République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : EDP Et **Analyse numérique**

Par :

Zeroulou Nesrine

Intitulé

Opérateur des ondes

Dirigé par : Benarioua Khadir

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. Frioui Assia	MCA	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. Benarioua Khadir	MCA	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. Boussetila Nadjib	MCA	Univ-Guelma

Session Juillet 2019

Remerciements

Avant tout, je remercie **ALLAH** pour les innombrables choses dont il m'a fait cadeau, pour cette force, cette volonté et ce moral qui m'ont permis de mener à bien mes études.

J'exprime toute ma gratitude à M. BENARIOUA K. pour m'avoir proposé ce sujet et pour l'aide précieuse qu'il m'a apportée, à Mme. FRIOUI A. pour avoir accepté de présider le Jury, et à M. BOUSSETILA N. pour avoir accepté d'en faire partie.

Ma profonde reconnaissance à tous mes parents, ma mère, mon père, ma soeur et mon frère, qui ont été pour moi une source inépuisable d'encouragements.

Enfin, ma pensée va à tous mes camarades de la promotion 2019, pour les bons moments que nous avons passés ensemble.

Sur l'opérateur des ondes*

Nesrine ZEROULOU
Mémoire de Master en Mathématiques.
Université 08 mai 1945, Guelma.
Juin 2019.

Résumé : Dans ce mémoire, je me propose de reprendre en détail le chapitre 5 de [1] où il est question de rechercher la solution classique $u(x,t)$ du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta_x u &= w \\ u(.\,,0) &= f \\ \partial_t u(.\,,0) &= g \end{cases}$$

pour l'opérateur des ondes $\partial_t^2 - \Delta_x$ sur une région $\Omega_x \times \mathbb{R}_t$, où Ω_x est, soit un domaine borné de $\mathbb{R}_x^n$ (auquel cas il faut ajouter une condition de Dirichlet ou de Neuman), soit égal à $\mathbb{R}_x^n$ tout entier. Cette solution est de la forme $u = u_1 + u_2$ avec :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u_1 - \Delta_x u_1 &= 0 \\ u_1(.\,,0) &= f \\ \partial_t u_1(.\,,0) &= g \end{cases}, \qquad \begin{cases} \partial_t^2 u_2 - \Delta_x u_2 &= w \\ u_2(.\,,0) &= 0 \\ \partial_t u_2(.\,,0) &= 0 \end{cases}.$$

Dans le cas où Ω_x est $\mathbb{R}_x^n$ tout entier, et après avoir trouvé u_1, on pourra utiliser une version de la méthode de la variation des constantes, connue sous le nom de « **principe de Duhamel** », pour en déduire u_2, et pour déterminer u_1, on procèdera par deux méthodes différentes (Chacune avec ses avantages et ses inconvenients). La première méthode nous fournit une forme explicite de u_1 et une solution fondamentale pour $\partial_t^2 - \Delta_x$. Elle consiste à utiler un changement de variables dans le cas où $n = 1$, un changement de fonction inconnue qui nous ramène au cas où $n = 1$, lorsque n est impair ≥ 3, et la méthode dite de la descente qui réduit la question au cas où n est impair ≥ 3, si toutefois n est pair ≥ 2. Dans la deuxième méthode, la transformée de Fourier nous permet d'obtenir $\widehat{u}_1(\xi,t)$, mais il est difficile de dégager $u_1(x,t)$. On notera cependant que si $f, g \in L^2(\mathbb{R}_x^n)$, alors $u_1 \in L^2(\mathbb{R}_x^n \times [t_0, t_1])$, et si $f \in H^k(\mathbb{R}^n)$ et $g \in H^{k-1}(\mathbb{R}^n)$, alors $u_1 \in H^k(\mathbb{R}^n \times [t_0, t_1])$ où $k \in \mathbb{N}^*$ et $-\infty < t_0 < t_1 < \infty$. Enfin, si Ω_x est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, alors la méthode de séparation des variables nous donne l'unique solution du problème

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(x,t) - \Delta u(x,t) &= 0 & \forall (x,t) \in \Omega \times (0,\infty) \\ u(x\,,0) &= f(x) & \forall x \in \Omega \\ \partial_t u(x\,,0) &= g(x) & \forall x \in \Omega \\ u(x,t) &= 0 & \forall (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\infty) \end{cases}$$

sous forme d'une série dont le terme général est fonction des valeurs propres et des fonctions propres du problème de Dirichlet pour le Laplacien sur Ω_x.

*Document saisi à l'aide des logiciels TEX et ArabTEX (au format LATEX 2$_\varepsilon$).

مُلَخَّصٌ : فِي هٰذِهِ ٱلْمُذَكِّرَةِ، أُعِيدُ **بِٱلتَّفْصِيلِ** ٱلْبَابَ ٱلْخَامِسَ (§5) مِنْ [1] ، وَٱلْمُتَمَثِّلُ فِي ٱلْبَحْثِ عَنِ ٱلْحَلِّ (ٱلْكْلَاسِيكِي) $u(x,t)$ لِلْمَسْأَلَةِ :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t^2 u-\Delta_x u &=& w \\ u(.\,,0) &=& f \\ \partial_t u(.\,,0) &=& g \end{array}\right.$$

ٱلْمُسَمَّاةِ بِمَسْأَلَةِ كُوشِي، وَٱلْخَاصَّةِ بِمُؤَثِّرِ ٱلْأَمْوَاجِ $\partial_t^2-\Delta_x$ عَلَى ٱلنَّاحِيَةِ $\Omega_x\times\mathbb{R}_t$ ، حَيْثُ أَنَّ Ω_x هُوَ إِمَّا $\mathbb{R}^n$ أَوْ حَيِّزًا مَحْدُودًا مِنْهُ (وَفِي هٰذِهِ ٱلْحَالَةِ ٱلْأَخِيرَةِ، يَتَعَيَّنُ عَلَيْنَا، بَلْ يَجِبُ تَزْوِيدَ هٰتِهِ ٱلْمَسْأَلَةِ، إِمَّا بِشَرْطِ دِيرِيكْلِي، أَوْ بِشَرْطِ نُومَانْ). وَإِنَّهُ لَمِنَ ٱلْبَدِيهِي أَنَّ u يُكْتَبُ عَلَى ٱلشَّكْلِ $u=u_1+u_2$ حَيْثُ أَنَّ

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t^2 u_1-\Delta_x u_1 &=& 0 \\ u_1(.\,,0) &=& f \\ \partial_t u_1(.\,,0) &=& g \end{array}\right. ,\qquad \left\{\begin{array}{rcl} \partial_t^2 u_2-\Delta_x u_2 &=& w \\ u_2(.\,,0) &=& 0 \\ \partial_t u_2(.\,,0) &=& 0 \end{array}\right. ,$$

وَإِذَا كَانَ Ω_x هُوَ $\mathbb{R}^n$ ، وَٱسْتَطَعْنَا إِيجَادَ u_1 ، فَإِنَّهُ بِإِمْكَانِنَا إِسْتِنْتَاجَ u_2 بِإِسْتِعْمَالِ ٱلطَّرِيقَةِ ٱلشَّهِيرَةَ ٱلْمُتَمَثِّلَةَ فِي تَغْيِيرِ ٱلثَّوَابِتِ، وَٱلْمَعْرُوفَةِ بِمَبْدَإِ دُوهَامِيلْ، وَلِإِيجَادِ u_1 ، سَنَسْتَعْمِلُ طَرِيقَتَيْنِ مُخْتَلِفَتَيْنِ لِكُلٍّ مَزَايَاهَا وَ نَقَائِصَهَا : ٱلطَّرِيقَةُ ٱلْأُولَى تُعْطِينَا صُورَةً صَرِيحَةً لِ u_1 وَ حَلًّا أَسَاسِيًّا لِ $\partial_t^2-\Delta_x$ ، وَ يُرَادُ فِيهَا ٱلْبِدْءُ بِٱلْبَحْثِ عَنْ u_1 ، قَبْلَ كُلِّ شَيْءٍ لَمَّا $n=1$ ، وَ ذٰلِكَ بِإِسْتِبْدَالِ ٱلْمُتَغَيِّرَاتِ، ثُمَّ لَمَّا يَكُونُ n فَرْدِيًا أَكْبَرًا تَمَامًا مِنْ وَاحِدٍ وَ ذٰلِكَ بِإِسْتِبْدَالِ ٱلْمَجْهُولِ وَٱلرُّجُوعِ لِلْحَالَةِ ٱلْأُولَى، وَ أَخِيرًا إِذَا كَانَ n زَوْجِيًا أَكْبَرًا تَمَامًا مِنْ ٱلصِّفْرِ، فَفِيهَا نَسْتَنْتِجُ u_1 بِإِسْتِعْمَالِ ٱلتِّقْنِيَّةِ ٱلشَّهِيرَةِ ٱلْمُسَمَّاةِ بِطَرِيقَةِ ٱلْهُبُوطِ (أَوْ ٱلْإِنْحِدَارِ) وَٱلْمُتَمَثِّلَةِ فِي إِضَافَةِ مُتَغَيِّرٍ آخَرٍ وَٱلتَّحَوُّلِ لِلْحَالَةِ ٱلثَّانِيَةِ. أَمَّا ٱلطَّرِيقَةُ ٱلثَّانِيَةُ فَإِنَّهَا تَرْتَكِزُ أَسَاسِيًّا عَلَى تَحْوِيلِ فُورْيِي وَ تُمَكِّنُنَا مِنْ تَحْدِيدِ $\widehat{u_1}(\xi,t)$ ، لَكِنْ مِنَ ٱلصَّعْبِ $u_1(x,t)$ ، كَمَا تُبَيِّنُ لَنَا بِأَنَّهُ إِذَا كَانَتْ $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$ وَ $g\in L^2(\mathbb{R}^n)$ ، فَإِنَّ $u_1\in L^2(\mathbb{R}^n\times[t_0,t_1])$ ، وَ إِذَا كَانَتْ $f\in H^k(\mathbb{R}^n)$ وَ $g\in H^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ ، فَإِنَّ $u_1\in H^k(\mathbb{R}^n\times[t_0,t_1])$ حَيْثُ أَنَّ $k\in\mathbb{N}^*$ وَ $-\infty<t_0<t_1<\infty$.

أَخِيرًا، إِذَا كَانَ Ω_x حَيِّزًا مَحْدُودًا مِنْ $\mathbb{R}^n$ ، فَطَرِيقَةُ فَصْلِ ٱلْمُتَغَيِّرَاتِ تُمَكِّنُنَا مِنْ تَحْدِيدِ ٱلْحَلِّ ٱلْوَحِيدِ $u_1(x,t)$ لِلْمَسْأَلَةِ

$$\left\{\begin{array}{rcll} \partial_t^2 u(x,t)-\Delta u(x,t) &=& 0 & \forall (x,t)\in\Omega\times(0,\infty) \\ u(x\,,0) &=& f(x) & \forall x\in\Omega \\ \partial_t u(x\,,0) &=& g(x) & \forall x\in\Omega \\ u(x,t) &=& 0 & \forall (x,t)\in\partial\Omega\times(0,\infty) \end{array}\right.$$

وَ كِتَابَتِهِ عَلَى شَكْلِ مُتَسَلْسِلَةٍ حَدُّهَا ٱلْعَامْ تَابِعًا لِلْقِيَمِ وَٱلدَّوَالِّ ٱلذَّاتِيَّةِ لِمَسْأَلَةِ دِيرِيكْلِي لِمُؤَثِّرِ لَابْلَاص.

Table des matières

1 Rappels, Notations et Conventions 5
2 Introduction 11
3 Problème de Cauchy homogène pour l'opérateur des ondes 13
4 Problème de Cauchy non-homogène 38
5 L'analyse de Fourier pour l'opérateur des ondes 44
6 L'équation des ondes dans un domaine borné 45
7 Conclusion 48

1 Rappels, Notations et Conventions

Les notations sont celles des équations aux dérivées partielles.

Multi-indices

Lorsque n est un nombre entier strictement positif, $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$, et $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ est un n-multi-indice (*i.e* un n-uple de nombres entiers ≥ 0), on pose :

$$|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n$$

$$||x||=(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)^{1/2}$$

$$\alpha!=\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_n!$$

$$x^\alpha=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$$

$$\partial_j=\frac{\partial}{\partial x_j}\ \ (\text{pour } j=1,2,\dots,n)$$

$$\partial=(\partial_1,\partial_2,\dots,\partial_n)$$

$$\partial^\alpha=\partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}\ldots\partial_n^{\alpha_n}$$

$$D_j=\frac{1}{i}\partial_j\ \ (\text{pour } j=1,2,\dots,n,\ \text{et } i^2=-1)$$

$$D=\frac{1}{i}\partial$$

$$D^\alpha=D_1^{\alpha_1}D_2^{\alpha_2}\ldots D_n^{\alpha_n}$$

de telle sorte que, pour une fonction f suffisamment différentiable, la formule de Taylor s'écrit :

$$f(x+h)=\sum_{|\alpha|<N}\partial^\alpha f(x)\frac{h^\alpha}{\alpha!}+O(||h||^N).$$

Fonctions test et distributions

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, K une partie compacte de Ω, k un entier naturel, et rappelons que :

• $\mathscr{C}^k(\Omega)$ est l'espace des fonctions réelles ou complexes, k-fois continûment différentiables sur Ω. C'est un espace de Fréchet [1] pour la topologie définie par la famille de semi-normes $(N_{K,k})_K$ où K décrit les compacts de Ω et,

$$\forall f \in \mathscr{C}^k(\Omega), \quad N_{K,k}(f) = \sup_{\substack{x\in K \\ |\alpha|\leq k}} |\partial^\alpha f(x)|.$$

• $\mathscr{C}_K^k(\Omega)$ est l'espace des fonctions réelles ou complexes, k-fois continûment différentiables sur Ω, à supports [2] dans K. C'est un espace de Banach pour la norme $N_{K,k}$.

• $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$ $\big($parfois noté $\mathscr{E}(\Omega)\big)$ est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω $\big(\mathscr{C}^\infty(\Omega) = \cap_{k=0}^\infty \mathscr{C}^k(\Omega)\big)$. C'est un espace de Fréchet pour la topologie définie par la famille de semi-normes $(N_{K,k})_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ K\Subset\Omega}}$.

• $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ $\big($également noté $\mathscr{D}(\Omega)\big)$ est l'espace des fonctions réelles ou complexes, indéfiniment différentiables sur Ω, à support compact. Par définition, une application sur $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ est continue si, et seulement si, sa restriction à $\mathscr{C}_K^\infty(\Omega)$ est continue pour tout compact $K \Subset \Omega$.

• $\mathscr{C}^{-\infty}(\Omega)$ $\big($ou $\mathscr{D}'(\Omega)\big)$ est le dual topologique de $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$; c'est l'espace des distributions sur Ω. Sur $\mathscr{C}^{-\infty}(\Omega)$, on dispose de plusieurs topologies : la topologie faible, qui est la topologie de la convergence simple sur $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$, et la topologie forte, qui est celle de la convergence uniforme sur les parties bornées de $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ $\big($ une partie B de $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ est bornée s'il existe un compact $K \Subset \Omega$ tel que $B \subset \mathscr{C}_K^\infty(\Omega)$ et, pour tout entier $k \geq 0$, $N_{K,k}(B) = \sup_{\varphi\in B} N_{K,k}(\varphi) < \infty\big)$. La topologie faible (resp. forte) est définie par la famille de semi-normes $(p_F)_F$ telle que :

$$\forall T \in \mathscr{C}^{-\infty}(\Omega), \quad p_F(T) = \sup_{\varphi\in F} |\langle T, \varphi\rangle| \tag{1}$$

où F parcourt l'ensemble des parties finies (resp. des parties bornées) de $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$. La topologie forte est, comme son nom l'indique, (vraiment) plus fine que la topologie faible :

1. Un espace de Fréchet est un espace **localement convexe** (*i.e* dont la topologie est définie par une famille de semi-normes $(p_\alpha)_{\alpha\in I}$ qui sépare les points, c-à-d. telle que si $p_\alpha(x) = 0$ pour tout $\alpha \in I$, alors $x = 0$), **métrisable** (*i.e* de topologie définie par une famille dénombrable de semi-normes) et **complet**.
2. Le support d'une fonction f (noté Supp f) est le plus petit ensemble fermé dans le complémentaire duquel f est nulle.

Une **famille** qui converge faiblement ne converge pas toujours fortement. Cependant on a le résultat (qui a l'air miraculeux) :

> Si $(T_n)_n$ est une **suite** de distributions qui converge simplement vers une limite T, alors T est une distribution, et T_n tend fortement vers T. (2)

• $\mathscr{E}'(\Omega)$ est le dual topologique de $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$; c'est l'espace des distributions à supports compacts sur Ω.

• $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur $\mathbb{R}^n$ à décroissance rapide ainsi que leurs dérivées de tout ordre. $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ si, et seulement si :

$$f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ et, } \forall N \in \mathbb{N}, \forall \beta \in \mathbb{N}^n, (1+|x|)^N \partial^\beta f \text{ est bornée sur } \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

ce qui équivaut à

$$f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ et, } \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \forall \beta \in \mathbb{N}^n, x^\alpha \partial^\beta f \text{ est bornée sur } \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

La topologie naturelle de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, et qui en fait un espace de fréchet, est celle définie (par exemple) par la famille de semi-normes :

$$p_N(f) = \sup_{\substack{|\beta| \le N \\ x \in \mathbb{R}^n}} (1+|x|)^N |\partial^\beta f(x)|, \tag{5}$$

• $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ est le dual topologique de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$: C'est l'espace (de Schwartz) des distributions tempérées. Il est muni de la topologie duale faible, ou de la topologie duale forte.

Produit de convolution

Si f et g sont deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}^n$, leur produit de convolution est la fonction sur $\mathbb{R}^n$, notée $f * g$, et définie par :

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y \left(= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y = (g*f)(x) \right), \tag{6}$$

Si h, φ et ψ sont des fonctions continues (ou mesurables) bornées sur $\mathbb{R}^n$, on a d'après le théorème de Fubini :

$$\langle \varphi * \psi, h \rangle = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} h(x+y)\varphi(x)\psi(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{7}$$

Les principales propriétés de la convolution sont :

$$u * v = v * u \tag{8}$$

$$\delta * v = v * \delta = v \tag{9}$$

$$\partial^\alpha (u * v) = (\partial^\alpha u) * v = u * (\partial^\alpha v) \tag{10}$$

$$\mathrm{Supp}\,(u * v) \subset \mathrm{Supp}\, u + \mathrm{Supp}\, v \tag{11}$$

et si $u \in \mathscr{C}^{-\infty}$, $v \in \mathscr{C}^{\infty}$, $\varphi \in \mathscr{C}_0^{\infty}$, et u ou v est à support compact, alors :

$$\langle u * v, \varphi \rangle = \langle u, v * \check{\varphi} \rangle \tag{12}$$

$$u * v \in \mathscr{C}^{\infty} \text{ et } (u * v)(x) = \langle u, \tau_x \check{v} \rangle \tag{13}$$

Sachant que $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$ et $\tau_x \check{v}(t) = v(x - t)$.

Transformée de Fourier

La transformée de Fourier $\widehat{f}$ (notée aussi $\mathscr{F} f$) d'une fonction f intégrable sur $\mathbb{R}^n$ est définie par la formule :

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x) dx. \tag{14}$$

On démontre aisément que

$$\mathscr{F} \text{ est linéaire,} \tag{15}$$

que

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}^n), \quad \widehat{f} \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^n) \text{ (lemme de Riemann-Lebesgue),} \tag{16}$$

et que quelles que soient f et g dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) g(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \widehat{g}(x) dx \text{ (théorème du transfert),} \tag{17}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g}(x) dx \text{ (th. de Plancherel-Parseval).} \tag{18}$$

On démontre également que

$$\mathscr{F} \text{ est continue de } L^1 \longrightarrow L^\infty, \tag{19}$$

et que

$$\mathscr{F} \text{ induit un isomorphisme de } \mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{S} \tag{20}$$

$$\text{qui se prolonge en un isomorphisme de } \mathscr{S}' \longrightarrow \mathscr{S}' \tag{21}$$

$$\text{et en une isométrie de } L^2 \longrightarrow L^2. \tag{22}$$

Par définition, la transformée de Fourier d'une distribution tempérée $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ est la distribution tempérée $\widehat{u}$ telle que

$$\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n), \quad \langle \widehat{u}, \varphi \rangle = \langle u, \widehat{\varphi} \rangle. \tag{23}$$

L'isomorphisme inverse $\mathscr{F}^{-1}$ est la cotransformée de Fourier notée aussi $\overline{\mathscr{F}}$:

$$[\mathscr{F}^{-1} f](x) = [\overline{\mathscr{F}} f](\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} f(x) dx. \tag{24}$$

Enfin, la transformation de Fourier jouit des propriétés (dites d'échange) suivantes :

$$\forall f, g \in L^1(\mathbb{R}^n), \quad \mathscr{F}(f * g) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} (\mathscr{F} f)(\mathscr{F} g), \tag{25}$$

$$\forall f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n), \forall g \in L^1(\mathbb{R}^n), \quad \mathscr{F}(fg) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} [(\mathscr{F} f) * (\mathscr{F} g)], \tag{26}$$

$$\forall f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n), \forall g \in L^1(\mathbb{R}^n), \quad \mathscr{F}^{-1}(fg) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} [(\mathscr{F}^{-1} f) * (\mathscr{F}^{-1} g)], \tag{27}$$

$$\forall u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n), \quad \mathscr{F}(D^\alpha u) = \xi^\alpha \mathscr{F} u, \tag{28}$$

$$\forall u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n), \quad \mathscr{F}(P(D)u) = P(\xi) \mathscr{F} u \quad \text{et} \quad \mathscr{F}^{-1}(P(-D))u = P(\xi) \mathscr{F}^{-1} u, \tag{29}$$

$$\mathscr{F}(\delta) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \quad \text{et} \quad \mathscr{F}(1) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \delta. \tag{30}$$

Coordonnées polaires

Tout vecteur non nul x de $\mathbb{R}^n$ s'écrit de façon unique sous la forme $x = ry$ où r $(= ||x||)$ est un réel strictement positif et y $(= x/||x||)$ est un élément de la sphère unité $S_1(0)$ de $\mathbb{R}^n$. La formule

$$x = ry \quad (\text{avec } r > 0 \text{ et } y \in S_1(0)) \tag{31}$$

s'appelle représentation de x en coordonnées polaires, et la mesure de Lebesgue en ces coordonnées est donnée par

$$dx = r^{n-1} dr d\sigma_{1,0}(y) \tag{32}$$

où $d\sigma_{1,0}$ est la mesure sur la sphère unité (*cf.* Folland [], Théorème (2.49)).

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et intégrable, et si $B_r(x_0)$ (resp. $\partial B_r(x_0)$) est la boule (resp. sphère) de $\mathbb{R}^n$ de centre x_0 et de rayon r, alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_0^\infty \left(\int_{\partial B_r(x_0)} f(y) d\sigma_{r,x_0}(y) \right) dr \tag{33}$$

pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, et en particulier

$$\frac{d}{dr} \left(\int_{B_r(x_0)} f(x) dx \right) = \int_{\partial B_r(x_0)} f(y) d\sigma_{r,x_0}(y) \tag{34}$$

pour tout $r > 0$.

Théorème de la Divergence

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$ de classe $\mathscr{C}^1$, et F un champ de vecteurs de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\overline{\Omega}$. Alors

$$\int_{\partial\Omega} F(y)\cdot\nu(y)d\sigma(y) = \int_{\Omega}(\mathrm{div}F)(x)dx \tag{35}$$

où $d\sigma$ est la mesure sur $\partial\Omega$ et ν est un champ normal à $\partial\Omega$:

$$\nu(y) = \frac{y-x_0}{r} \quad \text{si} \quad \Omega = B_r(x_0). \tag{36}$$

Intégrale de surface

Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et S la surface de $\mathbb{R}^{n+1}$ définie en coordonnées cartésiennes par l'équation $x_{n+1} = \varphi(x_1,\ldots,x_n)$. Si $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur S, alors l'intégrale de f sur S est définie par l'intégrale multiple :

$$\int_S f(x,x_{n+1})d\sigma = \int_D f\big(x,\varphi(x)\big)\sqrt{1+|\nabla\varphi(x)|^2}dx \tag{37}$$

où $x = (x_1,\ldots,x_n)$, $dx = dx_1\ldots dx_n$, et D est le domaine de R^n dont l'intérieur est la projection de S sur R^n, parallèlement à l'axe des y_{n+1}.

L'intégrale de surface est linéaire, c'est-à-dire quelles que soient les fonctions f_1 et f_2, et quel que soit le réel λ,

$$\int_S (\lambda f_1 + f_2)(x,x_{n+1})d\sigma = \lambda\int_S f_1(x,x_{n+1})d\sigma + \int_S f_2(x,x_{n+1})d\sigma \tag{38}$$

et additive en ce sens que si $S = S_1 \cup S_2$ avec $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, alors :

$$\int_S f(x,x_{n+1})d\sigma = \int_{S_1} f(x,x_{n+1})d\sigma + \int_{S_2} f(x,x_{n+1})d\sigma \tag{39}$$

Formule de dérivation de la fonction $\varphi(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(t,s)ds$.

Une telle fonction φ est définie sur un domaine $\mathbb{D}$ tel que, quel que soit $t \in \mathbb{D}$, la fonction f soit intégrable sur $[a(t),b(t)]$. Si les fonctions a et b sont à leur tour dérivables sur $\mathbb{D}$ et $\partial f/\partial t$ continue sur le domaine décrit par (t,s), on peut établir la formule de dérivation suivante dite de **Leibniz** :

$$\varphi'(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(t,s)ds + f\big(t,b(t)\big)\frac{db}{dt}(t) - f\big(t,a(t)\big)\frac{da}{dt}(t), \tag{40}$$

en calculant $\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h}$.

2 Introduction

En gérnéral, une équation aux dérivées partielles linéaire d'ordre k sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ est une équation de la forme

$$Lu(x,t) = f(x,t) \tag{41}$$

où

$$L = \sum_{|\alpha|+j\leq k} a_{\alpha j}(x,t)\partial_x^\alpha \partial_t^j. \tag{42}$$

Le symbole principal de L est la fonction

$$\sigma(L)(x,t,\xi,\tau) = i^k \sum_{|\alpha|+j=k} a_{\alpha j}(x,t)\xi^\alpha \tau^j, \tag{43}$$

et son ensemble caractéristique est

$$\Sigma = \{(x,t,\xi,\tau) \big/ (\xi,\tau) \neq (0,0) \text{ et } \sigma(L)(x,t,\xi,\tau) = 0\}. \tag{44}$$

L'opérateur L est dit **strictement hyperbolique** si et seulement si, quel que soit $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, quel que soit $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, le polynôme en τ,

$$P(\tau) = \sum_{|\alpha|+j=k} a_\alpha(x,t)\xi^\alpha \tau^j \tag{45}$$

a k racines réelles distinctes.

Le problème aux limites le plus fondamental associé à ce type d'opérateurs est celui dit de Cauchy. Il consiste à trouver une fonction u sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ qui soit de classe $\mathscr{C}^{k-1}$ dans un voisinage d'une hypersurface[3] S de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, telle que

$$\begin{cases} Lu = f \\ u\big|_S = u_0 \\ \partial_\nu u\big|_S = u_1 \\ \qquad \vdots \\ \partial_\nu^{k-1} u\big|_S = u_{k-1} \end{cases} \tag{46}$$

Ici, toutes les considérations sont portées sur un voisinage ouvert d'un point de S, et nous pouvons donc supposer qu'après un changement de variables, ce point est l'origine, et qu'au voisinage de l'origine, S est définie par l'équation $t = 0$. Dans ce cas le problème précédent s'écrit sous la forme :

3. Une hypersurface de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ est une sous-variété de codimension un de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. En général, elle est localement définie par une équation de la forme $\varphi(x,t) = 0$, où φ est une fonction sans points critiques et suffisamment différentiable.

$$\begin{cases} Lu(x,t) = f(x,t) \\ u(x,0) = u_0(x) \\ \partial_t u(x,0) = u_1(x) \\ \quad\vdots \\ \partial_t^{k-1} u(x,0) = u_{k-1}(x) \end{cases} \tag{47}$$

On observe alors que si u est une fonction de classe $\mathscr{C}^r$ avec $r \geq k$, alors les données de Cauchy u_0, $u_1, \ldots, u_{k-1}$ déterminent sur S toutes les dérivées $\partial_x^\alpha \partial_t^j u$, lorsque $j < k$ et $|\alpha| + j \leq r$, en ce sens que :

$$\partial_x^\alpha \partial_t^j u(x,0) = \partial_x^\alpha u_j(x). \tag{48}$$

Ainsi, la seule quantité dans l'équation aux dérivées partielles $Lu = f$ qui soit inconnue sur S est $\partial_t^k u$. Pour que le problème de Cauchy soit « bien défini », on peut supposer que l'équation $Lu = f$ est résoluble par rapport à $\partial_t^k u$, c'est-à-dire que la fonction a_{0k} est non nulle dans un voisinage de $(x,0)$, donc non nulle en $(x,0)$, vu qu'elle est continue.

Le prototype des opérateurs hyperboliques est l'opérateur des ondes :

$$\Box = \partial_t^2 - \Delta \tag{49}$$

dont la variété caractéristique

$$\Sigma = \mathbb{R}_x^n \times \{(\xi,\tau) \big/ \tau^2 = |\xi|^2\} \tag{50}$$

joue un rôle très important dans la théorie. Comme il a été vu précédemment, la surface initiale S devrait être non caractérisque afin que l'on ait des résultats raisonnables. Cependant, cela ne suffit pas comme le montre si bien l'exemple suivant du problème de Cauchy pour le Laplacien sur $\mathbb{R}^2$, dû à Hadamard :

$$\begin{cases} \partial_1^2 u + \partial_2^2 u &= 0 \\ u(x_1,0) &= 0 \\ \partial_2 u(x,0) &= ke^{-\sqrt{k}} \sin kx_1 \end{cases}, \tag{51}$$

qui est non caractéristique, et dont la solution (obtenue par la méthode de séparation des variables) est :

$$u_k(x_1,x_2) = e^{-\sqrt{k}}(\sin kx_1)(\sinh kx_2). \tag{52}$$

On voit très bien que pour tout entier naturel j,

$$\partial_1^j u_k(x_1,0) = k^j e^{-\sqrt{k}} \sin\left(kx_1 - j\frac{\pi}{2}\right), \tag{53}$$

et cela montre que

$$\forall j \in \mathbb{N},\ |\partial_1^j u_k(x_1,0)| \leq k^j e^{-\sqrt{k}}, \tag{54}$$

et que, pour tout entier naturel j, la suite $\{\partial_1^j u_k\}_k$ converge uniformément vers la fonction identiquement nulle, sur la droite $S = \mathbb{R} \times \{0\}$.

D'un autre côté, si $x_2 \neq 0$, on peut vérifier que si $k \to \infty$, alors la solution u oscille de plus en plus vite, avec une amplitude de plus en plus grande, et qu'à la fin elle explose complètement.

Cet exemple montre clairement que la solution du problème de Cauchy peut ne pas dépendre continûment des données de Cauchy, pour la plupart des topologies usuelles sur les fonctions.

3 Problème de Cauchy homogène pour l'opérateur des ondes

Dans ce paragraphe, on construit la solution du problème de Cauchy homogène

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u &= 0 \\ u(x,0) &= f(x) \\ \partial_t u(x,0) &= g(x) \end{cases} . \tag{55}$$

On commence par le cas unidimensionnel qui est très simple. Pour ce faire, on pose :

$$\xi = x + t, \qquad \eta = x - t,$$

et on cherche $u(x,t)$ sous la forme :

$$u(x,t) = U(\xi,\eta)$$

Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) &= \partial_t[u(x,t)] \\ &= \partial_t[U(\xi,\eta)] \\ &= \partial_t\xi \cdot \partial_\xi U(\xi,\eta) + \partial_t\eta \cdot \partial_\eta U(\xi,\eta) \\ &= \partial_\xi U(\xi,\eta) - \partial_\eta U(\xi,\eta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_t{}^2 u(x,t) &= \partial_t[\partial_t u(x,t)] \\ &= \partial_t\big[\partial_\xi U(\xi,\eta) - \partial_\eta U(\xi,\eta)\big] \\ &= \partial_t\xi \cdot \partial_\xi^2 U(\xi,\eta) + \partial_t\eta \cdot \partial_{\eta\xi}^2 U(\xi,\eta) - \partial_t\xi \cdot \partial_{\xi\eta}^2 U(\xi,\eta) - \partial_t\eta \cdot \partial_\eta^2 U(\xi,\eta) \\ &= \partial_\xi^2 U(\xi,\eta) - \partial_{\eta\xi}^2 U(\xi,\eta) - \partial_{\xi\eta}^2 U(\xi,\eta) + \partial_\eta^2 U(\xi,\eta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_x u(x,t) &= \partial_x[u(x,t)] \\
&= \partial_x[U(\xi,\eta)] \\
&= \partial_x \xi \cdot \partial_\xi U(\xi,\eta) + \partial_x \eta \cdot \partial_\eta U(\xi,\eta) \\
&= \partial_\xi U(\xi,\eta) + \partial_\eta U(\xi,\eta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_x{}^2 u(x,t) &= \partial_x\big[\partial_x u(x,t)\big] \\
&= \partial_x\big[\partial_\xi U(\xi,\eta) + \partial_\eta U(\xi,\eta)\big] \\
&= \partial_x \xi \cdot \partial_\xi^2 U(\xi,\eta) + \partial_x \eta \cdot \partial_{\xi\eta}^2 U(\xi,\eta) + \partial_x \xi \cdot \partial_{\eta\xi}^2 U(\xi,\eta) + \partial_x \eta \cdot \partial_\eta^2 U(\xi,\eta) \\
&= \partial_\xi^2 U(\xi,\eta) + \partial \xi \eta^2 U(\xi,\eta) + \partial_{\eta\xi}^2 U(\xi,\eta) + \partial_\eta^2 U(\xi,\eta)
\end{aligned}$$

Et il s'ensuit alors que :

$$\partial_t{}^2 u(x,t) - \partial_x{}^2 u(x,t) = -2\partial_{\xi\eta}^2 U(\xi,\eta) - 2\partial_{\eta\xi}^2 U(\xi,\eta).$$

En supposant que

$$\partial_{\xi\eta}^2 U(\xi,\eta) = \partial_{\eta\xi}^2 U(\xi,\eta), \tag{56}$$

l'égalité

$$\partial_t{}^2 u - \Delta u = 0 \tag{57}$$

devient :

$$\partial_{\xi\eta}^2 U(\xi,\eta) = 0, \tag{58}$$

et la solution générale de (56) est donc :

$$U(\xi,\eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta), \tag{59}$$

où φ etψ sont deux fonctions quelconques sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent, la solution générale de l'équation (55) est de la forme :

$$u(x,t) = \varphi(x+t) + \psi(x-t) \tag{60}$$

avec les conditions de Cauchy

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ \partial_t u(x,0) = g(x) \end{cases} \tag{61}$$

ce qui implique que :

$$\begin{cases} \varphi(x) + \psi(x) = f(x) \\ \varphi'(x) - \psi'(x) = g(x) \end{cases} \tag{62}$$

donc

$$\begin{cases} \varphi(x) + \psi(x) = f(x) \\ \varphi(x) - \psi(x) = \varphi(0) - \psi(0) + \int_0^x g(s)ds \end{cases} \tag{63}$$

et par suite :

$$\begin{cases} \varphi(x) = \frac{1}{2}[\varphi(0) - \psi(0)] + \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}\int_0^x g(s)ds \\ \psi(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2}[\varphi(0) - \psi(0)] - \frac{1}{2}\int_0^x g(s)ds \end{cases} \tag{64}$$

d'où :

$$\begin{cases} \varphi(x+t) = \frac{1}{2}[\varphi(0) - \psi(0)] + \frac{1}{2}f(x+t) + \frac{1}{2}\int_0^{x+t} g(s)ds \\ \psi(x-t) = \frac{1}{2}f(x-t) - \frac{1}{2}[\varphi(0) - \psi(0)] - \frac{1}{2}\int_0^{x-t} g(s)ds \end{cases} \tag{65}$$

et en additionnant membre à membre ces deux égalités, on obtient la formule suivante, dite de d'Alembert :

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big[f(x+t) + f(x-t)\Big] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)ds. \tag{66}$$

Proposition 3.1. *On suppose que $n = 1$, et que u est donnée par la formule* (66)*.*

1. *Si $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$, $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$, alors :*
   (a) *$u \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$,*
   (b) *u est solution sur $\mathbb{R}^2$ de l'équation* (55)*, au sens classique du terme,*
2. *Si f et g sont localement intégrables (et plus généralement des distributions), alors :*
   (a) *u est une distribution sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$,*
   (b) *u est solution sur $\mathbb{R}^2$ de l'équation* (55)*, au sens des distributions,*

Démonstration : On a :

$$u = \frac{1}{2}[f \circ \chi_+ + f \circ \chi_-] + \frac{1}{2}[G \circ \chi_+ - G \circ \chi_-]$$

où $\chi_\pm(x,t) = x \pm t$, et où G est une primitive de g.

1. On suppose que $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$ et $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.
   (a) Comme les fonctions χ_+ et χ_- sont $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ car elles sont polynomiales, et que $G \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$, on conclut que $u \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$.
   (b) Il est clair que $u(x,0) = f(x)$, et La formule de Leibniz appliquée une première fois à (66) montre que $\partial_t u(x,0) = g(x)$ et une deuxième fois nous conduit à : $\partial_t^2 u = \partial_x^2 u$.
2. Admis.

La situation dans un espace de dimension $n > 1$ est beaucoup plus subtile. On commence d'abord par la construction de la solution dans le cas où n est impair, en utilisant une méthode astucieuse qui ramène le problème au cas de dimension un, et par la suite, on en déduira la solution dans le cas où n est impair. Comme dans le cas de dimension un, on étudiera d'abord le cas classique, en supposant que toutes les fonctions en question sont suffisamment dérivables, et on observera par la suite que tous les résultats restent valables dans le cas des distributions.

Soit Φ une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, et $r > 0$. On définit la moyenne sphérique $M_\Phi(x,r)$ de Φ comme étant la valeur moyenne de Φ sur la sphère $S_r(x)$ de centre x et de rayon r :

$$M_\Phi(x,r) = \frac{1}{|S_r(x)|}\int_{S_r(x)} \Phi(z)d\sigma_{r,x}(z)$$

où $|S_r(x)|$ est la surface de la sphère $S_r(x)$, et $\sigma_{r,x}$ est la mesure induite par la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$ sur cette sphère.

Si maintenant $B_r(x)$ est la boule de centre x et de rayon r, et si $|B_r(x)|$ est le volume de $B_r(x)$ et $\omega_n = |S_1(0)|$, alors :

$$\begin{aligned} |B_r(x)| &= |B_r(0)| \\ &= \int_{|z|\leq r} dz \\ &= \int_0^r \left[\rho^{n-1}d\rho\right]\omega_n \\ &= \frac{r^n}{n}\omega_n \end{aligned}$$

Mais, on sait que

$$|S_r(x)| = \frac{d}{dr}\left(|B_r(x)|\right) \tag{67}$$

ce qui fait que

$$|S_r(x)| = r^{n-1}\omega_n \tag{68}$$

donc :

$$M_\Phi(x,r) = \frac{1}{r^{n-1}\omega_n}\int_{S_r(x)} \Phi(z)d\sigma_{r,x}(z) \tag{69}$$

et par suite :

$$M_\Phi(x,r) = \frac{1}{\omega_n}\int_{S_1(0)} \Phi(x+ry)d\sigma_{1,0}(y). \tag{70}$$

Définition 3.1.

- *Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On appelle translation de vecteur u dans $\mathbb{R}^n$ l'application $\tau_u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ telle que, quel que soit $x \in \mathbb{R}^n$, $\tau_u(x) = x + u$.*
- *On appelle rotation de $\mathbb{R}^n$ toute application linéaire $r_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ telle que, quel que soit $x \in \mathbb{R}^n$, $r_A(x) = Ax$, où A est une matrice orthogonale de déterminant égal à 1.*

Proposition 3.2. *Le laplacien de $\mathbb{R}^n$ est invariant par les translations τ_u et les rotations r_A de $\mathbb{R}^n$, en ce sens que, si $\mathscr{T}_u$ et R_A sont les sont les opérateurs de $\mathscr{F}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ tels que $\mathscr{T}_u f = f \circ \tau_u$ et $R_A f = f \circ r_A$, alors*

$$\begin{cases} \mathscr{T}_u^{-1}\Delta\mathscr{T}_u = \Delta \\ R_A^{-1}\Delta R_A = \Delta \end{cases} \tag{71}$$

c'est-à-dire que :

$$\begin{cases} \mathscr{T}_{-u}\Delta\mathscr{T}_u = \Delta \\ R_{A^t}\Delta R_A = \Delta \end{cases} \tag{72}$$

ou encore :

$$\begin{cases} \Delta\mathscr{T}_u = \mathscr{T}_u\Delta \\ \Delta R_A = R_A\Delta \end{cases} \tag{73}$$

Démonstration : Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $\Phi \in \mathscr{F}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$. Pour tout $j = 1,\dots,n$, on a :

$$\begin{aligned} [(\partial_j\mathscr{T}_u)\Phi](x) &= [\partial_j(\mathscr{T}_u\Phi)](x) \\ &= [\partial_j(\Phi\circ\tau_u)](x) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j}\big[\Phi\big(\tau_u(x)\big)\big] \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j}\big[\Phi(x+u)\big] \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j}\big[\Phi(x_1+u_1,\dots,x_n+u_n)\big] \\ &= \sum_{i=1}^n\left[\frac{\partial}{\partial x_j}(x_i+u_i)\right]\big[(\partial_i\Phi)(x+u)\big] \\ &= (\partial_j\Phi)(x+u) \\ &= \big(\partial_j\Phi\big)\big(\tau_u(x)\big) \\ &= \big[(\partial_j\Phi)\circ\tau_u\big](x) \\ &= \big[\mathscr{T}_u(\partial_j\Phi)\big](x) \\ &= [(\mathscr{T}_u\partial_j)\Phi](x) \end{aligned}$$

donc,

$$\forall j = 1,\dots,n,\ \partial_j\mathscr{T}_u = \mathscr{T}_u\partial_j$$

ce qui implique que :

$$\forall j = 1,\dots,n,\ \partial_j^2\mathscr{T}_u = \partial_j\partial_j\mathscr{T}_u = \partial_j\mathscr{T}_u\partial_j = \mathscr{T}_u\partial_j^2$$

et par suite :

$$\Delta\mathcal{T}_u = \mathcal{T}_u\Delta.$$

On a aussi :

$$\begin{aligned}
\widehat{R_A\Delta\Phi}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}(R_A\Delta\Phi)(x)dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}\big[R_A(\Delta\Phi)\big](x)dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}\big[(\Delta\Phi)\circ r_A\big](x)dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}(\Delta\Phi)\big(r_A(x)\big)dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{r_A(\mathbb{R}^n)} e^{-i\, r_{A^t}(y)\cdot\xi}(\Delta\Phi)(y)|J_{r_{A^t}}|dy \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-iA^t y\cdot\xi}(\Delta\Phi)(y)dy \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\cdot A\xi}(\Delta\Phi)(y)dy \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\cdot r_A(\xi)}(\Delta\Phi)(y)dy \\
&= (\widehat{\Delta\Phi})\big(r_A(\xi)\big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{\Delta R_A\Phi}(\xi) &= -|\xi|^2\widehat{R_A\Phi}(\xi) \\
&= -|\xi|^2\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}(R_A\Phi)(x)dx \\
&= -\langle\xi \mid \xi\rangle\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|\xi\rangle}\Phi\big(r_A(x)\big)dx \\
&= -\langle A^tA\xi \mid \xi\rangle\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle A^tAx|\xi\rangle}\Phi\big(r_A(x)\big)dx \\
&= -\langle A\xi \mid A\xi\rangle\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle Ax|A\xi\rangle}\Phi\big(r_A(x)\big)dx \\
&= -|A\xi|^2\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{r_A(\mathbb{R}^n)} e^{-i\langle y|A\xi\rangle}\Phi(y)|J_{r_{A^t}}|dy \\
&= -|r_A(\xi)|^2\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle y|r_A(\xi)\rangle}\Phi(y)dy \\
&= -|r_A(\xi)|^2\widehat{\Phi}\big(r_A(\xi)\big) \\
&= (\widehat{\Delta\Phi})\big(r_A(\xi)\big)
\end{aligned}$$

Donc,

$$\widehat{\Delta R_A \Phi}(\xi) = \widehat{R_A \Delta \Phi}(\xi)$$

Par la transformée de Fourier inverse on obtient :

$$R_A \Delta \Phi(x) = \Delta R_A \Phi(x)$$

et par suite :

$$\Delta R_A = R_A \Delta$$

Lemme 3.1. *Soit $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors :*

1. *L'expression*
$$M_\Phi(x,r) = \frac{1}{\omega_n} \int_{S_1(0)} \Phi(x+ry)\, d\sigma_{1,0}(y)$$
a un sens pour tout $r \in \mathbb{R}$, et la fonction $r \to M_\Phi(x,r)$ est paire pour chaque x fixé dans $\mathbb{R}^n$.
2. *Si $\Phi \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R}^n)$, alors l'application $x \mapsto M_\Phi(x,r)$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}^n$.*
3. *$M_\Phi(x,0) = \Phi(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.*

Démonstration :

1. La sphère unité étant invariante par la réflexion (symétrie centrale) $y \to -y$, en substituant $-y$ à y dans l'expression intégrale de $M_\Phi(x,r)$, on obtient :
$$\int_{S(0,1)} \Phi(x+ry)\, d\sigma_{1,0}(y) = \int_{S(0,1)} \Phi(x-ry)\, d\sigma_{1,0}(y)$$
d'où :
$$M_\Phi(x,r) = M_\Phi(x,-r)$$
et par suite :
$$r \mapsto M_\Phi(x,r) \text{ est une fonction paire, pour chaque } x \text{ fixé dans } \mathbb{R}^n.$$
2. On applique la formule de Leibniz.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a :
$$\begin{aligned} M_\Phi(x,0) &= \frac{1}{\omega_n} \int_{S(0,1)} \Phi(x)\, d\sigma_{1,0}(y) \\ &= \Phi(x) \frac{1}{\omega_n} \int_{S(0,1)} d\sigma_{1,0}(y) \\ &= \Phi(x). \end{aligned}$$

Proposition 3.3. *Si $f(x) = \Phi(r)$, où $x \in \mathbb{R}^n$ et $r = ||x||$, alors :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \; \Delta f(x) = \Phi''(r) + \frac{n-1}{r}\Phi'(r).$$

Démonstration : Tout d'abord,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_j}\big[\Psi(r)\big] &= \frac{\partial r}{\partial x_j}\cdot\Psi'(r) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_j}\big[(x_1^2+\ldots+x_n^2)^{1/2}\big]\cdot\Psi'(r) \\
&= \frac{x_j}{r}\Psi'(r),
\end{aligned}$$

et maintenant

$$\begin{aligned}
\Delta f(x) &= \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\big[\Phi(r)\big] \\
&= \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\frac{\partial}{\partial x_j}\big[\Phi(r)\big]\right\} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\frac{x_j}{r}\Phi'(r)\right\} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{x_j}{r}\right)\right]\Phi'(r) + \frac{x_j}{r}\frac{\partial}{\partial x_j}\big[\Phi'(r)\big]\right\} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{r - x_j\frac{\partial r}{\partial x_j}}{r^2}\Phi'(r) + \frac{x_j^2}{r^2}\Phi''(r)\right] \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{r^2 - x_j^2}{r^3}\Phi'(r) + \frac{x_j^2}{r^2}\Phi''(r)\right] \\
&= \frac{n}{r}\Phi'(r) - \frac{1}{r}\Phi'(r) + \Phi''(r) \\
&= \Phi''(r) + \frac{n-1}{r}\Phi'(r)
\end{aligned}$$

Proposition 3.4. *Si Φ est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$, alors M_Φ est solution de l'équation :*

$$\Delta_x M_\Phi = \frac{\partial^2 M_\Phi}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial M_\Phi}{\partial r}. \tag{74}$$

Démonstration : Il est facile de voir que les deux membres de (74) sont des fonctions paires, et il suffit donc de considérer la question dans le cas où $r > 0$. Dans ce cas précisément :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial M_\Phi}{\partial r}(x,r) &= \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{\omega_n}\int_{S(0,1)}\Phi(x+ry)d\sigma_{1,0}(y)\right]\\
&= \frac{1}{\omega_n}\int_{S(0,1)}\frac{\partial}{\partial r}[\Phi(x+ry)]d\sigma_{1,0}(y)\\
&= \frac{1}{\omega_n}\int_{S(0,1)}\frac{\partial}{\partial r}[\Phi(x_1+ry_1,\dots,x_n+ry_n)]d\sigma_{1,0}(y)\\
&= \frac{1}{\omega_n}\int_{S(0,1)}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial(x_j+ry_j)}{\partial r}(\partial_j\Phi)(x_1+ry_1,\dots,x_n+ry_n)d\sigma_{1,0}(y)\\
&= \frac{1}{\omega_n}\int_{S(0,1)}\sum_{j=1}^{n}y_j(\partial_j\Phi)(x+ry)d\sigma_{1,0}(y)\\
&= \frac{1}{\omega_n}\int_{S(0,1)}[(\nabla\Phi)(x+ry)]\cdot y\,d\sigma_{1,0}(y)\\
&= \frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\int_{S_r(x)}[(\nabla\Phi)(z)]\cdot\frac{z-x}{r}d\sigma_{r,x}(z)\\
&= \frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\int_{S_r(x)}[(\nabla\Phi)(z)]\cdot\nu(z)d\sigma_{r,x}(z)\\
&= \frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\int_{B_r(x)}[\mathrm{div}(\nabla\Phi)](z)dz\\
&= \frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\int_{B_r(x)}[\Delta\Phi](z)dz\\
&= \frac{r}{\omega_n}\int_{B_1(0)}[\Delta\Phi](x+ry)dy\\
&= \frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\int_{B_r(0)}[\Delta\Phi](x+z)dz
\end{aligned}
$$

donc

$$r^{n-1}\frac{\partial M_\Phi}{\partial r}(x,r)=\frac{1}{\omega_n}\int_0^r\int_{S(0,1)}\rho^{n-1}[\Delta\Phi](x+\rho y)d\sigma_{1,0}(y)d\rho$$

et

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[r^{n-1}\frac{\partial M_\Phi}{\partial r}(x,r)\right]=\frac{r^{n-1}}{\omega_n}\int_{S(0,1)}[\Delta\Phi](x+ry)d\sigma_{1,0}(y)$$

Mais, si τ_{ry} est la translation de vecteur ry, et $\mathscr{T}_{ry}$ est l'opérateur tel que $\mathscr{T}_{ry}\psi=\psi\circ\tau_{ry}$, alors

$$\begin{aligned}
[\Delta\Phi](x+ry) &= (\Delta\Phi)[\tau_{ry}(x)] \\
&= [(\Delta\Phi)\circ\tau_{ry}](x) \\
&= [\mathscr{T}_{ry}(\Delta\Phi)](x) \\
&= [(\mathscr{T}_{ry}\Delta)\Phi](x) \\
&= [(\Delta\mathscr{T}_{ry})\Phi](x) \\
&= [\Delta_x(\mathscr{T}_{ry}\Phi)](x) \\
&= [\Delta_x(\Phi\circ\tau_{ry})](x)
\end{aligned}$$

et il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\partial_r\left[r^{n-1}\partial_r M_\Phi(x,r)\right] &= \frac{r^{n-1}}{\omega_n}\int_{S(0,1)}[\Delta_x(\Phi\circ\tau_{ry})](x)d\sigma_{1,0}(y) \\
&= r^{n-1}\Delta_x\left[\frac{1}{\omega_n}\int_{S(0,1)}[\Phi\circ\tau_{ry}](x)d\sigma_{1,0}(y)\right] \\
&= r^{n-1}\Delta_x\left[\frac{1}{\omega_n}\int_{S(0,1)}\Phi(x+ry)d\sigma_{1,0}(y)\right] \\
&= r^{n-1}\Delta_x M_\Phi(x,r)
\end{aligned}$$

autrement dit

$$(n-1)r^{n-2}\partial_r M_\Phi(x,r)+r^{n-1}\partial_r^2 M_\Phi(x,r)=r^{n-1}\Delta_x M_\Phi(x,r)$$

d'où

$$r^{n-1}\left[\partial_r^2+\frac{n-1}{r}\partial_r\right]M_\Phi(x,r)=r^{n-1}\Delta_x M_\Phi(x,r)$$

et ainsi

$$\left[\partial_r^2+\frac{n-1}{r}\partial_r\right]M_\Phi(x,r)=\Delta_x M_\Phi(x,r)$$

■

Corollaire 3.1. *Soit $u:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$, et $M_u(x,r,t)$ la moyenne sphérique de la fonction $x\mapsto u(x,t)$. Alors u est solution du problème de Cauchy* (55) *si, et seulement si M_u est solution du problème de Cauchy :*

$$\begin{cases}
\left[\partial_r^2+\frac{n-1}{r}\partial_r\right]M_u(x,r,t) = \partial_t^2 M_u(x,r,t) \\
M_u(x,r,0) = M_f(x,r) \\
\partial_t M_u(x,r,0) = M_g(x,r)
\end{cases} \tag{75}$$

Démonstration : Soit $u \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$. Pour tout t fixé dans $\mathbb{R}$, on a :

$$M_u(x,r,t) = \frac{1}{\omega_n} \int_{S(0,1)} u(x+ry,t)d\sigma_{1,0}(y),$$

et si v_t est la fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que, quel que soit $x \in \mathbb{R}^n$, $v_t(x) = u(x,t)$, alors :

$$\begin{aligned}
\Delta_x M_u(x,r,t) &= \Delta_x \left[\frac{1}{\omega_n} \int_{S(0,1)} v_t(x+ry)d\sigma_{1,0}(y) \right] \\
&= \frac{1}{\omega_n} \int_{S(0,1)} \Delta_x[v_t(x+ry)]d\sigma_{1,0}(y) \\
&= \frac{1}{\omega_n} \int_{S(0,1)} \Delta_x[(v_t \circ \tau_{ry})(x)]d\sigma_{1,0}(y) \\
&= \frac{1}{\omega_n} \int_{S(0,1)} \Delta_x[(\mathscr{T}_{ry} v_t)(x)]d\sigma_{1,0}(y) \\
&= \frac{1}{\omega_n} \int_{S(0,1)} [\Delta_x(\mathscr{T}_{ry} v_t)](x)d\sigma_{1,0}(y) \\
&= \frac{1}{\omega_n} \int_{S(0,1)} [\mathscr{T}_{ry}(\Delta_x v_t)](x)d\sigma_{1,0}(y) \\
&= \frac{1}{\omega_n} \int_{S(0,1)} [(\Delta_x v_t) \circ \tau_{ry}](x)d\sigma_{1,0}(y) \\
&= \frac{1}{\omega_n} \int_{S(0,1)} [\Delta_x v_t](x+ry)d\sigma_{1,0}(y) \\
&= \frac{1}{\omega_n} \int_{S(0,1)} [\Delta_x u](x+ry,t)d\sigma_{1,0}(y)
\end{aligned}$$

d'où

$$\Delta_x M_u(x,r,t) = M_{\Delta_x u}(x,r,t). \tag{76}$$

On a également

$$\begin{aligned}
\partial_t^2 M_u(x,r,t) &= \partial_t^2 \left[\frac{1}{\omega_n} \int_{S(0,1)} u(x+ry,t)d\sigma_{1,0}(y) \right] \\
&= \frac{1}{\omega_n} \int_{S(0,1)} \partial_t^2[u(x+ry,t)]d\sigma_{1,0}(y) \\
&= \frac{1}{\omega_n} \int_{S(0,1)} [\partial_t^2 u](x+ry,t)d\sigma_{1,0}(y)
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\partial_t^2 M_u(x,r,t) = M_{\partial_t^2 u}(x,r,t). \tag{77}$$

De même

$$M_u(x,r,0) = \frac{1}{\omega_n} \int_{S(0,1)} u(x+ry,0) d\sigma_{1,0}(y)$$

autrement dit

$$M_u(x,r,0) = M_{u(.,0)}(x,r) \tag{78}$$

et le fait que

$$\begin{aligned} \partial_t M_u(x,r,t) &= \partial_t \left[\frac{1}{\omega_n} \int_{S(0,1)} u(x+ry,t) d\sigma_{1,0}(y) \right] \\ &= \frac{1}{\omega_n} \int_{S(0,1)} \partial_t u(x+ry,t) d\sigma_{1,0}(y) \end{aligned}$$

implique que

$$\partial_t M_u(x,r,0) = \frac{1}{\omega_n} \int_{S(0,1)} \partial_t u(x+ry,0) d\sigma_{1,0}(y)$$

donc

$$\partial_t M_u(x,r,0) = M_{\partial_t u(.,0)}(x,r). \tag{79}$$

Enfin, pour toutes fonctions continues $v, w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, on a l'équivalence

$$(v = w) \Leftrightarrow (M_v = M_w) \tag{80}$$

parce que si $v = w$, il est clair que $M_v = M_w$, et si $M_v = M_w$, alors $M_v(.,0) = M_w(.,0)$, c'est-à-dire $v = w$.

Par conséquent :

$$\begin{aligned} (55) \quad &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} M_{\Delta_x u}(x,r,t) &=& M_{\partial_t^2 u}(x,r,t) \\ M_{u(.,0)}(x,r) &=& M_f(x,r) \\ M_{\partial_t u(.,0)}(x,r) &=& M_g(x,r) \end{array} \right. \quad \text{(d'après (80))} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \Delta_x M_u(x,r,t) &=& \partial_t^2 M_u(x,r,t) \\ M_u(x,r,0) &=& M_f(x,r) \\ \partial_t M_u(x,r,0) &=& M_g(x,r) \end{array} \right. \quad \text{(d'après (76)}-\text{(79))} \end{aligned}$$

et compte tenu de la proposition **3.4** , on conclut que :

$$(55) \Leftrightarrow (75)$$

■

Lemme 3.2. *Pour tout entier $k \geq 1$, on a :*

$$\forall \Phi \in \mathscr{C}^{k+1}(\mathbb{R}), \quad \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^{k-1} \left[r^{2k-1} \Phi(r) \right] = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^k \left[r^{2k} \Phi'(r) \right] \tag{81}$$

Démonstration : Par récurrence sur k :

• Cette formule est vraie pour $k=1$ car, dans ce cas :

$$\begin{aligned}\forall \Phi \in \mathscr{C}^{k+1}(\mathbb{R}),\quad \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1}\left[r^{2k-1}\Phi(r)\right] &= \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[r\Phi(r)\right]\\ &= \frac{\partial}{\partial r}\left[\Phi(r)+r\Phi'(r)\right]\\ &= 2\Phi'(r)+r\Phi''(r)\\ &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k}\left[r^{2k}\Phi'(r)\right].\end{aligned}$$

• On suppose maintenant que, pour un certain entier $k\geq 1$, on a :

$$\forall \Psi \in \mathscr{C}^{k+1}(\mathbb{R}),\quad \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1}\left[r^{2k-1}\Psi(r)\right]=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k}\left[r^{2k}\Psi'(r)\right] \tag{82}$$

et on démontre que :

$$\forall \Phi \in \mathscr{C}^{(k+1)+1}(\mathbb{R}),\ \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{(k+1)-1}\left[r^{2(k+1)-1}\Phi(r)\right]=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k+1}\left[r^{2(k+1)}\Phi'(r)\right]. \tag{83}$$

En effet, pour tout $\Phi \in \mathscr{C}^{(k+1)+1}(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{(k+1)-1}\left[r^{2(k+1)-1}\Phi(r)\right] &= \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k}\left[r^{2k+1}\Phi(r)\right]\\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\left[r^{2k+1}\Phi(r)\right]\\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1}\left[(2k+1)r^{2k-1}\Phi(r)+r^{2k}\Phi'(r)\right]\\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1}\left\{r^{2k-1}\left[\underbrace{(2k+1)\Phi(r)+r\Phi'(r)}_{\Psi(r)}\right]\right\}\\ &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k}\left[r^{2k}\Psi'(r)\right],\ \textit{cf.}\ (82),\ \text{car } \Psi\in\mathscr{C}^{k+1}(\mathbb{R})\\ &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k}\left[2(k+1)r^{2k}\Phi'(r)+r^{2k+1}\Phi''(r)\right]\\ &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k+1}\left[r^{2(k+1)}\Phi'(r)\right].\end{aligned}$$

• D'après le principe de récurrence, la formule (81) est vraie pour tout entier $k\geq 1$. ■

Proposition 3.5. *Si n est impair, $n=2k+1$ avec $k\geq 1$, et si T_k est l'opérateur différentiel :*

$$T_k\Phi(r)=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1}\left[r^{2k-1}\Phi(r)\right], \tag{84}$$

alors l'équation aux dérivées partielles

$$\left[\partial_r^2 + \frac{n-1}{r}\partial_r\right] M_u(x,r,t) = \partial_t^2 M_u(x,r,t) \tag{85}$$

se reduit à l'équation des ondes en dimension un :

$$\partial_r^2 T_k \Phi = \partial_t^2 T_k \Phi. \tag{86}$$

Démonstration : L'application de T_k aux deux membres de l'équation (85) donne :

$$T_k\left[\partial_r^2 + \frac{n-1}{r}\partial_r\right] M_u(x,r,t) = T_k \partial_t^2 M_u(x,r,t), \tag{87}$$

c'est-à-dire :

$$T_k\left(\partial_r^2 + 2k r^{-1}\partial_r\right) M_u(x,r,t) = \partial_t^2 T_k M_u(x,r,t), \tag{88}$$

et comme :

$$\begin{aligned}
T_k(\partial_r^2 + 2k r^{-1}\partial_r) M_u(x,r,t) &= T_k[\partial_r^2 M_u(x,r,t) + 2k r^{-1}\partial_r M_u(x,r,t)] \\
&= (r^{-1}\partial_r)^{k-1}[r^{2k-1}\partial_r^2 M_u(x,r,t) + 2k r^{2k-2}\partial_r M_u(x,r,t)] \\
&= (r^{-1}\partial_r)^{k}[r^{2k}\partial_r M_u(x,r,t)] \\
&= \partial_r^2 (r^{-1}\partial_r)^{k-1}[r^{2k-1} M_u(x,r,t)] \text{ (d'après le lemme } \mathbf{3.2}) \\
&= \partial_r^2 T_k M_u(x,r,t)
\end{aligned}$$

on conclut que :

$$\partial_r^2 T_k M_u(x,r,t) = \partial_t^2 T_k M_u(x,r,t). \qquad \blacksquare$$

Proposition 3.6. *L'opérateur T_k est tel que :*

$$\forall \Phi \in \mathscr{C}^{k-1}(\mathbb{R}), \quad T_k \Phi(r) = \sum_{j=0}^{k-1} c_j r^{j+1} \Phi^{(j)}(r) \tag{89}$$

où :

$$c_0 r = (r^{-1}\partial_r)^{k-1} r^{2k-1} = 1 \cdot 3 \cdots (2k-1) r \tag{90}$$

Démonstration : Par récurrence sur k :

• Si $k = 1$, alors,

$$\begin{aligned}
\forall \Phi \in \mathscr{C}^{k-1}(\mathbb{R})\big(=\mathscr{C}(\mathbb{R})\big), \quad T_k\Phi(r) &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1}\left[r^{2k-1}\Phi(r)\right] \\
&= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{1-1}\left[r^{2\times 1-1}\Phi(r)\right] \\
&= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{0}\left[r\Phi(r)\right] \\
&= r\Phi(r) \\
&= r^{0+1}\Phi^{(0)}(r) \\
&= \sum_{j=0}^{1-1} r^{j+1}\Phi^{(j)}(r) \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} c_j r^{j+1}\Phi^{(j)}(r)
\end{aligned}$$

avec :

$$c_0 r = r = 1 \times r = 1 \times \cdots \times (2k-1)r.$$

• On suppose que les relations (89) et (90) sont vraies à un certain rang $k \geq 1$, c'est-à-dire que :

$$\forall \Psi \in \mathscr{C}^{k-1}(\mathbb{R}), \quad T_k\Psi(r) = \sum_{j=0}^{k-1} c_j r^{j+1}\Psi^{(j)}(r) \tag{91}$$

où :

$$c_0 r = 1 \cdot 3 \cdots (2k-1)r. \tag{92}$$

• On démontre que ces relations demeurent encore vraies au rang $k+1$. En effet :

$$\begin{aligned}
\forall \Phi \in \mathscr{C}^{k}(\mathbb{R}), \quad T_{k+1}\Phi(r) &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k}\left[r^{2k+1}\Phi(r)\right] \\
&= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\left[r^{2k+1}\Phi(r)\right] \\
&= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1}\left[(2k+1)r^{2k-1}\Phi(r) + r^{2k}\Phi'(r)\right] \\
&= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1}\left\{r^{2k-1}\left[(2k+1)\Phi(r) + r\Phi'(r)\right]\right\} \\
&= T_k\Psi(r), \text{ où } \Psi(r) = (2k+1)\Phi(r) + r\Phi'(r) \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} c_j r^{j+1}\Psi^{(j)}(r), \text{ d'après (91) car } \Psi \in \mathscr{C}^{k-1}(\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Mais

$$\Psi^{(j)}(r) = (2k+1)\Phi^{(j)}(r) + \left(\frac{d}{dr}\right)^j [r\Phi'(r)]$$

et l'on peut démontrer [4] par récurrence sur j que,

$$\forall \Phi \in \mathscr{C}^j(\mathbb{R}), \quad \left(\frac{d}{dr}\right)^j [r\Phi'(r)] = j\Phi^{(j)}(r) + r\Phi^{(j+1)}(r). \tag{93}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\forall \Phi \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R}), \quad T_{k+1}\Phi(r) &= \sum_{j=0}^{k-1} c_j r^{j+1}\big[(2k+1)\Phi^{(j)}(r) + j\Phi^{(j)}(r) + r\Phi^{(j+1)}(r)\big] \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} c_j (2k+1+j) r^{j+1}\Phi^{(j)}(r) + \sum_{j=0}^{k-1} c_j r^{j+2}\Phi^{(j+1)}(r) \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} c_j (2k+1+j) r^{j+1}\Phi^{(j)}(r) + \sum_{j=1}^{k} c_{j-1} r^{j+1}\Phi^{(j)}(r) \\
&= c_0(2k+1)r\Phi(r) + \sum_{j=1}^{k-1} c_j (2k+1+j) r^{j+1}\Phi^{(j)}(r) \\
&\qquad + \sum_{j=1}^{k-1} c_{j-1} r^{j+1}\Phi^{(j)}(r) + c_{k-1} r^{k+1}\Phi^{(k)}(r) \\
&= c_0(2k+1)r\Phi(r) + \sum_{j=1}^{k-1} [c_j(2k+1+j) + c_{j-1}] r^{j+1}\Phi^{(j)}(r) \\
&\qquad + c_{k-1} r^{k+1}\Phi^{(k)}(r) \\
&= \sum_{j=0}^{k} \widetilde{c}_j r^{j+1}\Phi^{(j)}(r)
\end{aligned}$$

avec

$$\widetilde{c}_j = \begin{cases} 1 \times 3 \times \cdots \times (2k-1) \times (2k+1) & \text{si} \quad j = 0 \\ c_j(2k+1+j) + c_{j-1} & \text{si} \quad 1 \le j \le k-1 \\ c_{k-1} & \text{si} \quad j = k \end{cases}$$

• D'après le principe de récurrence, on conclut que la proposition **3.6.** est vraie. ■

Nous sommes maintenant en mesure de résoudre le problème de cauchy (55), lorsque la dimension spaciale n est un entier impair > 1. Nous commençons par supposer que ce

4. En effet, pour $j = 0$, on a, $\forall \Phi \in \mathscr{C}^j(\mathbb{R})$, $\left(\frac{d}{dr}\right)^j [r\Phi'(r)] = r\Phi'(r)$ et $j\Phi^{(j)}(r) + r\Phi^{(j+1)}(r) = r\Phi'(r)$, ce qui montre que la formule (93) est vraie pour $j = 0$. On suppose maintenant que (93) est vraie pour un certain $j \in \mathbb{N}$, et dans ce cas on a : $\left(\frac{d}{dr}\right)^{j+1} [r\Phi'(r)] = \frac{d}{dr}[j\Phi^{(j)}(r) + r\Phi^{(j+1)}(r)] = (j+1)\Phi^{(j+1)}(r) + r\Phi^{([j+1]+1)}(r)$. D'après le principe de récurrence, on conlut que (93) est vraie pour tout $j \in \mathbb{N}$.

problème admet une solution $u(x,t)$, nous dégageons une formule pour cette dernière, et montrons que ladite formule produit bel et bien une solution.

Théorème 3.7. *On suppose que $n = 2k+1$ avec $k \geq 1$, et que u est une solution $\mathscr{C}^{k+2}$ du problème de Cauchy* (55)*, dans lequel f et g sont de classe $\mathscr{C}^{k+2}$. Alors, pour tout x fixé dans $\mathbb{R}^n$, la fonction $\widetilde{u} : (r,t) \mapsto T_k M_u(x,r,t)$ est solution du problème de Cauchy :*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_r^2 \widetilde{u}(r,t) & = & \partial_t^2 \widetilde{u}(r,t) \\ \widetilde{u}(r,0) & = & \widetilde{f}(r) \\ \partial_t \widetilde{u}(r,0) & = & \widetilde{g}(r) \end{array}\right. \tag{94}$$

où $\widetilde{f}$ et $\widetilde{g}$ sont les fonctions $r \mapsto T_k M_f(x,r)$ et $r \mapsto T_k M_g(x,r)$, respectivement.

Démonstration : En effet,

$$\begin{array}{rcl} \partial_r^2 \widetilde{u}(r,t) & = & \partial_r^2 [T_k M_u(x,r,t)] \\ & = & \dfrac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1}\left[r^{2k-1} M_u(x,r,t)\right] \\ & = & \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\right)^{k}\left[r^{2k}\dfrac{\partial}{\partial r} M_u(x,r,t)\right], \text{ D'après le lemme } \mathbf{3.2}. \\ & = & \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\right)\left[r^{2k}\dfrac{\partial}{\partial r} M_u(x,r,t)\right] \\ & = & \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1}\left[r^{2k-1}\dfrac{\partial^2}{\partial r^2} M_u(x,r,t) + 2k r^{2k-2}\dfrac{\partial}{\partial r} M_u(x,r,t)\right] \\ & = & T_k\left[\left(\dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{2k}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\right) M_u(x,r,t)\right] \\ & = & T_k[\partial_t^2 M_u(x,r,t)], \text{ d'après le corollaire } \mathbf{3.1}., \text{ vu que u est solution de (55)} \\ & = & \partial_t^2 [T_k M_u(x,r,t)], \text{ car } T_k \text{ commute avec } \partial_t \\ & = & \partial_t^2 \widetilde{u}(r,t) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{u}(r,0) & = & T_k M_u(x,r,0) \\ & = & T_k M_f(x,r), \text{ d'après le corollaire } \mathbf{3.1}. \\ & = & \widetilde{f}(r) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \partial_t \widetilde{u}(r,0) & = & \partial_t [T_k M_u(x,r,0)] \\ & = & T_k[\partial_t M_u(x,r,0)], \text{ car } T_k \text{ commute avec } \partial_t \\ & = & T_k M_g(x,r), \text{ d'après le corollaire } \mathbf{3.1}. \\ & = & \widetilde{g}(r) \end{array}$$

■

De la proposition **3.1.**, on déduit que :

$$\widetilde{u}(r,t)=\frac{1}{2}\Big[\widetilde{f}(r+t)+\widetilde{f}(r-t)\Big]+\frac{1}{2}\int_{r-t}^{r+t}\widetilde{g}(s)ds, \tag{95}$$

c'est-à-dire :

$$T_kM_u(x,r,t)=\frac{1}{2}\Big[T_kM_f(x,r+t)+T_kM_f(x,r-t)\Big]+\frac{1}{2}\int_{r-t}^{r+t}T_kM_g(x,s)ds, \tag{96}$$

et d'après la proposition **3.6.**,

$$T_kM_u(x,r,t)=\sum_{j=0}^{k-1}c_j r^{j+1}\partial_r^j M_u(x,r,t) \tag{97}$$

d'où :

$$c_0 rM_u(x,r,t)=T_kM_u(x,r,t)-\sum_{j=1}^{k-1}c_j r^{j+1}\partial_r^j M_u(x,r,t) \tag{98}$$

et il s'ensuit alors que :

$$M_u(x,r,t)=\frac{1}{c_0 r}T_kM_u(x,r,t)-\frac{1}{c_0}\sum_{j=1}^{k-1}c_j r^{j}\partial_r^j M_u(x,r,t) \tag{99}$$

par conséquent :

$$\lim_{r\to 0}M_u(x,r,t)=\lim_{r\to 0}\frac{1}{c_0 r}T_kM_u(x,r,t) \tag{100}$$

ou encore :

$$M_u(x,0,t)=\lim_{r\to 0}\frac{1}{c_0 r}T_kM_u(x,r,t) \tag{101}$$

donc :

$$u(x,t)=\lim_{r\to 0}\frac{1}{c_0 r}T_kM_u(x,r,t) \tag{102}$$

autrement dit :

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \lim_{r\to 0}\frac{1}{2c_0 r}\left\{\Big[T_kM_f(x,r+t)+T_kM_f(x,r-t)\Big]+\int_{r-t}^{r+t}T_kM_g(x,s)ds\right\}\\
&= \frac{1}{2c_0}\Bigg[\lim_{r\to 0}\frac{T_kM_f(x,t+r)-T_kM_f(x,t)}{r}+\lim_{r\to 0}\frac{T_kM_f(x,r-t)+T_kM_f(x,t)}{r}\\
&\qquad +\lim_{r\to 0}\frac{\int_{r-t}^{0}T_kM_g(x,s)ds+\int_0^t T_kM_g(x,s)ds}{r}\\
&\qquad +\lim_{r\to 0}\frac{\int_0^{t+r}T_kM_g(x,s)ds-\int_0^t T_kM_g(x,s)ds}{r}\Bigg]
\end{aligned}$$

Mais,

$$\lim_{r\to 0}\frac{T_kM_f(x,t+r)-T_kM_f(x,t)}{r}=\partial_t T_kM_f(x,t), \tag{103}$$

et comme la fonction $s\mapsto T_kM_f(x,s)$ est impaire, on a :

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to 0}\frac{T_kM_f(x,r-t)+T_kM_f(x,t)}{r} &= \lim_{r\to 0}\frac{-T_kM_f(x,t-r)+T_kM_f(x,t)}{r}\\
&= \lim_{(-r)\to 0}\frac{T_kM_f[x,t+(-r)]-T_kM_f(x,t)}{(-r)}\\
&= \partial_t T_kM_f(x,t).
\end{aligned}$$

De même :

$$\lim_{r\to 0}\frac{\int_0^{t+r}T_kM_g(x,s)ds-\int_0^t T_kM_g(x,s)ds}{r}=\partial_t\left[\int_0^t T_kM_g(x,s)ds\right]=T_kM_g(x,t) \tag{104}$$

le changement de variable $s=-\tau$ donne :

$$\int_{-t+r}^0 T_kM_g(x,s)ds=-\int_{t-r}^0 T_kM_g(x,-\tau)d\tau=\int_0^{t-r}T_kM_g(x,-\tau)d\tau \tag{105}$$

et le fait que la fonction $s\mapsto T_kM_g(x,s)$ est impaire conduit à :

$$\int_{-t+r}^0 T_kM_g(x,s)ds=-\int_0^{t-r}T_kM_g(x,\tau)d\tau \tag{106}$$

par conséquent :

$$\begin{aligned}
\frac{\int_{-t+r}^0 T_kM_g(x,s)ds+\int_0^t T_kM_g(x,s)ds}{r} &= \frac{-\int_0^{t-r}T_kM_g(x,\tau)d\tau+\int_0^t T_kM_g(x,\tau)d\tau}{r}\\
&= \frac{\int_0^{t+(-r)}T_kM_g(x,\tau)d\tau-\int_0^t T_kM_g(x,\tau)d\tau}{(-r)}
\end{aligned}$$

et il s'ensuit alors que :

$$\lim_{r\to 0}\frac{\int_{-t+r}^0 T_kM_g(x,s)ds+\int_0^t T_kM_g(x,s)ds}{r}=\partial_t\left[\int_0^t T_kM_g(x,s)ds\right]=T_kM_g(x,t). \tag{107}$$

Nous venons ainsi de prouver que si n est impair >1, et si $u(x,t)$ est une solution $\mathscr{C}^{\frac{n+3}{2}}$ du problème de Cauchy (55) où les données initiales f et g sont de classe $\mathscr{C}^{\frac{n+3}{2}}$, alors $u(x,t)$ est donnée par la formule :

$$u(x,t)=\frac{1}{c_0}[\partial_t T_kM_f(x,t)+T_kM_g(x,t)] \tag{108}$$

c'est-à-dire par :

$$u(x,t)=\frac{1}{1\times 3\times\cdots\times(n-2)\omega_n}\Big\{\partial_t(t^{-1}\partial_t)^{\frac{n-3}{2}}\Big[t^{n-2}\int_{|y|=1}f(x+ty)d\sigma_{1,0}(y)\Big]$$
$$+(t^{-1}\partial_t)^{\frac{n-3}{2}}\Big[t^{n-2}\int_{|y|=1}g(x+ty)d\sigma_{1,0}(y)\Big]\Big\}$$

Nous nous proposons maintenant de démontrer la réciproque :

Théorème 3.8. *On suppose que n est un entier impair >1, que $f\in C^{(n+3)/2}(\mathbb{R}^n)$ et que $g\in C^{(n+1)/2}(\mathbb{R}^n)$. Alors la fonction u définie sur $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ par :*

$$\begin{aligned}u(x,t)=\frac{1}{1\times 3\times\cdots\times(n-2)\omega_n}\Big\{&\partial_t(t^{-1}\partial_t)^{\frac{n-3}{2}}\Big[t^{n-2}\int_{|y|=1}f(x+ty)d\sigma_{1,0}(y)\Big]\\&+(t^{-1}\partial_t)^{\frac{n-3}{2}}\Big[t^{n-2}\int_{|y|=1}g(x+ty)d\sigma_{1,0}(y)\Big]\Big\}\end{aligned}\tag{109}$$

est solution du problème de Cauchy (55).

Démonstration : La fonction u du théorème précédent est de la forme :

$$u(x,t)=\frac{1}{c_0}[\partial_t T_k M_f(x,t)+T_k M_g(x,t)]$$

avec

$$c_0=1\times 3\times\cdots\times(n-2)\quad\text{et}\quad k=\frac{n-1}{2}.$$

Comme :

$$\begin{aligned}\Delta_x T_k M_f(x,t)&=T_k\Delta_x M_f(x,t)\\&=T_k\Big[\partial_t^2 M_f+\frac{n-1}{t}\partial_t M_f\Big](x,t)\ \text{(d'après la proposition 3.4.)}\\&=(t^{-1}\partial_t)^{\frac{n-3}{2}}\Big[t^{n-2}\partial_t^2 M_f(x,t)+(n-1)t^{n-3}\partial_t M_f(x,t)\Big]\\&=(t^{-1}\partial_t)^{\frac{n-1}{2}}[t^{n-1}\partial_t M_f(x,t)]\\&=\partial_t^2(t^{-1}\partial_t)^{\frac{n-3}{2}}[t^{n-2}M_f(x,t)]\ \text{(d'après le lemme 3.2.)}\\&=\partial_t^2 T_k M_f(x,t),\end{aligned}$$

et de la même manière :

$$\Delta_x T_k M_g(x,t)=\partial_t^2 T_k M_g(x,t),$$

on conclut que :

$$\begin{aligned}
\Delta_x u(x,t) &= \Delta_x \left\{ \frac{1}{c_0}\big[\partial_t T_k M_f(x,t) + T_k M_g(x,t)\big]\right\} \\
&= \frac{1}{c_0}\left\{\partial_t\left[\Delta_x T_k M_f(x,t)\right] + \Delta_x T_k M_g(x,t)\right\} \\
&= \frac{1}{c_0}\left\{\partial_t\left[\partial_t^2 T_k M_f(x,t)\right] + \partial_t^2 T_k M_g(x,t)\right\} \\
&= \partial_t^2 \left\{ \frac{1}{c_0}\big[\partial_t T_k M_f(x,t) + T_k M_g(x,t)\big]\right\} \\
&= \partial_t^2 u(x,t).
\end{aligned}$$

Pour ce qui est des conditions initiales, la proposition **3.6.** nous dit que :

$$T_k M_f(x,t) = \sum_{j=0}^{k-1} c_j t^{j+1}\partial_t^j M_f(x,t) = c_0 t M_f(x,t) + c_1 t^2 \partial_t M_f(x,t) + \sum_{j=2}^{k-1} c_j t^{j+1}\partial_t^j M_f(x,t)$$

et

$$T_k M_g(x,t) = \sum_{j=0}^{k-1} c_j t^{j+1}\partial_t^j M_g(x,t) = c_0 t M_g(x,t) + \sum_{j=1}^{k-1} c_j t^{j+1}\partial_t^j M_g(x,t).$$

Donc

$$\begin{aligned}
\partial_t T_k M_f(x,t) = {} & c_0 M_f(x,t) + (c_0 + 2c_1) t\,\partial_t M_f(x,t) + c_1 t^2 \partial_t^2 M_f(x,t) \\
& + \sum_{j=2}^{k-1}\big[(j+1)c_j t^j \partial_t^j M_f(x,t) + c_j t^{j+1}\partial_t^{j+1} M_f(x,t)\big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_t^2 T_k M_f(x,t) = {} & 2(c_0 + c_1)\partial_t M_f(x,t) + (c_0 + 4c_1) t\,\partial_t^2 M_f(x,t) \\
& + c_1 t^2 \partial_t^3 M_f(x,t) + \sum_{j=2}^{k-1}\big[j(j+1)c_j t^{j-1}\partial_t^j M_f(x,t) \\
& + 2(j+1)c_j t^j \partial_t^{j+1} M_f(x,t) + c_j t^{j+1}\partial_t^{j+2} M_f(x,t)\big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_t T_k M_g(x,t) = {} & c_0 M_g(x,t) + c_0 t\,\partial_t M_g(x,t) \\
& + \sum_{j=1}^{k-1}\big[(j+1)c_j t^j \partial_t^j M_g(x,t) + c_j t^{j+1}\partial_t^{j+1} M_g(x,t)\big]
\end{aligned}$$

et ainsi

$$\partial_t T_k M_f(x,0) = c_0 M_f(x,0) = c_0 f(x),$$

$$T_k M_g(x,0) = 0,$$

$$\partial_t^2 T_k M_f(x,0) = 2(c_0 + c_1)\partial_t M_f(x,0) = 0 \quad (\text{car } M_f \text{ est paire}^{5})$$

$$\partial_t T_k M_g(x,0) = c_0 M_g(x,0) = c_0 g(x)$$

par conséquent :

$$u(x,0) = \frac{1}{c_0}\big[\partial_t T_k M_f(x,0) + T_k M_g(x,0)\big] = \frac{1}{c_0}\big[c_0 f(x) + 0\big] = f(x)$$

$$\partial_t u(x,0) = \frac{1}{c_0}\big[\partial_t^2 T_k M_f(x,0) + \partial_t T_k M_g(x,0)\big] = \frac{1}{c_0}\big[0 + c_0 g(x)\big] = g(x) \qquad \blacksquare$$

La solution du problème de Cauchy (55) dans le cas où n est pair se déduit facilement de celle dans le cas impair par la technique de ladite "méthode de la descente" : On observe que si u est une solution de l'équation des ondes sur $\mathbb{R}^{n+1}\times\mathbb{R}$, indépendante de x_{n+1}, alors u est solution de l'équation des ondes sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Ainsi pour résoudre (55) dans le cas où n est pair, on peut regarder f et g comme étant des fonctions sur $\mathbb{R}^{n+1}$ ne dépendant que de x_1, ... , x_n et non de x_{n+1}, et vérifier que la solution fournie dans le théorème **3.8.** ne dépend pas de x_{n+1}.

Théorème 3.9. *On suppose que n est un entier pair non nul, que $f \in C^{(n+4)/2}(\mathbb{R}^n)$ et que $g \in C^{(n+2)/2}(\mathbb{R}^n)$. Alors la fonction u définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ par :*

$$u(x,t) = \frac{2}{1.3...(n-1)\omega_{n+1}}\Bigg[\partial_t(t^{-1}\partial_t)^{(n-2)/2}\left(t^{n-1}\int_{|y|\leq 1}\frac{f(x+ty)}{\sqrt{1-|y|^2}}\mathrm{d}y\right) + (t^{-1}\partial_t)^{(n-2)/2}\left(t^{n-1}\int_{|y|\leq 1}\frac{g(x+ty)}{\sqrt{1-|y|^2}}\mathrm{d}y\right)\Bigg] \tag{110}$$

est solution du problème de Cauchy (55).

Démonstration : On note $x\ \big(=(x_1,\ldots,x_n)\big)$, l'élément générique de $\mathbb{R}^n$, $\overline{x}\ \big(=(x,x_{n+1})\big)$ celui de R^{n+1}, et on suppose que u est solution sur $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ du problème de Cauchy (55). Sur $R^{n+1}\times\mathbb{R}$, on définit la fonction $\overline{u}$ par :

$$\overline{u}(\overline{x},t) = u(x,t),$$

5. Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction paire et dérivable en zéro, alors $f'(0)=0$. En effet, si f est dérivable en 0, alors les deux limites $\ell^- = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x}$ et $\ell^+ = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x}$ existent et sont égales : $\ell^- = \ell^+$. Mais, $\ell^- = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\substack{-x\to 0\\ -x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} \frac{f(-y)-f(0)}{-y} = -\lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} \frac{f(-y)-f(0)}{y}$, et si l'on suppose que f est paire, on tombe sur $\ell^- = -\ell^+$. D'où $\ell^- = \ell^+ = 0$, et ainsi $f'(0)=0$.

et sur R^{n+1} les fonctions $\overline{f}$ et $\overline{g}$ par :

$$\overline{f}(\overline{x}) = f(x), \qquad \overline{g}(\overline{x}) = g(x).$$

On a :

$$\begin{aligned}
\Delta_{\overline{x}}\overline{u}(\overline{x},t) &= (\Delta_x + \partial^2_{x_{n+1}})u(x,t) \\
&= \Delta_x u(x,t) \\
&= \partial_t^2 u(x,t) \\
&= \partial_t^2 \overline{u}(\overline{x},t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{u}(\overline{x},0) &= u(x,0) \\
&= f(x) \\
&= \overline{f}(\overline{x})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_t\overline{u}(\overline{x},0) &= \partial_t u(x,0) \\
&= g(x) \\
&= \overline{g}(\overline{x})
\end{aligned}$$

ce qui veut dire que $\overline{u}$ est solution sur $\mathbb{R}^{n+1}\times\mathbb{R}$ du problème de Cauchy :

$$\left\{\begin{aligned}
\Delta_{\overline{x}}\overline{u}(\overline{x},t) &= \partial_t^2\overline{u}(\overline{x},t), \\
\overline{u}(\overline{x},0) &= \overline{f}(\overline{x}), \\
\partial_t\overline{u}(\overline{x},0) &= \overline{g}(\overline{x}).
\end{aligned}\right.$$

Comme $n+1$ est impair, le théorème **3.8.** nous dit que $\overline{u}(\overline{x},t)$ s'obtient par la formule :

$$\begin{aligned}
\overline{u}(\overline{x},t) = \frac{1}{1\times 3\times\cdots\times(n-1)\omega_{n+1}}\Bigg\{&\partial_t(t^{-1}\partial_t)^{\frac{n-2}{2}}\Big[t^{n-1}\int_{|\overline{y}|=1}\overline{f}(\overline{x}+t\overline{y})d\sigma_{1,0}(\overline{y})\Big] \\
&+(t^{-1}\partial_t)^{\frac{n-2}{2}}\Big[t^{n-1}\int_{|\overline{y}|=1}\overline{g}(\overline{x}+t\overline{y})d\sigma_{1,0}(\overline{y})\Big]\Bigg\}
\end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}
\int_{|\overline{y}|=1}\overline{f}(\overline{x}+t\overline{y})d\sigma_{1,0}(\overline{y}) &= \int_{|y|^2+y_{n+1}^2=1}\overline{f}(\overline{x}+t\overline{y})d\sigma_{1,0}(y,y_{n+1}) \\
&= \int_{S^n} f(x+ty)d\sigma_{1,0}(y,y_{n+1}) \text{ où } S^n \text{ est la sphère unité de } R^{n+1} \\
&= \int_{S^n_+} f(x+ty)d\sigma_{1,0}(y,y_{n+1}) + \int_{S^n_-} f(x+ty)d\sigma_{1,0}(y,y_{n+1})
\end{aligned}$$

sachant que

$$S^n_\pm = \left\{(y, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \,\Big/\, y_{n+1} = \pm\sqrt{1-|y|^2}\right\} \tag{111}$$

et d'après la définition d'une intégrale de surface, on a

$$\int_{S^n_\pm} f(x+ty)d\sigma_{1,0}(y, y_{n+1}) = \int_{|y|\leq 1} f(x+ty)\sqrt{1+\left|\nabla(\pm\sqrt{1-|y|^2})\right|^2}\,dy$$

Maintenant,

$$\nabla(\pm\sqrt{1-|y|^2}) = \mp\frac{y}{\sqrt{1-|y|^2}}$$

et

$$\sqrt{1+\left|\nabla(\pm\sqrt{1-|y|^2})\right|^2} = \sqrt{1+\frac{|y|^2}{1-|y|^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-|y|^2}}.$$

Il s'ensuit alors que

$$\int_{S^n_\pm} f(x+ty)d\sigma_{1,0}(y, y_{n+1}) = \int_{|y|\leq 1} \frac{f(x+ty)}{\sqrt{1-|y|^2}}dy,$$

que

$$\int_{|\overline{y}|=1} \overline{f}(\overline{x}+t\overline{y})d\sigma_{1,0}(\overline{y}) = 2\int_{|y|\leq 1} \frac{f(x+ty)}{\sqrt{1-|y|^2}}dy,$$

et de la même manière,

$$\int_{|\overline{y}|=1} \overline{g}(\overline{x}+t\overline{y})d\sigma_{1,0}(\overline{y}) = 2\int_{|y|\leq 1} \frac{g(x+ty)}{\sqrt{1-|y|^2}}dy,$$

ce qui nous permet de conclure que

$$\begin{aligned} u(x,t) = \frac{2}{1.3...(n-1)\omega_{n+1}}\Bigg[&\partial_t(t^{-1}\partial_t)^{(n-2)/2}\left(t^{n-1}\int_{|y|\leq 1}\frac{f(x+ty)}{\sqrt{1-|\,y\,|^2}}\mathrm{d}y\right) \\ &+(t^{-1}\partial_t)^{(n-2)/2}\left(t^{n-1}\int_{|y|\leq 1}\frac{g(x+ty)}{\sqrt{1-|\,y\,|^2}}\mathrm{d}y\right)\Bigg] \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Remarque 3.1. *Dans la proposition* **3.1.** *et les théorèmes* **3.8.** *et* **3.9.** *, les conditions de régularité sur f et g sont là pour que u soit de classe $\mathscr{C}^2$, donc afin qu'elle soit solution de l'équation des ondes au sens classique du terme, et plus de régularité pour f et g implique plus de régularité pour u, en ce sens que, si $f \in \mathscr{C}^{k+(n-1)/2}$, $g \in \mathscr{C}^{k+(n-3)/2}$ et n impair, ou $f \in \mathscr{C}^{k+n/2}$, $g \in \mathscr{C}^{k-1+n/2}$ et n pair, alors $u \in \mathscr{C}^k$.*

D'un autre côté, si l'on impose à f et à g des conditions de régularité plus faibles et qu'on interprète les formules (109) et (110) de façon convenable, on peut obtenir des solutions distributions pour le problème (55). En effet, pour n impair et ≥ 3, on peut observer que :

$$\frac{1}{\omega_n}\int_{|y|=1} f(x+ty)d\sigma_{1,0}(y) = (f * \Sigma_t)(x) \tag{112}$$

où Σ_t est la distribution sur $\mathbb{R}^n$ définie par :

$$\forall \psi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n),\ \langle \Sigma_t, \psi\rangle = \frac{1}{\omega_n}\int_{|y|=1} \psi(ty)d\sigma_{1,0}(y), \tag{113}$$

car, pour tout $\psi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{1}{\omega_n}\int_{|y|=1} f(x+ty)d\sigma_{1,0}(y), \psi \right\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n}\left[\frac{1}{\omega_n}\int_{|y|=1} f(x+ty)d\sigma_{1,0}(y)\right]\psi(x)dx \\
&= \frac{1}{\omega_n}\int_{|y|=1}\left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x+ty)\psi(x)dx\right]d\sigma_{1,0}(y) \\
&= \frac{1}{\omega_n}\int_{|y|=1}\left[\int_{\mathbb{R}^n} f(-x+ty)\psi(-x)dx\right]d\sigma_{1,0}(y) \\
&= \frac{1}{\omega_n}\int_{|y|=1}\left[\int_{\mathbb{R}^n} f(ty-x)\check{\psi}(x)dx\right]d\sigma_{1,0}(y) \\
&= \frac{1}{\omega_n}\int_{|y|=1} (f*\check{\psi})(ty)d\sigma_{1,0}(y) \\
&= \langle \Sigma_t, f*\check{\psi}\rangle \\
&= \langle f*\Sigma_t, \psi\rangle.
\end{aligned}$$

On peut également montrer que l'application $t \mapsto \Sigma_t$ est une fonction C^∞ (en fait analytique) de la variable réelle t, à valeurs dans l'espace des distributions à support compact sur $\mathbb{R}^n$, et qu'il en est donc de même de

$$\Phi_t = \frac{1}{1\times 3\times \ldots \times (n-2)}(t^{-1}\partial_t)^{(n-3)/2}[t^{n-2}\Sigma_t]. \tag{114}$$

La formule (109) nous dit alors que :

$$u(\cdot,t) = f*\partial_t\Phi_t + g*\Phi_t. \tag{115}$$

De façon similaire, si n est pair, si Υ_t est la distribution sur $\mathbb{R}^n$ telle que

$$\langle \Upsilon_t, \psi\rangle = \frac{1}{\omega_{n+1}}\int_{|y|=1}\frac{\psi(ty)}{\sqrt{1-|y|^2}}dy, \tag{116}$$

et si

$$\Psi_t = \frac{1}{1 \times 3 \times \ldots \times (n-1)} (t^{-1}\partial_t)^{(n-2)/2}[t^{n-1}\Upsilon_t], \tag{117}$$

alors

$$u(\cdot, t) = f * \partial_t \Psi_t + g * \Psi_t. \tag{118}$$

Enfin, la solution pour $n = 1$ est encore de la forme

$$u(\cdot, t) = f * \partial_t \Theta_t + g * \Theta_t, \tag{119}$$

où Θ_t est la distribution telle que

$$\langle \Theta_t, \vartheta \rangle = \frac{1}{2} \int_{-t}^{t} \vartheta(s) ds, \tag{120}$$

et il est à noter que

$$\partial_t \int_{-t}^{t} \vartheta(s) ds = \vartheta(t) + \vartheta(-t), \tag{121}$$

donc :

$$\partial_t \Theta_t(s) = \frac{1}{2}\big[\delta(s-t) + \delta(s+t)\big]. \tag{122}$$

4 Problème de Cauchy non-homogène

On considère maintenant le problème de cauchy pour l'équation des ondes avec second membre

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u &= w(x,t) \\ u(x,0) &= f(x) \\ \partial_t u(x,0) &= g(x) \end{cases} \tag{123}$$

C'est vrai que les théorèmes **3.8.** et **3.9.** nous fournissent une solution u_1 pour le problème :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u &= 0 \\ u(x,0) &= f(x) \\ \partial_t u(x,0) &= g(x) \end{cases} \tag{124}$$

et si l'on peut trouver une solution u_2 pour le problème :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u &= w(x,t) \\ u(x,0) &= 0 \\ \partial_t u(x,0) &= 0 \end{cases} \tag{125}$$

alors $u = u_1 + u_2$ est solution du problème (123).

Pour trouver u_2, nous adoptons une version de la très célèbre méthode de la variation des constantes, connue sous le nom de « **principe de Duhamel** » :

Théorème 4.1. *Soit $w \in C^{[n/2]+1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ et, pour tout $s \in \mathbb{R}$, supposons que $v(x,t;s)$ est solution du problème :*

$$\begin{cases} \partial_t^2 v - \Delta v &= 0 \\ v(x,0;s) &= 0 \\ \partial_t v(x,0;s) &= w(x,s) \end{cases}. \tag{126}$$

Alors la fonction u_2 telle que :

$$u_2(x,t) = \int_0^t v(x,t-s;s)\mathrm{d}s \tag{127}$$

est solution du problème (125).

Démonstration : Manifestement,

$$u_2(x,0) = \int_0^0 v(x,0-s;s)ds = 0 \tag{128}$$

et le fait que :

$$\begin{aligned} \partial_t u_2(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\left[\int_0^t f_x(t,s)ds\right] \quad \big(\text{où } f_x(t,s) = v(x,t-s;s)\big) \\ &= \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\big[f_x(t,s)\big]ds + f_x(t,t)\frac{dt}{dt}(t) - f_x(t,0)\frac{d0}{dt}(t) \quad \text{(Formule de Leibniz)} \\ &= \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\big[v(x,t-s;s)\big]ds + v(x,t-t,t) - 0 \\ &= \int_0^t \partial_t v(x,t-s;s)ds + v(x,0;t) \\ &= \int_0^t \partial_t v(x,t-s;s)ds \quad \big(\text{car } v(x,0;t) = 0,\ \text{d'après (126)}\big) \end{aligned}$$

implique que :

$$\partial_t u_2(x,0) = 0. \tag{129}$$

En dérivant encore une fois, on obtient :

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u_2(x,t) &= \partial_t[\partial_t u_2(x,t)] \\ &= \partial_t\left[\int_0^t \partial_t v(x,t-s;s)ds\right] \\ &= \int_0^t \partial_t^2 v(x,t-s;s)ds + \partial_t v(x,0;t) \\ &= \int_0^t \Delta v(x,t-s;s)ds + w(x,t) \\ &= \Delta\left[\int_0^t v(x,t-s;s)ds\right] + w(x,t) \\ &= \Delta u_2(x,t) + w(x,t) \end{aligned}$$

d'où :

$$\partial_t^2 u_2(x,t) - \Delta u_2(x,t) = w(x,t). \tag{130}$$

De (128), (129) et (130), on déduit que u_2 est solution de (125). ■

Le problème (123) n'est réellement d'un intérêt physique que si $t > 0$. (Si on considère les $t < 0$, les données de Cauchy f et g deviennent alors des « conditions finales » au lieu d'être des « conditions initiales ».) Si l'on désire des solutions de $\partial_t^2 u - \Delta u = w$ avec un temps t arbitraire, le problème suivant peut être plus naturel : On suppose que le système est complètement à l'arrêt dans un passé lointain, et qu'à un certain temps t_0, la force motrice $u(x,t)$ commence à agir. On suppose également que $w(x,t) = 0$ pour $t \leq t_0$, et on se propose de résoudre le problème

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u &= w \\ u(x,t) &= 0 \text{ pour } t \leq t_0 \end{cases} \tag{131}$$

Ce problème (131) se ramène immédiatement au problème (125) par la substitution de $t - t_0$ à t, et on peut reformuler sa solution d'une manière qui masque le temps t_0 :

Théorème 4.2. *Si $w \in C^{[n/2]+1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ est telle que $w(.,t) = 0$ pour $t \ll 0$, et si, pour tout $s \in \mathbb{R}$, $v(x,t;s)$ est la solution du problème :*

$$\begin{cases} \partial_t^2 v - \Delta v &= 0 \\ v(x,0;s) &= 0 \\ \partial_t v(x,0;s) &= w(x,s) \end{cases} \tag{132}$$

avec $v(.,.;s) = 0$ pour $s \ll 0$, alors la fonction u telle que :

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{t} v(x,t-s;s)\mathrm{d}s \tag{133}$$

est solution du problème :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u &= w \\ u(.,t) &= 0 \quad \textit{pour } t \ll 0 \end{cases} \tag{134}$$

Démonstration : On a :

$$u(.,t) = \int_{-\infty}^{t} v(.,t-s;s)\mathrm{d}s$$

et dans l'intégrale $\int_{-\infty}^{t} v(.,t-s;s)\mathrm{d}s$, la variable muette s est $\leq t$. Donc, pour $t \ll 0$, on a $s \ll 0$ et si l'on suppose que $v(.,.;s) = 0$ pour $s \ll 0$, alors, pour $t \ll 0$, on a $v(.,t-s;s) = 0$, d'où :

$$\text{Pour } t \ll 0,\ u(.,t) = 0.$$

On a aussi :

$$\begin{aligned}
\partial_t u(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\left[\int_{-\infty}^{t} v(x,t-s;s)ds\right] \\
&= v(x,0;t) + \int_{-\infty}^{t} \partial_t v(x,t-s;s)ds \quad \begin{cases}\text{D'après la formule de dérivation de} \\ \text{Leibniz pour une intégrale généralisée.}\end{cases} \\
&= \int_{-\infty}^{t} \partial_t v(x,t-s;s)ds
\end{aligned}$$

et il s'ensuit alors que :

$$\begin{aligned}
\partial_t^2 u(x,t) &= \partial_t[\partial_t u(x,t)] \\
&= \partial_t\left[\int_{-\infty}^{t} \partial_t v(x,t-s;s)ds\right] \\
&= \partial_t v(x,0;t) + \int_{-\infty}^{t} \partial_t^2 v(x,t-s;s)ds \\
&= w(x,t) + \int_{-\infty}^{t} \Delta v(x,t-s;s)ds \\
&= w(x,t) + \Delta u(x,t)
\end{aligned}$$

d'où :

$$\partial_t^2 u - \Delta u = w. \qquad \blacksquare$$

Maintenant :

• Si $n = 1$, la solution du problème (124) est :

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+t) + f(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)ds,$$

celle du problème (125) est :

$$\begin{aligned}
u_2(x,t) &= \int_0^t v(x,t-s;s)ds \\
&= \int_0^t \left[\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} w(r,s)dr\right]ds \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} w(r,s)drds
\end{aligned}$$

et donc celle du problème (123) est :

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+t) + f(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} w(r,s)drds}$$

• Si n est impair ≥ 3, la solution du problème (124) est :

$$u_1(x,t)=\frac{1}{1\times 3\times\cdots\times(n-2)\omega_n}\Big\{\partial_t(t^{-1}\partial_t)^{\frac{n-3}{2}}\Big[t^{n-2}\int_{|y|=1}f(x+ty)d\sigma_{1,0}(y)\Big]$$
$$+(t^{-1}\partial_t)^{\frac{n-3}{2}}\Big[t^{n-2}\int_{|y|=1}g(x+ty)d\sigma_{1,0}(y)\Big]\Big\}$$

celle du problème (125) est :

$$\begin{aligned}u_2(x,t)&=\int_0^t v(x,t-s;s)ds\\&=\int_0^t\frac{1}{1\times 3\times\cdots\times(n-2)\omega_n}(t^{-1}\partial_t)^{\frac{n-3}{2}}\Big[t^{n-2}\int_{|y|=1}w\big(x+(t-s)y,s\big)d\sigma_{1,0}(y)\Big]ds\end{aligned}$$

ce qui fait que celle du problème (123) est :

$$\boxed{\begin{aligned}u(x,t)=\frac{1}{1\times 3\times\cdots\times(n-2)\omega_n}\Big\{&\partial_t(t^{-1}\partial_t)^{\frac{n-3}{2}}\Big[t^{n-2}\int_{|y|=1}f(x+ty)d\sigma_{1,0}(y)\Big]\\&+(t^{-1}\partial_t)^{\frac{n-3}{2}}\Big[t^{n-2}\int_{|y|=1}g(x+ty)d\sigma_{1,0}(y)\Big]\\&+\int_0^t(t^{-1}\partial_t)^{\frac{n-3}{2}}\Big[t^{n-2}\int_{|y|=1}w\big(x+(t-s)y,s\big)d\sigma_{1,0}(y)\Big]ds\Big\}\end{aligned}}$$

• Enfin, dans le cas où n est pair, la solution du problème (124) est :

$$u_1(x,t)=\frac{2}{1.3...(n-1)\omega_{n+1}}\Big[\partial_t(t^{-1}\partial_t)^{\frac{n-2}{2}}\Big(t^{n-1}\int_{|y|\leq 1}\frac{f(x+ty)}{\sqrt{1-|y|^2}}dy\Big)$$
$$+(t^{-1}\partial_t)^{\frac{n-2}{2}}\Big(t^{n-1}\int_{|y|\leq 1}\frac{g(x+ty)}{\sqrt{1-|y|^2}}dy\Big)\Big]$$

celle du problème (125) est :

$$\begin{aligned}u_2(x,t)&=\int_0^t v(x,t-s;s)ds\\&=\int_0^t\frac{1}{1\times 3\times\cdots\times(n-1)\omega_{n+1}}(t^{-1}\partial_t)^{\frac{n-2}{2}}\Big(t^{n-1}\int_{|y|\leq 1}\frac{w\big(x+(t-s)y,s\big)}{\sqrt{1-|y|^2}}dy\Big)ds\end{aligned}$$

ce qui fait que celle du problème (123) est :

$$\boxed{\begin{aligned} u(x,t) = \frac{1}{1\times 3\times\cdots\times(n-1)\omega_{n+1}}\Bigg[& \partial_t (t^{-1}\partial_t)^{\frac{n-2}{2}}\left(t^{n-1}\int_{|y|\leq 1}\frac{f(x+ty)}{\sqrt{1-|y|^2}}dy\right) \\ & +(t^{-1}\partial_t)^{\frac{n-2}{2}}\left(t^{n-1}\int_{|y|\leq 1}\frac{g(x+ty)}{\sqrt{1-|y|^2}}dy\right) \\ & +\int_0^t (t^{-1}\partial_t)^{\frac{n-2}{2}}\left(t^{n-1}\int_{|y|\leq 1}\frac{w\big(x+(t-s)y,s\big)}{\sqrt{1-|y|^2}}dy\right)ds\Bigg] \end{aligned}}$$

Remarque 4.1. *Si ϕ_t est une solution fondamentale de $\partial_t^2-\Delta$, c'est-à-dire une distribution telle que $L\phi_t = \delta_0$ où δ_0 est la distribution delta de Dirac à l'origine, alors, pour toute fonction $w = w(x,t)$, on a :*

$$(\partial_t^2-\Delta)(w*\phi_t) = w*(\partial_t^2-\Delta)\phi_t = w*\delta_0 = w$$

et cela démontre que la fonction $u = w*\phi_t$ est solution de l'équation des ondes non-homogène

$$\partial_t^2 u-\Delta u = w(x,t).$$

L'inverse est également vrai : Si ϕ_t est une distribution telle que, pour toute fonction $w = w(x,t)$, la fonction $u = w*\phi_t$ est solution de l'équation $\partial_t^2 u-\Delta u = w(x,t)$, alors ϕ_t est une solution fondamentale de $\partial_t^2-\Delta$.

Dans le théorème **4.2.**, la solution $u(x,t)$ du problème (134) est obtenue par la formule (133) dans laquelle v est solution du problème (132), et dans la discution qui suivait la remarque **3.1.**, on a vu que

$$v(.,t;s) = w(.,s)*_x \Xi_t,$$

où

$$\Xi_t = \begin{cases} \Theta_t & \text{si } n=1 \\ \Phi_t & \text{si } n \text{ est impair } \geq 3 \\ \Psi_t & \text{si } n \text{ est pair } \geq 2 \end{cases},$$

où Φ_t, Ψ_t et Θ_t sont définies par les formules (114), (117) et (120) respectivement, et où $*_x$ est la convolution par rapport à la variable spaciale x. Mais alors :

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^t w(.,s)*_x \Xi_{t-s}ds,$$

ce qui est une convolution par rapport à t si l'on remplace Ξ_s par 0 pour $s<0$, et si Ξ_+ est la distribution sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ telle que :

$$\Xi_+(.,t)=\begin{cases} \Xi_t(.) & \text{si } t\geq 0 \\ 0 & \text{si } t<0 \end{cases},$$

c'est-à-dire, telle que :

$$\langle \Xi_+,\psi\rangle=\int_0^{+\infty}\langle \Xi_t,\psi(.,t)\rangle dt \qquad \big(\psi\in\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})\big),$$

alors on peut vérifier que

$$\forall w\in\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}),\;\; u=w*\Xi_+,$$

ce qui signifie que Ξ_+ est une solution fondamentale pour l'opérateur des ondes.

5 L'analyse de Fourier pour l'opérateur des ondes

Nous réexaminons maintenant les problèmes résolus dans les deux parties précédentes, en utilisant la transformée de Fourier. On commence par le problème de cauchy homogène (55) pour l'équation des ondes. En prenant la transformée de Fourier par rapport à la variable spaciale x, on obtient :

$$\widehat{\Delta u}(\xi,t)=-|\xi|^2\widehat{u}(\xi,t)$$

et

$$\widehat{\partial_t^2 u}(\xi,t)=\partial_t^2\widehat{u}(\xi,t).$$

Ainsi, le problème (55) devient :

$$\begin{cases} \partial_t^2\widehat{u}+|\xi|^2\widehat{u} = 0 & (135)\\ \widehat{u}(\xi,0) = \widehat{f}(\xi) & (136)\\ \partial_t\widehat{u}(\xi,0) = \widehat{g}(\xi) & (137)\end{cases}$$

La solution générale de (135) est :

$$\widehat{u}(\xi,t)=C_1\cos(|\xi|t)+C_2\sin(|\xi|t)$$

où C_1 et C_2 sont des constantes à déterminer. Comme :

$$\widehat{u}(\xi,0)=C_1 \quad \text{et} \quad \partial_t\widehat{u}(\xi,0)=C_2|\xi|$$

on conclut, d'après les données initiales (136) et (137), que :

$$C_1 = \widehat{f}(\xi) \quad \text{et} \quad C_2 = \frac{\widehat{g}(\xi)}{|\xi|}$$

et que la solution du problème (135), (136), (137) est :

$$\widehat{u}(\xi, t) = \widehat{f}(\xi)\cos(|\xi|t) + \widehat{g}(\xi)\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}. \tag{138}$$

En posant :

$$\widehat{\phi}_t(\xi) = \cos|\xi|t \quad \text{et} \quad \widehat{\psi}_t(\xi) = \frac{\sin|\xi|t}{|\xi|}, \tag{139}$$

on obtient :

$$\widehat{u}(.\,, t) = \widehat{f}\widehat{\phi}_t + \widehat{g}\widehat{\psi}_t, \tag{140}$$

et en prenant la transformée de Fourier inverse dans les deux membres de cette dernière égalité, on arrive à conclure que la solution u du problème de Cauchy homogène pour l'équation des ondes est telle que :

$$\forall t, \ u(.,t) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}[f * \phi_t + g * \psi_t], \tag{141}$$

sauf que le calcul direct de ϕ_t et ψ_t (en tant que transformées de Fourier inverses de $\xi \mapsto \cos|\xi|t$ et $\xi \mapsto \frac{\sin|\xi|t}{|\xi|}$ respectivement) n'est pas toujours facile car, bien que ces dernières soient des distributions tempérées, ce ne sont pas des fonctions L^1.

L'une des conséquences de l'expression (141) de u est le théorème suivant :

Théorème 5.1. *Soit u la solution du problème (), et t_0, t_1 deux nombres réels tels que $t_0 < t_1$.*
- *Si $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, alors $u \in L^2(\mathbb{R}^n \times [t_0, t_1])$.*
- *Si $f \in H^k(\mathbb{R}^n)$, $g \in H^{k-1}(\mathbb{R}^n)$, alors $u \in H^k(\mathbb{R}^n \times [t_0, t_1])$, où k est quelconque dans $\mathbb{N}^*$.*

6 L'équation des ondes dans un domaine borné

Lorsqu'on veut résoudre l'équation des ondes dans une région $\Omega \times [0, \infty[$, où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, il convient de spécifier non seulement les données de Cauchy $u(x,0)$ et $\partial_t u(x,0)$ sur $\Omega \times \{0\}$ mais également une certaine condition sur $\partial\Omega \times [0,\infty[$ qui indique à l'onde la façon dont elle doit se comporter lorsqu'elle atteint le bord. Les conditions les plus couramment utilisées sont celles de Dirichlet et Neumann, c'est à dire $u = 0$ ou $\partial_\nu u = 0$, et le problème à résoudre est donc, soit

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u &= 0 & \text{sur } \Omega \times (0, \infty) \\ u(.\,,0) &= f & \text{sur } \Omega \\ \partial_t u(.\,,0) &= g & \text{sur } \Omega \\ u &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [0, \infty[\end{cases} \tag{142}$$

ou alors

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u &= 0 \quad \text{sur } \Omega \times (0,\infty) \\ u(.,0) &= f \quad \text{sur } \Omega \\ \partial_t u(.,0) &= g \quad \text{sur } \Omega \\ \partial_\nu u &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times [0,\infty[\end{cases} \tag{143}$$

Pour chacun de ces deux problèmes on peut démontrer que la solution est unique, et on se propose de la chercher par la méthode de séparation des variables, c'est-à-dire sous la forme :

$$u(x,t) = F(x)G(t).$$

En substituant $F(x)G(t)$ à $u(x,t)$ dans l'équation $\partial_t^2 u - \Delta u = 0$, on a arrive à l'équation :

$$G''F - G\Delta F = 0$$

qui implique que les fonctions F et G sont telles que :

$$\forall x \in \Omega,\ \forall t \geq 0,\ \frac{\Delta F}{F}(x) = \frac{G''}{G}(t)$$

c'est-à-dire que $\Delta F/F$ et G''/G sont égales à une même constante que nous supposons réelle strictement négative, pour des raisons physiques (car le mouvement est oscillatoire), et que nous désignons par $-\lambda^2$. On obtient ainsi :

$$\frac{\Delta F}{F} = \frac{G''}{G} = -\lambda^2$$

et cela équivaut à :

$$\begin{cases} \Delta F(x) + \lambda^2 F(x) &= 0 \\ G''(t) + \lambda^2 G(t) &= 0 \end{cases} \tag{144}$$

La solution de $G''(t) + \lambda^2 G(t) = 0$ est de la forme

$$G(t) = a\cos(\lambda t) + b\sin(\lambda t)$$

où a et b sont des constantes déterminées par les conditions initiales, et si l'on pouvait résoudre l'équation $\Delta F(x) + \lambda^2 F(x) = 0$ assujettie à la condition au bord, on conclurait alors que la solution du problème (142) ou (143) est :

$$u(x,t) = F(x)[a\cos(\lambda t) + b\sin(\lambda t)].$$

Cela représente un mode normal de vibrations avec une fréquence λ, et avec un peu de chance, on pourra obtenir la solution sous la forme de superposition de modes normaux. En particulier, si l'on considère le problème (142) et que l'on suppose que $\partial\Omega$ est assez régulier, on pourrait voir que $L^2(\Omega)$ admet une base orthonormale $\{F_j\}$ constituée de fonctions propres du Laplacien sur Ω, qui sont associées aux valeurs propres négatives $\{-\lambda_j^2\}$, et qui satisfont la condition $F_j(x,t)=0$ sur $\partial\Omega$, et on pourrait alors résoudre le problème (142) en choisissant de prendre :

$$u(x,t)=\sum_{j\geq 1} F_j(x)[a_j\cos(\lambda_j t)+b_j\sin(\lambda_j t)] \tag{145}$$

où

$$\sum_{j\geq 1} a_jF_j=f, \qquad \sum_{j\geq 1}\lambda_j b_jF_j=g$$

et donc

$$a_j=\langle f\mid F_j\rangle_{L^2(\Omega)}, \qquad b_j=\lambda_j^{-1}\langle g\mid F_j\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Dans le cas particulier où $n=1$ et $\Omega=]0,l[$, le problème (142) est :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \partial_t^2u-\Delta u &=& 0 & \text{sur } (0,l)\times(0,\infty) \\ u(x,0) &=& f(x) & \\ \partial_t u(x,0) &=& g(x) & \\ u(0,t)=u(l,t) &=& 0 & \end{array}\right. \tag{146}$$

les fonctions propres normalisées sont :

$$F_j(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin j\frac{\pi}{l}x$$

et les fréquences λ_j qui leur sont associées sont

$$\lambda_j=j\frac{\pi}{l}$$

de sorte que la solution du problème (146) est :

$$u(x,t)=\sum_{j=1}^{\infty}\Big[a_j\cos\big(j\frac{\pi}{l}t\big)+b_j\sin\big(j\frac{\pi}{l}t\big)\Big]\sin\big(j\frac{\pi}{l}x\big)$$

avec :

$$a_j=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\big(j\frac{\pi}{l}x\big)dx$$

et

$$b_j=\frac{2}{j\pi}\int_0^l g(x)\sin\big(j\frac{\pi}{l}x\big)dx.$$

7 Conclusion

L'équation des ondes est très importante en physique. Elle décrit la propagation d'une onde représentée par une grandeur scalaire ou vectorielle. Dans ce mémoire nous avons utilisé trois méthodes pour déterminer la solution classique du problème de Cauchy associé à cette équation. La première méthode nous permet également de dégager la solution fondamentale de l'opérateur des ondes et d'en déduire la solution dudit problème dans le cas des distributions. Il existe egalement d'autres méthodes que nous n'avons pas traitées. Parmi elles, nous citons celle qui utilise la transformée de Radon, et signalons l'existence de méthodes numériques.

Références

[1] GERALD B. FOLLAND. « *INTRODUCTION TO PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS* » Princeton University Press (1995)