République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Probabilités et Applications**

Par :Bellouta Ghania et Rebaia Hanane

Intitulé

L'étude d'unicité des équations différentielles stochastiques cas Höldérien

Dirigé par : SAKRANI SAMIA

Devant le jury

PRESIDENT	Dr.BENCHAABANE.A	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr.SEKRANI SAMIA	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr.BOUHADJAR SLIMANE	Univ-Guelma

Session Juin 2016

Remerciements :

Nous exprimons toute notre gratitude à tous ceux qui nous ont aidés de Prés ou de loin l'élaboration de ce mémoire que madame SAKRANI SAMIA notre encadreur et le jury BOUHADJAR.SLIMANE et BENCHAABANE.A et touts les enseignants du département de mathématiques soient vivement remerciés pours la formation qu'ils nous ont donnée.

Dédicaces

Je dédie cette thèse …

A mes très chers parents

Maman, vous m'avez mise au monde, et depuis vous n'avez pas cessé de me chérir, de m'encourager, de vous occuper de moi, de mettre à ma portée ce qu'il y'a de meilleur; vous n'avez épargné aucun effort pour me rendre heureuse.

Papa, vous m'avez toujours aimée, soutenue, conseillée. Vous avez été le premier à m'encourager à aller si loin dans les études, toujours vous avez été présent dans ma vie.

Alors aucune dédicace n'est assez forte, aucun mot n'est assez éloquent pour exprimer ce que je ressens.

A mes très chers frères et sœur : Haçen Massaoud Bilal et Ali, Fadila Hayet Hiba Soria Sossou Manel

A mon fiancé : Djaber

Tout au long de l'élaboration de cette thèse, vous étiez présents, vous m'avez aidée, encouragée à travers elle, vous allez trouver dans ce travail l'expression de mon respect le plus profond et mon affection la plus sincère.

Puisse dieu vous accorder longue vie, santé et bonheur.

A ma très chère amies: Ilhem(bochra) et Hanan

En souvenir de notre sincère et profonde amitié et des moments agréables que nous avons passés ensemble à la résidence.

A touts les membres de ma famille Que je ne suis pas cité, mais qui n'en demeurent pas moins chères.

☺ Bellouta Ghania☺

Dédicace

Je dédie ce mémoire

A mes chers parents ma mère et mon père

Pour leur patience, leur amour, leur soutien et leurs Encouragements.

A mes frères.

A mes amies et mes camarades.

Sans oublier tout les professeurs que ce soit du primaire, du moyen, du secondaire ou de

Table des matières

Introduction

Dans ce mémoire,on introduit les équations différentielles stochastiques (EDS) qui généralisent la notion d'équations différentielles ordinaires (ODE) prenant en compte une perturbation aléatoire. Celle ci est exprimée à l'aide du mouvement brownien. Ce document est composé de trois chapitres.

Le premier chapitre est consacré aux rappels des résultats importants en calcul stochastique concernant processus et martingales. On donnera les principales propriétés du mouvement brownien ainsi que celles des martingales.ainsi que la formule d'Itô.

Dans le deuxième chapitre,on donnera une définition mathématique d'une équation différentielle accompagnée de quelques exemples. On citera ensuite l'un des théorèmes les plus importants ,à savoir le théorème d'existence et d'unicité de la solution d'une EDS. On finira ce chapitre par l'énoncé d'un grand théorème qu'on doit aux mathématiciens Yamada et Watanabe avec sa démonstration qui est la base de ce mémoire.

Dans le dernier chapitre, On introduira quelques applications des EDS en finance comme (le modèle de Black & Scholes,deVasicek et Cox-Ingersoll-Ross). On finit par une étude du processus de Bessel en dimension 1.

Chapitre 1

Introduction au calcul stochastique

On rappelle quelques notions de base du calcul des probabilités, du calcul stochastique, du movement brownien, des martingales et des intégrales à la construction des équations différentielles stochastiques Holdérien.

1.1 Processus et Martingale

1.1.1 Processus

Définition 1.1 *Un processus (aléatoire) X sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une famille de v.a. aléatoires $(X_t)_{t \in [0,T]}$. On peut également le voir comme une fonction aléatoires :*

$$X : \begin{cases} \Omega \rightarrow \{\text{fonction de } \mathbb{R}_+ \text{ dans } \mathbb{R}\} \\ \omega \rightarrow \{X_t(\omega)\} \end{cases}$$

Remarque 1.1 *La variable $t \in [0, T]$ représente le temps mais on aurait pu également prendre $t \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}^2$... De même, l'espace d'arrivée pourrait être bien plus complexe que $\mathbb{R}$.*

Remarque 1.2 *On peut voir un processus comme une fonction qui à $\omega \in \Omega$ associe une fonction de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}$, $t \rightarrow X_t(\omega)$, appelée* **trajectoire** *du processus.*

Définition 1.2 On dit que X est un **processus continu (p.s.)** *si'l est continu trajectoire par trajectoire, i.e. $t \to X_t(\omega)$ est C^0 pour presque tout $\omega \in \Omega$.*

1.1.2 Espace $\mathcal{L}^p$

Notation : Pour tout $p \in \mathbb{R}^+$, nous noterons :

$$\mathcal{L}^p(\Omega) = \left\{ X \text{ v.a. t.q. } \|X\|_p := \mathbb{E}\left[|X|^p\right]^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

$$\mathcal{L}^p(\Omega, [0;T]) := \left\{ (\theta_s)_{0 \leq s \leq T} \text{ processus } \mathcal{B}([0,T]) \otimes \mathcal{F}\text{-mesurable t.q. } \|\theta\|'_p := \mathbb{E}\left[\int_0^T |\theta_s|^p \, ds\right]^{\frac{1}{p}} < \infty \right.$$

Proposition 1.1 *Pour $p \geq 1$ les espaces $\mathcal{L}^p(\Omega)$ muni de $\|\cdot\|_p$ et $\mathcal{L}^p(\Omega, [0,T])$ muni de $\|\cdot\|'_p$ sont des espaces de Banach (i.e. complets).*

1.1.3 Filtration

Définition 1.3 *Une* **Filtration** *$\mathcal{F} = (\mathcal{F})_{t \in [0,T]}$ est une collection croissante de sous-tribus de $\mathcal{A}$, i.e.*

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{A}$$

Pour tous $s, t \in [0,T]$ tels que $s \leq t$.

Remarque 1.3 *$\mathcal{F}_t$ représente la quantité d'information disponible à l'instant t. Il est donc logique que cette quantité augmente avec le temps.*

Définition 1.4 *Un processus $X(t)_{t \in [0,T]}$ est dit* **$\mathcal{F}$-adapté** *si la variable aléatoire X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout $t \in [0,T]$.*

Proposition 1.2 *Si X est $\mathcal{F}$-adapté, la v.a. X_s est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout $s \in [0,t]$ et tout $t \in [0,T]$.*

Définition 1.5 ***La filtration engendrée** par un processus X, notée $\mathcal{F}^X$ est la suite croissante de tribus $(\mathcal{F}_t^X)_{t\in[0,T]}$ engendrées par $X(t)_{t\in[0,T]}$ i.e.,*

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, s \leq t)$$

Pour tout $t \in [0,T]$.

Remarque 1.4 *$\mathcal{F}^X$ est la plus petite filtration qui rend X adapté.*

Une tribu est dite complète lorsqu'elle contient l'ensemble des négligeables $\mathcal{N}$ de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ qui est défini par

$$\mathcal{N} := \{N \subset \Omega, \exists A \in \mathcal{A}/N \subset A, \mathbb{P}(A) = 0\}$$

Définition 1.6 *Une filtration $\mathcal{F}= (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ est **complète** lorsque $\mathcal{F}_t$ est complète pour tout $t \in [0,T]$ (ce qui équivaut à $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_0$).*

Remarque 1.5 *Pour compléter une filtration $\mathcal{F}$, il suffit de remplacer $\mathcal{F}_t$ par $\sigma(A \cup N, (A,N) \in \mathcal{N} \times \mathcal{F}_t)$ pour tout $t \in [0,T]$. La filtration complétée engendrée par un processus X est généralement appelée **filtration naturelle** du processus.*

*Si $\mathcal{F}$ est complète et X et Y sont deux processus, **à t fixé**, on a*

$$X_t = Y_t \ p.s. \Longrightarrow [X_t \text{ est } \mathcal{F}_t\text{-mesurable} \Leftrightarrow Y_t \text{ est } \mathcal{F}_t\text{-mesurable}]$$

On montre alors que, si $\mathcal{F}$ est complète et $(X^n)_{n\geq 0}$ une suite de processus, alors, toujours à t fixé :

$$\left[X_t^n \overset{p.s}{\rightarrow} X_t \text{ et } X_t^n \text{ est } \mathcal{F}_t\text{-mesurable pour tout } n \geq 0\right] \Rightarrow [X_t \text{ est } \mathcal{F}_t\text{-mesurable}]$$

Le résultat reste vrai pour une convergence dans $\mathcal{L}^p(\Omega)$ avec $p \geq 1$, car on peut alors extraire une sous suite qui converge p.s. vers la même limite et donc la limite reste mesurable :

$$\left[X_t^n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} X_t \text{ et } \forall n \ X_t^n \text{ est } \mathcal{F}_t\text{-mesurable}\right] \Rightarrow [X_t \text{ est } \mathcal{F}_t\text{-mesurable}] .$$

Dans toute la suite, nous allons considérer des filtrations complètes et parlerons donc de filtration naturelle de processus.

1.1.4 Martingale

Définition 1.7 *Un processus aléatoire $M = (M_t)_{t\in[0,T]}$ est une* ***$\mathcal{F}$-martingale*** *si*

(i) M est $\mathcal{F}$-adapté,

(ii) $M_t \in \mathcal{L}^1(\Omega)$, i.e. $\mathbb{E}\left[|M_t|\right] < \infty$ pour tout $t \in [0, T]$,

(iii) $\mathbb{E}\left[M_t/\mathcal{F}_s\right] = M_s$ Pour tout $s, t \in [0, T]$ tels que $s \leq t$.

Un processus M est une ***$\mathcal{F}$-sur-martingale*** *(resp. une* ***$\mathcal{F}$-sous-martingale****) s'il vérifie les propriétés (i) et (ii) et $\mathbb{E}(M_t/\mathcal{F}_s) \leq M_s$ (resp. $\mathbb{E}(M_t/\mathcal{F}_s) \geq M_s$) pour tout s, $t \in [0, T]$ tels que $s \leq t$.*

Remarque 1.6 *Une martingale est un jeu équitable, une sur-martingale un jeu perdant, et une sous-martingale un jeu gagnant.*

Proposition 1.3 *Toute martingale M vérifie*

$$\mathbb{E}\left[M_t\right] = \mathbb{E}\left[M_0\right],$$

Pour tout $t \in [0, T]$.

Proposition 1.4 *Soit M une $\mathcal{F}$-martingale et $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction* ***convexe*** *mesurable, alors si $\phi(M_t) \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ pour tout $t \in [0, T]$, $\Phi(M) = (\phi(M_t))_{t\in[0,T]}$ est une* *sous-martingale.*

Proposition 1.5 *Soit M une $\mathcal{F}$-martingale de carré intégrable (i.e. $\mathbb{E}\left[|M_t|^2\right] < \infty$ pour tout $t \in [0,T]$), alors*

$$\mathbb{E}\left[|M_t - M_s|^2 / \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\left|M_t^2 - M_s^2\right| / \mathcal{F}_s\right],$$

Pour tout $s, t \in [0,T]$ tels que $s \leq t$.

Théorème 1.1 ***(Lévy)***.*soient $M^1, \dots, M^d$ des martingales dans $\mathcal{M}_T^2$ issues de 0 telles que*

$$\langle M^i, M^j \rangle_t = \delta_{ij} t.$$

alors $(M^1, \dots, M^d)$ est un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. En particulier, si $M \in \mathcal{M}_T^2$ est telle que $\langle M \rangle_t = t$ pour tout $t \in [0,T]$, alors $(M_t)_{t \in [0,T]}$ est un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien.

1.1.5 Processus gaussien

Définition 1.8 *Un vecteur de v.a $(X_1, \dots, X_n)$ est un* ***vecteur gaussien*** *si et seulement si toute combinaison linéaire des X_i est gaussienne i.e. la variable aléatoire $\langle a, X \rangle$ définie par*

$$\langle a, X \rangle := \sum_{k=1}^{n} a_i X_i$$

est une v.a. gaussienne pour tout $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

Voici deux propositions très utiles dans la manipulation des vecteurs gaussiens.

Proposition 1.6 *Si le vecteur (X_1, X_2) est gaussien, les v.a. X_1 et X_2 sont indépendantes si et seulement si $cov(X_1, X_2) = 0$.*

Proposition 1.7 *Tout vecteur de variables aléatoires gaussiennes indépendantes est un vecteur gaussien.*

Remarque 1.7 *Attention, il est possible de trouver des variables aléatoires gaussiennes non indépendantes de covariance nulle.*

La version continue des vecteurs gaussiens sont les processus gaussiens.

Définition 1.9 *Un processus $(X_t)_{t\in[0,T]}$ est appelé* **processus gaussien** *si pour tout n et tout $t_1, ..., t_n \in [0,T]$ tels que $t_1 \leq ... \leq t_n$, le vecteur $(X_{t_1}, ..., X_{t_n})$ est gaussien.*

1.2 Mouvement brownien

Historiquement :

- **1828** : Robert Brown, botaniste, observe le mouvement du pollen en suspension dans l'eau.

- **1877** : Delsaux explique que ce mouvement irrégulier est du aux chocs du pollen avec les molécules d'eau (changements incessants de direction),

- **1900** : Louis Bachelier dans sa thèse "Théorie de la spéculation" modélise les cours de la bourse comme des processus à accroissements indépendants et gaussiens (problème : le cours de l'actif, processus gaussien, peut être négatif)

- **1905** : Einstein détermine la densité du MB et le lie aux EDPs. Schmolushowski le décrit comme limite de promenade aléatoire.

- **1923** : Etude rigoureuse du MB par Wiener, entre autre démonstration de l'existence.

Un mouvement brownien généralement noté B pour Brown ou W pour Wiener.

Définition 1.10 *Soit $\mathcal{F}$ une filtration. Un* **$\mathcal{F}$-mouvement brownien (standard)** *est un processus B vérifiant :*

(i) B est $\mathcal{F}$-adapté

(ii) $B_0 = 0$ $\mathbb{P}$-p.s.,

(iii) B est continu, i.e. $t \to B_t(\omega)$ est continue pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$,

(iv) B est à accroissements indépendants : $B_t - B_s$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$ pour tous $s,t \in [0,T]$ tels que $s \leq t$,

(v) B est à accroissements stationnaires et gaussiens : $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ *pour tous* $s, t \in [0, T]$ *tels que* $s \leq t$.

Certaines fois, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité sur la filtration à considérer ou lorsque $\mathcal{F}$ *est la filtration naturelle du processus* B, *on parlera de mouvement brownien tout court.*

Remarque 1.8 *Pour information, dans la définition, la quatrième propriété peut être remplacée par "les accroissements sont stationnaires centrés de carré intégrable avec* $Var(B_t) = 1$*". Cette hypothèse plus faible implique, grâce à la continuité de* B, *que les accroissements sont gaussiens. En effet, on a* $B_t - B_s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i-1}^{n}(B_{s+(t-s)i/n} - B_{s+(t-s)(i-1)/n})$ *somme composée de v.a. aléatoires indépendantes de même loi car le processus est stationnaire. Grâce à la continuité du* B, *on obtient qu'elles sont d'espérance nulle et de variance* $(t-s)/n$. *On a alors envie de conclure grâce au Théorème Centrale Limite mais les termes de la somme dépendent de* n *et la démonstration nécessite une généralisation du TCL.*

Proposition 1.8 *Si* B *est un mouvement brownien et* $\mathcal{F}$ *sa filtration naturelle, les processus* $(B_t), (B_t^2 - t)$ *et* $(e^{\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t})$ *(Brownien Exponentiel) sont des* $\mathcal{F}$*-martingales.*

Théorème 1.2 Caractérisation du mouvement brownien

Un processus X *est un mouvement brownien si et seulement si c'est un processus gaussien continu centré de fonction de covariance donnée par* $cov(X_1, X_2) = s \wedge t$, *pour* $s, t \in [0, T]$.

Proposition 1.9 B *est un mouvement brownien, les processus* $\frac{1}{a}B_{a^2t}$, *et* $B_{t+t_0} - B_t$ *sont des Mouvements Browniens.*

Définition 1.11 *Un processus* X *est un processus à variation bornée sur* $[0, T]$ *s'il est à variation bornée trajectoire par trajectoire :*

$$\sup_{\Pi_n} \sum_{i=1}^{n} |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}| < \infty \quad p.s. \qquad \Pi_n \text{ est une subdivision de } [0, T]$$

Proposition 1.10 *Un processus est à variation bornée si et seulement s'il est la différence de deux processus croissants.*

Proposition 1.11 *Si X est un processus à variation bornée à trajectoires continues, sa variation quadratique est nulle presque surement :$\langle X\rangle_T = 0$.*

Remarque 1.9 *Malheureusement les résultats que nous obtenons sont des convergence dans $\mathcal{L}^p$ ou des convergence presque sûre. A une modification presque sûre prêt, la limite ne dépend pas du type de convergence considéré mais ces convergences ne sont pas équivalentes. L'outil adéquat pour définir la variation quadratique est la convergence en probabilité mais cet outil est peu intuitif et difficile à manipuler.*

on a le tableau récapitulatif à retenir est le suivant :

	Variation totale	Variation quadratique
mouvement brownien	∞	T
Processus continu à var. bornée	$<\infty$	0

Théorème 1.3 *(Décomposition de Doob Meyer) Si M est une martingale continue de carré intégrable ($\mathbb{E}(M_t^2) < \infty$ pour tout t),alors $\langle M\rangle$ est l'unique processus croissant continu nul en 0 tel que $M^2 - \langle M\rangle$ soit une martingale.*

Théorème 1.4 *(Girsanov)*

Soit $(B_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien sur un espace (Ω, F, P) et (F_t) sa filtration canonique. Soit

$$L_t := \exp\left[\int_0^t \varphi_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \varphi_s^2 ds\right], t \leq T$$

où φ est un processus (F_t)-adapté (autrement dit $dL_t = L_t\varphi_t dB_t$). On suppose $E(L_T) = 1$. Soit $dQ\backslash F_T \overset{def}{=} L_T dP\backslash F_T$. Le processus B_t s'écrit $B_t := \tilde{B} + \int_0^t \varphi_s ds$ où $\tilde{B}$ est un Q-mouvement brownien.

Sous la condition de Novikov $\mathbb{E}_p\left(\exp \frac{1}{2}\int_0^T \varphi_s^2 ds\right) < \infty$, L_T *est une variable positive d'espérence 1 sous* P *et* L *est une* P*-martingale.*

Si L *n'est pas d'espérence 1,* L *est une sur-martingale d'espérence strictement plus petite que 1. Nous verrons plus loin pourquoi nous utilisons des martingales* L *de cette forme.*

Définition 1.12 *Un processus* $(\theta_t)_{0\leq t\leq T}$ *est appelé* **processus élémentaire** *s'il existe une subdivision* $0 = t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n = T$ *et un processus discret* $(\theta_i)_{0\leq i\leq n-1}$ *avec* θ_i *mesurable par rapport à* $\mathcal{F}_t$ *et dans* $\mathcal{L}^p(\Omega)$ *tel que :*

$$\theta_t(\omega) = \sum_{i=1}^{n-1} \theta_i(\omega)\mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(t)$$

On note $\mathcal{E}$ *l'ensemble des processus élémentaires qui est un sous espace de* $\mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}(\Omega, [0,T])$.

Définition 1.13 *Avec les même notations, l'intégrale stochastique entre* 0 *et* $t \leq T$ *d'un processus élémentaire* $\theta \in \mathcal{E}$ *est la variable aléatoire définie par :*

$$\int_0^t \theta_s dB_s := \sum_{i=0}^{k} \theta_i(B_{t_i+1} - B_{t_i}) + \theta_k(B_t - B_{t_k}) \quad sur\ ]t_k, t_{k+1}],$$

soit

$$\int_0^t \theta_s dB_s = \sum_{i=1}^{n-1} \theta_i(B_{t\wedge t_i+1} - B_{t\wedge t_i}).$$

On associe donc à $\theta \in \mathcal{E}$ *le processus* $(\int_0^t \theta_s dB_s)_{0\leq t\leq T}$.

Théorème 1.5 *Il existe une unique application linéaire* I *de* $\mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}(\Omega, [0,T])$ *dans* $\mathcal{M}([0,T])$ *qui coïncide avec l'intégrale stochastique sur l'ensemble des processus élémentaires* $\mathcal{E}$ *et vérifie la propriété d'isométrie :*

$$\mathbb{E}\left[I(\theta)_t^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right]$$

pour tout $t \in [0,T]$.

Proposition 1.12 *Sur* $\mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}(\Omega,[0,T])$ *l'intégrale stochastique satisfait les propriétés suivantes :*

(1) $\theta \to \int_0^t \theta_s dB_s$ *est linéaire*

(2) $t \to \int_0^t \theta_s dB_s$ *est continue p.s.*

(3)$(\int_0^t \theta_s dB_s)_{0\leq t\leq T}$ *est un processus* $\mathcal{F}$*-adapté.*

(4)$\mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s dB_s\right] = 0$ *et* $var(\int_0^t \theta_s dB_s) = \mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right]$.

(5) propriété d'Isométrie :

$$\left(\mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s dB_s\right]\right)^2 = \mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right]$$

(6) De manière plus générale, on a :

$$\mathbb{E}\left[\int_s^t \theta_u dB_u/\mathcal{F}_s\right] = 0 \text{ et } \mathbb{E}\left[(\int_s^t \theta_v dB_v/\mathcal{F}_s)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_s^t \theta_v^2 dv/\mathcal{F}_s\right]$$

(7) On a même le résultat plus général :

$$\mathbb{E}\left[(\int_s^t \theta_v dB_v)(\int_s^t \phi_v dB_v/\mathcal{F}_s)\right] = \mathbb{E}\left[\int_s^t \theta_v \phi_v dv/\mathcal{F}_s\right]$$

(8) $(\int_0^t \theta_s dB_s)_{0\leq t\leq T}$ *est une* $\mathcal{F}$*-martingale.*

(9)Le processus $(\int_0^t \theta_s dB_s)^2 - \int_0^t \theta_s^2 ds)_{0\leq t\leq T}$ *est une* $\mathcal{F}$*-martingale.*

Historiquement : On peut se dire qu'une petite variation du mouvement brownien dB_t équivaut à une variation en $\sqrt{dt}$ car sa variation quadratique est en dt et que l'on considère des convergences en norme quadratique.

$$dB_t \sim \sqrt{dt} \Longrightarrow (dB_t)^2 \sim dt$$

Donc, les termes en dB_t^2 ne sont pas négligeables dans les développements de Taylor et l'on garde un terme en plus. La formulation de ce résultat est la formule d'Ito. De manière moins heuristique, on peut retenir :

$$dB_t \sim \mathcal{N}(0, dt)$$

1.3 Formule d'Itô

La formule de Itô

La formule de Itô permet de déterminer de manière générale l'effet d'un changement de variables sur une différentielle stochastique. Elle prend la forme suivante

Définition 1.14 *(La formule de Itô) Si $X = (X(t))_{t\geq 0}$ est un processus d'Itô :*

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t b(s)dB(s),$$

et f une fonction de classe $C^2(\mathbb{R})$ alors on a

$$f(X(t)) = f(X(0)) + \int_0^t f'(X(s))dX(s) + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X(s))d\langle X, X\rangle(s)$$

où, pour définition $\langle X, X\rangle(t) = \int_0^t b^2(s)d(s)$, et

$$\int_0^t f'(X(s))dX(s) = \int_0^t f'(X(s))a(s)ds + \int_0^t f'(X(s))b(s)dB(s).$$

De même, si $(t,s) \to f(t,s)$ est une fonction deux fois différentiables en x et deux fois différentiables en t, ces dérivées étant continues en (t,s), on a

$$f(t, X(t)) = f(0, X(0)) + \int_0^t f'_s(s, X(s))ds + \int_0^t f'_x(s, X(s))dX(s) + 1/2\int_0^t f''_{xx}(s, X(s))d\langle X, X\rangle(s).$$

Proposition 1.13 *(Formule d'intégration par parties)*
Soient $X = (X_t)_{t\geq 0}$ et $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ est un processus d'Itô :

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t b(s)dB(s),$$

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t \alpha(s)ds + \int_0^t \beta(s)dB(s)$$

alors

$$Y(t)X(t) = Y(0)X(0) + \int_0^t X(s)dY(s) + \int_0^t Y(t)dX(s) + \langle X, Y\rangle (s)$$

Avec la convention $\langle X, Y\rangle (t) = \int_0^t b(s)\beta(s)ds$.

Chapitre 2

unicité des équations différentielles stochastiques cas Holder :

2.1 unicité des équations différentielles stochastiques cas lipschitzienne :

L'objectif essentiel de ce chapitre est de diffuser les principes de bases pour la résolution des équations différentielles stochastiques et d'étudier le problème d'existence et d'unicité de leur Solution. Considéré comme un thème très vaste en pleine effervescence et évolution rapide, nous serons très loin de son exhaustivité. Nous allons, donc, rappeler les définitions et propriétés fondamentales concernant les processus stochastiques ainsi que ceux des équations différentielles stochastiques .Nous renvoyons, enfin, les lecteurs concernés par ce domaine à plusieurs ouvrages de base relatifs aux processus stochastiques.

Une équation différentielle stochastique (E. D. S) est une généralisation de la notion d'équation ordinaire en présence d'un terme de bruit blanc. Les E. D. S permettent de modéliser des trajectoires aléatoires, tels que les cours de bourse et les mouvements de particules soumises à des phénomènes de diffusion.

Elles permettent aussi de traiter théoriquement ou numériquement des problèmes issus de la théorie des équations aux dérivées partielles.

Le but des équations différentielles stochastiques est de fournir un modèle mathématique pour une équation différentielle perturbée par un bruit aléatoire. Considérons

Une équation différentielle ordinaire de la forme

$$y\prime(t) = b(y(t))$$

Soit encore, sous forme différentielle

$$dy_t = b\left(y_t\right) dt$$

Une telle équation est utilisée pour décrire l'évolution d'un système physique. Si l'on prend en compte les perturbations aléatoires, on ajoute un terme de bruit,

qui sera de la forme σdB, où B désigne un mouvement brownien et σ est pour l'instant une constante qui correspond à l'intensité du bruit. On arrive à une équation différentielle "stochastique" de la forme

$$dy_t = b\left(y_t\right) dt + \sigma dB_t$$

Ou encore sous forme intégrale, la seule qui ait un sens mathématique,

$$y_t = y_0 + \int_0^t b\left(y_s\right) ds + \sigma B_t$$

On généralise cette équation en autorisant σ à dépendre de l'état du système à l'instant t :

$$dy_t = b(y_t)dt + \sigma(y_t)dB_t$$

Soit sous forme intégrale,

$$y_t = y_0 + \int_0^t b(y_s)\,ds + \int_0^t \sigma(y_s)\,dB_s$$

Remarquons que le sens donné à cette équation dépend de la théorie de l'intégrale stochastique développée dans le chapitre précédent. On généralise encore un peu en autorisant σ et b à dépendre du temps t, et en se plaçant dans un cadre vectoriel. Cela conduit à la définition suivante.

Définition 2.1 *Soient d et m des entiers positifs, et soient σ et b des fonctions mesurables localement bornées définies sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ et à valeurs respectivement dans $M_{d\times m}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^d$, où $M_{d\times m}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices $d\times m$ à coefficients réels. On note $\sigma = (\sigma_{ij})_{1\leq i\leq d, 1\leq j\leq m}$ et $b = (b_i)_{1\leq i\leq d}$.*

Une solution de l'équation :

$$dXt = \sigma(t, Xt)dB_t + b(t, X_t)dt \qquad (E(\sigma, b))$$

est la donnée de :

- *un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ satisfaisant les conditions habituelles ;*
- *sur cet espace un $(\mathcal{F}_t)$ -mouvement brownien dans $\mathbb{R}^m$, $B = (B^1, ..., B^m)$;*
- *un processus $(\mathcal{F}_t)$ -adapté continu $X = (X^1, ..., X^d)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, tel que :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(s, X_s)\,dB_s + \int_0^t b(s, X_s)\,ds$$

Soit encore, coordonnée par coordonnée, pour tout $i \in \{1, ..., d\}$,

$$X_t^i = X_0^i + \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma_{ij}(s, X_s)\,dB_s^j + \int_0^t b_i(s, X_s)\,ds$$

Lorsque de plus $X_0 = x \in \mathbb{R}^d$, on dira que le processus X est solution de $E_x(\sigma, b)$.

Il existe plusieurs notions d'existence et d'unicité pour les équations différentielles stochastiques.

Exemple 2.1 *Soit β un mouvement brownien réel issu de x. On pose*

$$B_t = \int_0^t sgn(\beta_s)\, d\beta_s$$

Avec la convention $sgn(u) = 1$ si $u > 0$ et $sgn(u) = -1$ si $u \leq 0$. Le théorème de Lévy nous dit que B est un mouvement brownien issu de 0. Comme $\beta_t = x + \int_0^t sgn(\beta_s)\, d\beta_s$ on voit qu'il y a existence faible pour l'EDS

$$dX_t = sgn(X_t)dB_t$$

Cette EDS possède la propriété d'unicité faible, car d'après le théorème de Lévy, toute solution issue de x est un mouvement brownien issu de x.

2.1.1 Existence et unicité :

Comme d'habitude pour les équations différentielles, les notions d'existence et d'unicité sont essentielles. Dans le contexte des EDS, il existe plusieurs types d'existence et d'unicité des EDS. Dans toute cette section, on considère l'EDS $E\,(\sigma, b)$.

Définition 2.2 *:(Existence, unicité des EDS)*

On dit pour l'équation $E\,(\sigma, b)$ qu'il y a :

· *Existence faible si pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ il existe une solution de $E_x(\sigma, b)$.*

· *Existence et unicité faibles si de plus toutes les solutions de $E_x(\sigma, b)$ ont même loi.*

· *Unicité trajectorielle si, l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ et le mouvement brownien B étant fixés, deux solutions X et X' telles que $X_0 = X'_0$ $\mathbb{P}$ p.s. sont indistinguables.*

On dit de plus qu'une solution X de $E_x(\sigma, b)$ est une solution forte si X est adapté par rapport à la filtration canonique de B. Il y a unicité forte pour $E\,(\sigma, b)$ si pour tout mouvement brownien B, deux solutions fortes associées à B sont indistinguables.

La solution d'une équation différentielle stochastique, si elle existe, n'est pas forcément unique et si elle l'est dans un sens, elle ne l'est pas forcément dans l'autre. quelques exemples pour illustrer ceci sont donnés suivis d'un théorème qui assure,sous certaines conditions sur b et σ,l' existence d'une unique solution forte.

Théorème (Yamada-Watanabe I).

Supposons que $E_x(\sigma, b)$ admette une solution faible et que toutes ses solutions soient indistinguables. Alors $E_x(\sigma, b)$ admet une unique solution forte.

Le théorème suivant est l'analogue du théorème de Cauchy-Lipschitz pour les EDO. Il fournit les conditions standards d'existence et d'unicité de solution forte :

2.1.2 théorème d'existence et d'unicité :

Théorème 2.1 ***(Existence et unicité)***

on suppose qu'il existe une constante K positive telle que pour tout $t \geq 0$, $x, y \in \mathbb{R}^d$.

1. Condition de lipschitz

$$|b(t\ ,x) - b(t,y)| + |\sigma(t\ ,x) - \sigma(t\ ,y)| \leq K\,|x - y|$$

2. Croissance linéaire

$$|b(t\ ,x)| \leq K\,(1 + |x|)\ \ ; \qquad |\sigma(t\ ,x)| \leq K\,(1 + |x|)$$

alors il y a unicité trajectorielle pour $E\ (\sigma, b)$.

De plus, pour tout espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ et tout $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-mouvement brownien, il existe pour chaque $x \in \mathbb{R}^d$,une unique solution forte pour $E_x(\sigma, b)$.

La démonstration de l'existence faible repose sur une méthode de point fixe, un peu trop longue à détailler ici. L'idée est de construire une suite X^n par :

$$X_t^n = x + \int_0^t b^i\left(s, X_s^{n-1}\right) ds + \sum_{j=1}^{m} \int_0^t \sigma_{ij}\left(s, X_s^{n-1}\right) dB_s^j,$$

Et de montrer la convergence de cette suite vers une solution.

Nous allons en revanche démontrer l'unicité trajectorielle, qui suffit pour avoir existence et unicité d'une solution forte, d'après le théorème de Yamada-Watanabe. On suppose pour simplifier que b et σ sont globalement lipschitziennes en espace, avec constante M. L'argument repose sur le lemme suivant qui est extrêmement utile :

Lemme 2.1 ***(Gronwall)*** *Soit $T > 0$ et g une fonction positive mesurable bornée sur $[0, T]$. On suppose qu'il existe des constantes $a \geq 0$, $b \geq 0$ telles que pour tout $t \in [0, T]$, on a :*

$$g(t) \leq a + b \int_0^t g(s)\, ds$$

Alors on a :

$$g(t) \leq ae^{bt}$$

pour tout $t \in [0, T]$.

Théorème 2.2 ***(Formule de Tanaka)*** *soit B_t un mouvement Brownien en dimension 1 alors presque surement on a :*

$$|B_t| = |B_0| + \int_0^t sign\,(B_s)\, dB_s + L_t.$$

où : $L_t = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \lambda\,(s \in [0, t] : B_s \in]-\varepsilon, \varepsilon[)$ *et λ est la mesure de lebesgue sur $\mathbb{R}$, L est le temps local de B en 0.*

2.2 propriétés du temps local :

une conséquence de la formule d'Itô-Meyer est le résultat significatif suivant :

Corollaire 2.1 ***(Formule du temps d'occupations)*** *soit X une semimartingale continue de temps local L_t^a. si g est borélienne bornée alors :*

$$\int_{-\infty}^{\infty} L_t^a g(a)\, da = \int_0^{\infty} g(X_s)\, d\langle X\rangle_s$$

Preuve. supposons g continue et positive alors notons f la fonction telle que $f'' = g$. la fonction f est convexe de classe C^2

Donc :on peut lui appliquer la formule d'Itô et la formule de Meyer-Itō ce qui donne l'identité cherchée.

Si : g est continue de sign quelconque.On pose $g = g^+ - g^-$ et on obtient le résultat par la linéarité et ce qui précède.

Enfin pour g boréliénne bornée :on utilise le fait que les fonctions continues constituent une classe monotone pour les fonctions boréliénnes bornées. ∎

Remarque 2.1 *Pour le MBS B cette formule donne :*

$$\int_{-\infty}^{\infty} L_t^a g(a)\, da = \int_0^{t} g(B_s)\, ds$$

Ainsi on voit que $L_t^a = L_t^a(B)$ peut être interprété comme le temps passé en a par le Brownien jusqu'au temps t .Plus précisément L_t^a est la densité de la loi du temps d'occupation au temps t :

$$v_t(A) = \int_0^t 1_{A(B_S)} ds = \int_A L_t^u du$$

Corollaire 2.2 *supposons que, pour chaque s et x,la matrice $\sigma(s,x)$ est inversible et que $(s,x) \to \sigma(s,x)^{-1}$ est bornée ;si $E(\sigma, 0)$ a une solution, puis pour b quelconque bornée mesurable, l'équation $E(\sigma, b)$ a une solution.Si unicité en loi est valable pour $E(\sigma, 0)$, elle est valable pour $E(\sigma, b)$.*

Corollaire 2.3 *si σ est une fonction bornée sur la ligne de telle sorte que $|\sigma| \geq \varepsilon > 0$ et b est une fonction bornée sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$,il y a existence et unicité en loi de l'EDS $E(\sigma, b)$.En outre ,si $\mathbb{P}_x$ est la loi de la solution telle que $X_0 = x$,pour toute $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,$x \to \mathbb{P}_x[X_t \in A]$ est mesurable.*

2.3 unicité faible mais pas trajectorielle :

Soit B un mouvement brownien standard

On pose

$$W_t = \int_0^t sgn\,(B_s)\,dB_s$$

On a alors :

$$B_t = \int_0^t sgn\,(B_s)\,dW_s$$

En effet :

$$\begin{aligned}\int_0^t sgn\,(B_s)\,dW_s &= \int_0^t sgn\,(B_s)\,sgn\,(B_s)\,dB_s \\ &= \int_0^t dB_s \\ &= B_t\end{aligned}$$

W est une martingale issue de 0 telle que $\langle W.W\rangle_t = t$ ainsi, par la caractérisation de Lévy (théorème), W est aussi un mouvement brownien.

On voit alors que B est solution de l'EDS :

$$dX_t = sgn\,(X_t)\,dW_t\ , \qquad X_0 = 0$$

On a l'unicité faible. Par la caractérisation Levy, toute solution doit être un mouvement brownien.

Par contre, on n'a pas d'unicité trajectorielle pour cette équation. en effet, B et $-B$ sont toutes les deux des solutions correspondant au même mouvement brownien.

ainsi, B n'est pas solution forte : par la formule de Tanaka, la filtration canonique de W coïncide avec la filtration canonique de $|B|$ qui est strictement plus petite que celle de B.

en effet, l'événement $\{B_t < 0\}$ appartient à $\mathcal{F}^{\,B}$ mais pas à $\mathcal{F}^{|B|}$.

Définition 2.3 *(i) On dit que l'EDS $E(\sigma, b)$ a la propriété d'unicité trajectorielle si, deux solutions X et $\widetilde{X}$ associées au même espace $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ et au même mouvement brownien B telles que $X_0 = \widetilde{X_0}$ p.s., sont indistinguables.*

(ii) Fixons un espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ (satisfaisant les conditions habituelles) et un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien B. On dit que X est une solution forte de $E\,(\sigma, b)$ si elle est adaptée par rapport à la filtration canonique de B.

Exemple 2.2 *Considérons l'EDS suivante :*

$$dX_t = sgn\,(X_t)\,dB_t$$

On a vu l'existence et unicité faible pour cette EDS dans l'Exemple 2.1 il n'y a en revanche pas d'unicité trajectorielle de cette EDS. En effet, si X est une solution de l'EDS avec $X_0 = 0$, alors $-X$ est aussi une solution (remarquons que $\int_0^t 1_{\{X_s=0\}}dB_s = 0$ car sa variation quadratique est nulle).

Cette EDS n'a pas de solution forte. Si X est une solution issue d'une valeur déterministe, on peut montrer que la filtration canonique de B coïncide avec celle de $|X|$, qui est strictement plus petite que celle de X.

Exemple 2.3 *Considérons l'EDS suivante :*

$$dX_t = \lambda X_t dB_t$$

Avec $\lambda \in \mathbb{R}$. D'après le Théorème ci-dessous il y a unicité trajectorielle , pour tout x, l'unique solution forte de $E_x\,(\sigma, b)$ est $X_t = xe^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t}$.

Le théorème suivant, que l'on admettra, relie les différentes notions d'existence et d'unicité.

Dans la pratique, le théorème d'existence lipschitzien est parfois insuffisant pour ce qui concerne le coefficient de diffusion. On peut cependant notablement améliorer ce théorème dans le cas réel :

2.4 Théorème de Yamada-Watanabe :

Les conditions du théorème d'existence et d'unicité ne sont pas optimales. Toshio YAMADA et Shinzo WATANABE ont montré qu'on peut les affaiblir dans le théorème suivant :

Théorème (Yamade-Watanabe II)

Soit d = m = 1

Supposons que b et σ sont à croissance linéaire, que b vérifie la condition de Lipschitz locale et $|\sigma(t\ ,x) - \sigma(t\ ,y)|^2 \leq \rho|x-y|$ pour tout $t \geq 0$, où ρ est une fonction borélienne de $]0, +\infty[$ dans lui-même telle que :

$$\int_{|z|<\epsilon} \frac{1}{\rho^2\,(z)} dz = +\infty \qquad\qquad \forall\epsilon > 0$$

Alors $E_x\,(\sigma\ ,b)$ admet une unique solution forte.

En effet, les conditions du théorème de Yamada et Watanabe sont plus faible que la condition de Lipschitz .Si σ est lipschitzienne, alors on a pour tous x et y réels, si

$$|\sigma(x) - \sigma(y)| \leq c|x-y|$$

Alors

$$|\sigma(x) - \sigma(y)|^2 \leq c^2|x-y|^2$$

Il suffit alors de prendre $\rho\,(x) = x^2$. On a bien

$$\int_{|z|<\epsilon} \frac{1}{\rho^2\,(z)} dz = +\infty \qquad\qquad \forall\epsilon > 0$$

Une classe très importante d'EDS sont les équations de Bessel :

$$X_t = x + 2\int_0^t \sqrt{X_s}\, dW_s + \delta t \tag{2.1}$$

Sur $\mathbb{R}$, où W est un Brownien réel et $x, \delta > 0$.Par le deuxième théorème de Yamada-Watanabe appliqué avec la fonction $\rho(x) = \sqrt{x}$, on voit que (2.1) admet une unique solution forte. De plus, on peut montrer que cette solution est toujours positive et de durée de vie infinie. Cependant, le théorème d'existence lipschitzien n'aurait pas permis d'obtenir ce résultat, car $\sigma(x) = \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne en zéro.

Le processus X est un processus de Bessel carré de dimension δ. Nous reviendrons plus tard sur les processus de Bessel et sur leurs liens avec le mouvement brownien.

Exemple 2.4 *Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère l'EDS*

$$dX_t = aX_t dt + \sqrt{X_t} dB_t, \qquad X_0 = 0$$

$f(x) = sqrt(x)$ n'est pas lipschitzienne mais elle vérifie la condition du théorème de Yamada et Watanabe.

La solution (unique) de cette équation est appelée processus de Feller.

Proposition 2.1 *si X^1 et X^2 sont deux solutions de $E(\sigma, b)$ de telle sorte que $X_0^1 = X_0^2$ p.s, puis $X^1 \vee X^2$ est une solution si et seulement si $L^0(X^1 - X^2)$ est identiquement nulle.*

Preuve. par la formule de tanaka,

$$\begin{aligned} X_t^1 \vee X_t^2 &= X_t^1 + (X_t^2 - X_t^1)^+ \\ &= X_t^1 + \int_0^t 1_{(X_S^2 > X_S^1)} d\left(X^2 - X^1\right)_s + \frac{1}{2} L_t^0 \left(X^2 - X^1\right), \end{aligned}$$

et le remplaement $X^i, i = 1, 2$ par $X_0^i + \int_0^\cdot \sigma(s, X_s^i)\, dB_s + \int_0^\cdot b(s, X_s^i)\, ds$,il est facile de vérifie que :

$$X_t^1 \vee X_t^2 = \left(X_0^1 \vee X_0^2\right) + \int_0^t \sigma\left(s, X_s^1 \vee X_s^2\right) dB_s + \int_0^t b\left(s, X_s^1 \vee X_s^2\right) ds + \frac{1}{2} L_t^0\left(X^2 - X^1\right)$$

qui établit notre proposition.

Le résultat suivant est la clé de cette section. ■

.

Proposition 2.2 *si l'unicité en loi est valable pour $E(\sigma, b)$ et si $L^0\left(X^1 - X^2\right) = 0$ pour tout couple $\left(X^1, X^2\right)$ de solutions telles que $X_0^1 = X_0^2$ p.s,on a l'unicité trajectorielle pour $E(\sigma, b)$.*

Preuve. par la proposition précedente, si X^1 et X^2 sont deux solutions,$X^1 \vee X^2$ est également une solution ;mais X^1 et $X^1 \vee X^2$ ne peuvent avoir La même loi,sauf si elles sont égales,ce qui achève

la démonstration.

le lemme suivant est crucial de vérifier ci-dessus sur le temp locale.dans la suite ρ sera toujours pour une fonction borel de $]0, \infty[$ dans lui-même telle que $\int_{0+} \frac{da}{\rho(a)} = +\infty$. ■

Lemme 2.2 *si X est un semimartingale continu telle que,il existe $\epsilon > 0$ pour tout t :*

$$A_t = \int_0^t 1_{(0<X_S\leq\epsilon)} \rho\left(X_s\right)^{-1} d\langle X, X\rangle_s < \infty \qquad p.s.,$$

alors $L^0(X) = 0$.

Preuve. posons $t > 0$ par la formule de temps d'occupations

$$A_t = \int_0^\epsilon \rho(a)^{-1} L_t^a da$$

si $L_t^0(X)$ ne s'annule pas $p.s$,alors quand $L_t^a(X)$ converge vers $L_t^0(X)$ lorsque a tend vers à zéro , nous aurons $A_t = \infty$ avec une probabilité positive,ce qui est une contradiction. ■

Corollaire 2.4 *soit $b_i, i = 1, 2$ deux fonctions de borel ;si*

$$|\sigma(s,x) - \sigma(s,y)|^2 \leq \rho(|x-y|)$$

pour chaque s, x, y et si $X^i, i = 1, 2$, sont des solutions aux $E(\sigma, b)$ par rapport à la même M.B, alors $L^0(X^1 - X^2) = 0$.

Preuve. on a

$$X_t^1 - X_t^2 = X_0^1 - X_0^2 + \int_0^t \left(\sigma\left(s, X_s^1\right) - \sigma\left(s, X_s^2\right)\right) dB_s + \int_0^t \left(b_1\left(\sigma, X_s^1\right) - b_2\left(s, X_s^2\right)\right) ds$$

Et donc

$$\int_0^t \rho\left(X_s^1 - X_s^2\right)^{-1} 1_{\left(X_s^1 > X_s^2\right)} d\left\langle X^1 - X^2, X^1 - X^2\right\rangle_s = \int_0^t \rho\left(X_s^1 - X_s^2\right)^{-1} \left(\sigma\left(s, X_s^1\right) - \sigma\left(s, X_s^2\right)\right)^2 1_($$

nous pouvons maintenant énoncer. ■

Théorème 2.3 *on a l'unicité trajectorielle pour l'EDS $E(\sigma, b)$ dans chacun des cas suivants :*

i) $|\sigma(x) - \sigma(y)|^2 \leq \rho(|x-y|)$, $|\sigma| \geq \epsilon > 0$ *et b et σ sont bornées.*

ii) $|\sigma(s,x) - \sigma(s,y)|^2 \leq \rho(|x-y|)$ *et b est lipschitz continu i.e.,pour chaque H compact et t il y a une constante K_t,tel que pour tout x, y dans H et $s \leq t$.*

$$|b(s,x) - b(s,y)| \leq K_t(|x-y|)$$

iii)$|\sigma(x) - \sigma(y)|^2 \leq |f(x) - (y)|$ *où f est croissante et bornée, $|\sigma| \geq \epsilon \succ 0$ et b est borné.*

Remarque 2.2 *nous insistons sur le fait que dans le cas i)et (iii) σ ne dépend pas de s,ce qui n'est pas le cas pour (ii) .*

Preuve. en utilisant le corollaire (2.3),comme $|\sigma| \geq \epsilon$,l'unicité en loi est valable pour $E(\sigma, b)$.

Le résultat découle donc de la proposition (2.2) par corollaire (2.4) .

ii) soit X^1et X^2 deux solutions en ce qui concerne M.B et de telle sorte que $X_0^1 = X_0^2$ $p.s.$par le corollaire précédent,

$$|X_t^1 - X_t^2| = \int_0^t sgn\left(X_s^1 - X_s^2\right)\, d\left(X_s^1 - X_s^2\right)$$

L'hypothèse faite sur σ et b implique que nous pouvons trouve une suite les temps d'arrêt convergeant vers ∞,telle que,si $Y^i = (X^i)^{T_n}$,$i = 1, 2$,pour n fixé,alors $\sigma\left(s, Y_s^i\right)$ est bornée et

$$\left|b\left(s, Y_s^1\right) - b\left(s, Y_s^2\right)\right| \leq C_t\left(\left|Y_s^1 - Y_s^2\right|\right)$$

pour $s \leq t$ et une constante C_t.par conséquent,

$$|Y_t^1 - Y_t^2| - \int_0^t sgn\left(Y_s^1 - Y_s^2\right)\left(b\left(s, Y_s^1\right) - b\left(s, Y_s^2\right)\right) ds$$

est une martingale nulle en 0 et on a :

$$E\left[\left|Y_t^1 - Y_t^2\right|\right] \leq C_t \int_0^t E\left[\left|Y_s^1 - Y_s^2\right|\right] ds$$

En utilisant le lemme de Gronwall,la preuve maintenant facile à remplir.

iii)Par corollaire(2.3) à nouveau,la condition $\sigma \geq \varepsilon$ implique l'unicité en loi pour $E(\sigma, b)$;nous allons prouver $iii)$ en appliquant corollaire(2.4) avec $\rho(x) = x$ et de la proposition (2.2),à cette

fin,nous prenons $\delta > 0$ et considérons :

$$
\begin{aligned}
& E\left[\int_0^t \left(X_s^1 - X_s^2\right)^{-1} 1_{(X_s^1 - X_s^2 > \delta)} d\left\langle X^1 - X^2, X_s^1 - X_s^2\right\rangle_s\right] \\
\leq \ & E\left[\int_0^t \left(f\left(X_s^1\right) - f\left(X_s^2\right)\right)\left(X_s^1 - X_s^2\right)^{-1} 1_{(X_s^1 - X_s^2 \succ \delta)} ds\right] \\
= \ & K(f)_t
\end{aligned}
$$

nous choisissons maintenant une suite $\{f_n\}$ de une suite de fonctions de classe C^1 uniformément bornées et croissantes telle que $\lim_n f_n(x) = f(x)$ pour tout x qui est pas un point de discontinuité de f.

L'ensemble D des points de discontinuité de f est dénombrable;par la formule des temps d'occupations,l'ensemble des temps s de telle sorte que X_s^1 ou X_s^2 appartient à D est $p.s$ de mesure de

lebesgue nulle,et par conséquent

$$
\lim_n \left(f_n\left(X_s^1\right) - f\left(X_s^2\right)\right) = f\left(X_s^1\right) - f\left(X_s^2\right)
$$

Pour presque tout $s \leq t$ .il suit ça $K(f)_t = \lim_n K(f_n)_t$.

Pour $u \in [0,1]$, $Z^u = X^2 + u\left(X^1 - X^2\right)$;nous avons

$$
\begin{aligned}
K(f_n)_t &= E\left[\int_0^t \left(\int_0^1 f_n'\left(Z_s^u\right) du\right) 1_{(X_S^1 - X_S^2 > \delta)} ds\right] \\
&\leq \int_0^t E\left[\int_0^t f_n'\left(Z_s^u\right) ds\right] du \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^1 E\left[\int_R f_n'(a) L_t^a\left(Z^u\right) da\right] du
\end{aligned}
$$

car $Z_t^u(\omega) = Z_0^u(\omega) + \int_0^t \sigma^u(s,\omega) dB_s(\omega) + \int_0^t b^u(s,\omega) ds$ où $\sigma^u \geq \varepsilon$,de plus ,$|\sigma^u| + |b^u| \leq M$ pour une constante M ;par une simple application de la formule de tanaka

$$\sup_{a,u} E\left[L_t^a\left(Z^u\right)\right] = C < \infty$$

et il en résulte que

$$K\left(f_n\right)_t \leq \varepsilon^{-2} C \sup_n ||f_n||$$

$\blacksquare$

d'où $K\left(f\right)_t$ est bornée par une constante indépendante de δ ;pour δ tend vers zéro,on voit que l'hypothèse de lemme (2.2) est satisfaite pour $\rho\left(x\right) = x$ à qui achève la preuve.

Chapitre 3

Quelques applications des EDS en finance et le processus de Bessel

Dans ce chapitre,on introduira quelques modèles des EDS en finance comme (le modèle de Black & Scholes,deVasicek et Cox-Ingersoll-Ross) ;avec le processus de Bessel.

3.1 Modèle de Black & Scholes

Le premier Modèle d'évolution des actif financiers a été proposé par Louis Bachelier dans sa thèse en 1900. Les actifs risqués supposés gaussiens et pouvaient donc prendre des valeurs négatives. Pour remédier à ce défaut, le modèle retenu par la suite est un modèle rendant les actifs risqués log-normaux, afin de s'assurer qu'ils restent toujours positifs. Ce modéle porte le nom de modèle de Black et Scholes. En effet, en 1973, Fisher Black, Robert Merton et Myron Scholes proposent l'idée de définir le prix d'un produit dérivé comme celui de son portefeuille de couverture et l'appliquent à ce modèle log-normal. Ils ont obtenu le prix Nobel d'économie en 1997 pour ces travaux ce qui n'a pas empêché, leur fond d'investissement "long Terme Capital Marketh" de faire faillite en 1998.

3.1.1 Hypothèses sur le marché

1. Les actifs sont divisibles à l'infini ;
2. Le marché est liquide : on peut acheter ou vendre à tout instant ;
3. On peut emprunter et vendre à découvert ;
4. Les échanges ont lieu sans coût de transaction ;
5. On peut emprunter et prêter au même taux constant r.

3.1.2 Modélisation probabiliste du marché

Pour modéliser l'incertitude sur le marché, nous considérons un espace de probabilité complet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, muni d'un mouvement brownien standard B. Nous supposons que notre marché est constitué d'un actif sans risque S^0 et d'un actif risqué S sur la période $[0, T]$.

$\star$ **Actif sans risque.** Dans le modèle discret à n périodes, lorsque l'on discrétise l'intervalle $[0, T]$ en n intervalles de longueurr T/n, que l'on considère un taux sans risque r_n de la forme rT/n, la valeur de l'actif sans risque à l'instant pT/n, a la forme suivante : $(1 + rT/n)^p$.

Donc, lorsque n tend vers l'infini, S_t^0 se comporte comme e^{rt}. La dynamique retenue pour l'évaluation de l'actif sans risque en temps continu est donc naturellement :

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt \text{ et } S_0^0 = 1 \Longrightarrow S_t^0 = e^{rt} \ t \in [0, T].$$

$\star$ **Actif risque.** Il suit la dynamique donnée par l'EDS de Black & Scholes

$$S_t = S_0 + \int_0^t S_u(\mu du + \sigma dB_u), \ t \in [0, T],$$

Où S_0,μ et σ sont des constantes avec $\sigma > 0$ et $S_0 > 0$. Ce modèle est le plus simple que l'on puisse imaginer pour modéliser l'évolution d'un actif risqué en temps continu tout en imposant qu'il soit positif. Comme nous allons le voir, cela revient à supposer que les rendements de l'actif sont normaux. Les coefficients μ et σ sont respectivement appelés tendance et volatilité de l'actif S.

Pour tout $t \in [0, T]$, la tribu $\mathcal{F}_t$ représente l'information disponible à la date t, l'aléa provient seulement de S, donc

$$\mathcal{F}_r := \sigma(S_t, r \leqslant t)$$

La mesure de probabilité $\mathbb{P}$ est alors appelée **probabilité historique.**

Pour s'assurer qu'un tel modèle est bien défini, il nous faut résoudre l'EDS de Black & Scholes.

Théorème 3.1 *L'EDS admet une unique solution qui est donnée par :*

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t} \quad \mathbb{P}\text{-}p.s.$$

Pour tout $t \in [0, T]$.

Démonstration. Vérifions tout d'abord que la solution proposée vérifie l'EDS en appliquant la formule d'Ito à $f(t, B_t)$ avec

$$f : (t, x) \longrightarrow S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma x}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} df(t, B_t) &= f_x(t, B_t) dB_t + f_t(t, B_t) dt + \frac{1}{2} f_{xx}(t, B_t) d\langle B \rangle_t \\ &= \sigma f(t, B_t) dB_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2}) f(t, B_t) dt + \frac{\sigma^2}{2}) f(t, B_t) dt \end{aligned}$$

Ce qui se réécrit donc :

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t)$$

Donc S, processus $\mathcal{F}$-adapté est bien solution de l'EDS. Le caractère Lipschitz des coefficients de l'EDS nous assure l'unicité de la solution, mais, dans notre cas, nous pouvons également la démontrer : soit Y un processus solution de l'EDS. Remarquons que S_t ne s'annule jamais si bien que l'on peut appliquer la formule d'Ito pour déterminer la dynamique de$\frac{1}{S_t}$:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{S_t}\right) &= -\frac{1}{S_t^2}+\frac{1}{2}\frac{2}{S_t^3}d\left\langle S\right\rangle_t \\ &= -\frac{1}{S_t}(\mu dt+\sigma dB_t)+\frac{1}{S_t}\sigma^2 dt \end{aligned}$$

Donc la formule d'intégration par partie donne la dynamique de Y_t/S_t :

$$\begin{aligned} d\left(\frac{Y_t}{S_t}\right) &= Y_t d\left(\frac{1}{S_t}\right)+\frac{1}{S_t}dY_t+d\left\langle\frac{1}{S_t},Y\right\rangle_t \\ &= \frac{Y_t}{S_t}((\sigma^2-\mu)dt-\sigma dB_t)+\frac{Y_t}{S_t}(\mu dt+\sigma dB_t)-\sigma Y_t\frac{\sigma}{S_t}dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

Remarquez que l'on aurait pu obtenir directement le résultat en appliquant la formule d'Ito à la fonction $(y,s)\rightarrow y/s$. On a donc :

$$\frac{Y_t}{S_t}=\frac{Y_0}{S_0}+\int_0^t 0dB_s=1$$

Donc les processus Y et S sont égaux presque surement et l'EDS admet une unique solution.

3.1.3 Formule de Black Scholes

Le prix ent d'une option Européenne de payoff $h(S_T)$ est de la forme $v(t,S_t)$ avec :

$$v(t,S_t)=e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[h(S_T)\backslash\mathcal{F}_t]$$

et de plus la fonction v est solution de l'EDP :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v_{xx}(t,x) + rxv_x(t,x) + v_t(t,x) - rv(t,x) = 0 \quad \text{et } v(T,x) = h(x)$$

Dans le cadre du modèle de Black Scholes, pour certains pay-offs, il existe des formules explicites qui donnent leur prix en t. C'est en particulier le cas du Call et du Put.

Proposition 3.1 *Dans le cadre du modèle de Black-Scholes, le prix d'un call de maturité T et de strike K est :*

$$C_t = S_t\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(d_2), \; t \in [0,T]$$

Avec N la fonction de répartition d'une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, d_1 et d_2 donnés par :

$$d_1 := \frac{\ln\left(\frac{S_t}{k}\right) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad et \quad d_2 := d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

La formule de Parité Call Put s'écrit :

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}, t \in [0,T]$$

Et donc le prix du Put est donné par :

$$P_t = Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(d_2) - S_t\mathcal{N}(-d_1), t \in [0;T]$$

Démonstration.

Prix du Call : Le prix du call en t est donné par :
$$C_t = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[(S_T - K)^+ \backslash \mathcal{F}_t] = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left[\left(S_t e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma(\hat{B}_T-\hat{B}_t)} - K\right)^+ \backslash \mathcal{F}_t\right]$$

Donc, comme nous l'avons déjà vu $C_t = v(t, S_t)$ avec

$$\begin{aligned} v(t,x) &= e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left[\left(xe^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma(\hat{B}_T-\hat{B}_t)} - K\right)^+\right] \\ &= x\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left[e^{\sigma(\hat{B}_T-\hat{B}_t)-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)} 1_\varepsilon\right] - Ke^{-r(T-t)}\hat{\mathbb{P}}(\varepsilon) \end{aligned}$$

Avec ε le région d'exercice donnée par :

$$\varepsilon = \left\{xe^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma(\hat{B}_T-\hat{B}_t)} > K\right\} = \left\{\frac{\hat{B}_t - \hat{B}_T}{\sqrt{T-t}} < \frac{\ln\left(\frac{x}{k}\right) + (r+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right\}$$

Introduisons, la probabilité $\mathbb{P}^*$ équivalente à $\mathbb{P}$ définie par :

$$\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}\Big|_{\mathcal{F}_t} = Z_T := e^{\sigma\hat{B}_T - \frac{\sigma^2}{2}T}$$

Alors, comme ε est un évènement indépendant de $\mathcal{F}_t$, on a :

$$\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left[1_\varepsilon\frac{Z_T}{Z_t}\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}\left[1_\varepsilon\frac{1}{Z_t}\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}\left[1_\varepsilon\right]\mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}\left[\frac{1}{Z_t}\right] = \mathbb{P}^*(\varepsilon)$$

Par conséquent, $v(t,x)$ se réécrit :

$$v(t,x) = x\mathbb{P}^*(\varepsilon) - Ke^{-r(T-t)}\hat{\mathbb{P}}(\varepsilon)$$

D'après le théorème de Girsanov, le processus B^* défini par $B_t^* := \hat{B}_t - \sigma t$ est un mouvement brownien sous $\mathbb{P}^*$. Or ε se réécrit :

$$\varepsilon = \left\{\frac{\hat{B}_t - \hat{B}_T}{\sqrt{T-t}} < \frac{\ln\left(\frac{x}{k}\right) + (r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right\} = \left\{\frac{B_t^* - B_T^*}{\sqrt{T-t}} < \frac{\ln\left(\frac{x}{k}\right) + (r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right\}$$

Donc, comme $\frac{\hat{B}_t - \hat{B}_T}{\sqrt{T-t}}$ et $\frac{B_t^* - B_T^*}{\sqrt{T-t}}$ suivent respectivement une loi $\mathcal{N}(0,1)$ sous $\hat{\mathbb{P}}$ et $\mathbb{P}^*$, le prix du call se réécrit :

$$C_t = v(t, S_t) = S_t\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(d_2).$$

Prix du Put : Appliquez la formule de parité Call Put et remarquez que par symétrie $N(x) + N(-x) = 1$.

Remarque 3.1 *Le prix d'un call en t est de la forme $C(T-t,\sigma,S_t,r,K)$. Et vérifie la relation d'homogénéité :*

$$C(T-t,\sigma,S_t,r,\lambda K) = \lambda C(T-t,\sigma,S_t,r,K).$$

3.2 Le modèle de Vasicek

Dans ce modèle, on suppose que le processus $r(t)$ vérifie :

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma dB_t \tag{3.1}$$

Où a, b, σ sont des constantes positives.

On a aussi :

$$dr(t) = a(b^* - r(t))dt + \sigma d\tilde{B}_t \tag{3.2}$$

Où $b^* = b - \lambda\sigma/a$ et $\tilde{B}_t = B_t + \lambda t$. Avec $\lambda \in \mathbb{R}$ avant de calculer le prix des obligations selon ce modèle, donnons quelques conséquences de l'équation (3.1) Si on pose :

$$X_t = r(t) - b,$$

On voit que (X_t) est solution de l'équation différentielle stochastique :

$$dX_t = -aX_t dt + \sigma dB_t,$$

Ce qui signifie que (X_t) est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck

On en déduit que $r(t)$ peut s'écrire :

$$r(t) = r(0)e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dB_s \tag{3.3}$$

Et que $r(t)$ suit une loi normale dont la moyenne est donnée par $\mathbb{E}(r(t) = r(0)e^{-at} + b(1-e^{-at})$ et la variance par $Var(r(t)) = \sigma^2(\frac{1-e^{-at}}{2a})$. Cela entraîne que $\mathbb{P}(r(t) < 0) > 0$, ce qui pour la pratique n'est pas très satisfaisant (sauf si cette probabilité reste très faible). Noter que, quand t tend vers l'infini, $r(t)$ converge en loi vers une gaussienne de moyenne b et de variance $\frac{\sigma^2}{2a}$.

Pour calculer le prix des zéro-coupons, on se place sous la probabilité $\mathbb{P}^*$ et on utilise l'équation (3.2) .

$$\begin{aligned} P(t,T) &= \mathbb{E}^*(e^{-\int_t^T r(s)ds}/\mathcal{F}_t) \\ &= e^{-b^*(T-t)}\mathbb{E}^*(e^{-\int_t^T X_s^* ds}/\mathcal{F}_t) \end{aligned} \tag{3.4}$$

En posant : $X_t^* = r(t) - b^*$. Comme (X_t^*) est solution de l'équation de diffusion à coefficients indépendants du temps

$$dX_t = -aX_t dt + \sigma d\tilde{B}_t, \tag{3.5}$$

On peut écrire :

$$\mathbb{E}^*(e^{-\int_t^T X_s^* ds}/\mathcal{F}_t) = F(T-t, X_t^*) = F(T-t, r(t) - b^*) \tag{3.6}$$

Où F est la fonction définie par : $F(\theta, x) = \mathbb{E}^*(e^{-\int_0^\theta X_s^x ds})$, (X_t^x) étant l'unique solution de l'équation (3.5) qui vérifie : $X_0^x = x$.

Le calcul de $F(\theta, x)$ peut se faire complètement. En effet, on sait que le processus (X_t^x) est gaussien, à trajectoires continues. Il en résulte que $(\int_0^\theta X_s^x ds)$ est une gaussienne, puisque l'intégrale est limite de sommes de Riemann, qui sont gaussiennes. On a donc,

$$\mathbb{E}^*(e^{-\int_0^\theta X_s^x ds}) = e^{-\mathbb{E}^*(\int_0^\theta X_s^x ds) + \frac{1}{2}Var(\int_0^\theta X_s^x ds)}.$$

De l'égalité : $\mathbb{E}^*(X_s^x) = xe^{-as}$, on déduit :

$$\mathbb{E}^*(\int_0^\theta X_s^x ds) = x\frac{1-e^{-a\theta}}{a}.$$

Pour le calcul de la variance, on écrit :

$$\begin{aligned} Var(\int_0^\theta X_s^x ds) &= Cov(\int_0^\theta X_s^x ds, \int_0^\theta X_s^x ds) \\ &= \int_0^\theta \int_0^\theta Cov(X_t^x, X_u^x) du dt. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Puisque $X_t^x = xe^{-at} + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} d\tilde{B}_s$, on a :

$$\begin{aligned} Cov(X_t^x, X_u^x) &= \sigma^2 e^{-a(t+u)} \mathbb{E}^*(\int_0^t e^{as} d\tilde{B}_s \int_0^u e^{as} d\tilde{B}_s) \\ &= \sigma^2 e^{-a(t+u)} \int_0^{t\wedge u} e^{2as} ds \\ &= \sigma^2 e^{-a(t+u)} \frac{(e^{2a(t\wedge u)} - 1)}{2a} \end{aligned}$$

Et, en reportant dans l'égalité (3.7),

$$Var(\int_0^\theta X_s^x ds) = \frac{\sigma^2\theta}{a^2} - \frac{\sigma^2}{a^3}(1-e^{-a\theta}) - \frac{\sigma^2}{2a^3}(1-e^{-a\theta})^2.$$

En revenant aux équations (3.4) et (3.6), on obtient la formule suivante :

$$P(t,T) = \exp\left[-(T-t)R(T-r(t))\right].$$

Où $R(T-r(t))$, qui s'interprète comme le taux d'intérêt moyen sur la période $[t,T]$, est donné par la formule :

$$R(\theta, r) = R_\infty - \frac{1}{a^\theta}\left[(R_\infty - r)(1-e^{-a\theta}) - \frac{\sigma^2}{4a^2}(1-e^{-a\theta})^2\right]$$

Avec $R_\infty = \lim_{\theta\to\infty} R(\theta, r) = b^* - \frac{\sigma^2}{2a^2}$. Le taux R_∞ s'interprète comme un taux à long terme ; notons qu'il ne dépend pas du "taux instantané spot"r. Cette dernière propriété est considérée comme un défaut du modèle par les financiers.

Remarque 3.2 *Dans la pratique, se pose le problème de l'estimation des paramètres et du choix de la valeur de r. Pour r on choisira un taux court (par exemple le taux au jour le jour ou "jj"), on pourra alors calculer les paramètres b, a, σ par des méthodes statistiques sur les données historiques du taux instantané. Puis on détermine λ à partir des données de marché en inversant la formule de Vasicek. En fait les praticiens déterminent souvent les paramètres, y compris r, en ajustant au mieux la formule de Vasicek sur les données de marché.*

3.3 Le modèle de Cox-Ingersoll-Ross

Cox, Ingersoll et Ross proposent de modéliser l'évolution du taux instantané par l'équation suivante :

$$dr(t) = (a - br(t))\, dt + \sigma\sqrt{r(t)} dB_t$$

Avec σ et a positifs, $b \in \mathbb{R}$, le processus $(q(t))$ étant pris de la forme :

$q(t) = -\alpha\sqrt{r(t)}$,avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Notons qu'on ne peut pas appliquer à cette équation le théorème d'existence et d'unicité que nous avons donné au chapitre 2, puisque la fonction racine carrée n'est définie que sur $\mathbb{R}_+$ et n'est pas lipschitzienne. Cependant, grâce au caractère hölderien de la fonction racine carrée,

On peut montrer le résultat suivant.

Théorème 3.2 *On suppose que (B_t) est un mouvement brownien standard défini sur $[0, \infty[$.Pour tout réel $x \geq 0$, il existe un unique processus continu adapté (X_t), à valeurs dans $\mathbb{R}_+$,*

vérifiant $X_0 = x$ et

$$dX_t = (a - bX_t)\, dt + \sigma\sqrt{X_t} dB_t \qquad sur\ [0, \infty[\tag{3.8}$$

Pour permettre l'étude du modèle de Cox-Ingersoll-Ross, nous allons donner quelques propriétés de cette équation.

Nous noterons (X_t^x) *la solution de (3.8) issue de* x *et* τ_0^x *le temps d'arrêt défini par :*

$$\tau_0^x = \inf \{t \geq 0 | X_t^x = 0\}$$

Avec ,comme d'habitude, $\inf \emptyset = \infty$.

1. Si $a \geq \sigma^2/2$*,on a* $\mathbb{P}(\tau_0^x = \infty) = 1$*, pour tout* $x > 0$.

2. Si $0 \leq a < \sigma^2/2$ *et* $b \geq 0$*,on a* $\mathbb{P}(\tau_0^x < \infty) = 1$*, pour tout* $x > 0$.

3. Si $0 \leq a < \sigma^2/2$ *et* $b < 0$*,on a* $\mathbb{P}(\tau_0^x < \infty) \in]0, 1[$*, pour tout* $x > 0$.

La proposition suivante, qui permet de caractériser la loi du couple $\left(X_t^x, \int_0^t X_s^x ds\right)$*, est la clé de tous les calculs de prix dans le modèle de Cox-Ingersoll-Ross.*

Proposition 3.2 *Pour tous réels positifs* λ *et* μ *,on a :*

$$\mathbb{E}\left(e^{-\lambda X_t^x} e^{-\mu \int_0^t X_s^x ds}\right) = e^{-a\phi_{\lambda,\mu}(t)} e^{-x\psi_{\lambda,\mu}(t)},$$

Où les fonctions $\phi_{\lambda,\mu}$ *et* $\psi_{\lambda,\mu}$ *sont données par :*

$$\phi_{\lambda,\mu}(t) = -\frac{2}{\sigma^2} \log \left(\frac{2\gamma e^{\frac{t(\gamma+b)}{2}}}{\sigma^2 \lambda (e^{\gamma t} - 1) + \gamma - b + e^{\gamma t}(\gamma + b)} \right)$$

Et

$$\psi_{\lambda,\mu}(t) = \frac{\lambda (\gamma + b + e^{\gamma t}(\gamma - b)) + 2\mu (e^{\gamma t} - 1)}{\sigma^2 \lambda (e^{\gamma t} - 1) + \gamma - b + e^{\gamma t}(\gamma + b)}$$

Avec $\gamma = \sqrt{b^2 + 2\sigma^2 \mu}$.

3.4 Le processus de Bessel :

Définition 3.1 *Soit* $m \geq 0$ *un réel. On appelle carrée de processus de Bessel de dimension* m *un processus à valeurs dans* $\mathbb{R}_+$ *qui est solution de l'équation différentielle* *stochastique :*

$$dX_t = 2\sqrt{X_t}dB_t + mdt \tag{3.9}$$

1. Remarquons que cette équation n'entre pas dans le cadre lipschitzien, parce que la fonction $\sigma(x) = 2\sqrt{x}$ *n'est pas lipschitzienne sur* $\mathbb{R}_+$ *(on pourrait aussi observer que cette fonction est définie seulement sur* $\mathbb{R}_+$*, mais il s'agit d'un point mineur car on peut la remplacer par* $2\sqrt{|x|}$ *et vérifier a posteriori que la solution partant d'une valeur initiale positive reste positive).*

2. Il existe en dimension un des résultats plus fins que ceux du cadre lipschitzien ,qui permettent : pour un critère d'unicité et trajectorèlle qui s'applique à (3.9) *.*

3. L'intéret des carrés de processus de Bessel vient en partie de l'observation suivante, qui est une consequence simple de la formule d'Itô.

Si $B = (B^1, ..., B^d)$ *est un mouvement brownien en dimension d ,le processus :*

$$|B_t|^2 = (B_t^1)^2 + ... (B_t^d)^2$$

Est un carré de processus de Bessel de dimension entière $m = d$.

Supposons a partir de maintenant que $m \geq 0$ *et* $X_0 = x > 0$.

Pour tout $\varepsilon \geq 0$*,notons* $T_\varepsilon = \inf\{t \geq 0 : X_t = \varepsilon\}$*.Posons pour tout* $T \in [0, T_0[$,

$$M_t = \begin{cases} (X_t)^{1-\frac{m}{2}} & si \quad m > 2 \\ \log(X_t) & si \quad m = 2 \end{cases}$$

Et si : $m = 2$,

$$\mathbb{P}(T_\varepsilon < T_A) = \frac{\log A - \log x}{\log A - \log \varepsilon}$$

En particulier, en faisant tendre ε *vers* 0*,on obtient que* $\mathbb{P}(T_0 < \infty) = 0$ *(lorsque* m *est un entier, cela correspond a la propriété que le mouvement brownien en dimension* $d \geq 2$ *ne visite p.s. pas un point fixé autre que son point de départ).*

Si on fait tendre A vers ∞ *dans les formules précédentes, on obtient que :*

$$\mathbb{P}(T_\varepsilon < \infty) = 1 \qquad si \qquad m = 2 \qquad et \qquad \mathbb{P}(T_\varepsilon < \infty) = (\varepsilon/X)^{(m/2)-1} \qquad si \qquad m > 2$$

En prenant $m = 2$ *,on obtient la propriété de récurrence du mouvement brownien plan.*

Il découle des remarques précédentes que le processus M_t *est bien défini pour tout* $t \geq 0$ *et est une martingale locale.*

On montre que cette martingale locale n'est pas une vraie martingale.

Le processus de Bessel de dimension m *est (bien évidemment) obtenu en prenant* $Y_t = \sqrt{X_t}$*et lorsque* $m = d$ *est un entier strictement positif il correspond à la norme du mouvement brownien en dimension* d .

L'équation stochastique satisfaite par Y *est cependant moins facile à manier que* (3.9) .

Conclusion

Dans ce mémoire, on a donné la première esquisse de la notion au calcul stochastique comme (processus,martingale,mouvement brownien,formule d'Itô,ect...) ;on a rappeler le premier théorème de Yamada -Watanabe et le théorème fodamental d'existence et d'unicité avec quelques exemples, On donne la démonstration complète du théorème de Yamada-Watanabe (II) qui prouve l'unicité des EDS cas Holdérien.

Nous nous intéressés à une étude non exhaustive des EDS en finance avec des modèles comme (Black & Scholes , Vasicek , Cox-Ingersoll-Ross),et le processus de Bessel.

Bibliographie

[1] T. Gard. Introduction to Stochastic Differential Equation. Marcel Dekker, 1988.

[2] REVUZ, D., YOR, M., Continuous martingales and Brownian motion, volume 293 de Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences].

Springer-Verlag, Berlin, 1999. MR 2000h : 60050.

[3] Jeanblanc, M. , Exercices de calcul stochastique DESS IM Evry, option nance. Université d'EVRY octobre 2005.

[4] Jeanblanc, M. et Simon, T. , Eléments de calcul stochastique, cours, IRBID, septembre 2005

[5] Lévêque, O., Cours de probabilités et calcul stochastique EPFL Semestre d'hiver 2004 - 2005

[6] A. Friedman. Stochastic Differential Equations and Applications. Academic Press, 1975.

[7] LE GALL,J.F.Mouvement brownien et calcul stochastique,Cours du DEA1996-1997.Université Pierre et Marie Curie.Janvier1997

[8] Lorenzo Zambotti , Calcul Stochastique Et Processus De Diffusion, cours,2014–2015

[9] Jean-Christophe BRETON,Calcul stochastique.Université de Rennes 1 Septembre-D´ecembre 2014