République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques



# Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

**Master Académique en Mathématiques**

Option : **Probabilité et Application**

Par :

**Melle.Benyahia Nor-elhouda et Melle .Hamouche Abir**

## Intitulé

# Copules et risques corrélés

**Dirigé par :**
**Mr.Ezzebssa Abdellali**

**Devant le jury**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| PRESIDENT | MA. | Bekhouche Saadi | MCB | Univ-Guelma |
| RAPPORTEUR | Mr. | Ezzebssa Abdellali | MCB | Univ Guelma |
| EXAMINATEUR | Dr. | Kerboua Mourad | MCA | Univ-Guelma |

**Session Juin 2016**

# Remerciements

Je tiens d'abord à remercier ALLAH qui m'a donné le courage, la santé, et la volonté pour réaliser ce modeste travail tout au long de mes années d'études.

A:**Dr Ezzebssa Abdellali**, que je remercie de m'avoir inspiré le choix de ce sujet

pour son encadrement et pour ses précieux et judicieux conseils qu'il n'a cessé de me prodiguer tout au long de ce travail.

Je suis très honoré que **Dr Kerboua Mourad**, ait accepté de rapporter mon travail et de présider mon jury de Mémoire.

je le remercie pour ses conseils et ses précieuses remarque.

Je remercie **Dr Bekhouche Saadi** d'avoir accepté d'examiner

mon travail, je suis très heureuse de le voir participer a mon jury.

Mes remerciements vont également a tous

mes enseignants de l'université de Guelma qui m'ont aide pendant mes années d'étude.

Je remercie tous ceux qui ont

participé de loin ou de près à la

réalisation de ce travail.

A mes collègues pour tous

les moments qu'on a passé ensemble.

# Dédicace

Je dédie ce modeste travail

A mes **chères parents** qui ont toujours été pour moi, et qui m'ont donné un magnifique modèle de la valeur et de persévérance. A ceux qui m'ont jamais cessé de m'apporter l'affection, l'amour, le courage et le bon sens.

J'espère qu'ils trouvent dans ce travail toute ma reconnaissance et tout mon amour.

A mes chères frères :**Nouwfel** et **Bahaeldine** et ma sœur **Roufaida** .

En leurs espérant le plein succès dans leur vie.

A toute ma grande familles .

A mon binôme **Nor-elhouda** et je l'espère plus de succès dans sa vie.

A mes belles amies :karima, ilhem, adila, imene, sarra, zineb, meriem, hammama.

A tout les profs de mathématiques et toute la section math 2016.

Et tout ceux qui me sont chers, Qui Dieu vous garde.

**Abir**

# Dédicace

*Je dédie ce modeste travail*

*A **mes chères parents** qui ont toujours été pour moi, et qui m'ont donné un magnifique modèle de la valeur et de persévérance. A ceux qui m'ont jamais cessé de m'apporter l'affection, l'amour, le courage et le bon sens.*

*J'espère qu'ils trouvent dans ce travail toute ma reconnaissance et tout mon amour.*

*A mes chères frères : ma sœur **Ghada** , mes meilleures petits frères **Ihab** et **Zaid.***

*En leurs espérant le plein succès dans leur vie.*

*A toute ma grande familles : mes grandes mères et mon grand père, mes oncle surtout **Senou**, mes tantes surtout **Nadjet.***

*A mon binôme **Abir** et je l'espère plus de succès dans sa vie.*

*A mes belles amies :Nora, Adila, Imene, Sarra, Zineb, Rachid, Amira.*

*A tout les profs de mathématiques et toute la section math 2016.*

*Et tout ceux qui me sont chers, Qui Dieu vous garde.*

Nour el Houda

# Table des matières

# Résumé

Ce travail se veut une introduction à certaines notions de base du concept de dépendance dans le but d'éffectuer une entrée en matière avec celui des copules, relations décrites par les fonctions de distributions conjointes. On y présentera quelques caractéristiques et propriétés fondamentales accompagnées d'exemples pour mieux comprendre le sujet en questions.

## 0.1 Introduction

**La copule** est un outil relativement innovant de modélisation de la structure de dépendance de plusieurs variables aléatoires. La connaissance de cet outil probabiliste est essentielle à l'appréhension de nombreux domaines d'application de la finance quantitative : **(mesure de risque multiple de marché, gestion de portefeuille à l'aide de simulation de Monte Carlo, pricing d'options à plusieurs sous-jacent,ect...).** Ainsi à chaque fois qu'il est nécessaire de modéliser une structure de dépendance, nous pouvons faire appel aux copules. Une mesure de dépendance régulièrement utilisée est la corrélation linéaire de **Bravais-Pearson** 1896. Cet indicateur est performant lorsque la relation de dépendance est linéaire et l'univers considéré gaussien, cadre d'analyse malheureusement rare en finance. Pour remédier à cela, nous avons recours à d'autres indicateurs de dépendance se fondant sur les discordance et concordance observées sur un échantillon. Alors nous utilisons des coefficients de corrélation non linéaire et non paramétrique, comme le **Taux de Kendall** ou le **Rhô de Spearman**. Ce sont de bons indicateurs globaux de la dépendance entre variable aléatoire.

Les copules ont vu le jour grâce à **Sklar**(1959). C'est en 1998, seulement que les académiciens se sont penchés sur l'utilisation des copules ont trouvé leurs applications à la finance de marché il y a à peine cinq ans, plusieurs compagnies d'assurance et quelques institutions financières ont déjà commencé à utiliser les copules dans la gestion de leurs risques. La copule est l'outil permettant d'extraire la structure de dépendance d'une distribution conjointe et aussi de séparer la dépedance et le comportement marginal. À notre avis les copules sont des outils mathématiques puissants qui permettent de mieux comprendre les comportements conjoints des marchés dans lesquels nous investissons.

Ce mémoire est composé de deux chapitres.

Dans le premier chapitre nous commonçons par présenter certaines propriétés de base importantes pour la notion de dépendance entre variables aléatoires.. Tandis que le second sera consacré à les outils de base liés à la théorie des copules. Nous présentons une définition et expliquer le choix de la copule pour modéliser la structure de dépendance, on y retrouve les principaux théorèmes, en suite nous donnons quelques familles de copules les plus utilisées en pratique comme **les copules elliptiques et les copules Archimédiennes**. Finalement, nous donnons l'importance de l'application des copules dans les domaines d'assurances par le calcul de la **valeur à risque(VaR)**.

# Chapitre 1

# Rappels généraux

## 1.1 Couple de variable aléatoire

### 1.1.1 Loi du couple

Si $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires continues, la loi de $(X, Y)$ est déterminée par sa fonction de répartition :

$$F_{XY}(x, y) = P(X < x, Y < y)$$

Si $F$ est dérivable par rapport à $x$ et $y$, la loi de $(X, Y)$ admet une densité $f$ :

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

### 1.1.2 Lois marginales

Les fonctions de répartition marginales de $X$ et $Y$ sont définies par :

$$F_X(x) = P(X < x) = F(x, +\infty) \text{ et } F_Y(y) = P(Y < y) = F(+\infty, y)$$

Si la loi du couple est définie par sa densité, les densités marginales sont :

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy \text{ et } f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

**Définition 1.1** *$X$ et $Y$ sont indépendantes si et seulement si*

$$F_{XY}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$$

### 1.1.3 Moments associes à un couple

Si $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une application continue, elle définit une variable aléatoire $h(X,Y)$ dont l'espérance se calculer par :

$$\mathbb{E}[h(X,Y)] = \int \int_{\mathbb{R}} h(x,y)f(x,y)dxdy$$

## 1.2 Les structures de dépendance

Le couple $(X,Y)$ est dit **PDQ (Dépendance Positive par Quadrant)** si et seulement si, pour tout $x, y$ :

$$P(X > x, Y > y) \geq P(X > x)P(Y > y)$$

ou façon équivalente, si et seulement si l'une des relations suiuvantes sont vérifiés, pour tout $x, y$

- $P(X > x|Y > y) \geq P(X > x)$
- $P(Y > y|X > x) \geq P(Y > y)$
- $(f(X), g(Y))$ est **PDQ** pour $f$ et $g$ croissantes
- $Cov(f(X), g(Y)) \geq 0$ pour $f$ et $g$ croissantes
- $P(X \leq x, Y \leq y) \geq P(X \leq x)P(Y \leq y)$

## 1.3 Variable gaussienne

**Définition 1.2** *Une variable aléatoire réelle est dite gaussienne de moyenne $m$ et de variance $\sigma^2 > 0$ et on note $X \sim N(m, \sigma^2)$, s'elle admet la densité :*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

### 1.3.1 Vecteur gaussien

**Définition 1.3** *Un vecteur aléatoire gaussien $X = (X_1, X_2, ..., X_k)$ à valeur dans $\mathbb{R}^k$ est dit gaussien si toute combinaison linéaire de ses composantes est une variable aléatoire réelle gaussienne, i.e*

$$\forall (\alpha_j)_{j=1,\ldots,k} \in \mathbb{R}, \sum_{j=1}^{k} \alpha_j X_j$$

*variable aléatoire gaussienne. Si $X \sim N_d(m, \Gamma)$, avec $\Gamma$ inversible, alors $X$ admet pour densité :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{\sqrt{\det(\Gamma)}} \exp\left(-\frac{(x-m)^t \Gamma^{-1} (x-m)}{2}\right)$$

## 1.4 Fonction Caractéristique

**Définition 1.4** *L'application $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ donnée par :*

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(\exp(itX))$$

*s'appelle la fonction caractéristique de $X$. Si $X$ est continue :*

$$\varphi_x(t) = \mathbb{E}(\exp(itx)) = \int_{\mathbb{R}} \exp(itx) f(x) dx$$

*si $X$ est discrète :*

$$\varphi_x(t) = \mathbb{E}(\exp(itx)) = \sum_k \exp(itx_k)P(X = x_k)$$

*La fonction caractéristique d'une variable ne dépend que de sa distribution, les fonctions caractéristiques de variable aléatoire ayant même distribution sont identique.*

## 1.5 Loi de Chi-deux $\chi^2$

**Définition 1.5** *Soit $X_1, X_2, ..., X_n$, $n$ variables normales centrées réduites, on appelle $\chi^2$ la variable aléatoire définie par :*

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

*une variable aléatoire $X$ suit une loi du $\chi^2$ à $n$ degré de liberté si sa densité de probabilité est de la forme :*

$$f_X(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} \exp(\frac{-x}{2}) \mathbf{1}_{[0,\infty[}(x)$$

*telle que : $n$ désigne le nombre de valeurs aléatoires qui nous peuvent être déterminées ou fixés par une équation.*

## 1.6 Lois de Student

**Définition 1.6** *Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes, $X$ selon la loi normale $N(0,1)$ et $Y$ suit la loi du chi-2 à $n$ degrés de liberté. On appelle loi de Student à $n$ degrés de liberté la loi suivie le rapport :*

$$T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$$

# Chapitre 2

# Théorie des Copules

## 2.1 Pour quoi les Copules ?

Sans aucun doute, la relation de dépendance entre les variables aléatoires joue un rôle très important dans des nombreux domaines des mathématiques. Elle est donc un des sujets largement étudiés en probabilité et en statistique. Une variété très vaste de ce concept a été étudiée par de nombreux auteurs pour proposer des définitions et des propriétés utiles avec des applications.

Une mesure de dépendance régulièrement utilisée est **la corrélation linéaire** de **Bravais Pearson**(1896), cette corrélation mesure la relation linéaire entre deux variables aléatoires $X$ et $Y$, et peut prendre toute valeur de l'intervalle $[-1, 1]$.

**Le coefficient de corrélation** linéaire est une mesure de dépendance facile à calculer.

Cet indicateur est performant lorsque la relation de dépendance est linéaire et l'univers considéré gaussien. Il est très utile pour les familles de distributions elliptiques (car pour ces distributions la non corrélation implique l'indépendance). Cependant cette mesure de dépendance souvent utilisée par les praticiens possède plusieurs limites, on cite certains problèmes relatifs à ce concept :

-**Le coefficient de corrélation** n'est pas défini si les moments d'ordre 2 des variables aléatoires ne sont pas finis. Ce n'est pas une mesure appropriée de la dépendance pour les distributions à queues lourdes où les variances peuvent être infinies.

-Il est facile de construire des exemples où **le coefficient de corrélation linéaire de Pearson** n'est pas invariant par transformations strictement croissantes, par exemple la corrélation entre les deux variables aléatoires $X$ et $Y$ n'est pas la même qu'entre $\log(X)$ et $\log(Y)$, en effet les transformations des données peuvent affecter les évaluations de corrélation.

-la corrélation est simplement une mesure scalaire de la dépendance, elle ne peut pas nous indiquer tout ce que nous voudrions savoir sur la structure de la dépendance.

-la dépendance positive absolue n'a pas nécessairement une corrélation de $+1$, de même la dépendance négative parfaite n'a pas nécessairement une corrélation de $-1$.

En finance, le cas gaussien est rarement utilisé, pour remédier à cela nous avons recours à d'autre indicateurs de dépendance se fondant sur les discordances et les concordances observées sur un échantillon. Nous utilisons alors, des coefficients de corrélation non linéaire et paramétrique, comme le taux de Kendall ou encore le rhô de Spearman. Ce sont de bons indicateurs globaux de la dépendance entre variables aléatoires. En outre, ils sont compris entre $-1$ et $+1$ comme le coefficient de corrélation linéaire une valeur de $+1$ par exemple signifie une concordance parfaite.

Mesurer la dépendance à l'aide d'indicateurs statistiques est une chose, la modéliser par une fonction de dépendance en est une autre. **La copule** répond à cet objectif. Les indicateurs de dépendance (**corrélation linéaire, taux de Kendall et le rhô de Spearman**) pouvons être définis dans ce cadre à partir des paramètres de **la copule** (**lorsque celle-ci sera paramétrique**).

**La copule** est un outil relativement innovant de modélisation de la structure de dépendance de plusieurs variables aléatoires. La connaissance de cet outil statistique est essentielle à l'appréhension de nombreux domaines d'application de la finance quantitative : mesure de risque multiple de crédit, évaluation de produit de crédit structurés, réplication de la performance des hedge funds (fonds de couverture), mesure de risque multiple de marché, gestion de portefeuille à l'aide de simulations Monte Carlo, ...etc. Ainsi à chaque fois qu'il est nécessaire de modéliser une structure de dépendance de plusieurs variables aléatoires, nous pouvons faire appel aux **copules**. la relation entre la distribution conjointe et **la copule** nous permet d'étudier la structure de dépendance entre $(X, Y)$ séparament de leurs marginales.

-Au lieu de résumer la structure de la dépendance par un seul nombre comme **le coefficient de corrélation linéaire**, on peut utiliser un modèle qui reflète une connaissance plus détaillée concernant les problèmes de gestion des risques que nous traitons.

-**La copule** est une fonction de répartition multi-variée qui nous aide appréhender le facteur de risque multi-variée des données, puis trouver les modèles marginaux pour les différents facteurs de risque individuel et les modèles **copules** pour leur structure de dépendance.

-Si les distributions marginales sont connues, **la copule** peut être employée pour suggérer une forme appropriée pour la distribution jointe, ceci signifie que nous pouvons créer des fonctions de distribution multi-variées en utilisant les fonctions de distributions marginales et nous pouvons extraire la copule à partir des fonctions de distributions multi-variées bien connues.

-Le théorème de **Sklar** fait **des copules** un outil ‹‹ puissant ›› de l'analyse multi-variée, car elles permettent de construire des modèles de distributions multi-variées compatibles avec les modèles marginaux unidimensionnels, cette compatibilité est souvent très importante dans la modélisation financière (modèles d'éstimation de la valeur à risque **VaR**).

-**Les copules** permettent de résoudre un autre problème : l'élaboration des modèles non gaussiens. La famille des distributions non gaussiennes est non seulement réduite mais puissante, l'inconvénient est que les marges sont identique. Or avec **les copules**, on peut construire par exemple une distribution avec une marginale gaussienne et une marginale uniforme ou une inverse gaussienne et une Beta...

-La fonction de répartition multi-variée porte plus d'informations que les différentes distributions marginales et ceci généralement nous aide à éviter les inconvénients de la corrélation comme mesure de dépendance.

-**Les copules** représentent une manière de tester pour extraire la structure de la dépendance à partir de la fonction de distribution jointe et de séparer la dépendance et le comportement des marginales.

-Elle nous permet de rendre possibles des extensions naturelles de certains résultats obtenus dans le cas univarié. Les distributions multidimensionnelles ainsi obtenues sont davantage en adéquation avec la réalité, surtout dans l'utilisation financière des statistiques.

## 2.2 Les Mesures de Dépendance

### 2.2.1 Coefficient de Corrélation Linéaire

**Définition 2.1** *Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires ayant des variances finies. Le coefficient de corrélation linéaire des variables $X$ et $Y$ est donné par :*

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

*où*

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}(X,Y) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

*est la covariance entre $X$ et $Y$; $Var(X), Var(Y)$ correspondent aux variances respectives des variables $X$ et $Y$.*

La définition du coefficient de corrélation linéaire est donc subordonnée à l'existence des variances de $X$ et $Y$. Dans le cadre d'une dépendance linéaire parfaite

$$Y = aX + b, (a \neq 0, b \in \mathbb{R})$$

le coefficient de corrélation est égal à $+1$ ou $-1$ selon le signe de $a$. D'autre part, ce coefficient de corrélation reste invariant par des transformations linéaires strictement croissantes des variables aléatoires. En effet

$$\rho(aX + b, cY + d) = sign(ac)\rho(X,Y).$$

Néanmoins, ce coefficient ne demeure pas constant sous l'hypothèse d'une transformation croissante non-linéaire.

### 2.2.2 Les coefficients de corrélation de Kendall et de Spearman

Les définitions de ces deux coefficients sont intimement liées à la notion de concordance. Ils constituent une alternative au coefficient de corrélation linéaire, qui n'est pas comme nous l'avons montré auparavant la mesure de dépendance la plus appropriée et souffre de certains lacunes.

**Définition 2.2** *Notons $(x_1, y_1)$ et $(x_2, y_2)$ deux observations d'un vecteur aléatoire continu $(X, Y)$, alors $(x_1, y_1)$ et $(x_2, y_2)$ sont dites :*

$$\textit{Concordantes si} \quad : \quad \begin{cases} (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) > 0 \Leftrightarrow (x_1 < x_2 \text{ et } y_1 < y_2) \\ \text{ou } (x_1 > x_2 \text{ et } y_1 > y_2) \end{cases}$$

$$\textit{et Discordantes si} \quad : \quad \begin{cases} (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) < 0 \Leftrightarrow (x_1 < x_2 \text{ et } y_1 < y_2) \\ \text{ou } (x_1 > x_2 \text{ et } y_1 < y_2). \end{cases}$$

*Plus généralement soit $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), ...(x_n, y_n)\}$ un échantillon de $n$ observations d'un couple $(X, Y)$. Il existe $C_n^2 = \binom{n}{2}$ pairs de distributions de couples $(x_i, y_i), (x_j, y_j)$ qui sont soit concordantes, soit discordantes.*

**Remarque 2.1** *La fonction de concordance entre les deux couples $(X_1, Y_1)$ et $(X_2, Y_2)$ est définie par :*

$$Q = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0]$$

#### Le Taux de Kendall

Soient $(X_1, Y_1)$ et $(X_2, Y_2)$ deux vecteurs aléatoires continus $i.i.d$ de fonction de répartition conjointe et de fonctions marginales $F$ (pour $X_1$ et $X_2$) et $G$ (pour $Y_1$ et $Y_2$). **Le Taux de Kendall** noté $\tau$ est défini par :

$$\tau = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0].$$

Le taux de kendall possède les propriétés suivantes :

-Le taux de Kendall est symétrique, c'est-à-dire :

$$\tau(X_1, X_2) = \tau(X_2, X_1)$$

$$-1 \leq \tau \leq +1$$

-Si $X$ et $Y$ sont comonotones alors $\tau = 1$ (la concordance la plus solide).

-Si $X$ et $Y$ sont antimonotones alors $\tau = -1$ (la discordance la plus solide).

-Si $X$ et $Y$ sont indépendantes alors $\tau = 0$.

-Si $a$ et $b$ sont des fonctions strictement croissantes, alors

$$\tau(a(X), b(Y)) = \tau(X, Y)$$

Malheureusement, lorsque $\tau = 0$ les variables $X$ et $Y$ ne sont pas forcement indépendantes.

### Le rhô de Spearman

Soient $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)$ et $(X_3, Y_3)$ trois vecteurs aléatoires indépendants de même loi. **Le coefficient de corrélation de Spearman** est définit par :

$$\rho_s = 3(P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0])$$

Les propriétés du $\rho_s$ sont les suivantes :

-$\rho_s$ existe toujours.

-$-1 \leq \rho_s \leq +1$.

-Si $X$ et $Y$ sont comonotones alors $\rho_s = 1$.

-Si $X$ et $Y$ sont antimonotones alors $\rho_s = -1$.

-Si $X$ et $Y$ sont indépendantes alors $\rho_s = 0$.

-Il est invariant sous des transformations non linéaires strictement croissantes. C'est-à-dire si $a$ et $b$ sont deux fonctions strictement croissantes, alors

$$\rho_s(a(X), b(Y)) = \rho_s(X, Y)$$

## 2.3 Les Copules

La dépendance entre les variables aléatoires est parfaitement décrite par leur distribution jointe. nous pouvons cependant distinguer les comportements des distributions marginales de la structure de dépendance : **la copule** est l'outil permettant d'extraire la structure de dépendance d'une distribution jointe et ainsi de séparer dépendance et comportement marginal. En isolant cette structure de dépendance, il est alors possible de déterminer une loi multi-variée originale, car composée de lois marginales différentes. Prenons un exemple simple. La loi multi-variée gaussienne est en fait la jonction d'une copule gaussienne et de lois marginales gaussiennes. Si nous souhaitons modéliser plusieurs variables aléatoires à l'aide d'une structure de dépendance gaussienne mais avec des lois marginales différentes pour chacune des variables aléatoires à l'aide, l'extraction de la copule gaussienne à partir de la loi multi-variée de même nom nous le permet. Ce sera l'objet du théorème de **sklar**. Cette copule gaussienne est donc extraite à partir d'une loi multi-variée. Mais il est possible de définir des copules ex-nihilo. Il suffit juste que la fonction copule satisfasse la définition 2.3 suivante. L'objectif est de comprendre l'outil probabiliste **copule** ainsi que ses propriétés mathématiques et statistiques. Cet outil a une définition mathématiques relativement simple mais son heuristique n'est pas sa aisée à appréhender. Nous nous limiterons dans ce mémoire à permettant d'assimiler les concepts de la théorie des copules.

**Définition 2.3** *La copule bivariée $C$ fonction de $[0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ est définie par les caractéristiques suivantes :*

$$\begin{cases} i)\ C(u,0) = C(0,u) = 0 \forall u \in [0,1],\ \textit{On dit que } C \textit{ est bien définie} \\ ii)\ C(u,1) = C(1,u) = u \forall u \in [0,1] \\ \ \textit{les marges des distributions marginales sont des marges uniformes,} \\ (iii) C \textit{ est } 2\textit{-croissante: } C(v_1,v_2) - C(v_1,u_2) - C(u_1,v_2) + C(u_1,u_2) \geq 0; \\ \forall (u_1,u_2) \in [0,1]^2, (v_1,v_2) \in [0,1]^2 \textit{ telle que } 0 \leq u_1 \leq v_1 \leq 1 \textit{ et } 0 \leq u_2 \leq v_2 \leq 1 \end{cases}$$

*Soient $U_1$ et $U_2$ deux variables aléatoires uniformes sur $[0,1]$ , alors on a :*

$$C(u_1,u_2) = P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2) \forall (u_1,u_2) \in [0,1]^2$$

*définition assure donc que la copule est une distribution de probabilité avec des marges uniformes.*

**Exemple 2.1** *Il est facile de montrer que $C^{\perp}(u_1,u_2) = u_1 u_2$ est une fonction copule (Copule produit). Considérons uniquement la propriété 2-**croissante**. Nous avons*

$$v_2 - u_2 \geq 0 \textit{ et } v_1 \geq u_1$$

*nous en déduisons que*

$$v_1(v_2 - u_2) \geq u_1(v_2 - u_2)$$

*et*

$$v_1 v_2 + u_1 u_2 - u_1 v_2 - v_1 u_2 \geq 0.$$

### 2.3.1 Théorème de Sklar

Une **Copule** est donc déterminée à partir de la définition 2.3, soit à la l'aide d'une loi bivariée pré-existante. Dans ce cas, il est fait appel au théorème de **Sklar** du nom de celui qui a introduit le concept *copule en* 1959. Ce théorème précise le lien défini par la copule $C$, déterminée à partir de la distribution jointe $F$, entre les fonctions de répartition marginales univariées $F_1$ et $F_2$ et la distribution complète bivariée.

**Théorème 2.1** *Soit $F$ une distribution bivariée de marges $F_1$ et $F_2$. La copule $C$ associée à $F$ s'écrit :*

$$C(u_1, u_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)) = F(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2)) = F(x_1, x_2)$$

*$C$ est unique lorsque les marges $F_1$ et $F_2$ sont continues.*

**Exemple 2.2** *La distribution de logistique bivariée de Gumbel est*

$$F(x_1, x_2) = (1 + e^{-x_1} + e^{-x_2})^{-1}$$

*définie sur $\mathbb{R}^2$. Nous pouvons montrer que les marges sont*

$$F_1(x_1) = F(x_1, \infty) = (1 + e^{-x_1})^{-1} \text{ et } F_2(x_2) = F(\infty, x_2) = (1 + e^{-x_2})^{-1}$$

*les fonctions quantilles sont donc*

$$F_1^{-1}(u_1) = \ln u_1 - \ln(1 - u_1) \text{ et } F_2^{-1}(u_2) = \ln u_2 - \ln(1 - u_2).$$

*Nous en déduisons que la fonction copule est*

$$\begin{aligned} C(u_1, u_2) &= F(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2)) \\ &= \left(1 + \frac{1-u_1}{u_1} + \frac{1-u_2}{u_2}\right)^{-1} \\ &= \frac{u_1 u_2}{u_1 + u_2 - u_1 u_2} \end{aligned}$$

*cette copule est appelée* ***la copule logistique de Gumbel (Gumbel logistic copula).***

La densité $f$ d'une loi bivariée peut s'écrire aussi en fonction de la densité $c$ de la population associée et des densités des marginales $f_1$ et $f_2$ :

$$f(x_1, x_2) = c(F(x_1), F(x_2)) \times f(x_1) \times f(x_2)$$

Dans la suite, nous illustrons les exemples de copules à l'aide des représentations de leur densité en 3 dimensions. Nous y ajouterons les représentations de la densité, en 3 dimensions ou en 2 dimensions à partir des courbes de niveaux, d'une loi bivariée composée de marges prédéfinies et de la **copule** que l'on souhaite observer. Précisons que

$$c(u_1, u_2) = \frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} C(u_1, u_2)$$

Dans le cas de la copule produit :

$$C^{\perp}(u_1, u_2) = u_1 \times u_2$$

par exemple, nous avons :

$$c^{\perp}(u_1, u_2) = 1$$

Ainsi, cette copule caractérise **l'indépendance** entre deux variables aléatoires puisque la densité bivariée d'un vecteur aléatoire $(X_1, X_2)$ dont la structure de dépendance est déterminée par la copule produit s'écrit :

$$f(x_1, x_2) = f(x_1) \times f(x_2)$$

En outre, la caractéristique **2-croissante** d'une copule se résume à démontrer la positivité de sa densité, lorsque celle-ci existe.

### 2.3.2 Bornes de Fréchet

Définissons tout d'abord deux copules importantes :

**Copule minimum** qui a pour expression :

$$C^-(u_1, u_2) = \max(u_1 + u_2 - 1, 0) \text{ avec } (u_1, u_2) \in [0, 1]^2$$

**Copule maximum** qui s'écrit :

$$C^+(u_1, u_2) = \min(u_1, u_2) \text{ avec } (u_1, u_2) \in [0, 1]^2$$

Les copules **minimum** $C^-$ et **maximum** $C^+$ sont essentielles puisqu'elles définissent des copules extrémales de toute copule, que l'on appelle **les bornes de Fréchet**.

**Proposition 2.1** *pour toute copule $C$, nous avons :*

$$C^-(u_1, u_2) \leq C(u_1, u_2) \leq C^+(u_1, u_2)$$

### 2.3.3 Théorème d'invariance

L'un des théorèmes essentiels à la théorie des copules est celui de **l'invariance** par transformations strictement croissantes.

**Théorème 2.2** *Soient deux variables aléatoires continues* $X_1$ *et* $X_2$ *de marges* $F_1$ *et* $F_2$ *et de copule, associée à la distribution* $F$ *du vecteur aléatoire* $X = (X_1, X_2)$ *que nous notons* $C_{\langle X_1, X_2\rangle}$. *Si* $h_1$ *et* $h_2$ *sont deux fonctions strictement croissantes sur* $Im(X_1)$ *et* $Im(X_2)$ *respectivement, alors :*

$$C_{\langle h_1(X_1), h_2(X_2)\rangle} = C_{\langle X_1, X_2\rangle}$$

*La copule est invariante par transformations strictement croissantes des variables aléatoires.*

### 2.3.4 Dépendance de queue

**Définition 2.4** *la dépendance de queue pour une copule bivariée. Cette dernière mesure la probabilité de réalisations extrêmes simultaneés. L'indicateur de dépendance de queue d'une copule se déduit des probabilités conditionnelles suivantes :*

$$\begin{aligned}
P\left[U_1 \leq u_1 \mid U_2 \leq u_2\right] &= \frac{P\left[U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2\right]}{P\left[U_2 \leq u_2\right]} = \frac{C(u_1, u_2)}{u_2} \\
P\left[U_1 > u_1 \mid U_2 > u_2\right] &= \frac{P\left[U_1 > u_1, U_2 > u_2\right]}{P\left[U_2 > u_2\right]} \\
&= \frac{P\left[U_1 \leq 1, U_2 > u_2\right] - P\left[U_1 \leq u_1, U_2 > u_2\right]}{P\left[U_2 \leq 1\right] - P[U_2 \leq u_2]} \\
&= \frac{P\left[U_1 \leq 1, U_2 \leq 1\right] - P\left[U_1 \leq 1, U_2 \leq u_2\right] - P\left[U_1 \leq u_1, U_2 > u_2\right]}{1 - u_2} \\
&= \frac{1 - u_2 - P\left[U_1 \leq u_1, U_2 \leq 1\right] + P\left[U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2\right]}{1 - u_2} \\
&= \frac{1 - u_1 - u_2 + C(u_1, u_2)}{1 - u_2}
\end{aligned}$$

*Nous pouvons alors définir les dépendances de queue à gauche et à droite.*

**Définition 2.5** *une copule* $C$ *a une dépendance de queue à gauche si :*

$$\lambda_L = \lim_{u \to 0^+} \frac{C(u, u)}{u}$$

*existe et* $\lambda_L \in [0,1]$. *Si* $\lambda_L = 0$ *alors elle n'a pas de dépendance de queue à gauche.*

**Définition 2.6** *Une copule* $C$ *a une dépendance de queue à droite si :*

$$\lambda_U = \lim_{u \to 1^-} \frac{1 - 2u + C(u,u)}{1-u}$$

*existe et* $\lambda_U \in [0,1]$. *Si* $\lambda_U = 0$ *alors elle n'a pas de dépendance de queue à droite.*

### 2.3.5 Modèles de copules

Il existe un grand nombre de **copules** adaptées à différentes situations, toute répartition associée à un vecteur dont les marginales sont uniformes sur $[0,1]$ définie une copule. Toutefois, quelques formes particulières sont souvent utilisées en pratique du fait de leur simplicité de mise en oeuvre. On peut notamment citer les exemples ci-après :

#### Copules elliptiques

Les copules **elliptiques** sont faciles à simuler, leurs représentations ne présentent cependant pas de formes fermées, elles sont symétriques. Les deux classes les plus utilisées des copules elliptiques sont les copules **gaussiennes** et les copules de **Student.**

#### Copule Gaussienne

**Définition 2.7** *La copule Gaussienne bivariée est définie de la façon suivante :*

$$C(u,v;\rho) = \Phi_\rho(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v))$$

$\Phi_\rho$ *est la fonction de répartition conjointe de deux variables normales centrées réduites, avec un coefficient de corrélation* $\rho$, $\Phi$ *est la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite. En conséquence :*

$$\Phi_\rho(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v)) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(\frac{2\rho st - s^2 - t^2}{2(1-\rho^2)}\right) dsdt$$

*Cette fonction peut aussi prendre la forme :*

$$C(u,v) = \int_{-\infty}^{u}\int_{-\infty}^{v} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(\frac{2\rho xy - x^2 - y^2}{2(1-\rho^2)} + \frac{x^2+y^2}{2}\right) dsdt$$

*avec*

$$x = \Phi^{-1}(u) \ et \ y = \Phi^{-1}(v), \ \ et \ u \ et \ v \ de \ loi \ U[0,1]$$

**La fonction de densité**

$$C(u_1,u_2;\rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{x_1^2+x_2^2-2\rho x_1 x_2}{2(1-\rho^2)} + \frac{x_1^2+x_2^2}{2}\right)$$

**et la fonction de répartition**

$$\begin{aligned} C(u_1,u_2;\rho) &= \int_0^{u_1}\int_0^{u_2} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{x_1^2+x_2^2-2\rho x_1 x_2}{2(1-\rho^2)} + \frac{x_1^2+x_2^2}{2}\right) dydx \\ &= \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)}\int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{x_1^2+x_2^2-2\rho x_1 x_2}{2(1-\rho^2)}\right) dydx \end{aligned}$$

**Copule gaussienne multi-variée :** La copule gaussienne multi-variée s'applique à une fonction de répartition conjointe avec la matrice des corrélations $R$, elle est définie par :

$$C(u_1, ......, u_d) = \Phi_R(\Phi^{-1}(u_1), ....., \Phi^{-1}(u_d))$$

$\Phi_R$ est la fonction de répartition des variables conjointes, les variables sont normales et standardisées et ont une matrice de corrélations $\mathbb{R}$.

**Taux de Kendall et Rhô de Spearman en fonction du coefficient de corrélation linéaire $\rho$ :** Le taux de Kendall pour une copule gaussienne est donné par :

$$\tau = \frac{2}{\Pi} \arcsin \rho$$

et le Rhô de Spearman est donné par la relation suivante :

$$\rho = \frac{6}{\Pi} \arcsin \frac{\rho}{2}$$

Les copules gaussiennes ne captent pas la dépendance dans les queues des distributions.

### Copule Student

**Définition 2.8** *La copule de* ***Student (t copula)*** *est la copule sous-jacente à une distribution multi-variée de Student. Cette structure de dépendance capte les dépendances extrêmes positives et négatives. Elle est extraite de la même manière que la copule Gaussienne mais cette fois-ci à partir de la distribution de student bivariée. La copule Student bivariée est définie de la façon suivante :*

$$\begin{aligned} C(u_1, u_2; \rho, k) &= T_{\rho,k}(T_K^{-1}(u_1), T_K^{-1}(u_2)) \\ &= \int_{-\infty}^{u_1} \int_{-\infty}^{u_2} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \left(1 + \frac{s^2 + t^2 - 2\rho st}{k(1-\rho^2)}\right)^{-\frac{(k+2)}{2}} dsdt \end{aligned}$$

*avec $\rho$ le coefficient de corrélation et $T_{\rho,k}^{-1}$ la distribution de Student bivariée standard de matrice de corrélation fonction de $\rho$ et de degré de liberté $k$. Dans le cas où le coefficient de corrélation est différent de $-1$, la copule Student présente des dépendances de queue à droite et à gauche.*

**Taux de Kendall et le rhô de Spearman pour une distribution de student en fonction du coefficient de corrélation linéaire** $\rho$ **:** Il n'existe pas, à notre connaissance, de formule qui donne l'équivalente entre le coefficient de corrélation linéaire et le rhô de Spearman pour les distributions de **Student**. Alors qu'en fait, la relation qui s'applique pour le taux de Kendall pour la copule gaussienne s'applique aussi pour la copule de student :

$$\tau = \frac{2}{\Pi} \arcsin \rho.$$

La copule de student, selon le nombre de degré de liberté $k$, permet la simulation d'un plus grand nombre de points regroupés dans les queues des distributions que les copules gaussiennes, à la limite, lorsque $k \to \infty$, la copule de Student tend vers la copule gaussienne.

### Copules Archimédiennes

**Définition 2.9** *Les copules* ***Archimédiennes*** *sont définies de la manière suivante :*

$$C(u_1, u_2) = \begin{cases} \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \varphi(u_2)) & si\ \varphi(u_1) + \varphi(u_2) \leq \varphi(0) \\ 0 & sinon \end{cases}$$

*avec $\varphi$ vérifiant :*

$$\varphi(1) = 0,\ \acute{\varphi}'(u) < 0\ et\ \varphi''(u) > 0$$

*pour tout :*

$$0 \leq u \leq 1$$

*$\varphi$ est appelée la fonction génératrice de la copule.*

**Le taux de Kendall** $\tau$ est égal pour les copules **Archimédiennes** à :

$$\tau = 1 + \int_0^1 \frac{\varphi(u)}{\acute{\varphi}'(u)} du$$

Quelques exemples de copules Archimédiennes bivariées sont en notant

$$\tilde{u} = -\ln u$$

| Nom | Générateur | Copule bivariée |
|---|---|---|
| Clayton($\theta > 0$) | $u^{-\theta} - 1$ | $(u_1^{-\theta} - u_2^{-\theta} - 1)^{\frac{-1}{\theta}}$ |
| Gumbel($\theta \geq 1$) | $(-\ln u)^{\theta}$ | $\exp\left(-(\tilde{u}_1^{-\theta} + \tilde{u}_2^{-\theta})^{\frac{1}{\theta}}\right)$ |
| Franc($\theta \neq 0$) | $-\ln\left(\frac{\exp(-\theta u) - 1}{\exp(-\theta) - 1}\right)$ | $-\frac{1}{\theta}\ln\left(1 + \frac{(\exp(-\theta u_1) - 1)(\exp(-\theta u_2) - 1)}{\exp(-\theta) - 1}\right)$ |

**Copules de Valeurs Extrêmes**

**Définition 2.10** *La théorie* ***des valeurs extrêmes*** *est souvent présentée et utilisée dans un cadre unidimensionnel. Il existe finalement très peu d'applications multidimensionnelles. La théorie des valeurs extrêmes multi-variées est relativement facile à appréhender si la théorie dans le cadre uni-varié est parfaitement comprise. Une copule de* ***valeurs extrêmes (VE)*** *vérifie la relation suivante :*

$$C(u_1^k, u_2^k) = C^k(u_1, u_2)$$

*pour tout réel $k$ positif.*

*Pour construire une distribution de valeurs extrêmes bivariée, il suffit ainsi de copuler des marges issues de loi de la théorie des valeurs Extrêmes avec une copule $(VE)$.*

**Exemple 2.3** *la copule de* ***Gumbel*** *est une copule de* ***valeurs extrêmes****. En effet, pour une constante $k$ réelle positive, on a :*

$$
\begin{aligned}
c(u^k, v^k, \theta) &= \exp\left(-[(-\ln(u^k))^\theta + (-\ln(v^k))^\theta]^{\frac{1}{\theta}}\right) \\
&= \exp\left(-[k^\theta[(-\ln(u))^\theta + (-\ln(v))^\theta]^{\frac{1}{\theta}}\right) \\
&= \exp\left(-k[(-\ln(u))^\theta + (-\ln(v))^\theta]^{\frac{1}{\theta}}\right) \\
&= \exp\left(-([(-\ln(u))^\theta + (-\ln(v))^\theta]^{\frac{1}{\theta}})^k\right) \\
&= c^k(u, v)
\end{aligned}
$$

**Proposition 2.2** *Pour toute copule valeurs extêrmes bivariée $C$, nous avons :*

$$C^{\perp}(u_1, u_2) \leq C(u_1, u_2) \leq C^{+}(u_1, u_2)$$

### Copule Archimax

Nous considérons une nouvelle famille de copules introduite par **Capéraà**, **Fougères** et **Genest** [**2000**] qui englobe la plupart des familles connues des copules, notamment les copules Archimédiennes et toutes les copules de valeurs extrêmes. Cette nouvelle famille offre plus de flexibilité pour la modélisation. En effet, nous pouvons connaître a priori les différents max-domaines d'attraction.

**Définition 2.11** *Une fonction bivariée est **une copule Archimax** si et seulement s'elle est de la forme :*

$$C_{\Phi,A}(u_1, u_2) = \varphi^{-1}\left[(\varphi(u_1) + \varphi(u_2))A\left(\frac{\varphi(u_1)}{\varphi(u_1) + \varphi(u_2)}\right)\right]$$

*pour tout $0 \leq u_1, u_2 \leq 1$ avec :*

*1. $A : [0,1] \to \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ tel que :*

$$max\,(t, 1-t) \leq A(t) \leq 1$$

*pour tout :*

$$0 \leq t \leq 1$$

*2. $\Phi : [0,1] \to [0, \infty]$ est une fonction convexe, décroissante qui vérifie $\Phi(1) = 0$ cette famille de copules a l'avantage d'englober un grand nombre de copules.*

**Exemple 2.4** *Posons $\varphi(t) = \ln(\frac{1}{t})$ nous obtenons*

$$C_{\phi,A}(u_1, u_2) = \exp\left[\ln(u_1 u_2) A\left(\frac{\ln u_1}{\ln u_1 u_2}\right)\right]$$

*pour tout $x \geq 0, y \leq 1$. On reconnaît la forme générale des copules bivariées de valeurs extrêmes. Si on choisit maintenant de prendre $A(t) \equiv 1$, on retrouve la forme générale des copules Archimédiennes :*

$$C_{\phi,A}(u_1, u_2) = C_\phi(u_1, u_2) = \phi^{-1}(\phi(u_1) + \phi(u_2))$$

## 2.4 Où s'applique les copules ?

**Les copules** sont de plus en plus présentes dans la littérature financière depuis quelques années, en particullier, dans **le domaine de la gestion des risques, de la modélisation du risque de crédit, de l'évaluation d'options ou en matière de choix de portefeuilles.** Si on examine **la distribution de pertes**, on vérifie que les grandes pertes sont influencées par des pertes simultanées dans des facteurs de risque, par conséquent **la distribution des pertes** dépend **des distributions marginales des facteurs de risque.** La plus grandes difficulté réside dans la mesure de la dépendance entre les risques, et à ce stade la qu'on peut utiliser la notion de **copules** qui est un outil puissant permettant de comprendre **les relations entre les distributions conjointes des actifs qui composent un porteffeuille.**

L'utilisation **des copules** pour mesurer la dépendance entre divers marchés financiers est un bon outil. **Les copules**, contrairement aux coefficients de corrélations ne changent pas selon les conditions de marché, elles restent constantes. En conséquence, elles donnent une meilleure indication de **la dépendance** même dans les situations extrêmes de marché. Lorsque nous craignons des périodes turbulentes, nous aurons à notre portée un bon indicateur de risque sous forme de mesure de probabilité. En 2008 nous avons été témoin de la coïncidence des rendements boursiers désastreux au travers le monde.

Les fonctions copules ont été introduites en finance appliquée, pour permettre l'utilisation d'une gamme plus étendue et plus réaliste des lois décrivant l'évolution jointe des rendements observées sur plusieurs marchés. Cette théorie n'est pas utilisée dans toutes ses potentialités, elles offrent énormément de perspectives de recherche qu'il faut explorer surtôut dans les domaines de :

♦L'assurence non-vie (multibranches : dépendance entre branche d'activités).

♦La segmentation d'images.

♦La finance : gestion de risque, modélisation des actifs financiers, évaluation des produits dérivés (évaluation d'option et des dérivées de crédit sur plusieurs options).

♦Modélisation en dimension $n(n > 2)$ (manque de copule multivariées : à ce jour, seulement la Gaussienne et la Student sont utilisables).

### 2.4.1 Probabilité de Ruine

**La probabilité de ruine** dans sa version primaire correspond au parcentile du point au-delà duquel le capital initial est totalement épuisé sur une période donnée suite à un résultat déficitaire. Autrement dit, si on note $C$ le capital initial donné, **la probabilité de ruine** est égal à $F_X(-C) = P(X < -C)$. Assez logiquement, elle a aussi été utilisée dans les modèles d'assurance en fixant un niveau minimum de probabilité de ruine, $\alpha$, jugé acceptable selon l'aversion au risque de l'agent et en déterminant ensuite le niveau de capital qui lui correspond. Dans ce cas, on a alors $F_X(-C) = \alpha$ et $C$ est cette fois déterminé en fonction de $\alpha$. **La probabilité de ruine** issue des modèles d'assurance est à l'origine de **la value at Risque (VaR)**, bien connue du monde bancaire.

### 2.4.2 Value at Risque (VaR)

La **VaR** est une mesure de risque commune aux organismes financiers qui est totalement équivalente au concept de **sinistre Maximum Probable (SMP)**, trés familier des assureurs non vie. Elle est égale à la perte maximale que peut subir une organisation, dans des conditions normales de marché, sur une période de temps donnée pour un certain niveau de probabilité $\alpha$. On a donc

$$VaR(X) = -\inf\{x : F_X(x) \geq \alpha\}.$$

De manière pratique, la mise en oeuvre de la **VaR** consiste à faire varier la probabilité $\alpha$ et à déterminer le capital minimal associé en début de période qui permette de faire face à la perte maximale en fin de période. On obtient donc rétrospectivement le niveau de capital en deçà duquel l'organisation est en ruine avec une probabilité superieure à $\alpha$. La **VaR** utilisée dans ce contexte n'est l'autre que la probabilité de ruine évoquée plus haut.

L'avantage de la **VaR** est d'être un concept simple et facile à calculer. Elle vérifie les propriétés d'invariance par translation, d'homogénéité positive, de monotonie, de borne superieure et de conservatisme. En revanche, elle n'est pas sous-additive et ne tient pas compte de la sévérité de la ruine, ce qui constitue la critique la plus souvent formulée à son égard. Cependant cette mesure de risque peut faire sens dans un objectif de solvabilité.

### 2.4.3 Calcul de la VaR par la copule

Pour finir cette partie, nous allons étudier comment nous pouvons appliquer les copules dans un problèmes d'agrégation de risque de type **Value-at-Risque**. Soient deux variables aléatoires $X$ et $Y$ de fonctions de distribution $F_1$ et $F_2$ respectivement. On suppose qu'on ne connaît pas la structure de dépendance du modèle (la copule). On va énoncé un théorème dû à Makarov [1987] et qui va nous permettre d'avoir une borne supérieure pour $VaR(X+Y)$.

**Théorème 2.3** *Pour tout $z \in \mathbb{R}$, on a*

$$P(X+Y \leq z) \geq \sup_{x+y=z} C^{-}(F_1(x), F_2(y)) = \Psi(z)$$

*Soit $\Psi^{-1}(\alpha) = \inf\{z \backslash \Psi(z) \geq \alpha\}$, $\alpha \in (0,1)$, l'inverce généralisée de $\Psi$. Alors*

$$\Psi^{-1}(\alpha) = \inf_{C^{-}(u,v)=\alpha} \{F_1^{-1}(u) + F_2^{-1}(v)\}$$

*On en déduit immédiatement que*

$$VaR_{\alpha}(X+Y) \leq \Psi^{-1}(\alpha)$$

*Cette borne est la meilleure possible.*

**Idée de la démonstration**

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x+y=z$ application lié de la borne inférieure de Fréchet, on obtient

$$P(X+Y \leq Z) \geq P(X \leq x, Y \leq y) \geq C^{-}(F_1(x), F_2(y))$$

Pour démontrer la première partie en appliquant pour le côté droit le supremum sur $x+y=z$. Pour la suite nous voulons simplement montrer comment $C$ est choisi. Pour plus de détails mathématiques complets nous nous référons à Frank, Nelsen, et schweizer(1987). Nous nous limitons à des fonctions de distribution continue $F_1$ et $F_2$.

**Exemple 2.5** *La quotient du $VaR(X+Y) = VaR(X) + VaR(Y)$ peuvent être faites de* *façon arbitrairement grand.En général, nous n'avons pas*

$$\lim_{\alpha\to -1}\frac{\Psi^{-1}(\alpha)}{VaR_\alpha(X)+VaR_\alpha(Y)}=1$$

*Pour voir ce considérer* ***Pareto*** *marginaux*

$$F_1(x)=F_2(x)=1-x^{-\beta}, x\geq 1,\ \text{où } \beta>0$$

*Nous devons déterminer*

$$\inf_{u+v-1=\alpha}\{F_1^{-1}(u)+F_2^{-1}(v)\}$$

*Depuis* $F_1=F_2$ *la fonction*

$$g:(\alpha,1)\to\mathbb{R}, u\to F_1^{-1}(u)+F_2^{-1}(\alpha+1-u)$$

*est symétrique par rapport à* $\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$*.Puisque la densité* ***Pareto*** *est décroissante, la fonction* $g$ *est décroissante sur* $\left(\alpha,\frac{\alpha+1}{2}\right)$ *et croissante sur* $\left(\frac{\alpha+1}{2},1\right)$*.Par conséquence*

$$g(\frac{\alpha+1}{2})=2F_1^{-1}\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$$

*est le minimum de* $g$ *et*

$$\Psi^{-1}(\alpha)=2F_1^{-1}\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$$

*donc*

$$\begin{aligned}
\frac{VaR(X+Y)}{VaR_\alpha(X)+VaR_\alpha(Y)} &\leq \frac{\Psi^{-1}(\alpha)}{VaR_\alpha(X)+VaR_\alpha(Y)} \\
&= \frac{F_1^{-1}\left(\dfrac{\alpha+1}{2}\right)}{F_1^{-1}(\alpha)} \\
&= \frac{\left[1-\left(\dfrac{\alpha+1}{2}\right)\right]^{\frac{-1}{\beta}}}{(1-\alpha)^{\frac{-1}{\beta}}} = 2^{\frac{1}{\beta}}
\end{aligned}$$

*La limite supérieure* $2^{\frac{1}{\beta}}$, *Ce qui est indépendamment de* $\alpha$, *Peut être atteint.*

# Bibliographie


[1] Clauss.P, Théorie des copules.

[2] Bouvier.P, Application des copules à la finance des marché.

[3] Lounas.F, Modélisation de la dépendance par les copules et applications, Mémoire de Magister, 2011.

[4] Planchet Frédéric, Dépendance stochastique introduction à la théorie des copules, Décembre 2010.

[5] Thierry Roncalli, Gestion des risques multiple, Février 2002.

[6] Antoine Bezat and ashkan Nikeghballi, La théorie des extrêmes et gestion des risque des marché, Mai 2000.

[7] Embrechts, Paul, Alexander McNeil, Daniel Staumann. 1999. Correlation and dependance in risk managment properties and pitfalls, ModeLing extrem.al events fol' insnmnce and finance., University of Lausane -École des HEC, August 9-13 1999.