République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **probabilités et applications**

Par :

kraimia feyrouz et Drardja selma

Intitulé

Processus de diffusion propriété et application

Dirigé par : **Dr.Benchaabane Abbesse**

Devant le jury

PRESIDENT	Dr.Bouhadjar Slimane	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr.Benchaabane Abbesse	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr.Sekrani Samia	Univ-Guelma

Session Juin 2015

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier ALLAH qui ma donné le courage, la santé, et la volonté pour réaliser ce modeste travail tout au long de mes années d'études.

A : Dr **Benchaabane Abbesse**, que je me remercie de m'avoir inspiré le choix de ce sujet, pour son encadrement et pour ces précieux et judicieux conseils qu'elle m'a cessé de me prodiguer tout au long de ce travail.

Je suis très honoré que Dr**BouhadjarSlimane**, ait accepté de rapporter mon travail et de présider mon jury de Mémoire, je le remercie pour ses conseils et ses précieuses remarques.

Je remercie Dr**Sekrani Samia** d'avoir accepté d'examiner mon travail, je suis très heureux de le voir participer à mon jury.

Mes remerciements vont également à tous mes enseignants de l'université de Guelma qui m'ont aidé pendant mes années d'étude.

Je remercie tout ceux que ont participé de loin ou de prés a la réalisation de ce travail.

A mes collègues pour tous les moments qu'on a passé ensemble.

Dédicace

Je remercie mon dieu qui m'a donné le courage, la volonté ainsi la santé pour que je puisse réussir dans ma vie.

Je dédie ce modeste travail comme signe de remerciement et reconnaissance sur tout.

A l'homme de ma vie, mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie et de bonheur, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir, **à mon père.**

A la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur, **à ma mère** que j'adore.

A mon marie :Abd-El-waheb

A mes sœurs :Sana ,Samiha.

A toute mes amies surtout : Fayrouze ,
Aziza ,Razika ,Nardjesse

Dédicace

A l'aide de dieu tout puissant, qui ma tracé le chemin de ma vie, j'ai pu réaliser ce travail que je dédie :

- A la lumière de mes yeux, l'ombre de mes pas et le bonheur de **mamère**que Dieu ait son âme, qui espérait assister a cette journée, et malheureusement elle n'est pas présente, mais elle présente dans le cœur de safille.
- A mon cher **père**qui m'a appris le sens de la persévérance Tout au long de mes études, pour son sacrifice, ses conseils et ses encouragements.
- Mon sœur : **Ahlem**
- A toute la famille.
- A mes amis :**Aziza, Razika**

Introduction

L'incertitude sur les mouvements futurs des taux d'intérêts est un point important en théorie de la décision financière.

En effet, l'aversoin des agents au risque est lié en particulier aux taux d'intérêts et les problèmes associés à la gestion de trésorerie sont très sensibles aux perturbations de la courbe des taux.

L'étude et la compréhension de la structure par terme des taux d'intérêts représente donc un enjeu majeur en finance, tant pour gérer le risque de taux affectant le bilan des banques, que pour évaluer et couvrir les nombreux produits financiers de plus en plus complexes auxquels recourent les marchés pour faire face au risque de taux et plus généralement de change.

Table des matières

Chapitre 1

Notions de bases

Le but de premier chapitre est d'exposer les notations de base utilisées le long de ce mémoire .

Nous commençons par :une rappelle qui contient quelques définitions de probabilité.

1.1 Espace probabilité filtré

Définition 1.1.1

On appelle espace probabilisé filtré ($\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}, \mathbb{P}$) tout espace Probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ .la tribu $\mathcal{F}_t$ est appellée tribu des événements antérieurs au temps t.

1.2 filtration

Définition 1.2.1

Une filtration est une famille $(\mathcal{F}_T, T \in R_+)$ de sous- tribu de $\mathcal{F}$ tq :

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t, \forall t \geq s \geq 0.$$

par convention, on pose $\mathcal{F}_\infty = V_{t \geq 0} \mathcal{F}_t$ (= la plus petite contenant toutes les $\mathcal{F}_t$) . on pose aussi : $\mathcal{F}_{t_+} = \cap_{s \geq t} \mathcal{F}_s$.

1.3 Mouvement Brownien

Définition 1.3.1

On appelle mouvement brownien un processus stochastique $(X_t)_{t\succeq 0}$ à valeurs réelles qu'est un processus à acroissements indépendants et stationnaires dont les trajectoires sont continues ce qui signifier que :

1. Continuité p.p.s. La fonction : $s \rightarrow X_s(w)$ est une fonction continue
2. L'indépendance des accroissements si : $s \leq t : X_t - X_s$ est indépendant de la tribu

$$\mathcal{F}_s = \sigma(X_u : u \leq s)$$

3. Stationnarité des accroissements si : $s \leq t \quad X_t - X_S$ est identique à celle de $X_{t-s} - X_0$

Remarque 1.3.1

Un MB est standard si :

$$X_0 = 0P.s, \; E(X_t) = 0$$

et $\quad E(X_t^2) = t$

1.4 Fomule d'Itô

1.4.1 Formules de base

Jusqu'à présent, on a défini l'intégrale stochastique, mais il nous manque encore des régles de calcul. Le premier régle de calcul est la suivante.

Soit : $(B_t, t \in \mathbb{R}^+)$ un mouvement brownien standard par rapport à $(\mathcal{F}_t, t\epsilon\mathbb{R}^+)$ et $f \in C^2(\mathbb{R})$

(i.e : f , f'et f' sont des fonctions continues). on suppose de plus que :

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t \left(f'(B_s)\right)^2\right) ds < \infty, \forall t > 0. \text{ Alors pour tout } t > 0 \tag{1.1}$$

$$f(B_t) - f(B_0) = \int_0^t f'(B_s)\, dBs + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s) \quad \text{dans} \quad p.s. \tag{1.2}$$

Remarque 1.4.1

-Vu que $(f'(B_t), t \geq 0)$ est un processus continu et adapté à $(\mathcal{F}_t)$ et que la condition (1.1) est vérifiée, $\int_0^t f'(B_s)\, dB_s$ est bien définie (et $\int_0^t f''(B_s)\, ds$ l'est également car l'application $s \longrightarrow f''(B_s)$ est continue).

-Le second terme du membre de droite dans (1.2) (absent dans les règles de calcul différentiel "classique") est appelé terme d'Itô, il résulte la variation quadratique non -nulle du mouvement brownien.

1.5 Théorème de Girsanov

Soit $(\theta_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus adapté vérifiant $\int_0^T \theta_s^2 ds < \infty$ p.s. et tel que le processus $(L_t)_{0\leq t\leq T}$ défini par :

$$L_t = \exp\left(-\int_0^t \theta_s dBs - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds \right)$$

Soit une martingale. Alors, sous la probabilité $\mathbb{P}^{(L)}$de densité L_T par rapport à $\mathbb{P}$, le processus $(W_t)_{0\leq t\leq T}$ défini par :

$W_t = B_t + \int_0^t \theta_s ds$ est un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien standard.

1.6 Martingale

Définition 1.6.1

Soit : $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ une base stochastique.
Un processus (M_t) adapté à $\mathcal{F}_t$ tel que :

$$\begin{cases} (i) \;\; \mathbb{E}(|M_t|) < \infty, \;\; M_t \in L^1 \\ (ii) \;\; \mathbb{E}(M_t / \mathcal{F}_t) = M_s, \;\; \forall t > s \geq 0 \end{cases}$$

est appellé une Martingale.

1.7 Vecteur aléatoire gaussien

Un vecteur aléatoire (de dimension $n \geq 1$) est une application

$$X : \begin{cases} \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ w \longrightarrow X(w) = (X_1(w), ...X_n(w)) \end{cases}$$

telle que : $\{w \in \Omega : X(w) \in B\} \in \mathcal{F}, \forall B \in B(\mathbb{R}^n)$.

1.8 Processus gaussien

Un processus gaussien est un processus $(X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ tel que : $(X_{t_1}, ..., X_{t_n})$ est vecteur aléatoire gaussien $\forall\ n \geq 1$ et $t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}_+$.Ceci revient à dire que : $c_1 X_{t_1} + ... + c_n X_{t_n}$ est une v.a gaussienne $\forall\ n \geq 1$, $t_{1,}...t_n \in \mathbb{R}_+$, $c_1, ...c_n \in \mathbb{R}$ pour un vecteur aléatoire (pas forcement gaussienne) en défini encore :

1. La fonction $m : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ donné :

$$m(t) = \mathbb{E}(X_t)$$

est appelée la moyenne du processus.

2. La fonction $k : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ on a :

$$k(t, s) = cov(X_t, X_s)$$

est appellé la covariance d'un processus.

Théorème 1.8.1

Soit : $W(t)$ un mouvement Brownien et $\delta(t)$ est une fonction déterministe (non aléatoire).alors :

$$X(t) = \int_0^{t \wedge s} \delta(u)\, dW(u)$$

le processus gaussien avec : $m(t) = 0$

et

$$\rho(s, t) = \int_0^s \delta^2(u)\, du$$

1.9 Absence opportunité d'arbitrage

Définition 1.9.1

Une opportunité d'arbitrage sur $[0, T]$ est une stratégie de portefeuille autofinançant ϕ dont la valeur $V(\phi)$ vérifie :
(i) $V_0(\phi) = 0$,
(ii) $V_T(\phi) \geq 0$ et $P[V_T(\phi)] > 0$.
Ainsi, un arbitrage représente la gestion dynamique d'un portefeuille autofinançant permettant à partir d'un capital nul, de créer sans risque un profit sûr.

Dans les modèles en temps continu, nous serons amenés à faire des hypothèses supplémentaires d'intégrabilité sur les stratégies de portefeuille pour garantir l'absence d'opportunité d'arbitrage.

1.10 Transformé de laplace

Théorème 1.10.1

Si : X est variable gaussienne de loi $N(m, \sigma^2)$,on a :

$$\mathbb{E}\left(e^{\lambda X}\right) = \exp\left(\lambda m + \frac{\lambda^2\sigma^2}{2}\right), \forall\lambda \in \mathbb{R}$$

et réciproquement.

1.11 Formule d'intégration par partie

Proposition 1.11.1

soient X_t et Y_t deux processus d'Itô,
$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dw_s$
et
$Y_t = Y_0 + \int_0^t K'_s ds + \int_0^t H'_s dw_s$
Alors
$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y\rangle t$
avec la notation :

$$\langle X, Y\rangle t = \int_0^t H_s H'_s ds.$$

1.12 Modèle de Black-Scholes

1.12.1 Description du modèle

Le modèle proposé par Black et Scholes pour décrire l'évolution des cours est un modéle à temps continu avec un actifs risqué i.e:

une action de prix S_t à l'instant t ,et un actif sans risque i.e :

de prix S_t^0 à l'instant t.

on suppose l'évolution de S_t^0 régie par l'équation différentielle (ordinaire)

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt \tag{*}$$

où r est une constante positive. cela signifie que le taux d'intérêt sur le marché des placements sans risque est constant et égal à r (noter que r est ici un taux d'intérêt instantané, à ne pas confondre avec le taux annuel ou le taux sur une période des modèles discret).

on pose : $S_0^0 = 1$, de sorte que : $S_t^0 = e^{rt}$ pour $t \geq 0$.

on suppose l'évolution du cours de l'action est régie par l'équation différentielle stochastique

$$dS_t = S_t \left(\mu dt + \sigma dB_t\right) \tag{**}$$

où μ et σ sont deux constantes et (B_t) est un mouvement brownien standard. La constante σ est appellée volatilité de l'action.

Le modèle est étudié sur l'intervalle $[0, T]$, où T est la date d'échéance de l'option que l'on se propose de traiter.

l'équation $(**)$ a pour solution explicite

$$S_t = S_0 \exp\left(\mu t - \frac{\sigma^2}{2}t + \sigma B_t\right)$$

où S_0 est le cours observé à la date 0.

il en résulte en particulier que, dans ce modèle, la loi de S_t est une loi log-normale (c'est-à-dire que son logarithme suit une loi normale).

plus précisément, on voit que le processus (S_t) vérifie une équation du type $(**)$ si et seulement si le processus $(\log(S_t))$ est un mouvement brownien (pas nécessairement standard) cela signifie que le processus (S_t) vérifie les propriétés suivantes :

- continuité des trajectoires

- indépendance des accroissements relatifs : si $u \leq t, S_t/S_u$ ou (ce qui revient au même) l'accroissement relatif $(S_t - S_u)/S_u$ est indépendant de la tribu $\sigma(S_v, v \leq u)$.
- stationnarité des accroissements relatifs : si $u \leq t$, la loi de $(S_t - S_u)/S_u$ est identique à celle de $(S_{t-u} - S_0)/S_0$

ces trois propriétés traduisent de façon concrète les hypothèses de Black et Scholes sur l'évolution du cours de l'action.

Chapitre 2

Modèles de taux d'intérêt

2.1 Principes de la modèlisation

2.1.1 Gènèralitès sur les taux d'intèrêts

On inroduit quelques définitions et notations relatives aux différentes notions associées aux taux d'intérêts.

Un zéro-coupon d'échéance T est un titre versant 1 euro à la date T,et ne donnant aucun flux avant .

On note : $B(t,T)$ son prix à la date $t \leq T$, qui doit être strictement positif sous AOA.

On a $B(T,T) = 1$.Ce sont en pratique des obligations émises par l'état pour financer sa dette.

Le taux d'intérêt continu moyen (appelé aussi rendement à l'échéance) sur la période $[t,T]$ noté $R(t,T)$, est défini par :

$$\begin{aligned} B(t,T) &= \exp(-(T-t)R(t,T) \text{ , i.e :} \\ R(t,T) &= -\frac{1}{T-t} \ln B(t,T). \end{aligned}$$

Le taux linéaire, surtout utilisé pour des périodes courtes $[t, t+\delta]$ (δ moins d'un an), noté : $L(t,\delta)$ est défini par :

$$B(t, t+\delta) = \frac{1}{1+\delta L(t,\delta)}.$$

Le taux spot (court) instantanè est la limite du taux moyen quand le temps restant à maturité $\theta = T - t$ tend vers zéro :

$$r_t = \lim_{T \to t} R(t,T) = -\frac{\partial \ln B(t,T)}{\partial T}\Big|_{T=t}.$$

En pratique, c'est le taux à court terme, par exemple le taux au jour le jour.

La courbe des taux (on dit aussi structure par terme des taux) en t est la fonction qui donne les différents taux moyens de la date t en fonction de leur maturité restante $\theta = T - t \geq 0$,

Soit : $\theta \longrightarrow R(t, t+\theta)$.on désire étudier le comportement de la courbe $R(t, t+\theta)$ en fonction de la courbe de taux observée aujourd'hui $R(0,\theta)$.

On dit que : la courbe est plate en t si cette fonction $\theta \longrightarrow R(t,t+\theta)$ est constante.

Les opérations et emprunts à terme sont très courantes sur les marchés de taux.

Nous introduisons quelques autres définitions qui joueront un rôle central dans la modélisation.

Le taux spot forward en t pour la maturité T est défini par

$$f(t,T) = -\frac{\partial \ln B(t,T)}{\partial T},$$

de sorte que $r_t = f(t,t)$ et par intégration :

$$B(t,T) = \exp\left(-\int_t^T f(t,s)ds\right). \tag{2.1}$$

Autrement dit : $f(t,s)$ représente le taux instantané à la date s tel que le marché le "voit" à la date t.

2.1.2 Absence d'arbitrage et modélisation de taux

Considérons dans un premier temps le cadre simplifié où tous les taux d'intérêts $R(t,T)$, $t \leq T$, sont connus dès aujoud'hui en $t = 0$.

Autrement dit, les évolutions du prix des zéros-coupons : $t \longrightarrow B(t,T)$ et des taux d'intérêts : $t \longrightarrow R(t,T)$, r_t, $f(t,T)$ sont déterministes pour toute maturité T.

Alors, par absence d'opportunité d'arbitrage, on doit avoir :

$$B(t,T) = B(t,s)B(s,T), \ \forall t \leq s \leq T$$

sinon il serait facile d'exhiber un arbitrage .

En passant au *log* puis en dérivant par rapport à T, on obtient par définition du taux forward :

$$f(t,T) = f(s,T), \text{ pour tous } t \leq s \leq T.$$

En particulier, on voit que : $f(t,s) = r_s$ pour tous $t \leq s$ dans un monde déterministe, le taux instantané à la date s tel que le marché le "voit" à la date t, est le taux instantané de la date s .

D'aprés (2.1), on a donc :

$$B(t,T) = \exp\left(-\int_t^T r_s ds\right)$$

i.e :

$$B(t,T) = B(0,T)\exp\left(-\int_0^t r_s ds\right)$$

Notons aussi que dans ce contexte certain, le taux moyen est donné par- :

$$R(t,T) = \frac{1}{T-t}\int_t^T r_s ds.$$

Dans un environnement aléatoire, à la date t, les taux d'intérêts et les prix des zéros- coupons futurs $R(s,T)$ et $B(s,T)$, $t \leq s \leq T$, ne sont par connus.

On conçoit néanmoins, comme pour les modèles déterministes, que l'AOA implique des relations entre les prix des différents taux et zéros-coupons : c'est le but d'une modélisation aléatoire des taux.

On se donne un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ où $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ est la filtration d'un mouvement Brownien standard. Comme dans les modèles d'actions, on introduit **le processus de cash** défini par :

$$S_t^0 = \exp\left(\int_0^t r_s ds\right).$$

C'est la somme qu'on reçoit en investissant continûment 1 euro au taux spot instantané. Les obligations zéros-coupons de maturité T, sont considérés comme des actifs risqués, de processus de prix $B(t,T)$, $0 \leq t \leq T$.

En accord avec le principe d'AOA, on suppose l'existence d'une probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$ sous laquelle les prix actualisés des zéros-coupons $B(t,T)/S_t^0$, $0 \leq t \leq T$, sont des martingales sous $\mathbb{Q}$, et ceci pour toutes les maturités T.

cette propriétée de martingale combinée avec l'égalité : $B(T,T) = 1$ entraine

$$\begin{aligned} B(t,T)/S_t^0 &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[B(T,T)/S_T^0 \mid \mathcal{F}_t\right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[1/S_T^0 \mid \mathcal{F}_t\right] \end{aligned}$$

Soit :

$$B(t,T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\exp(-\int_t^T r_s ds) \mid \mathcal{F}_t\right], \ 0 \leq t \leq T. \tag{2.2}$$

Il y a essentiellement deux approches pour modéliser ensuite la courbe des taux. La première (historiquement) consiste à utiliser le taux spot instantané comme variable explicative et donc à proposer une dynamique du taux court r_t.La seconde consiste à modéliser directement les prix des zéros-coupons $B(t,T)$ (ou de manière équivalente, d'après (2.1), les taux forward $f(t,T)$ en respectant la condition d'AOA.

2.2 Modèles classiques de taux spot

Dans cette modélisation, on suppose connu le taux spot et on cherche à décrire la courbe des taux.

On considère une dynamique du taux spot décrite sous la probabilité historique $\mathbb{P}$ par

$$dr_t = \alpha(t, r_t)dt + \gamma(t, r_t)dW_t$$

où W est un mouvement Brownien réel sous $\mathbb{P}$ et α, γ sont deux fonctions réelles sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Pour calculer le prix des zéros-coupons, on a besoin de connaitre la dynamique du taux spot sous la probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$.

Notons $(\lambda_t)_t$ la prime de risque issu du théorème de Girsanov et qui fait donc du processus

$$\hat{W}_t = W_t + \int_0^t \lambda_s ds$$

un mouvement Brownien sous $\mathbb{Q}$.

On suppose que la prime de risque est une fonction du temps et du taux spot : $\lambda_t = \lambda(t, r_t)$. La dynamique du taux spot sous $\mathbb{Q}$ est donc

$$dr_t = (\alpha(t, r_t) - \lambda(t, r_t)\gamma(t, r_t))dt + \gamma(t, r_t)d\hat{W}_t \tag{2.3}$$

Dans les modèles classiques qu'on détaillera plus tard, la forme de la prime de risque λ est en général choisie pour que la dynamique de r sous $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ ait la même forme.

2.2.1 L'EDP des taux

Dans cette modélisation du taux spot et d'une prime de risque fonction du taux spot, le prix d'un zéros-coupon donné par (2.2) est une fonction du taux spot :$B(t,T) = B(t, r_t, T)$

où B est une fonction réelle sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.

En supposant que la fonction B soit régulière C^2,on a par la formule d'Itô (T est fixé) :

$$\begin{aligned} dB(t,T) &= \\ & \left(\frac{\partial B}{\partial t} + \alpha\frac{\partial B}{\partial r} + \frac{1}{2}\gamma^2\frac{\partial^2 B}{\partial r^2}\right)(t, r_t, T)\, dt + \gamma\frac{\partial B}{\partial r}(t, r_t, T)\, dW_t \\ &= B(t,T)(\mu(t, r_t, T) + \sigma(t, r_t, T)dW_t) \end{aligned} \tag{2.4}$$

où :

$$\mu(t, r, T) = \frac{1}{B(t, r, T)}\left(\frac{\partial B}{\partial t} + \alpha\frac{\partial B}{\partial r} + \frac{1}{2}\gamma^2\frac{\partial^2 B}{\partial r^2}\right)(t, r, T)$$

$$\sigma(t, r, T) = \frac{1}{B(t, r, T)}\gamma(t, r)\frac{\partial B}{\partial r}(t, r, T).$$

La dynamique (2.4) est écrite sous la probabilité objective $\mathbb{P}$.Par Girsanov, la dynamique du prix zéro-coupon sous $\mathbb{Q}$ est :

$$dB(t,T) = B(t,T)\left[(\mu(t, r_t, T) - \sigma(t, r_t, T)\lambda(t, r_t)dt + \sigma(t, r_t, T)d\hat{W}_t\right]$$

Puisque le prix actualisé $B(t,T)/S_t^0$ est une $\mathbb{Q}-$martingale, le terme de tendance de $B(t,T)$ doit être égal à r_t sous $\mathbb{Q}$.

i.e :

$$(\mu(t,r_t,T) - \sigma(t,r_t,T)\lambda(t,r_t)) = r_t.$$

D'aprés les expressions de μ et σ, ceci implique que la fonction de prix B doit vérifier l'EDP :

$$\frac{\partial B}{\partial t} + (\alpha - \lambda\gamma)\frac{\partial B}{\partial r} + \frac{1}{2}\gamma^2\frac{\partial^2 B}{\partial r^2} - rB = 0 \tag{2.5}$$

cette EDP est associée à la condition terminale $B(T,T) = 1$,

i.e :

$$B(T,r,T) = 1. \tag{2.6}$$

Remarque 2.2.1

1.L'EDP des taux (2.5) est à comparer avec l'EDP obtenue dans le modèle de Black-Scholes. Une différence importante est la présence du terme de prime de risque λ.Ce paramètre n'est pas déterminé par le modèle mais doit être spécifié a priori : c'est un problème statistique et λ est estimé par calibration du prix des zéros-coupons à ceux du marché.

2.Comme pour le modèle de Black-Scholes, on a deux méthodes de calcul du prix d'un zéro-coupon dans un modèle de taux spot (2.3) .

Soit on utilise la représentation probabiliste sous la probabilité risque-neutre :

$$B(t,T) = B(t,r_t,T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\exp(-\int_t^T r_s ds) \mid \mathcal{F}_t\right],\ 0 \leq t \leq T$$

soit on cherche à résoudre l'EDP des taux $(2.5)-(2.6)$.

2.3 Modèle de vasicek

Dans ce modèle, on suppose que le taux spot suit sous $\mathbb{P}$ un processus d'Ornstein-Uhlenbeck :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \gamma dW_t$$

où a, b et σ sont des constantes positives.

La moyenne instantanée est proportionnelle à l'écart entre une valeur b et le taux r_t .

Une force de rappel mesurée par la valeur a tend à rapprocher r_t de la valeur b.

On suppose que la prime de risque λ est constante de sorte que le taux spot suit aussi sous $\mathbb{Q}$ un processus d'Ornstein -Uhlenbeck :

$$dr_t = a(\hat{b} - r_t)dt + \gamma d\hat{W}_t \qquad (2.7)$$

où $\hat{b} = b - \gamma\lambda/a$.

Cette équation différentielle stochastique se résoud de manière explicite .

Proposition 2.3.1

La solution de (2.7) est donnée par :

$$r_t = \hat{b} + (r_0 - \hat{b})e^{-at} + \gamma \int_0^t e^{-a(t-u)} d\hat{W}_u \qquad (2.8)$$

Preuve. La solution de l'équation linéaire s'obtient comme dans le cas des équations différentielles ordinaires par la méthode de variation des constantes en considérant le processus $\rho_t = e^{at} r_t$.

par la formule d'Itô, on a :

$$d\rho_t = ae^{at} r_t dt + e^{at} dr_t = e^{at}\left(a\hat{b}dt + \gamma d\hat{W}_t\right)$$

En intégrant, on obtient :

$$\rho_t = e^{at} r_t = r_0 + \hat{b}(e^{at} - 1) + \int_0^t e^{au}\gamma d\hat{W}_u$$

ce qui donne (2.8).

On voit donc que sous $\mathbb{Q}, r_t$ est un processus gaussien de moyenne $\hat{b} + (r_0 - \hat{b})e^{-at}$ et de variance $\gamma^2(1 - e^{-2at})/2a$.

En particulier, r_t peut prendre des valeurs négatives ce qui n'est pas très satisfaisant en pratique.

Notons aussi que, lorsque t tend vers l'infini, r_t converge en loi vers une loi gaussienne de moyenne $\hat{b}$ et de variance $\gamma^2/2a$.

Pour calculer le prix d'un zéro- coupon par le représentation (2.2), on a besoin de déterminer la loi de $\int_t^T r_s ds$ sachant $\mathcal{F}_t$. i.e : r_t.

il y a plusieurs manières de procéder . Le plus simple est d'intégrer l'EDP (2.7), d'où l'on obtient :

$$a\int_t^T r_s ds = -(r_T - r_t) + a\hat{b}(T-t) + \gamma\int_t^T d\hat{W}_s \tag{2.9}$$

En utilisant l'expression intégrale (2.8) du taux spot r_T :

$$r_T = \hat{b} + (r_t - \hat{b})e^{-a(T-t)} + \gamma\int_t^T e^{-a(T-s)} d\hat{W}_s$$

et en reportant dans (2.9), on obtient :

$$\int_t^T r_s ds = \hat{b}(T-t) + (r_t - \hat{b})\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a} + \gamma\int_t^T \frac{1-e^{-a(T-s)}}{a} d\hat{W}_S$$

On en déduit que $\int_t^T r_s ds$ est une variable gaussienne, de moyenne et variance conditionnelle sous $\mathbb{Q}$:

$$\hat{m}(t,T) = \hat{b}(T-t) + (\hat{b} - r_t)\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}^2(T,t) &= E^{\mathbb{Q}}\left[\left(\gamma\int_t^T \frac{1-e^{-a(T-s)}}{a} d\hat{W}_s\right)^2 \middle| \mathcal{F}_t\right] \\ &= \gamma^2\int_t^T \left(\frac{1-e^{-(T-s)}}{a}\right)^2 ds \\ &= -\frac{\gamma^2}{2a^3}\left(1-e^{-a(T-t)}\right)^2 + \frac{\gamma^2}{a^2}\left(T-t-\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}\right) \end{aligned} \tag{2.11}$$

On peut alors aisément expliciter le prix des zéros-coupons et la courbe des taux moyens. ∎

Théorème 2.3.1

Dans le modèle de vasicek, le prix d'un zéro-coupon de maturité T est donné par :

$$B(t,T) = \exp\left[-R_\infty (T-t) + (R_\infty - r_t)\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a} - \frac{y^2}{4a^3}\left(1-e^{-a(T-t)}\right)^2\right]$$

où $R_\infty = \hat{b} - \frac{y^2}{2a^2}$.

la courbe des taux à la date t est donnée par :

$$R(t,T) = R_\infty - (R_\infty - r_t)\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a(T-t)} + \frac{y^2}{4a^3(T-t)}\left(1-e^{-a(T-t)}\right)^2.$$

Preuve. Comme : $\int_t^T r_s ds$ est une variable gaussienne de moyenne et variance conditionnelle sous Q, $\hat{m}(t,T)$ et $\hat{\Gamma}^2(t,T)$,

on a d'aprés l'expression de sa tranformée de laplace :

$$\begin{aligned} B(t,T) &= E^{Q}\left[\exp(-\int_t^T r_s ds \,|\mathcal{F}_t\right] \\ &= \exp(-\hat{m}(t,T) + \frac{1}{2}\hat{\Gamma}^2(t,T), \end{aligned}$$

ce qui donne la formule explicite $B(t,T)$ en reportant $(2.10)-(2.11)$.

On obtient ensuite immédiatement la formule de la courbe des taux

$$R(t,T) = -\frac{1}{T-t}\ln B(t,T).$$

■

Remarque 2.3.1

Le modèle de vasicek donne la forme analytique de la courbe des taux $T \longrightarrow R(t,T)$ à n'importe quelle date t.

on voit que :$R_\infty = \lim_{T\longrightarrow\infty} R(t,T)$ pour tout t : R_∞ s'interprète comme le taux à long terme Il ne dépend pas du taux spot, ce qui est vu comme un défaut par les financiers. Si on étudie la courbe $T \longrightarrow R(t,T)$,on voit que :

- lorsque $r_t < R_\infty - y^2/4a^2$, la courbe est strictement croissante.
- lorsque $R_\infty - y^2/4a^2 \leq r_t \leq R_\infty + y^2/2a^2$, elle est croissante puis décroissante.
- lorsque $R_\infty + y^2/2a^2 < r_t$, elle est strictement décroissante.

le graphe de la courbe des taux ressemble effectivement à de nombreuses courbes observées sur le marché. Toutefois, certaines d'entre elles, notamment les coubes dites "inversées", où le taux court r_t est plus haut que le taux long R_∞, et où apparait un creux, ne peuvent être atteintes par un modèle de vasicek.

2.4 Formule de vasicek par EDP

On considère le modèle de vasicek écrit sous la probabilité risque -neutre :

$$dr_t = a\left(\hat{b} - r_t\right)dt + \gamma d\hat{w}_t.$$

En écrivant que $e^{-\int_0^t r_s ds}$est une martingale sous Q.on obtient par la formule d'Itô.

L'EDP satisfaite par B :

$$\frac{\partial B}{\partial t} + a\left(b - r\right)\frac{\partial B}{\partial r} + \frac{1}{2}\gamma^2\frac{\partial^2 B}{\partial r^2} - rB = 0$$

combinée avec la condition terminale $B\left(T, r, T\right) = 1$.

En substituant dans L'EDP ci-dessus la forme :

$$B\left(t, T, r\right) = \exp\left(-A\left(T - t\right)r + B\left(T - t\right)\right)$$

on obtient (puisque B est strictement positif) :

$$A'\left(\theta\right)r - C'\left(\theta\right) - a\left(\hat{b} - r\right)A\left(\theta\right) + \frac{1}{2}\gamma^2 A^2\left(\theta\right) - r = 0$$

$$-A\left(0\right)r + B\left(0\right) = 0$$

L'identification des coefficients de r implique que A et B doivent être solution de :

$$A'\left(\theta\right) + aA\left(\theta\right) - 1 = 0$$

$$-C'\left(\theta\right) - a\hat{b}A\left(\theta\right) + \frac{1}{2}\gamma^2 A^2 = 0$$

Avec les conditions initiales :

$A(0) = 0$ et $C(0) = 0$.

La résolution de ces équations différentielles ordinaires linéaires est immédiate :

$$A(\theta) = \frac{1 - e^{a\theta}}{a}$$

$$C(\theta) = -\left(\hat{b} - \frac{\gamma^2}{2a^2}\right)\theta + \frac{1 - e^{-a\theta}}{a}\left(\hat{b} - \frac{\gamma^2}{4a^2}\right) + \frac{\gamma^2}{4a^3}\left(1 - e^{-2a\theta}\right)$$

En posant $R_\infty = \hat{b} - \frac{\gamma^2}{2a^2}$.

on retrouve la formule de vasicek :

$$\begin{aligned} B(t, T, r) &= \exp\left(-A(T-t)\,r + C(T-t)\right) \\ &= \exp\left[-R_\infty (T-t) + (R_\infty - r)\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} - \frac{\gamma^2}{4a^3}\left(1 - e^{-a(T-t)}\right)^2\right] \end{aligned}$$

on remarque que la volatilité du zéro- coupon est déterministe.

Bibliographie

[1] **D.Lamberton,B.Lapeyre**, Introduction au calcul stochastique appliquè à la finance. *Ecole Normale Supérieure de Paris*, 1997.

[2] **Monique Jeanblanc**. Cours de calcul stochastique. *Ecole Normale Supérieure de Paris*, 2006.

[3] **Essibsa Abdelali**. Calcul stochastique appliquè à la finance. *Ecole Normale Supérieure de Paris*, 2016.

[4] **Pierre Priouret**. Introduction aux processus de diffusion. *Ecole Normale Supérieure de Paris*, 2006.