

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

Université 8 Mai 1945 – Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques



189

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master Académique en Mathématiques
Option : Probabilités et Applications

Par :

M^{elle} Grara Kamila et M^{elle} Taref Asma

Intitulé

**SCHÉMAS NUMÉRIQUES ET STABILITÉ POUR LA
RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES
STOCHASTIQUES**

Dirigé par : KERBOUA Mourad

Devant le jury

PRESIDENT :	Dr. BOUHADJAR Slimane	MCB	Univ-Guelma
RAPPORTEUR :	Dr. KERBOUA Mourad	MCB	Univ-Guelma
EXAMINATEUR :	Dr. EZZEBSA Abdelali	MCB	Univ-Guelma

Session Juin 2016

Remerciement

Remerciant tout d'abord le bon dieu le tout compatissant, le tout miséricordieux de nous avoir donné la force pour réaliser ce travail.

Nous remercions d'une façon toute particulière notre encadreur Dr. KERBOUA Mourad d'avoir accepté de m'encadrer sur le thème, de m'avoir conseillé judicieusement, orienté, encouragé, pour son infinie gentillesse et de m'apporter une attention tout au long de ce travail.

Nous remercierons également les membres de jury tout d'abord Dr. BOUHADJAR Sliman et Dr. EZZEBSA Abdelafi qui nous ont fait l'honneur de juger notre travail.

Un remerciement particulier à nos parents pour leur contribution, leur soutien et leur patience.

A la fin une pensée particulière est adressée à l'ensemble des enseignants du Département Mathématique, qui nous ont procuré une formation honorable.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail, avant tout à qui m'encourage à continuer mon chemin et qu'il était toujours patient avec moi, a qui m'aide moralement et sacrifier sa vie pour ma satisfaction.

A mes parents

A celles qui me donnent la vie, qui m'entourent toujours de tendresse et d'amour

J'espère que Dieu vos garde et bénisse mes chers parents.

A mes sœurs et à toute ma famille spécialement les enfants : Moumen, Lokmane, Mohamed, Mouhaymen, Maram, Manar et Abd-Rahman .

Amon Marie BEDBOUDI Imed pour leur soutien et encouragements

A tout ceux qui j'aime et je réent verseaux l'amour propre, de respect et de l'estimation profonde et mes collègues de la promotion 2016 surtout le groupe de Probabilités et Applications et Et particulièrement à mon binôme «Asma ».



Dédicaces

Je dédie ce modeste travail en premier lieu à ceux qui m'ont donné toute leur tendresse et amour, à ceux qui ont eu toujours réponse à mes tourments ma mère et mon père

Je le dédie à mon frère et mes deux sœurs chéries à qui je souhaite toute la réussite qu'ils espèrent.

Je le dédie à mon encadrant Mr KERBOUA qui a toujours su répondre présent dans le besoin.

Je le dédie à toute ma famille, mes amis et mes camarades pour leur aide et leur soutien

Je le dédie à mon binôme Kamila avec laquelle j'ai partagé des hauts et des bas tout au long de mon cursus.

TAREF ASMAA



Table des matières

1	Mouvement Brownien et Intégrale stochastique	5
1.1	Généralités sur les processus à temps continu	5
1.1.1	Tribu	5
1.1.2	Filtration	6
1.2	Mouvement brownien	7
1.2.1	Définitions et construction	8
1.2.2	Régularité des trajectoires	10
1.3	Propriétés de Markov	11
1.3.1	Processus de Markov	11
1.3.2	Propriétés de Markov forte pour MB	11
1.4	Martingales	12
1.5	Intégrale d'Itô	14
1.5.1	Propriétés élémentaires de l'intégrale d'Itô	14
1.5.2	Formule d'Itô	15
1.6	Formule d'Itô sur \mathbb{R}^m	16
2	Équations différentielles stochastiques	19
2.1	Equation de Langevin	20
2.2	Existence et unicité des solutions de l'équation d'Itô	22
2.3	Processus de Feller	24
2.4	Processus de diffusion	25
2.5	Formule de Feynman-kac	28

3	Schémas numériques et stabilité des EDS	
3.1	Schémas d'Euler	29
3.2	Schémas de Milstein	29
3.3	Schémas de Platen	31
3.4	Stabilité stochastique	32
3.5	Applications en Finance	33
3.5.1	Schéma d'Euler	35
3.5.2	Schéma de Milstein	35
		36
4	Annexe	
4.1	Modèle de Black et Scholes	38
4.1.1	Définition du modèle	38
		38



Introduction

Les équations différentielles jouent un rôle très important dans les applications des mathématiques aux sciences physiques et de l'ingénieur. Cependant, les équations différentielles qui gouvernent les processus réels contiennent souvent certains éléments, par exemple les coefficients ou la partie non homogène, qui caractérisent le futur du phénomène étudié et qui sont déterminés expérimentalement. A cause des erreurs dans les mesures et le hasard propre aux phénomènes, ces éléments ne peuvent être dans la plupart des cas exprimés par une fonction bien déterminée $f(t)$ qui doit être remplacée par une fonction aléatoire $f(t, \omega)$, où ω est interprété comme un événement élémentaire lié au hasard. Les équations qu'on obtient par l'introduction du hasard dans les coefficients sont appelées des équations différentielles stochastiques (EDS).

De manière similaire aux équations différentielles ordinaires où la résolution numérique passe par une discrétisation du temps et un schéma d'approximation concernant l'intervalle de temps élémentaire sur lequel l'intégration est faite, il est nécessaire de procéder de manière similaire avec les équations différentielles stochastiques, a quelques différences près : (i) pour une équation ordinaire, la trajectoire étant déterministe (en tout cas pour les exemples simples a une particule, oscillateur harmonique ou anharmonique), on peut contrôler avec la solution exacte la qualité de l'approximation. Avec un processus de Wiener (ou mouvement Brownien), nous avons vu que deux trajectoires sont très différentes, cette différence s'accroissant avec le temps, (ii) Les schémas d'approximation des méthodes de résolution des équations différentielles sont basés sur le calcul différentiel usuel. Dans le cas des équations différentielles stochastiques, ces schémas reposent sur le calcul différentiel stochastique de nature assez différente.

Notre mémoire est composé de trois chapitres :

Dans le **chapitre 1**, Nous rappelons quelques compléments de théorie des probabilités et la définition d'un mouvement brownien et son construction, Après avoir présenté quelques résultats importants relatifs aux intégrales stochastiques et calcul d'Itô.

Dans le **chapitre 2**, Nous citons quelques équations que l'on rencontre en physique et en finance et son modélisation par un mouvement brownien et la traiter comme équation d'Itô, et nous discutons aussi comment il peut être mis en œuvre pour la résolution des équations différentielles stochastiques (EDS).

Dans le **chapitre 3**, Nous présenterons quelques techniques permettant d'obtenir des approximations numériques des trajectoires des EDS, ainsi nous traitons la stabilité de ces schémas. Finalement nous donnerons quelques exemples sur ces méthodes appliquées en finance.



Mouvement Brownien et Intégrale stochastique

1.1 Généralités sur les processus à temps continu

1.1.1 Tribu

Une tribu (ou σ -algèbre) sur Ω est une famille \mathcal{F} de sous-ensembles de Ω (appelés "événements") tels que

$$\begin{cases} i) & \emptyset \in \mathcal{F} \\ ii) & A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F} \\ iii) & (A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F} \end{cases}$$

En particulier : $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$.

De même, $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$.

1.1.2 Filtration

Une filtration sur un espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}) est une collection de σ -algèbre (\mathcal{F}_t) satisfaisant :

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F} \quad \text{pour tout} \quad 0 < s < t < \infty$$

Étant donné une filtration (\mathcal{F}_t) , $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ est appelé un espace de probabilité filtré. Un processus stochastique $(X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ sur cet espace est appelé adapté si pour tous t , $X(t)$ est \mathcal{F}_t -mesurable.

DÉFINITION 1.1.1 (Processus stochastique) On appelle processus stochastique à temps continu et à valeurs dans un espace E muni d'une tribu \mathcal{B} , une famille $X = (X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ de variable aléatoires définies sur un espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) et à valeurs dans (E, \mathcal{B}) .

DÉFINITION 1.1.2 (Processus à accroissements indépendants) Un processus réel $(X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est dit processus à accroissements indépendants (PAI) si :

- 1) $X(0) = 0$ p.s (on se ramène à ce cas en considérant $((X(t) - X(0))_{t \in \mathbb{R}_+})$).
- 2) $\forall 0 \leq s < t$, $X(t) - X(s)$ est indépendant de la tribu $\mathcal{F}^X(s) = \sigma(X_\tau, 0 \leq \tau \leq s)$.
- 3) L'accroissement $X(t) - X(s)$ a la même loi que $X(t-s)$, le PAI est dit PAI stationnaire (PAIS).

DÉFINITION 1.1.3 (Processus gaussiens) Un processus réel $X = (X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est appelé processus gaussien si pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $(t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{R}_+^n$, le vecteur $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$ est gaussien. Autrement dit $(X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est gaussien si toute combinaison linéaire $\sum_{i=1}^n a_i X(t_i)$ suit une loi gaussienne (pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+^n$ et $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$).

Il est connu que la loi d'un vecteur gaussien $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$ est connue (via sa fonction caractéristique) par le vecteur moyen $(\mathbb{E}\{X(t_1)\}, \dots, \mathbb{E}\{X(t_n)\})$ et la matrice de covariance $Cov(X(t_i), X(t_j))_{1 \leq i, j \leq n}$. On comprend dès lors que toute la loi d'un processus gaussien est connue dès qu'on se donne la fonction moyenne $\mu(t) = \mathbb{E}\{X(t)\}$ et l'opérateur de covariance $K(s, t) = Cov(X(s), X(t))$. En effet, la loi finidimensionnelle $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))^t$ est alors la loi normale de dimension n , $\mathcal{N}(\underline{\mu}_n, K_n)$ avec $\underline{\mu}_n = (\mu(t_1), \dots, \mu(t_n))^t$ et $K_n = (K(t_i, t_j))_{1 \leq i, j \leq n}$. Les fonctions $\underline{\mu}$ et K définissent donc toutes les lois finidimensionnelles du processus et donc aussi sa loi.

1.2 Mouvement brownien

Le mouvement brownien (*MB*) est associé à l'analyse de mouvement qui évoluent au cours du temps de manière désordonnée qu'il semble difficile de prévoir leur évolution, même dans un intervalle de temps très court. Il joue un rôle central dans la théorie des processus stochastiques, notamment parce que dans de nombreux problèmes théoriques ou appliqués, le mouvement brownien ou les diffusions (qui lui sont associées) fournissent des modèles simples sur lesquels de nombreux calculs peuvent être faits.

Un botaniste anglais, **Robert Brown** décrit en 1827 le mouvement de fines particules organiques en suspension dans un gaz ou un fluide. Au 19^{ème} siècle, après lui, plusieurs physiciens reconnaissent que ce mouvement est très irrégulier et ne semble pas admettre de tangente. On ne pourrait donc pas parler de sa vitesse, ni a fortiori lui appliquer les lois de la mécanique ! Il constitue un bon exemple de processus gaussiens.

1.2.1 Définitions et construction

DÉFINITION 1.2.1 (Mouvement brownien standard) Un processus stochastique $B(t)$ est un mouvement brownien ou un processus de Wiener standard si $B(0) = 0$ (on dit que $B(t)$ est issu de 0) et si pour tous réels $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, les variables aléatoires $B(t_1) - B(t_0), \dots, B(t_n) - B(t_{n-1})$ sont indépendantes et suivent une distribution gaussienne centrée réduite (on dit que le brownien est standard si $\mu = 0$ et $\sigma = 1$) telle que

$$\begin{cases} \mathbb{E}(B(t+h) - B(t)) = 0 \\ \mathbb{E}(B(t+h) - B(t))^2 = h \end{cases}$$

Dans le cas général, lorsque le brownien n'est pas centré réduite, on a

$$\begin{cases} \mathbb{E}(B(t_k) - B(t_{k-1})) = \mu(t_k - t_{k-1}) \\ \mathbb{E}((B(t_k) - B(t_{k-1})) - \mu(t_k - t_{k-1}))^2 = \sigma^2(t_k - t_{k-1}) \end{cases}$$

le vecteur $(B(t_0), B(t_1), \dots, B(t_n))$ est un vecteurs gaussien. Le processus $B(t)$ suit une loi gaussienne de moyenne μt et de variance $\sigma^2 t$. Pour simuler un mouvement brownien, il suffit de se donner un pas de temps h et d'écrire

$$B(nh) = (B(h) - B(0)) + (B(2h) - B(h)) + \dots + (B(nh) - B((n-1)h))$$

Les accroissements $X_n = B(nh) - B((n-1)h)$ étant indépendants et gaussiens, il suffit donc de simuler une loi gaussienne X_n et d'utiliser la formule de récurrence

$$B(nh) = B((n-1)h) + X_n$$

Considérons une suite de variable aléatoires indépendantes X_i centrées de variance σ^2 et la marche aléatoire $S_n = X_1 + \dots + X_n$. On définit une suite de variables Y_n comme une ligne polygonale approchant la marche S_n par la formule

$$Y_n(t) = \frac{S_{[nt]} + (nt - [nt]) X_{[nt]+1}}{\sigma\sqrt{n}}$$

Le théorème de Donsker affirme que cette suite convergente en loi vers un mouvement brownien.

THÉORÈME 1.2.1 (Principe d'invariance de Donsker) $Y_n(t)$ converge en loi vers un mouvement brownien $B(t)$. En particulier, pour toute fonction f continue bornée

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}f(Y_n(t)) = \mathbb{E}f(B(t))$$

Pour construire un mouvement brownien, on part du système de Haar défini par les fonctions indicatrices $\Phi_n = \mathbb{I}_{[n, n+1[}$ et pour $k = 0, 1, \dots, 2^n - 1$, on pose

$$\Phi_n^k = 2^{n/2} \mathbb{I}_{\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}\right[} - 2^{n/2} \mathbb{I}_{\left[\frac{k}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{k+1}{2^n}\right[}$$

Le système (Φ_n, Φ_n^k) forme une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^+)$ muni de tribu des boréliens. Le processus

$$B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^t \Phi_n(x) dx \right) X_n + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} \left(\int_0^t \Phi_n^k(x) dx \right) X_n^k$$

où les variables X_n, X_n^k sont des variables gaussiennes indépendantes centrées réduites, converge vers un mouvement brownien. Si on note λ la mesure de Lebesgue qui donne la longueur de intervalles $\lambda([a, b]) = b - a$, le processus $B(t)$ s'écrit

$$\begin{aligned} B(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda([n, n+1[\cap [0, t]) X_n \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} 2^{n/2} \lambda \left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} \right[\cap [0, t] \right) X_n^k \\ &\quad - 2^{n/2} \lambda \left(\left[\frac{k}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{k+1}{2^n} \right[\cap [0, t] \right) X_n^k \end{aligned}$$

En observant les valeurs de $B(t)$ sur les dyadiques $k/2^n$, on voit que les premières valeurs sont $B(0) = 0$, $B(1) = X_0$, $B(1/2) = B(1)/2 + X_0/2$, etc. On montre par récurrence que

$$B\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2} B\left(\frac{k}{2^n}\right) + \frac{1}{2} B\left(\frac{k+1}{2^n}\right) + \frac{2^{n/2}}{2^{n+1}} X_n^k$$

Pour démontrer que brownien est continu, il suffit de montrer que la série $B(t)$ converge uniformément sur tout compact (sauf peut-être pour un ensemble négligeable), c'est-à-dire sur tout intervalle $[0, T]$ pour tout T , puisque les termes de la série qui définissent $B(t)$ sont continus, ce qu'on réalise en majorant tous les termes de la série.

1.2.2 Régularité des trajectoires

Le mouvement brownien a de nombreuses propriétés dont certaines peuvent être prises comme définition.

PROPOSITION 1.2.1 *Le processus $B(t)$ est un processus à accroissements indépendants de fonction de corrélation*

$$K(s, t) = \mathbb{E}(B(s)B(t)) = \sigma^2 \min(s, t)$$

Preuve. Le mouvement brownien est un processus centré. Les accroissements étant indépendants, on a pour $0 \leq s \leq t$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(B(s)B(t)) &= \mathbb{E}(B(s)(B(t) - B(s)) + \mathbb{E}(B^2(s)) \\ &= \mathbb{E}(B_s)\mathbb{E}(B(t) - B(s)) + \text{Var}(B(s)) \\ &= 0 + \sigma^2 s = \sigma^2 (s \wedge t) \end{aligned}$$

PROPOSITION 1.2.2 *Pour un mouvement brownien standard ($\mu = 0, \sigma = 1$) et pour tout n , l'espérance*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(B(t+h) - B(t))^{2n} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2/2h} dx \\ &= 1.3 \dots (2n-1) h^n. \end{aligned}$$

En particulier,

$$\mathbb{E}(B(t+h) - B(t))^2 = h$$

et

$$\mathbb{E}(B(t+h) - B(t))^4 = 3h^2$$

PROPOSITION 1.2.3 *Soit $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = t$ une subdivision de l'intervalle $[0, t]$ dont le pas tend vers 0, la variation quadratique converge dans L^2 (et presque sûrement à extraction de sous-suite) vers t .*

$$V_n = \sum_{k=0}^n (B(t_{k+1}) - B(t_k))^2 \xrightarrow{L^2} t.$$

PROPOSITION 1.2.4 Si $B(t)$ est un mouvement brownien, alors il en est de même pour les processus suivants.

- (1) $X(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} B(at)$, $t \in \mathbb{R}^+$, et a constante non nulle (loi d'échelle).
- (2) $X(t) = tB\left(\frac{1}{t}\right)$ pour $t > 0$ et $X(0) = 0$ (invariance par inversion de temps).
- (3) $X(t) = B(T-t) - B(T)$ avec $t > 0$ et $t \in [0, T]$ (invariance par retournement du temps).

Preuve. Il suffit de vérifier que le processus est gaussien et de même covariance que $B(t)$ ($t \wedge s$) vérifiant (1). On a

$$\mathbb{E}(X(s)X(t)) = \frac{1}{a} \mathbb{E}[B(as)B(at)] = \frac{1}{a} \inf(as, at) = \inf(s, t)$$

De même pour (2), on a

$$\mathbb{E}(X(s)X(t)) = ts \mathbb{E}\left[B\left(\frac{1}{s}\right)B\left(\frac{1}{t}\right)\right] = ts \inf\left(\frac{1}{s}, \frac{1}{t}\right) = \inf(s, t)$$

1.3 Propriétés de Markov

1.3.1 Processus de Markov

DÉFINITION 1.3.1 Soit $(X(t))_{t \in \mathbb{R}^+}$ un processus défini sur un espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) à valeurs dans (E, \mathcal{B}) et adapté à la filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$. $(X(t))_{t \in \mathbb{R}^+}$ est un processus de Markov par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ si la condition suivante est satisfaite :

$$\forall A \in \mathcal{B}, \forall (s, t) \in \mathbb{R}_+^2, s < t : \mathbb{P}(X(t) \in A | \mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(X(t) \in A | X(s))$$

où (\mathcal{F}_t) est la filtration associée au processus $(X(t))_{t \in \mathbb{R}^+}$.

Exemple. Tout processus stochastique à valeurs réelles $(X(t))_{t \in \mathbb{R}^+}$ et à accroissements indépendants est un processus de Markov.

1.3.2 Propriétés de Markov forte pour MB

Comme les processus $B(t+h) - B(t)$ a même loi que $B(t)$ on en déduit que pour toute fonction borélienne bornée,

$$\mathbb{E}(f(B(t+h)) | \mathcal{B}_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int f(b) \exp\left(-\frac{(b - B(t))^2}{2t}\right) db$$

Le mouvement Brownien est un processus de Markov de semi-groupe

$$P_t(b, dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(b-x)^2}{2t}\right) dx$$

C'est un processus homogène dont la probabilité de transition s'écrit

$$p(s, x; t, B) = p(x, t-s, B) = \int_B \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}\right) dy.$$

On a la propriété de Markov forte. Pour tout temps d'arrêt T adapté à la filtration \mathcal{B}_t .

$$\mathbb{E}(f(B_{t+T}) | \mathcal{B}_T) = P_t f(B_T).$$

1.4 Martingales

Soit $(X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ un processus défini sur l'espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) et soit $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ une filtration.

DÉFINITION 1.4.1 Un processus $(X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ adapté à $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ tel que

$$\begin{cases} a) & \mathbb{E}(|X(t)|) < +\infty, & \forall t \geq 0 \\ b) & \mathbb{E}(X(t) | \mathcal{F}_s) = X(s) \text{ p.s.}, & \forall t > s \geq 0. \end{cases}$$

est appelé une martingale (à temps continu).

On définit de manière similaire une sous-martingale ($\mathbb{E}(X(t) | \mathcal{F}_s) \geq X(s)$ p.s.) et une sur-martingale ($\mathbb{E}(X(t) | \mathcal{F}_s) \leq X(s)$ p.s.) (à temps continu), avec les inégalités correspondantes.

PROPOSITION 1.4.1 (MB comme martingales) Si $(B(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un MB standard, alors

1. $(B(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est \mathcal{F}_t^B -martingale.
2. $(B^2(t) - t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est \mathcal{F}_t^B -martingale.
3. $(\exp\{\sigma B(t) - \frac{\sigma^2}{2}t\})_{t \in \mathbb{R}_+}$ est \mathcal{F}_t^B -martingale.

REMARQUE 1.4.1 1. On définit de manière similaire une sous-martingale ($\mathbb{E}(X(t) | \mathcal{F}_s) \geq X(s)$ p.s.) et une sur-martingale ($\mathbb{E}(X(t) | \mathcal{F}_s) \leq X(s)$ p.s.) (à temps continu), avec les inégalités correspondantes.

2. La sous martingale peut être traitée via la décomposition de Doob ou à travers quelques résultats simples de l'Inégalité de Jensen. En effet, toute sous martingale $(X(t), \mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ admet une décomposition unique sous la forme

$$X(t) = M(t) + A(t), \quad \forall t \geq 0.$$

où $(M(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est une martingale et $(A(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un processus prévisible tel que :

$$A(t) = \langle M \rangle_t \quad (\text{variation quadratique d'une martingale})$$

DÉFINITION 1.4.2 (Variation quadratique d'une Martingale) Si (M_t) est une martingale continue de carré intégrable, alors on a :

$$\langle M \rangle_t^{(n)} = \sum_{i=1}^{2^n} \left(M\left(\frac{it}{2^n}\right) - M\left(\frac{(i-1)t}{2^n}\right) \right)^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} \langle M \rangle_t, \quad \forall t \geq 0.$$

1.5 Intégrale d'Itô

On considère un espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) muni d'une filtration \mathcal{F}_t , i.e. une suite de tribus croissantes pour l'inclusion. On appelle *tribu des prévisibles* sur $\Omega \times [0, \infty[$ la plus petite tribu rendant mesurable tous les processus continus adaptés à la filtration \mathcal{F}_t . Un processus ou un ensemble est *prévisible* s'il est mesurable par rapport à cette tribu. Supposons donné un processus de Wiener standard $B(t)$, adapté à la filtration \mathcal{F}_t et tel que pour tout $0 \leq s \leq t$ l'accroissement $B(t, \omega) - B(s, \omega)$ soit indépendant de \mathcal{F}_s . Sur un intervalle de temps $[a, b]$, on note \mathbb{H}^2 l'ensemble des processus $f(t, \omega)$ définis pour $t \in [a, b]$, \mathcal{F}_t -mesurable et de carré intégrable presque sûrement. Dans ces conditions, si f est dans \mathbb{H}^2 et si $a = t_0 < t_1, \dots, < t_n < t_{n+1} = b$ est une subdivision de l'intervalle $[a, b]$, alors f est indépendant des incréments $B(t_{i+1}) - B(t_i)$, en d'autres termes f est prévisible. Pour toute fonction f de \mathbb{H}^2 , on définit l'*intégrale stochastique d'Itô* comme la limite L^2 dans des accroissements ci-dessous (on notera que toutes les limites de cette section sont des limites quadratiques, i.e. dans L^2). On définit ainsi l'intégrale stochastique comme la limite des sommes de Riemann

$$\int_a^b f(t, \omega) dB(t, \omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n f(t_i, \omega) (B(t_{i+1}) - B(t_i))$$

Cette définition est cohérente avec les propriétés usuelles de l'intégrale.

On a de plus quelques propriétés complémentaires liées à la dépendance aléatoire de f .

1.5.1 Propriétés élémentaires de l'intégrale d'Itô

Pour tout $f, g \in \mathbb{H}^2$, l'intégrale $I(f)$ donnée par :

$$I(f) = \int_a^b f(s) dB(s)$$

satisfait :

1. Linéarité :

$$\int_a^b (f(s) + g(s)) dB(s) = \int_a^b f(s) dB(s) + \int_a^b g(s) dB(s)$$

et

$$\int_a^b (cf(s)) dB(s) = c \int_a^b f(s) dB(s)$$

2. Additivité : Pour $0 \leq a < u < b$:

$$\int_a^b f(v) dB(v) = \int_a^u f(v) dB(v) + \int_u^b f(v) dB(v)$$

3. Si $f \in \mathbb{H}^2$ et si $\int_a^b \mathbb{E}(f^2(t)) dt < \infty$, alors

$$\mathbb{E} \left(\int_a^b f(s) dB(s) \right) = 0$$

4. Si $f, g \in \mathbb{H}^2$ et si $\int_a^b [\mathbb{E}(f^2(t)) + \mathbb{E}(g^2(t))] dt < \infty$, alors

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_a^b f(s) dB(s) \right) \left(\int_a^b g(s) dB(s) \right) \right] = \int_a^b \mathbb{E}(f(s)g(s)) ds.$$

En particulier, on a

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t f(s) dB(s) \right)^2 \right] = \int_0^t \mathbb{E}(f^2(s)) ds. \quad (\text{l'isométrie d'Itô}).$$

5. Propriétés de martingale : Pour $s, t \in [a, b]$, $0 \leq s < t$ et $f \in \mathbb{H}^2$, alors

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t f(u) dB(u) \right) \mid \mathcal{F}_s \right] = 0$$

et

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t f(u) dB(u) \right)^2 \mid \mathcal{F}_s \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^t f^2(u) du \mid \mathcal{F}_s \right]$$

6. Le processus $\left(\int_0^t f(s) dB(s) \right)_{t \geq 0}$ est une \mathcal{F}_t -martingale continue de L^2 .

1.5.2 Formule d'Itô

La formule d'Itô permet de déterminer de manière générale l'effet d'un changement de variables sur une différentielle stochastique. Elle prend la forme suivante

DÉFINITION 1.5.1 (formule de Itô) Si $X = (X(t))_{t \geq 0}$ est un processus d'Itô :

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s) ds + \int_0^t b(s) dB_s$$

et f une fonction de classe $C^2(\mathbb{R})$ alors on a

$$f(X(t)) = f(X(0)) + \int_0^t f'(X(s)) dX(s) + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X(s)) d\langle X, X \rangle(s)$$

où, par définition $\langle X, X \rangle(t) = \int_0^t b^2(s) ds$, et

$$\int_0^t f'(X(s)) dX(s) = \int_0^t f'(X(s)) a(s) ds + \int_0^t f'(X(s)) b(s) dB(s)$$

De même, si $(t, x) \rightarrow f(t, x)$ est une fonction deux fois différentiables en x et deux fois différentiables en t , ces dérivés étant continues en (t, x) , on a

$$f(t, X(t)) = f(0, X(0)) + \int_0^t f'_s(s, X(s)) ds + \int_0^t f'_x(s, X(s)) dX(s) + \frac{1}{2} \int_0^t f''_{xx}(s, X(s)) d\langle X, X \rangle(s)$$

PROPOSITION 1.5.1 (Formule d'intégration par parties)

Soient $X = (X(t))_{t \geq 0}$ et $Y = (Y(t))_{t \geq 0}$ deux processus d'Itô :

$$\begin{aligned} X(t) &= X(0) + \int_0^t a(s) ds + \int_0^t b(s) dB_s \\ Y(t) &= Y(0) + \int_0^t a'(s) ds + \int_0^t b'(s) dB_s \end{aligned}$$

Alors

$$X(t)Y(t) = X(0)Y(0) + \int_0^t X(s)dY(s) + \int_0^t Y(s)dX(s) + \langle X, Y \rangle(t)$$

avec la convention $\langle X, Y \rangle(t) = \int_0^t b(s)b'(s)ds$.

1.6 Formule d'Itô sur \mathbb{R}^m

DÉFINITION 1.6.1 Soit X_t un processus de dimension m vérifiant l'équation

$$dX(t) = A(t)dt + C(t)dB(t)$$

où $A(t) = (a_1(t), \dots, a_m(t))$ et $C(t) = (c_{ij}(t))$ est une matrice $m \times n$. Le processus de Wiener étant de dimension n , $B(t) = (B_1(t), \dots, B_n(t))$. Soit $f(t, x)$ une fonction définie pour $t \in [a, b]$ et x un vecteur de \mathbb{R}^m à valeurs dans \mathbb{R}^p de classe C^2 , alors le processus $f(t, X(t))$ admet une dérivée stochastique donnée par

$$df(t, X(t)) = \left(\frac{\partial f(t, X(t))}{\partial t} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial f(t, X(t))}{\partial x_i} a_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f(t, X(t))}{\partial x_i \partial x_j} c_{i,k}(t) c_{j,k}(t) \right) dt + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m \frac{\partial f(t, X(t))}{\partial x_i} c_{i,k}(t) dB_k(t)$$

Dans le cas, où la fonction f est indépendante du temps et $X(t) = B(t)$ est un mouvement brownien sur \mathbb{R}^n la formule d'Itô se simplifie en

$$f(B(t)) = f(B(0)) + \int_0^t \nabla f(B(s)) dB(s) + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta f(B(s)) ds$$

Dans le cas où $f(t, x) = x_1 x_2$, et $dX_i(t) = a_i(t)dt + c_i(t)dB(t)$ pour $i = 1$ ou 2 , la formule d'Itô conduit à la formule d'intégration par parties

$$d(X_1 X_2) = X_1 dX_2 + X_2 dX_1 + d\langle X_1, X_2 \rangle$$

où la variation quadratique est caractérisée par

$$d\langle X_1, X_2 \rangle_t = c_1(t) c_2(t) dt$$

L'équation s'écrit sous forme intégrale

$$X_1(t) X_2(t) = \int_0^t X_1(s) dX_2(s) + \int_0^t X_2(s) dX_1(s) + \langle X_1, X_2 \rangle_t$$

où le crochet est un processus adapté de variation finie

$$2 \langle X_1, X_2 \rangle = \langle X_1 + X_2, X_1 + X_2 \rangle - \langle X_1, X_1 \rangle - \langle X_2, X_2 \rangle$$

Exemple. Pour $n = 2$, l'équation d'Itô du système

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dB_1 \\ dB_2 \end{pmatrix}$$

s'écrit

$$df = \left(\begin{aligned} &\partial_t f + a_1 \partial_x f + a_2 \partial_y f + \frac{1}{2} (c_{11}^2 + c_{22}^2) \partial_{xx} f \\ &+ \frac{1}{2} (c_{11} c_{21} + c_{12} c_{22}) \partial_{xy} f + \frac{1}{2} (c_{21}^2 + c_{22}^2) \partial_{yy} f \end{aligned} \right) dt \\ + (c_{11} \partial_x f + c_{21} \partial_y f) dB_1(t) + (c_{12} \partial_x f + c_{22} \partial_y f) dB_2(t)$$

En particulier lorsque les browniens sont les mêmes et que la matrice C se réduit à un vecteur, on a

$$\begin{cases} dX = a_1 dt + c_1 dB(t) \\ dY = a_2 dt + c_2 dB(t) \end{cases}$$

et la dérivée s'écrit

$$df = \left(\begin{aligned} &\partial_t f + a_1 \partial_x f + a_2 \partial_y f + \frac{1}{2} (c_1^2 \partial_{xx} f + 2c_1 c_2 \partial_{xy} f + c_2^2 \partial_{yy} f) \end{aligned} \right) dt \\ + (c_1 \partial_x f + c_2 \partial_y f) dB(t)$$



Équations différentielles stochastiques

Les équations que l'on rencontre en physique sont des équations qui, soit comportent un bruit, soit ont des coefficients qui sont eux-mêmes des processus aléatoires. Dans le cas où le bruit est un bruit blanc, on peut modéliser l'équation par un mouvement brownien et la traiter comme une équation d'Itô. Dans le cas où le processus est markovien, on a ce qu'on appelle une diffusion. A chaque équation d'Itô est associée une équation de Fokker-Planck qui décrit l'évolution dynamique de la densité du processus considéré.

2.1 Equation de Langevin

Des particules dans un fluide sont soumises à une force de frottement proportionnelle à la vitesse de ces particules et à une force aléatoire. La vitesse des particules est un processus aléatoire. L'équation fondamentale de la dynamique s'écrit

$$\frac{dv}{dt} = -av + \xi(t)$$

avec $a = 6\pi\eta r/m$, la masse d'une particule étant m et η désigne la viscosité du fluide. Les particules sont assimilées à des petites sphères de rayon r . La force aléatoire $\xi(t)$ est un bruit blanc son espérance est nulle et sa fonction de corrélation est constante, D est appelé le coefficient de diffusion d'Einstein.

$$\mathbb{E} \xi(t) = 0 \quad R(s, t) = 2D\delta(t - s)$$

En terme mathématiques, ce problème s'écrit sous la forme d'une équation d'Itô

$$dX(t) = -aX(t)dt + \sqrt{2D}dB(t)$$

$B(t)$ est un processus de Wiener standard. Appliquons la formule d'Itô à $Y(t) = X(t)e^{at}$, en posant $f(t, x) = xe^{at}$, on a $\partial_t f = xe^{at}$, $\partial_x f = e^{at}$ et $\partial_{xx} f = 0$. On a

$$dY(t) = \sqrt{2D}e^{at}dB(t)$$

En intégrant entre 0 et t , il vient

$$Y(t) - Y(0) = \sqrt{2D} \int_0^t e^{as}dB(s)$$

En remplaçant $Y(t)$ par sa valeur et en posant $X(0) = x_0$, on en déduit que la solution est le processus de diffusion, markovien, gaussien $X(t)$ donné par

$$X(t) = x_0e^{-at} + \sqrt{2D} \int_0^t e^{-a(t-s)}dB(s)$$

De cette expression, on trouve l'espérance

$$\mathbb{E}(X(t)) = x_0e^{-at}$$

et la variance du processus

$$\text{Var}(X(t)) = \frac{D}{a} (1 - e^{-2at})$$

Dans ce problème, l'équation de Fokker-Planck portant sur la probabilité de transition $p = p(x, t)$ du processus $X(t)$ s'écrit

$$\frac{\partial p}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} (p) + D \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

avec pour condition initiale

$$p(x, 0) = p_0(x) \quad \text{on suppose que } p_0(x) = \delta(x - x_0)$$

et pour condition limite

$$p(\pm\infty, t) = 0$$

Cette équation admet comme solution

$$p(x, t, x_0, 0) = \sqrt{\frac{a}{2\pi D(1 - e^{-2at})}} \exp\left(\frac{-a(x - x_0 e^{-at})^2}{2D(1 - e^{-2at})}\right)$$

$X(t)$ a donc une densité gaussienne d'espérance et de variance données par les expressions précédentes. La résolution de l'équation de Fokker-Planck conduit aux mêmes résultats que l'équation d'Itô. Lorsque t tend vers l'infini, le noyau de transition tend vers

$$p_s(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

avec

$$\sigma^2 = \frac{D}{a}$$

À l'équilibre, ce noyau est une densité de Maxwell

$$\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp\left(-\frac{m|x^2|}{2\sigma^2}\right)$$

où k est la constante de Boltzmann et T la température absolue. En égalant les expressions à l'équilibre, on peut écrire

$$\frac{D}{a} = \frac{kT}{m}$$

d'où l'expression du coefficient de diffusion (Einstein, 1956)

$$D = \frac{kT}{6\pi\eta r}$$

2.2 Existence et unicité des solutions de l'équation d'Itô

THÉORÈME 2.2.1 Soit $T > 0$, $a(t, x)$ une fonction mesurable de $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R}^n et $b(t, x)$ une fonction mesurable de $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R}^n vérifiant :

(1) Condition de croissance : il existe une constante C telle que

$$|a(t, x)| + |b(t, x)| \leq C(1 + |x|)$$

(2) Condition de lipschitz : il existe une constante K telle que

$$|a(t, x) - a(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)| \leq K|x - y|$$

(3) x_0 est une variable indépendante de la tribu $\mathcal{F}_\infty = \sigma(B(s), s \geq 0)$ et $\mathbb{E}|x_0|^2 < \infty$,
Alors l'équation différentielle stochastique d'Itô

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + b(t, X(t))dB(t), \quad X(0) = x_0$$

dans laquelle $B(t)$ est un mouvement brownien standard admet une solution unique $X(t)$ dont presque toutes les réalisations sont continues, qui est un processus de Markov de loi initiale x_0 et de probabilité de transition

$$p(s, x, t, A) = P(X(t) \in A \mid X(s) = x)$$

De plus, si les fonctions a et b sont continues, alors $X(t)$ est un processus de diffusion de dérive $a(t, x)$ et de matrice de diffusion bb^T . En particulier lorsque a et b sont lipschitziennes, l'équation d'Itô admet une solution unique.

REMARQUE 2.2.1 (1) Une équation peut admettre une solution locale sans admettre de solution globale. Par exemple sur $[0, 1]$, l'équation

$$\frac{dX(t)}{dt} = X^2(t), \quad X(0) = 1$$

admet une solution unique locale sur $[0, 1[$

$$X(t) = \frac{1}{1-t}, \quad t \in [0, 1[$$

mais n'admet pas de solution globale sur l'intervalle $[0, 1]$.

(2) La condition de croissance évite que les solutions explosent, i.e. que les solutions $|X_t|$ tendent vers l'infini en un temps fini. L'équation

$$dX(t) = \frac{1}{2}aX^3(t) dt, \quad X(0) = 1/y \text{ et } y > 0$$

admet une solution

$$X_t = \frac{1}{\sqrt{y^2 - at}}$$

qui diverge dans la direction $y^2 = at$. Si la condition de croissance n'est pas satisfaite, l'équation peut quand même avoir une solution.

(3) La condition de lipschitz garantit l'unicité. L'équation

$$dX(t) = 3X^{2/3}(t) dt, \quad X(\beta) = 0$$

admet plus d'une solution

$$X(t) = (t - \beta)^3 \mathbb{1}_{t > \beta}$$

car la fonction $a(t, x) = 3x^{2/3}$ ne vérifie pas la condition de lipschitz.

Soit $t \in]0, \infty[$, $x \in \mathbb{R}^n$, et $\Omega =]0, \infty[\times \mathbb{R}^n$ un domaine, le problème de Cauchy qui consiste à déterminer les solutions $u(t, x)$ de l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2}\Delta u & = 0 \text{ sur } \Omega \\ u(0, x) & = u_0(x) \text{ sur } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

admet la solution

$$u(t, x) = \mathbb{E}(x + B_t)$$

où $B(t)$ est un mouvement brownien standard, c'est-à-dire est de la forme

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} p_t(x, y) u_0(y) dy$$

avec

$$p_t(x, y) = \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}}$$

p_t est la probabilité de transition du processus de Wiener $B(t)$.

2.3 Processus de Feller

Soit $C_0(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions continues sur \mathbb{R}^n tendant vers 0 lorsque x tend vers $\pm\infty$ muni de la norme $\|f\| = \sup_x |f(x)|$.

DÉFINITION 2.3.1 Un semi-groupe de Feller est une famille $(P_t)_{t \geq 0}$ d'opérateurs linéaires positifs de C_0 dans C_0 tels que

- (i) $P_0 = I$ et pour tout $t \geq 0$, $P_t 1 = 1$,
- (ii) $P_{s+t} = P_s P_t = P_t P_s$ pour tout s et t ,
- (iii) $\lim_{t \rightarrow 0} \|P_t f - f\| = 0$ pour toute fonction f de C_0 .

On dit que f appartient au domaine de A et on note $f \in D(A)$ et on dit que A tel que $Af = g$ est le générateur infinitésimal de P_t s'il existe une fonction $g \in C_0$ telle que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\| \frac{P_t f - f}{t} - g \right\| = 0$$

Dans ces conditions, on démontre que $d(P_t f(x))/dt = P_t A f(x)$ et que

$$P_t f(x) - f(x) = \int_0^t P_s A f(x) ds$$

Si $(P_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe de Feller, on démontre à l'aide du théorème de riesz qu'il existe un processus de Markov dont P_t est la fonction de transition. On appelle alors *processus de Feller* ce processus de Markov.

Les deux processus de Feller les plus célèbres sont le mouvement brownien et le processus de Poisson.

THÉORÈME 2.3.1 Le mouvement brownien sur \mathbb{R}^n est un processus de Feller de semi-groupe

$$P_t f(x) = \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y-x|^2/2t} f(y) dy$$

pour $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Son générateur est le laplacien $\frac{1}{2}\Delta$ où $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \dots + \partial^2/\partial x_n^2$ et de domaine $C_0^2(\mathbb{R}^n)$ des fonctions de classe C^2 tendant vers 0 lorsque x tend vers $\pm\infty$.

Le processus de Markov associé a pour fonction de transition, pour tout $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$

$$P_t f(x) = f(x) + \frac{1}{2} \int_0^t P_s \Delta f(x) ds$$

THÉORÈME 2.3.2 *Le processus de poisson N_t d'intensité $\lambda > 0$ est un processus de Feller de semi-groupe, pour tout $f \in C_0(\mathbb{R})$,*

$$P_t f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n+x) \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

et de générateur

$$Af(x) = \lambda(f(x+1) - f(x))$$

de domaine $C_0(\mathbb{R})$.

2.4 Processus de diffusion

DÉFINITION 2.4.1 *Un processus de diffusion est un processus de Markov à trajectoires continues vérifiant l'équation d'Itô*

$$dX(t) = a(t, X(t)) dt + b(t, X(t)) dB(t), \quad X(0) = x$$

On suppose que $a = (a_1, \dots, a_n)$ et $b = (b_1, \dots, b_n)$ sont des fonctions mesurables localement bornées sur \mathbb{R}^n .

La matrice $(bb^T)_{i,j}$ est symétrique et semi-définie positive, i.e. vérifie pour tout x de \mathbb{R}^n

$$\sum_{i,j=1}^n (bb^T)_{i,j} x_i x_j \geq 0$$

Si $p(t, x, y)$ désigne la probabilité de transition de $X(t)$, on note $U(t)$ le processus qui transforme toute fonction continue bornée en

$$U(t)f(x) = \mathbb{E}_x(f(X(t))) = \mathbb{E}(f(X(t)) | X(0) = x)$$

Les opérateurs $U(t)$ forment un semi-groupe d'opérateurs

$$U(t+s) = U(t)U(s)$$

ce que traduit l'équation de Chapman-Kolmogorov

$$p(t+s, x, y) = \int p(t, x, u) p(s, u, y) du$$

Le générateur infinitésimal du semi-groupe est défini par

$$A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{U(h) - I}{h}$$

soit

$$Af(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}_x f(X(t)) - f(x)}{t}$$

Cette limite n'existe pas toujours. On note $D(A)$ l'ensemble des fonctions pour lesquelles la limite existe quel que soit x dans \mathbb{R}^n . Si f est une fonction de classe C^2 admettant des dérivées partielles premières et secondes bornées et si $X(t)$ est une diffusion vérifiant l'équation d'Itô indépendante du temps

$$dX(t) = a(X(t)) dt + b(X(t)) dB(t)$$

alors $f \in D(A)$ et

$$Af(x) = \sum_i a_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (bb^T)_{i,j}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

Propriétés Une diffusion est caractérisée par

(1) La limite donnant la dérive

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}(X(t+h) - X(t) \mid X(t) = x)}{h} = a(x, t)$$

(2) La limite donnant la diffusion

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}((X(t+h) - X(t))^2 \mid X(t) = x)}{h} = b^2(x, t)$$

(3) La condition de Dynkin

$$\forall \epsilon > 0, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(|X(t+h) - X(t)| > \epsilon \mid X(t) = x)}{h} = 0$$

THÉORÈME 2.4.1 Si $X(t)$ est un processus de diffusion de \mathbb{R}^n de générateur A , alors pour toute fonction f de $C_0(\mathbb{R}^n)$ le processus

$$M(t) = f(X(t)) - f(X(0)) - \int_0^t Af(X(s)) ds$$

est une martingale relativement à la tribu $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$.

Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck est la diffusion solution de l'équation (de Langevin)

$$dX(t) = -aX(t)dt + b dB(t)$$

où a et b sont des constantes et $B(t)$ un processus de Wiener standard. On suppose de plus qu'à l'instant initial $X(0) = X_0$.

En posant

$$Y(t) = X(t)e^{at}$$

et en appliquant la formule d'Itô à la fonction $f(t, x) = xe^{at}$, on obtient

$$dY(t) = be^{at}dB(t)$$

d'où la solution pour $t \geq t_0$,

$$X(t) = X(t_0)e^{-a(t-t_0)} + b \int_{t_0}^t e^{-a(t-s)} dB(s)$$

En notant $x_0 = \mathbb{E}(X(t_0))$, le processus d'Ornstein-Uhlenbeck a pour moyenne

$$\mathbb{E}(X(t)) = x_0 e^{-a(t-t_0)}$$

En appliquant la formule d'Itô au processus $Z(t) = X^2(t)$, on a

$$dZ(t) = -2aZ(t)dt + b^2 dt + 2bX(t)dB(t)$$

En prenant la moyenne, on trouve en résolvant une équation différentielle ordinaire

$$\mathbb{E}(Z(t)) = \mathbb{E}(X^2(t)) = \frac{b^2}{2a} (1 - e^{-2a(t-t_0)}) + \mathbb{E}(X^2(t_0)e^{-2a(t-t_0)})$$

D'où la variance du processus d'Ornstein-Uhlenbeck

$$\sigma^2 = \mathbb{E}(X^2(t)) - \mathbb{E}(X(t))^2 = \frac{b^2}{2a} (1 - e^{-2a(t-t_0)})$$

La fonction de corrélation du processus d'Ornstein-Uhlenbeck vaut

$$\langle X_t X_t \rangle = \frac{b^2}{2a} e^{-a|t-t|}$$

2.5 Formule de Feynman-kac

DÉFINITION 2.5.1 Soit $X(t)$ un processus de diffusion de \mathbb{R}^n de générateur A . Soit une fonction de classe C^2 à support compact et tendant vers zéro à l'infini $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Si T est un temps d'arrêt d'espérance finie alors on a la formule de Dynkin

$$\mathbb{E}_x(f(X(T))) = f(x) + \mathbb{E}_x\left(\int_0^T Af(X(s)) ds\right)$$

En prenant $T = t$, on voit que $u(t, x) = \mathbb{E}_x(f(X(t)))$ est différentiable en t et que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathbb{E}_x(Af(X(T)))$$

Sous les mêmes hypothèses, à savoir $X(T)$ est une diffusion d'Itô de générateur A , $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ et $u(t, x) = \mathbb{E}_x(f(X(t)))$, on démontre l'équation de Kolmogorov rétrograde

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au$$

si $V(x)$ désigne une fonction continue bornée (un potentiel) et si on pose

$$v(t, x) = \mathbb{E}_x\left(f(X(t)) \exp\left(-\int_0^t V(X(s)) ds\right)\right)$$

alors, avec les mêmes hypothèses et les mêmes notations, on a la formule de Feynman-Kac

$$\frac{\partial v}{\partial t} = Av - Vu$$



Schémas numériques et stabilité des EDS

Dans ce chapitre nous décrivons des méthodes numériques pour la résolution d'équations différentielles stochastiques, notamment on utilise les différents schémas classiques (Euler, Milstein, Platen) pour approcher numériquement ces équations. Ainsi nous étudions la vitesse de convergence et la stabilité de ces schémas et nous donnerons quelques exemples sur ces méthodes en finance.

3.1 Schémas d'Euler

On s'intéresse au schéma d'Euler appliqué à l'EDS

$$dX(t) = a(t, X(t)) dt + b(t, X(t)) dB(t), \quad X(0) = X_0 = x \in \mathbb{R}^n \quad (3.1)$$

En général, la solution de (3.1) n'a pas une forme aussi simple et l'on est obligé de recourir à une approximation de X qui correspond à une discrétisation en temps de l'équation (3.1).

On se donne une subdivision de $[0, T]$

$$\pi^n = (t_0, \dots, t_k, \dots, t_n) \text{ avec } t_k = kT/n$$

on notera $\Delta^n t = T/n$ et $\Delta^n B_{k+1} = B(t_{k+1}) - B(t_k)$. L'idée de la discrétisation d'Euler est très simple. Pour tout $k = 1, \dots, n$, on a :

$$\begin{aligned} X(t_k) &= X(t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} a(X(s)) ds + \int_{t_{k-1}}^{t_k} b(X(s)) dB_s \\ &\simeq X(t_{k-1}) + a(X(t_{k-1})) \Delta^n t + b(X(t_{k-1})) \Delta^n B_k \end{aligned}$$

ce qui conduit à la construction du schéma

$$\begin{cases} X^n(0) &= X_0 \\ X^n(t_k) &= X^n(t_{k-1}) + a(X^n(t_{k-1})) \Delta^n t + b(X^n(t_{k-1})) \Delta^n B_k, \quad k = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (3.2)$$

C'est l'équivalent stochastique du schéma d'Euler utilisé pour les équations différentielles ordinaires.

La simulation de X_n se ramène à la simulation des accroissements de B , où $\Delta^n B_k \sim N(0, \Delta^n t I_d)$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

On introduit maintenant un schéma d'Euler "continu" de ce schéma discret

$$X^n(t) = X^n(t_k) + a(X^n(t_k))(t - t_k) + b(X^n(t_k))(B(t) - B(t_k)), \text{ pour } t \in [t_{k-1}, t_k]$$

ce que l'on peut réécrire sous forme intégrale

$$X^n(t) = X_0 + \int_0^t a(X^n(s)) ds + \int_0^t b(X^n(s)) dB_s. \quad (3.3)$$

Le schéma d'Euler converge en moyenne quadratique vers $X(t)$ quand $\Delta^n t$ tend vers 0. On démontre le résultat suivant

THÉORÈME 3.1.1 Soit $B(t)$ un mouvement Brownien standard à valeurs dans \mathbb{R}^d . On suppose que les fonctions $a(t, x)$ et $b(t, x)$ vérifient les conditions d'existence d'une solution trajectorielle, c'est-à-dire que pour tout $t \in [0, T]$ et pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$, on a

(1) Condition de lipschitz

$$|a(t, x) - a(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)| \leq C|x - y|$$

(2) *Condition de croissance*

$$|a(t, x)| + |b(t, x)| \leq C(1 + |x|)$$

(3) *pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$, la condition hölderienne suivante est vérifiée pour $\alpha \geq 1/2$*

$$|a(t, x) - a(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)| \leq C(1 + |x|)|t - s|^\alpha$$

alors pour tout $p \in [1, +\infty[$, on a

$$\mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t - x_t|^{2p} \right) \leq \frac{C_p}{n^p}$$

On déduit de ce théorème que la vitesse de convergence forte du schéma d'Euler est $1/2$ et on démontre que la vitesse de convergence faible vaut 1.

Autrement dit que pour toute fonction polynomiale, on a

$$|\mathbb{E}f(X_T) - \mathbb{E}f(x_{N_h})| \leq \frac{C}{n}$$

La mauvaise convergence est due à la présence de l'intégrale stochastique dont la majoration est trop grossière. Pour remédier à cela ; on a imaginé de prendre, comme dans le cas déterministe, un développement de Taylor. C'est qui est fait dans le schéma de Milstien que nous allons voir maintenant.

3.2 Schémas de Milstein

Dans la présentation du schéma d'Euler, on a utilisé l'approximation

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} b(X(s)) dB(s) \sim b(X(t_{k-1})) (B(t_k) - B(t_{k-1}))$$

mais on aurait pu utiliser une approximation d'ordre supérieur. Pour fixer les idées ,on se place en dimension 1 et on suppose que $b = 0$. Alors ,pour $s \in (t_{k-1}, t_k]$

$$\begin{aligned} b(X(s)) &= b \left(X(t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^s b(X(t)) dB(t) \right) \\ &\sim b(X(t_{k-1}) + b(X(t_{k-1})) (B(s) - B(t_{k-1}))) \\ &\quad \text{utilisons une formule de Taylor à l'ordre 1} \\ &\sim b(X(t_{k-1})) + b'(X(t_{k-1})) b(X(t_{k-1})) (B(s) - B(t_{k-1})) \end{aligned}$$

On utilise maintenant la formule d'Itô appliquée à $(B(s) - B(t_{k-1}))^2$, on obtient

$$(B(s) - B(t_{k-1}))^2 = 2 \int_{t_{k-1}}^{t_k} (B(s) - B(t_{k-1})) dB(s) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} ds;$$

on en déduit que

$$\begin{aligned} \int_{t_{k-1}}^{t_k} b(X(s)) dB(s) &\sim b(X(t_{k-1})) (B(t_k) - B(t_{k-1})) \\ &+ \frac{1}{2} b'(X(t_{k-1})) b(X(t_{k-1})) [(B(t_k) - B(t_{k-1}))^2 - \Delta^n t] \end{aligned}$$

Le terme de dérive a ayant une contribution inférieure dans l'erreur d'approximation par rapport au terme de diffusion, il n'est pas nécessaire de la corriger. Pour $d = 1$, on obtient donc le schéma d'approximation suivant :

$$\begin{cases} X^n(0) = X_0 \\ X^n(t_k) = X^n(t_{k-1}) + a(X^n(t_{k-1})) \Delta^n t + b(X^n(t_{k-1})) (B(t_k) - B(t_{k-1})) \\ \quad + \frac{1}{2} b'(X^n(t_{k-1})) b(X^n(t_{k-1})) [(B(t_k) - B(t_{k-1}))^2 - \Delta^n t], \quad k = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (3.4)$$

Le schéma précédent est connu sous le nom de schéma de Milstein.

On démontre que la vitesse de convergence forte ou faible du schéma de Milstein vaut 1. Ce schéma donc meilleur que d'Euler.

3.3 Schémas de Platen

Dans le schéma de Platen, on utilise l'approximation des incréments du brownien et de leur intégrale. On pose

$$\Delta^n U_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} (B(s) - B(t_k)) ds$$

Le schéma est de la forme

$$\begin{aligned} X^n(t_{k+1}) &= X^n(t_k) + \Delta^n t \cdot a_k + b_k \Delta^n B_k + \frac{1}{2} b_k \partial_x b_k ((\Delta^n B_k)^2 - \Delta^n t) \\ &+ b_k \partial_x b_k \Delta^n U_k + \left(a_k \partial_x a_k + \frac{1}{2} b_k^2 \partial_{xx} b_k \right) (\Delta^n t \Delta^n B_k - \Delta^n U_k) \\ &+ \frac{1}{2} (\partial_{xx} b_k b_k + (\partial_{xx} b_k)^2) \left(\frac{1}{3} (\Delta^n B_k)^2 - \Delta^n t \right) b_k \Delta^n B_k \\ &+ \frac{1}{2} \left(a_k \partial_x a_k + \frac{1}{2} b_k^2 \partial_{xx} b_k \right) (\Delta^n t)^2 \end{aligned}$$

avec

$$a_k = a(t_k, X^n(t_k)), \quad b_k = \sigma(t_k, X^n(t_k))$$

La convergence de ce schéma est en $O((\Delta^n t)^3)$.

3.4 Stabilité stochastique

On considère l'équation

$$dX_t = a(t, X_t) dt + b(t, X_t) dB_t$$

où $B_t = (B_t^1, \dots, B_t^m)^T$ est un brownien m -dimensionnel standard ($B(0) = 0$), $a = (a_1, \dots, a_n)$ un vecteur de \mathbb{R}^n , $b = (b_{ij})$ une matrice réelle $n \times m$ et t représente le temps $t \geq 0$. On suppose que a et b satisfont les conditions d'existence des solutions de l'équation d'Itô avec pour condition initiale $X(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $a(t, 0) = b(t, 0) = X(t, 0) = 0$. Le processus X_t est centré et on cherche à étudier son comportement dans un voisinage de l'origine.

DÉFINITION 3.4.1 La solution zéro est dite stochastiquement stable s'il existe $\delta = \delta(r, \epsilon) > 0$, pour tout $r > 0$ et $\epsilon > 0$, tels que pour tout x_0 , $|x_0| < \delta$, on ait

$$\mathbb{P}(\{\omega : |X_t(x_0)| < r, \quad \forall t \geq 0\}) > 1 - \epsilon$$

DÉFINITION 3.4.2 La solution zéro est dite asymptotiquement stochastiquement stable si la solution zéro est stochastiquement stable et s'il existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, pour tout $\epsilon > 0$, tel que pour tout x_0 , $|x_0| < \delta$, on ait

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega : \lim_{t \rightarrow \infty} |X_t(x_0)| = 0\right\}\right) > 1 - \epsilon$$

DÉFINITION 3.4.3 Pour une fonction $V(x)$ aux dérivées partielles secondes continues en x , l'opérateur L est défini par

$$LV = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial V}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (bb^T)_{i,j} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}$$

et l'opérateur H est donné par

$$HV = \sum_{i,j=1}^n (bb^T)_{i,j} \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial V}{\partial x_j}$$

On appelle exposant de Lyapunov associé à l'équation d'Itô la quantité

$$\Lambda = \limsup \frac{1}{t} \log |X_t(x_0)|$$

THÉORÈME 3.4.1 (Mao) *S'il existe une fonction $V(x)$ de classe $C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, une fonction réelle $u(t)$ et quatre constantes $p > 0$, $\kappa > 0$, $\tau > 0$, $\eta < \tau/2$ vérifiant*

- (1) $X_t(x_0) \neq 0$, p.s. pour $t \geq 0$, pour tout $x_0 \neq 0$
- (2) $V(x) \geq |x|^p$ pour $x \neq 0$
- (3) $LV(x) \leq \eta u(t) V(x)$ p.s. pour tout $x \neq 0$
- (4) $HV(x) \geq \tau u(t) V(x)^2$ p.s. pour tout $x \neq 0$
- (5) $\liminf \frac{1}{t} \int_0^t u(s) ds \geq \kappa$ p.s.

alors la solution de l'équation stochastique satisfait presque sûrement l'inégalité

$$\Lambda = \limsup \frac{1}{t} \log |X_t(x_0)| \leq \frac{\kappa}{p} \left(\eta - \frac{\tau}{2} \right)$$

La fonction V est appelée fonction de Lyapunov.

En particulier, comme on a toujours $HV(x) \geq 0$ on peut choisir $\tau = 0$.

Si de plus $\eta < 0$ et $u(t) = 1$, alors le théorème se simplifie comme suit.

THÉORÈME 3.4.2 *S'il existe une fonction $V(x)$ de classe $C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ et deux constantes $p > 0$ et $\eta < 0$ vérifiant*

- (1) $X_t(x_0) \neq 0$, p.s. pour $t \geq 0$, pour tout $x \neq 0$
- (2) $V(x) \geq |x|^p$ pour $x \neq 0$
- (3) $LV(x) \leq \eta V(x)$ p.s. pour tout $x \neq 0$

alors la solution de l'équation stochastique satisfait presque sûrement l'inégalité

$$\Lambda = \limsup \frac{1}{t} \log |X_t(x_0)| \leq \eta/p$$

3.5 Applications en Finance

3.5.1 Schéma d'Euler

Exemple 1 On se place dans le modèle de Black-Scholes :

$$\begin{cases} dX(t) &= \tau X(t) dt + \sigma X(t) dB(t), \\ X_0 &= x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

où $\tau > 0$ et $\sigma > 0$. Si on considère une subdivision de pas $h = \frac{T}{n}$, le schéma d'Euler de la diffusion $X(t)$ s'écrit

$$X^n(0) = 0, \quad X^n((k+1)h) = X^n(kh) \{1 + \tau h + \sigma(B((k+1)h) - B(kh))\}.$$

Pour cette diffusion, on préférera en fait résoudre l'EDS et simuler directement $(X(t_1), \dots, X(t_n))$. En effet cette dernière simulation n'engendre pas d'erreur de discrétisation contrairement à l'utilisation des schémas.

Exemple 2 On considère un processus d'Ornstein Uhlenbeck

$$\begin{cases} dX(t) &= cX(t) dt + \sigma dB(t), \\ X_0 &= x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

où $c > 0$ et $\sigma > 0$. Ecrire le schéma d'Euler en temps continu $X^n(t)$ de $X(t)$ sur une discrétisation de pas $h = \frac{T}{n}$. Calculer la loi de $X^n(t) - X(t)$ pour t fixé et montrer que $\mathbb{E}|X^n(t) - X(t)|^2 = \mathcal{O}(h^2)$.

Solution. Le schéma d'Euler $X^n(kh)$ du processus $X(t)$ s'écrit

$$X^n((k+1)h) = X^n(kh) (1 + ch) + \sigma(B((k+1)h) - B(kh))$$

Ainsi

$$X^n(kh) = (1 + ch)^k x + \sigma \sum_{i=1}^k (1 + ch)^{k-i} (B(ih) - B((i-1)h)).$$

Pour $t \in [kh, (k+1)h]$, la version en temps continu du schéma d'Euler s'écrit

$$\begin{aligned} X^n(t) &= (1 + c(t - kh))(1 + ch)^k x + \sigma(B(t) - B(kh)) \\ &+ \sigma \sum_{i=1}^k (1 + c(t - kh))(1 + ch)^{k-i} (B(ih) - B((i-1)h)). \end{aligned}$$

On sait que $X(t)$ s'écrit

$$X(t) = xe^{ct} + \sigma \int_0^t e^{c(t-u)} dB_u.$$

On peut donc calculer la différence $|X^n(t) - X(t)|$ pour $t \in [kh, (k+1)h]$.

$$|X^n(t) - X(t)| \leq x \left| (1 + c(t - kh))(1 + ch)^k - e^{ct} \right| + \left| \sigma \int_0^t (1 + c(t - kh))(1 + ch)^{(k-i)} \mathbf{I}_{\{i \leq u < i+1 \leq k\}} - e^{c(t-u)} dB_u \right|$$

d'où en prenant l'espérance du carré

$$\mathbb{E} |\bar{X}^n(t) - X(t)|^2 \leq 2x^2 \left| (1 + c(t - kh))(1 + ch)^k - e^{ct} \right|^2 + 2\sigma^2 \int_0^t \left((1 + c(t - kh))(1 + ch)^{(k-i)} \mathbf{I}_{\{i \leq u < i+1 \leq k\}} - e^{c(t-u)} \right)^2 du$$

Remarquons que $(1 + c(t - kh))(1 + ch)^{(k-i)} \mathbf{I}_{\{i \leq u < i+1 \leq k\}}$ peut se réécrire $(1 + c(t - \lfloor \frac{t}{h} \rfloor h))(1 + ch)^{\lfloor \frac{t-u}{h} \rfloor}$. De plus $\lfloor \frac{t-u}{h} \rfloor = \frac{t-u}{h} + \epsilon$ où $\epsilon < 1$. Un développement limité au premier ordre permet de trouver

$$\begin{aligned} (1 + c(t - \lfloor \frac{t}{h} \rfloor h))(1 + ch)^{\lfloor \frac{t-u}{h} \rfloor} &= (1 + \mathcal{O}(h)) e^{c(\frac{t-u}{h} + \epsilon)(ch + \mathcal{O}(h^2))} \\ &= e^{c(t-u)} (1 + \mathcal{O}(h)). \end{aligned}$$

On montre ainsi que $\mathbb{E} |X^n(t) - X(t)|^2 = \mathcal{O}(h^2)$.

3.5.2 Schéma de Milstein

Exemple 3 Dans le modèle de Black-Scholes en dimension 1, définie par

$$\begin{cases} dX(t) &= X(t) (\tau dt + \sigma dB(t)), \\ X_0 &= x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Le schéma de Milstein s'écrit

$$\begin{cases} X^n(0) &= X_0 \\ X^n(t_k) &= X^n(t_{k-1}) \left\{ 1 + (\tau - \sigma^2/2) \Delta^n t + \sigma (B(t_k) - B(t_{k-1})) + \frac{1}{2} \sigma^2 (B(t_k) - B(t_{k-1}))^2 \right\}. \end{cases}$$



Conclusion

Comme pour les EDO classiques, on ne sait pas en général donner des solutions exactes pour les EDS, les schémas numériques (Euler, Milstein, Platen) permettent d'obtenir des approximations numériques des trajectoires des EDS. Appliquées à la finance, ces schémas permettent de calculer les prix des divers actifs financiers, qu'on ne peut pas expliciter de façon analytique.



4.1 Modèle de Black et Scholes

4.1.1 Définition du modèle

Pour pouvoir calculer ou estimer le prix des options, il faut évidemment construire un modèle pour le prix de l'actif $(S_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$. Les prix des divers actifs sur un marché sont des processus aléatoires définis sur l'espace de probabilité filtré

$$\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, \mathbb{P}\right)$$

où $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est la filtration naturelle d'un mouvement brownien $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ standard (sous \mathbb{P}).

On peut dans un premier temps imaginer que le prix $(S_t)_{t \in [0, T]}$ d'un actif satisfait une équation du type

$$dS_t = \mu dt + \sigma dB_t.$$

Mais, la solution de cette équation différentielle stochastique prend des valeurs négatives, ce qui n'est pas cohérent pour modéliser un prix ! Par ailleurs, σ qui représente la variance des accroissements est constante alors qu'en pratique on observe que, lorsque le prix d'un actif augmente, la variabilité augmente également. Le modèle de Black et Scholes suppose que le logarithme de S_t satisfait l'E.D.S

$$d \log(S_t) = a dt + \sigma dB_t.$$

En appliquant la formule d'Itô à la fonction exponentielle, on constate que

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t), \quad (4.1)$$

où $\mu = a + \sigma^2/2$. Ainsi, le prix $(S_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un brownien géométrique donné par

$$S_t = \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t \right] = \exp[at + \sigma B_t].$$

REMARQUE 4.1.1 La filtration engendrée par $(S_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est en fait la filtration naturelle du mouvement brownien $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$. Par ailleurs, $(S_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est bien un processus de Markov.

On note S_t^0 la valeur en t d'un actif sans risque (capitalisation à la banque) avec rendement τ . Alors,

$$dS_t^0 = \tau S_t^0 dt.$$

Si $\sigma = 0$, un raisonnement d'arbitrage permet de montrer que $\mu = \tau$. Dans le cas général (a priori $\sigma \neq 0$), il existe une probabilité \mathbb{Q} équivalente à la probabilité historique \mathbb{P} (probabilité qui nous a permis de modéliser le prix de l'actif risqué) sous

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$$

avec $(W_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un mouvement brownien standard sous \mathbb{Q} . Ainsi, pour tout $t \in [0, T]$,

$$S_t = \exp \left[\left(\tau - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right].$$

La probabilité \mathbb{Q} est appelée **probabilité risque-neutre** ou **mesure martingale**. Le théorème de Girsanov permet sa construction ainsi que celle de $(W_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$.



Bibliographie

- [1] B. OKSENDAL. Stochastic Differential Equations, Springer, 2005.
- [2] D. LAMBERTON AND B. LAPEYRE. Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance. Ellipses Édition Marketing, Paris, second edition, 1997. ISBN2-7298-4782-0.
- [3] D. REVUZ AND M. YOR. Continuous Martingales and Brownian Motion. Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [4] F. COMETS ET T. MEYRE. Calcul stochastique et modèles de diffusion. Dunod, 2006.
- [5] I. KARATZAS ET S.E. SHREVE. Methods of mathematical finance, Applications of Mathematics, Stochastic Modelling and Applied Probability, 39, Springer-Verlag, New York, 1999.
- [6] I. KARATZAS ET S.E. SHREVE. Brownian Motion and Stochastic Calculus. Graduate Texts in Mathematics, 113, Springer-Verlag, New York, 1998
- [7] N. BOULEAU ET D. LEPINGLE. Numerical methods for stochastic processes, Wiley Series in Probability and Mathematical statistics 1994..

- [8] O. FAURE. Simulation du Mouvement Brownien et des Diffusions. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1992.
- [9] P. GLASSERMAN. Monte Carlo methods in financial engineering. Spring
- [10] P.W. GLYNN. Optimization of stochastic systems via simulation. In Proceedings of the 1989 Winter simulation Conference, pages 90–105. San Diego, Society for Computer Simulation, 1989.
- [11] G. DA PRATO ET L. TUBARO. (eds) Stochastic Partial Differential Equations and Applications, Tome VII, CRC Press, 2006.
- [12] D. FOATA. Calcul des probabilités, Paris : Dunod, 1998.
- [13] J. JACOD. Calcul stochastique et problèmes de Martingales, LNM, 714, Paris : Springer, 1980.