi_n(x) + \sum_{m=0}^{\infty} e^{-(\alpha+\beta)\lambda_m t} f_m \psi_m(x). \tag{2.2.19}$$

On note ici que l'instabilité de la solution est due des hautes fréquences $\theta_n = e^{-(\alpha-\beta)\lambda_n}$ lorsque $\beta \in]\alpha, +\infty[$:

$$\theta_n = e^{-(\alpha-\beta)\lambda_n} \longrightarrow +\infty,\ n \longrightarrow +\infty,$$

et $\theta_m = e^{-(\alpha+\beta)\lambda_m}$ pour le cas $\beta \in]-\infty, -\alpha[$:

$$\theta_m = e^{-(\alpha+\beta)\lambda_m} \longrightarrow +\infty,\ m \longrightarrow +\infty.$$

Définition 2.2.3. Pour $\beta \in]\alpha, +\infty[$, $\theta \geq 0$, on définit l'ensemble :

$$G_s^\theta = \{h \in H : \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\theta(\alpha-\beta)\lambda_n T}|h_n|^2 < +\infty\}, \quad h_n = (h, \varphi_n), \tag{2.2.20}$$

et si $\beta \in]-\infty, -\alpha[$, on note par :

$$G_c^\theta = \{h \in H : \sum_{m=0}^{\infty} e^{-2\theta(\alpha+\beta)\lambda_m T}|h_m|^2 < +\infty\}, \quad h_m = (h, \psi_m). \tag{2.2.21}$$

Remarque 2.2.4. 1. L'ensemble G_s^θ (resp. G_c^θ) est non vide. En effet, il suffit de remarquer que $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty \subset G_s^\theta$, $\{\psi_m\}_{m=0}^\infty \subset G_c^\theta$.

2. Si $\theta = 0$, alors $G_s^0 = G_c^0 = H$.

3. Si $\theta_2 \geq \theta_1$, alors $G_s^{\theta_2} \subseteq G_s^{\theta_1}$, $G_c^{\theta_2} \subseteq G_c^{\theta_1}$.

Théorème 2.2.2. *Soit $\beta \in]\alpha, +\infty[$, alors le problème 2.2.11 admet une solution unique $u \in C([0,T], H)$ ssi $f \in G_s^1$.*

Preuve. L'unicité de la solution du problème 2.2.11 découle de l'unicité des solutions des problèmes (2.2.14) et (2.2.15).
Maintenant, la propriété $u \in C([0,T], H)$ est équivalente à $\sup\limits_{0 \leq t \leq T} \|u(t,.)\| < \infty$.
On a

$$\sup_{0\leq t\leq T} \|u(t,.)\|^2 = \sup_{0\leq t\leq T} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2(\alpha-\beta)\lambda_n t}|f_n|^2 + \sum_{m=0}^{\infty} e^{-2(\alpha+\beta)\lambda_m t}|f_m|^2 \right\} \leq$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2(\alpha-\beta)\lambda_n T}|f_n|^2 + \sum_{m=0}^{\infty} |f_m|^2 < +\infty$$

si et seulement si $f \in G_s^1$.
De manière analogue, on montre le théorème suivant :

Théorème 2.2.3. *Soit $\beta \in]-\infty, -\alpha[$, alors le problème 2.2.11 admet une solution unique $u \in C([0,T], H)$ ssi $f \in G_c^1$.*

Remarque 2.2.5. Notons u_s la composante impaire de la solution u :

$$u_s(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\alpha-\beta)\lambda_n t} f_n \varphi_n(x), \tag{2.2.22}$$

et u_c la composante paire :

$$\sum_{m=0}^{\infty} e^{-(\alpha+\beta)\lambda_m t} f_m \psi_m. \tag{2.2.23}$$

De même pour f,

$$f = f_s + f_c = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} f_n \varphi_n}_{\text{composante impaire}} + \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} f_m \psi_m}_{\text{composante paire}} .$$

Si $\beta \in]\alpha, +\infty[$ (resp. $\beta \in]-\infty, -\alpha[$), on remarque que la composante impaire u_s (resp. u_c) est la source de l'instabilité.

A partir de ces deux remarques, on distingue deux situations particulières :

1. Si $\beta \in]\alpha, +\infty[$, $f = f_c$ et si les données sont parfaitement exactes, alors dans ce cas, la solution est stable sur le sous-espace H_c.
2. Si $\beta \in]-\infty, -\alpha[$, $f = f_s$ et si les données sont parfaitement exactes, alors dans ce cas, la solution est stable sur le sous-espace H_s.

2.3 Régularisation de Sobolev

Maintenant, on considère le problème suivant :

$$\text{(2.3.1)} \qquad \begin{cases} L_\epsilon u &= 0, \quad (x,t) \in (-1,1)\times(0,T) \\ u(x,0) &= f, \quad x \in (-1,1) \\ u(-1,t) &= u(1,t), \quad u'(-1,t) = u'(1,t), \qquad t \in (0,T) \end{cases}$$

où

$$\text{(2.3.2)} \qquad \begin{aligned} L_\epsilon u &= \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(-x,t) \\ &- \epsilon \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right) + \epsilon \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(-x,t)\right) \end{aligned}$$

On sait que

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\varphi_n + \sum_{m=0}^{\infty} u_m(t)\psi_m,$$

en injectant cette formule dans l'éxpression de L_ϵ, on trouve les deux problème suivant :

$$\text{(2.3.3)} \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big((1+2\epsilon\lambda_n)u_n'(t) + (\alpha-\beta)\lambda_n u_n(t)\Big)\varphi_n(x) = 0, \quad 0<t<T, \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(0)\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} f_n\varphi_n, \end{cases}$$

$$\text{(2.3.4)} \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\Big(u_m'(t) + (\alpha+\beta)\lambda_m u_m(t)\Big)\psi_m(x) = 0, \quad 0<t<T, \\ \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} u_m(0)\psi_m = \sum_{m=0}^{\infty} f_m\psi_m. \end{cases}$$

Donc on obtient la famille des équations différentielles :

$$\text{(2.3.5)} \qquad \begin{cases} (1+2\epsilon\lambda_n)u_n'(t) + (\alpha-\beta)\lambda_n u_n(t) = 0, \quad 0<t<T, \\ u_n(0) = f_n, \end{cases}$$

pour $n \in \mathbb{N}^*$, et

(2.3.6)
$$\begin{cases} u_m'(t) + (\alpha+\beta)\lambda_m u_m(t) = 0, & 0 < t < T, \\ u_m(0) = f_m. \end{cases}$$

pour $m \in \mathbb{N}$.

Par conséquent, les solutions uniques de ces problèmes sont données respectivement par :

(2.3.7)
$$\textbf{composante impaire :} \quad u_n(t) = e^{-\frac{(\alpha-\beta)}{1+2\epsilon\lambda_n}\lambda_n t} f_n, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

et

(2.3.8)
$$\textbf{composante paire :} \quad u_m(t) = e^{-(\alpha+\beta)\lambda_m t} f_m, \quad m \in \mathbb{N}.$$

La solution du problème global 2.3.1 est la somme de deux dernières solutions, donc :

$$u_\epsilon(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{(\alpha-\beta)}{1+2\epsilon\lambda_n}\lambda_n t} f_n \varphi_n(x) + \sum_{m=0}^{\infty} e^{-(\alpha+\beta)\lambda_m t} f_m \psi_m$$

- Si $\beta \in]\alpha, \infty[$, on a :

$$u(x,t) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\alpha-\beta)\lambda_n t} f_n \varphi_n(x)}_{\text{composante non bornée}} + \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} e^{-(\alpha+\beta)\lambda_m t} f_m \psi_m}_{\text{composante bornée}}$$

Lemme 2.3.1. *$\forall \lambda \geq 0$, on a toujours :*

$$1 - e^{-\lambda} \leq \lambda^r, \ \forall 0 < r \leq 1$$

Théorème 2.3.1. *Si $\beta \in]\alpha, \infty[$, on a :*

$$\|\Delta_\epsilon(t)\|^2 \leq \|\Delta_\epsilon(T)\|^2 \to 0, \ \epsilon \to 0$$

Preuve.

$$\begin{aligned} \Delta_\epsilon(t) &= u(x,t) - u_\epsilon(x,t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ e^{-(\alpha-\beta)\lambda_n t} - e^{-\frac{(\alpha-\beta)}{1+2\epsilon\lambda_n}\lambda_n t} \right\} f_n \varphi_n(x) \end{aligned}$$

Donc

$$\|\Delta_\epsilon(t)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left\{ e^{-(\alpha-\beta)\lambda_n t} - e^{-\frac{(\alpha-\beta)}{1+2\epsilon\lambda_n}\lambda_n t} \right\}^2}_{G(\lambda_n)} |f_n|^2$$

alors on a besoin d'estimer $G(\lambda_n)$,en effet :

$$\begin{aligned} G(\lambda_n) &= \left\{ e^{-(\alpha-\beta)\lambda_n t} \left\{ 1 - e^{(\alpha-\beta)\lambda_n t - \frac{(\alpha-\beta)}{1+2\epsilon\lambda_n}\lambda_n t} \right\}^2 \right\} \\ &= e^{-2(\alpha-\beta)\lambda_n t} \left\{ 1 - e^{\frac{2(\alpha-\beta)\epsilon\lambda_n^2}{1+2\epsilon\lambda_n} t} \right\}^2 \end{aligned}$$

Puisque $\|\Delta_\epsilon(t)\|^2 \leq \|\Delta_\epsilon(T)\|^2$, donc il suffit d'estimer la valeur $\Delta_\epsilon(T)$. On a :

$$\|\Delta_\epsilon(T)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2T(\alpha-\beta)\lambda_n} \left\{ 1 - e^{\frac{2T(\alpha-\beta)\epsilon\lambda_n^2}{1+2\epsilon\lambda_n}} \right\}^2 |f_n|^2$$

On suppose maintenant que $f \in G_s^1$ c-à-d $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2T(\alpha-\beta)\lambda_n} |f_n|^2 < +\infty$ (série convergente), et soit $\eta > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ telle que :

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} e^{-2(\alpha-\beta)\lambda_n T} |f_n|^2 < \frac{\eta^2}{2}$$

On peut écrire

$$\|\Delta_\epsilon(T)\|^2 = \underbrace{\sum_{n=1}^{N} e^{-2(\alpha-\beta)\lambda_n T} \left\{ 1 - e^{\frac{2(\alpha-\beta)\epsilon\lambda_n^2}{1+2\epsilon\lambda_n} T} \right\}^2 |f_n|^2}_{A_1} + \underbrace{\sum_{n=N+1}^{\infty} e^{-2(\alpha-\beta)\lambda_n T} \left\{ 1 - e^{\frac{2(\alpha-\beta)\epsilon\lambda_n^2}{1+2\epsilon\lambda_n} T} \right\}^2 |f_n|^2}_{A_2}$$

et

$$A_2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} e^{-2(\alpha-\beta)\lambda_n T} \left\{ 1 - e^{\frac{2(\alpha-\beta)\epsilon\lambda_n^2}{1+2\epsilon\lambda_n} T} \right\}^2 |f_n|^2 \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} e^{-2(\alpha-\beta)\lambda_n T} |f_n|^2 \leq \frac{\eta^2}{2}$$

D'autre part :

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \sum_{n=1}^{N} e^{-2(\alpha-\beta)\lambda_n T}\left\{1 - e^{\frac{2(\alpha-\beta)\epsilon\lambda_n^2}{1+2\epsilon\lambda_n}T}\right\}^2 \\
&\leq \sum_{n=1}^{N} e^{-2(\alpha-\beta)\lambda_n T}\left[\frac{2(\alpha-\beta)\epsilon\lambda_n^2}{1+2\epsilon\lambda_n}T\right]^2 |f_n|^2 \\
&\leq \sum_{n=1}^{N} e^{-2(\alpha-\beta)\lambda_n T}\left(2(\alpha-\beta)T\epsilon\lambda_n^2\right)^2 |f_n|^2 \\
&\leq \left\{\sum_{n=1}^{N} e^{-2(\alpha-\beta)\lambda_n T} 4T^2(\alpha-\beta)^2\epsilon^2\lambda_n^4\right\}|f_n|^2 \\
&\leq 4T^2(\alpha-\beta)^2\lambda_N^4\epsilon^2\left\{\sum_{n=1}^{N} e^{-2(\alpha-\beta)\lambda_n T}|f_n|^2\right\} \\
&\leq 4T^2(\alpha-\beta)^2\lambda_N^4 E^2\epsilon^2
\end{aligned}
$$

On choisit ϵ de façon que

$$4T^2(\alpha-\beta)^2E^2\lambda_N^4\epsilon^2 \leq \frac{\eta^2}{2}$$

il en résulte que

$$\|\Delta_\epsilon(T)\|^2 = A_1 + A_2 \leq \eta^2$$

pour tout ϵ satisfait : $\epsilon \leq \dfrac{\eta}{2\sqrt{2}T\lambda_N^2(\alpha-\beta)E}$, et η est un nombre réel positif arbitraire.

Ce qui montre que

$$\|\Delta_\epsilon(T)\|^2 \to 0,\ \epsilon \to 0$$

∎

Maintenant, on suppose que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2(\alpha-\beta)\lambda_n T}\lambda^{2r}|f_n|^2 = F^2 < \infty$$

Théorème 2.3.2. *Sous cette dernière condition, on a l'estimation suivante :*

$$\sup_{0\leq t\leq T}\|\Delta_\epsilon(t)\|^2 \leq \Delta_\epsilon(T) \leq \kappa\epsilon^{2r}F^2$$

où $0 < r \leq 1$

Preuve. On a

$$
\begin{aligned}
\Delta_\epsilon(T) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2(\alpha-\beta)\lambda_n T}\left[\frac{2(\alpha-\beta)\epsilon\lambda_n^2}{1+2\epsilon\lambda_n}T\right]^{2r}|f_n|^2 \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2(\alpha-\beta)\lambda_n T}(\alpha-\beta)^{2r}\lambda_n^{2r}(2T)^{2r}\epsilon^{2r} \qquad (2.3.9)\\
&\leq \epsilon^{2r}(\alpha-\beta)^{2r}(2T)^{2r}F^2 \\
&\leq \kappa F^2\epsilon^{2r}
\end{aligned}
$$

où $\kappa = (\alpha-\beta)^{2r}(2T)^{2r}$,

Par conséquent , on obtient l'estimation souhaitée . ∎

BIBLIOGRAPHIE

[1] L.S. Abdulkerimov, *Regularization of an ill-posed Cauchy problem for evolution equations in a Banach space*, Azerbaidzan. Gos. Univ. Ucen. Zap. Fiz. Mat., **1** (1977), 32-36 (MR0492645) (in Russian).

[2] K.A. Ames, B. Straughan, Non-Standard and Improperly Posed Problems, Academic Press (1997).

[3] L. Bourgeois, *Convergence rates for the quasi-reversibility method to solve the Cauchy problem for Laplace's equation*, Inverse Problems **21** (2005), No. **3**, 1087-1104.

[4] L. Bourgeois, *A mixed formulation of quasi-reversibility to solve the Cauchy problem for Laplace's equation*, Inverse Problems **22** (2006), 413-430.

[5] E.P. Belan, Dynamics of stationary structures in a parabolic problem with reflected spatial argument, Cybernetics and Systems Analysis, Vol. 46, No. 5, 2010, 772-783.

[6] M.Sh. Burlutskaya, A.P. Khromov, *Substantiation of Fourier method in mixed problem with involution*, Izv. Saratov. Univ. Mat. Mekh. Inform., 2011, Vol.11, Issue 4, 3-12.

[7] M.Sh. Burlutskaya, A.P. Khromov, *Mixed problem for simplest hyperbolic first order equations with involution*, Izv. Saratov. Univ. Mat. Mekh. Inform., 2014, Vol.14, Issue 1, 10-20.

and Sons, Inc., New York, 1967.

[8] Dinh Nho Hào, *A mollification method for ill-posed problems*, Numer. Math., **68** (1994), pp. 469-506.

[9] D.N.Hào, N.V. Duc and D. Lesnic, *A non-local boundary value problem method for the Cauchy problem for elliptic equations*, Inverse Problems **25**(2009) : 055002(27pp).

[10] H.W. Engel, M. Hanke and A. Neubauer, Regularization of Inverse Problems, Kluwer Academic, (2000).

[11] J. Hadamard, *Lecture note on Cauchy's problem in linear partial differential equations*,Yale Uni Press, New Haven, 1923.

[12] J. R. Higgins. Completeness and basis properties of sets of special functions, Cambridge University Press (1977).

[13] J. Hadamard, Lectures on Cauchy problem in linear partial equations, Dover, New York (1953).

[14] S.G. Krein and Ju.I. Petunin, *Scales of Banach spaces*, Uspehi Mat. Nauk, **21** (1966), 89-168.

[15] R. Kress, Linear Integral Equations, vol. 82 of Applied Mathematical Sciences, Springer (1989).

[16] V.A. Kozlov, V.G. Maz'ya, On iterative procedure for solving ill-posed boundary value problems that preserve differential equations, Leningrad Math J., (1990) **1**, 1207-1228.

[17] S.I. Kabanikhin and M. Schieck, *Impact of conditional stability : convergence rates for general linear regularization methods*, J. Inverse Ill-Posed Probl., (2008) **16**(3) :267-282.

[18] T.Sh. Kalmenov and A.Sh. Shaldanbaev, *Necessary and Sufficient Condition for the Existence of a Strong Solution for a Parabolic Equation in Reverse Time*, Vestn. Kazakh. Nar. Univ., (2007), no. 2 (53), 58-72.

[19] T.Sh. Kalmenov and U.A. Iskakova, A Criterion for the Strong Solvability of the Mixed Cauchy Problem for the Laplace Equation, Doklady Mathematics, 2007, Vol. 75, No. 3, 370-373.

[20] T.Sh. Kalmenov and U.A. Iskakova, *Criterion for the Strong Solvability of the Mixed Cauchy Problem for the Laplace Equation*, Differential Equations, (2009), Vol. 45, No. 10, 1460-1466.

[21] R. Lattès, J.-L. Lions, The method of quasi-reversibility. Applications to partial differential equations, Elsevier, New York (1969).

[22] M.M. Lavrentev, V.G. Romanov and G.P. Shishatskii, *Ill-posed Problems in Mathematical Physics and Analysis*, Providence, RI : American Mathematical Society 1986.

[23] M.M. Lavrentiev and L.Ya. Saveliev, Operator theory and ill-posed problems, Inverse and Ill-Posed Problems Series. VSP, Leiden Boston (2006).

[24] M.V. Klibanov, F. Santosa, A computational quasi-reversibility method for Cauchy problems for Laplace's equation, SIAM J. Appl.Math. 51, 1653-1675, 1991

[25] I.V. Mel'nikova, *Regularization of ill-posed differential problems*, Siberian Math. J. (1992) 33, 289-298.

[26] L. E. Payne, Improperly Posed Problems in Partial Differential Equations, Philadelphia, PA : Society for Industrial and Applied Mathematics, 1975.

[27] A. Pazy, Semigroups of linear operators and application to partial differential equations, Springer-Verlag, 1983.

[28] A.V. Razgulin, *The Problem of Control of a Two-Dimensional Transformation of Spatial Arguments in a Parabolic Functional-Differential Equation*, Differential Equations, 2006, vol. 42, no. 8, 1140-1155.

[29] A.V. Razgulin, T.E. Romanenko, *Rotating Waves in Parabolic Functional-Differential Equations with Rotation of Spatial Argument and Time Delay*, Comput. Math. Math. Phys., 2013, vol. 53, no. 11, 1626-1643.

[30] A.A. Samarskii, P.N. Vabishchevich, *Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics*, Inverse and Ill-Posed Problems Series, Walter de Gruyter, Berlin. New York, 2007.

[31] M A. Sadybekov and A.M. Sarsenbi, *Criterion for the Basis Property of the Eigenfunction System of a Multiple Differentiation Operator with an Involution*, Differential Equations, 2012, Vol. 48, No. 8, 1112-1118.

[32] A.N. Tikhonov and V.Y. Arsenin, Solution of Ill-posed Problems, Winston & Sons, Washington, DC, (1977).

[33] E.M. Varfolomeev, *On Some Properties Of Elliptic And Parabolic Functional Differential Operators Arising In Nonlinear Optics*, Journal of Mathematical Sciences, Vol. 153, No. 5, 2008, 649-682.

[34] J. Wiener, Generalized Solutions of Functional Differential Equations, World Scientific Publishing (1993).