

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques



Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : EDP Et **Analyse numérique**

Par : Khelaifia Ahlam

Mekhancha Bouchra

Intitulé

Les Equations Intégrales Singulières De Volterra et De Fredholm

Dirigé par : Mr Debbar Rabah

Devant le jury

PRESIDENT	Dr.Guebbai .H	MCA	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr.Debbar.R	MCA	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr.Hetta .Amar	Pr	Univ-Guelma

Session juillet 2019

Remerciement

Nous remercions notre Dieu qui nous à donné le courage et la volenté de
poursuivre nos
études. Ainsi que nos parents qui ont sacrifié leur vie pour notre réussite.
Nos remerciements aux membre du jury qui ont accepté d'évaluer notre travail
et de
nous avoir honoré de leur présence.

Nos remerciements s'adressent également à notre encadreur pour toute l'aide
qu'il nous a
apporté.

Nous souhaitons adresser nos sincères remerciements à toute la famille et à tous
les amis
pour leurs encouragements.

Un grand merci à tous les étudiants de la promotion (2018-2019) sans qui cette
expérience n'aurais pas été la même.

Nous remercions tous ceux qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire de
près ou de
loin.

Résumé

Le travail que nous présentons porte sur une étude générale des équations intégrales singulières et de leurs applications, on a étudié deux types principaux : équations de Fredholm à noyau hérmitique et de Volterra avec la théorie de la composition.

ملخص

هذا العمل يحمل دراسة عامة حول المعادلات التكاملية الغير متصلة و تطبيقاتها, حيث قمنا بدراسة نوعين مهمين من هذه المعادلات معادلة فردهولم التكاملية ذات النواة الهرميتية و معادلة فولتيرا التكاملية مع نظرية التركيب.

Abastrat

The work that we present relates to a general study of the singular integral equations and their applications, we studied two main types: Fredholm's equations with hermitian kernel and Volterra's equations with the theory of composition.

Table des matières

Introduction

1	Introduction à la Théorie des équations intégrales	1
1.1	Classification des équations intégrales :	1
1.1.1	Équations intégrales de volterra :	1
1.1.2	Équations intégrales de Fredholm :	3
1.1.3	Réductions équivalentes : équations intégrales - équations différen- tielles	6
1.1.4	Equations intégrale singulière :	9
2	Equations intégrales singulières de Fredholm et ses applications	10
2.1	Théorie des équations intégrales à noyau hermitique	10
2.2	Application	20
3	Equations intégrales singulières de Volterra et ses applications	28
3.1	Preliminaires	28
3.2	Les noyaux de forme $\frac{1}{y}P(\frac{x}{y})$ et leur décomposition	32
3.3	Application à l'équation intégrales singulière de Volterra	40
3.4	Quelques remarques pour terminer	47

Conclusion	47
Bibliographie	48

Introduction

En mathématique, une équation intégrale est une équation dans laquelle l'inconnu, généralement une fonction d'une ou plusieurs variables, se produit sous signe intégral. Cette définition plutôt générale tient compte de beaucoup de différentes formes spécifiques et dans la pratique, beaucoup de types distincts surgissent.

Dans la théorie classique d'équations intégrales on distingue les équations de **Frédholm** (**Ivare Fréholm** [1866-1927] mathématicien Suédois) et les équations de **Volterra** (**Vito Volterra** [1860-1940] mathématicien Italien). Dans une équation de Fredholm les régions d'intégrations sont fixées, tandis que dans une équation de Volterra elles sont variables.

Les équations intégrales s'appellent singulières si l'intégrale ne peut pas être interprétée comme d'habitude (c'est -à-dire : dans le sens de Riemann ou de Lebegue) mais doit être considérée en tant qu'intégrale de valeur principale.

Les premières applications des équations intégrales remontent au début des années 60, méthodes des singularités utilisées en aérodynamique, puis en rayonnement acoustique et en élasticité. Elles sont en particulier bien adaptés aux systèmes occupant un domaine infini, elles sont aussi l'un des principaux outils dans divers domaines de la mathé-

matique appliquée, de la physique [4] et de la l'ingénierie. Elles offrent un puissant moyen technique pour résoudre certains problèmes pratiques.

Notre travail est présenté en trois chapitres de la manière suivante :

Chapitre 1 :

Est une introduction à la terminologie et à la classification des équations intégrales, qui a pour objectif de familiariser le lecteur avec le concept d'équation intégrale, tel que nous avons présenté une classification pour les équations intégrales linéaire et non -linéaire, première espèce et seconde espèce, homogène et non-homogène, nous avons donné des exemples sur ces équations.

Chapitre 2 :

Ce chapitre se divise en deux parties. Dans la première partie, nous avons étudié les équations à noyaux hermitiques ce qui revient au même que l'étude des formes hermitiques à une infinité de variables. Dans la deuxième partie, nous avons vu des exemples.

Chapitre 3 :

Ce dernier chapitre concerne le cas singulier de la théorie de l'équation de Volterra qui à été traité par Volterra et Lalesco. Nous avons fait quelques remarques comparatives sur les deux méthodes, puis on a vu une décomposition de noyau de la forme $\frac{1}{y}P(\frac{x}{y})$ et on a fait un exemple.

Le mémoire se termine par des références bibliographiques.

Chapitre 1

Introduction à la Théorie des équations intégrales

1.1 Classification des équations intégrales :

Une équation intégrale peut être classée comme étant soit une équation intégrale linéaire ou bien comme une équation intégrale non linéaire. Il y a une similitude parfaite avec la classification des équations différentielles ordinaires ou celle aussi des équations aux dérivées partielles. Les équations intégrales les plus fréquemment utilisées sont les équations intégrales de Volterra et celles de Fredholm. Qui constituent donc les deux principales catégories. A ces deux catégories d'équations intégrales, nous pouvons considérer encore deux autres types, à savoir les équations intégrales différentielles et les équations intégrales singulières.

1.1.1 Équations intégrales de Volterra :

Définition 1.1. *On appelle équation intégrale de Volterra non linéaire de seconde espèce une équation de la forme*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t, \varphi(t)) dt$$

où

✓ $\varphi(x)$ est une fonction inconnue et $K(x, t)$ et $f(x)$ sont des fonctions connues et λ un paramètre réel.

1• Une équation de la forme

$$\int_a^x K(x, t, \varphi(t)) dt = f(x)$$

est appelée ***équation intégrale de Volterra non linéaire de première espèce***.

où

✓ $\varphi(x)$ est une fonction inconnue.

2• On appelle une équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce une équation de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) \varphi(t) dt$$

où

✓ $\varphi(x)$ est une fonction inconnue et $K(x, t)$ et $f(x)$ sont des fonctions connues et λ un paramètre réel.

3• Si $f(x)=0$ l'équation s'écrit

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x, t) \varphi(t) dt$$

elle est appelée ***équation intégrale linéaire homogène de Volterra de seconde espèce***.

4• Une équation à une inconnue $\varphi(x)$, de la forme

$$\int_a^x K(x, t) \varphi(t) dt = f(x)$$

est appelée *équation intégrale linéaire de Volterra de première espèce*.

Exemples des Equations intégrales de Volterra :

Equations intégrales linéaires non homogènes de Volterra de la seconde et première espèce

$$\varphi(x) = x^2 + \sin(x) + 1 + \lambda \int_0^x (x^2 - t)\varphi(t) dt ; 0 = x^2 + 1 + \lambda \int_0^x (x^2 - t)\varphi(t) dt$$

Equation intégrales linéaires homogènes de Volterra de la seconde et première espèce

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^x (x^2 - t)\varphi(t) dt ; 0 = \lambda \int_0^x (x^2 - t)\varphi(t) dt$$

1.1.2 Équations intégrales de Fredholm :

Définition 1.2. On appelle une équation intégrale de Fredholm non linéaire de seconde espèce une équation de la forme

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t, \varphi(t)) dt = f(x)$$

où

✓ $\varphi(x)$ est une fonction inconnue et $K(x, t)$ et $f(x)$ sont des fonctions connues et λ un paramètre réel.

• Si $f(x) = 0$ l'équation s'écrit

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, t, \varphi(t)) dt$$

elle est dite *équation intégrale de Fredholm non linéaire de seconde espèce homogène*, si dans le cas contraire

Si $f(x) \neq 0$ elle est dite **équation intégrale de Fredholm non linéaire de seconde espèce non homogène**.

1• On appelle une équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèce une équation de la forme

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t) dt = f(x)$$

où

✓ $\varphi(x)$ est une fonction inconnue et $K(x, t)$ et $f(x)$ sont des fonctions connues et λ un paramètre réel.

• Si $f(x) = 0$ et $\tilde{K}(x, t) = \lambda K(x, t)$ l'équation s'écrit

$$\varphi(x) = \int_a^b \tilde{K}(x, t)\varphi(t) dt$$

elle est dite **équation intégrale de Fredholm de seconde espèce homogène**, si dans le cas contraire $f(x) \neq 0$ elle est dite **équation intégrale de Fredholm linéaire de seconde espèce non homogène**.

2• Une équation de la forme

$$\int_a^b K(x, t)\varphi(t) dt = f(x)$$

est appelée **équation intégrale linéaire de Fredholm de première espèce**.

Exemples des Equations intégrales de Fredholm :

Équations intégrales linéaires non homogènes de Fredholm de la seconde et première espèce

$$\varphi(x) = x^2 + \sin(x) + 1 + \lambda \int_{-1}^1 (x^2 - t)\varphi(t) dt ; 0 = x^2 + 1 + \lambda \int_{-1}^1 (x^2 - t)\varphi(t) dt$$

Equations intégrales linéaires homogènes de Fredholm de la seconde et première espèce

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x^2 - t)\varphi(t) dt ; 0 = \lambda \int_{-1}^1 (x^2 - t)\varphi(t) dt$$

Equations intégro-différentielles :

Dans ce type d'équation intégrale, la fonction inconnue $\varphi(x)$ apparaît dans l'équation par l'une de ses fonctions dérivées ordinaires et dans l'intégrande avec des conditions initiales.

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x (x-t)\varphi(t) dt, \quad \varphi(0) = 1; \quad \frac{d\varphi}{dx}(0) = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 (xt)\varphi(t) dt, \quad \varphi(0) = 1 \quad (1.2)$$

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 (xt)\sqrt{\varphi(t)} dt, \quad \varphi(0) = 1 \quad (1.3)$$

Similairement aux cas précédents, la forme des équations intégrales est soit du type linéaire ou du type non linéaire. On remarquera que l'équation intégrale (1.1) est une équation intégrale linéaire de Volterra de la deuxième espèce tandis que l'équation intégrale (1.2) est une équation intégrale linéaire de Fredholm de la seconde espèce. L'équation (1.3) est une équation intégrale non linéaire du type de Fredholm. Dans ce qui suit nous donnons quelques exemples d'équations intégro-différentielles.

Exemples :

$$\frac{d^3\varphi}{dx^3}(x) = 2x^5 - x - \int_0^3 (x-t)\varphi(t) dt, \quad \varphi(0) = 1; \quad \frac{d\varphi}{dx}(0) = 0; \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2}(0) = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{1}{4}x^4 - \int_0^x (x-t)\varphi^3(t) dt, \quad \varphi(0) = 1$$

1.1.3 Réductions équivalentes : équations intégrales - équations différentielles

Problème de la valeur initiale et équation intégrale :

Considérons le problème de la valeur initiale suivant

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = F(x, \varphi), \text{ avec } x \geq x_0 \quad \varphi(x_0) = \varphi_0$$

Une intégration le long de l'intervalle $[x_0, x]$ donne

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \int_{x_0}^x F(t, \varphi(t)) dt$$

La fonction inconnue $\varphi(x)$ figure sur le côté gauche de cette dernière relation et fait aussi partie de l'intégrande.

D'autre part, il est aisé de remarquer que cette équation intégrale est linéaire si l'intégrande $F(t, \varphi(t))$ a la forme $F(t, \varphi(t)) = \alpha(t)\varphi(t)$, autrement dit si l'équation différentielle initiale est elle aussi linéaire.

Exemple :

- L'équation intégrale linéaire de Volterra

$$\varphi(x) = x^3 - \frac{1}{2} \sin(x) + \int_0^x (x^2 - t)\varphi(t) dt$$

devient après les transformations suivantes

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx}(x) &= 3x^2 - \frac{1}{2} \cos(x) + (x^2 - x)\varphi(x) + 2x \int_0^x \varphi(t) dt \\ \frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) &= 6x + \frac{1}{2} \sin(x) + (4x - 1)\varphi(x) + (x^2 - x) \frac{d\varphi}{dx}(x) + 2 \int_0^x \varphi(t) dt \end{aligned}$$

$$\frac{d^3\varphi}{dx^3}(x) = 6 + \frac{1}{2}\cos(x) + 4\varphi(x) + (4x-1)\frac{d\varphi}{dx}(x) + (x^2-x)\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) + (2x-1)\frac{d\varphi}{dx}(x) + 2\varphi(x)$$

équivalente à l'équation différentielle linéaire d'ordre 3 avec les conditions initiales au point $c = 0$

$$\begin{aligned}\frac{d^3\varphi}{dx^3}(x) - (x^2-x)\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) - (6x-2)\frac{d\varphi}{dx}(x) - 6\varphi(x) &= 6 + \frac{1}{2}\cos(x) \\ \varphi(0) = 0, \frac{d\varphi}{dx}(0) = -\frac{1}{2}, \frac{d^2\varphi}{dx^2}(0) &= 0\end{aligned}$$

L'équation différentielle linéaire avec les conditions initiales au point $c = 0$

$$\frac{d^3\varphi}{dx^3}(x) - \frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{1}{2}x^2; \varphi(0) = 0, \frac{d\varphi}{dx}(0) = 0, \frac{d^2\varphi}{dx^2}(0) = 1$$

est équivalente après les transformations suivantes

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{d^3\varphi}{dt^3}(t)dt - \int_0^x \frac{d\varphi}{dt}(t)dt &= \frac{1}{2}\int_0^x t^2 dt \frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) - \frac{d^2\varphi}{dx^2}(0) - \varphi(x) + \varphi(0) = \frac{1}{6}x^3 \\ \frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) - 1 - \varphi(x) &= \frac{1}{6}x^3 \\ \int_0^x \frac{d^2\varphi}{dt^2}(t)dt - \int_0^x dt - \int_0^x \varphi(t)dt &= \frac{1}{6}\int_0^x t^3 dt \\ \frac{d\varphi}{dx}(x) - \frac{d\varphi}{dx}(0) - x - \int_0^x \varphi(t)dt &= \frac{1}{24}x^4\end{aligned}$$

à l'équation intégral-différentielle suivante de type Volterra

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{1}{48}x^4 + x + \int_0^x \varphi(t)dt$$

Problème aux bords et équation intégrale :

Inversement un schéma mathématique traduit sous la forme d'une équation intégrale peut aussi être transformé en un problème différentiel de valeurs aux bords.

Nous allons traiter l'équation différentielle d'ordre 2 suivante avec des conditions aux bords

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) = \psi(x, \varphi(x)); \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \varphi(0) = c, \quad \varphi(1) = d$$

En intégrant l'équation deux fois de suite par rapport à x le long de $[0, x]$, il vient

Exemples :

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) + \frac{1}{2}x^2\varphi(x) = 1; \quad 0 < x < 1, \quad \varphi(0) = 1, \quad \varphi(1) = 0$$

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) + \frac{1}{2}x\varphi(x) = x \quad 0 < x < 1, \quad \varphi(0) = 1; \quad 0 < x < 1, \quad \varphi(0) = 1, \quad \frac{d\varphi}{dx}(1) = 0$$

Equations intégrales à plusieurs variables

La notion d'équation intégrale peut être facilement généralisée au cas multidimensionnel. Si les fonctions f , K et φ sont à valeurs vectorielles, dans \mathfrak{R}^p par exemple, alors les définitions peuvent aisément être adaptées à ce cas par les formulations suivantes

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t, \varphi(t)) dt, \quad x \geq a$$

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t, \varphi(t)) dt, \quad x \leq a \leq b$$

avec respectivement

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), f_{p-1}(t), \dots, f_p(t))^T$$

$$K(x, t, \varphi(t)) = \begin{pmatrix} K_1(x, t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_p(t)) \\ K_2(x, t, \varphi_1, \varphi_2(t), \dots, \varphi_p(t)) \\ \vdots \\ K_p(x, t, \varphi_1, \varphi_2(t), \dots, \varphi_p(t)) \end{pmatrix}$$

1.1.4 Equations intégrale singulière :

Définition 1.3. *On dit qu'une équation intégrale est singulière si l'une ou les deux limites de l'intégrale sont infinies, ou bien le noyau devient infini au voisinage des points de l'intégrale.*

Exemples :

1. par exemple si le noyau $K(x, t)$ de E.I.L de Fredholm est de la forme

$$K(x, t) = \frac{M(x, t)}{|x - t|^\alpha} \quad 0 < \alpha \leq 1$$

avec $M(x, t)$ une fonction bornée sur $[a, b] \times [a, b]$.

Ou encore un noyau $K(x, t)$ logarithmique

$$K(x, t) = M(x, t) \ln|x - t|$$

Si $\alpha = 1$ dans l'exemple (1) alors $K(x, t)$ est appelé noyau de Cauchy.

$$K(x, t) = \frac{M(x, t)}{x - t}$$

Chapitre 2

Equations intégrales singulières de Fredholm et ses applications

2.1 Théorie des équations intégrales à noyau hermitique

Le sujet principal de notre chapitre est l'étude des équations intégrales à noyaux hermitiques¹, ou ce qui revient au même, l'étude des formes hermitiques à une infinité de variables. C'est **M.HILBERT** qui a créé la théorie importante qu'on possède aujourd'hui sur cette question. Les recherches de **M.HILBERT** ont été pour suivies par plusieurs auteurs parmi lesquels mentionnerons **MM.WEYL, HELLINGER, TOEPLITZ, PLANCHE-REL, F.RIESZ** [10].

Traduites dans le langage de la théorie des équations intégrales les hypothèses que fait **M.HILBERT**, sont les suivantes :

1. Nous dirons que le noyau $K(x, y)$ est hermétique si la relation $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$ est remplie

$$\text{I: } \int_a^b K|(x, y)|^2 dy; \text{ existe en général,}$$

$$\text{II: } \left| \int_a^b \int_a^b K(x, y) u(x) u(y) dx dy \right| \leq k^2 \int_a^b |u(x)|^2 dx,$$

k étant une constante indépendante de $u(x)$.

La question qui nous occupe a considérablement augmenté. C'est, en effet, un instrument mathématique indispensable pour le développement de la mécanique moderne créé par **MM. de BROGLIE, HEISENBERG** et **SCHRÖDINGER**.

• **Etude de l'équation intégrale**

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy = f(x),$$

pour les valeurs non réelles de λ .

Soit $K(x, y)$ une fonction mesurable, définie dans le domaine $a \leq x \leq b$, et satisfaisant à la relation $K(x, y) = \overline{K(x, y)}$. Supposons en outre que l'intégrale

$$k(x)^2 = \int_a^b |K(x, y)|^2 dy$$

existe presque partout. Dans le cas général $\int_{E_n} k(x)^2 dx$ n'est pas convergente. Or, on peut toujours trouver une suite d'ensembles $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ pour lesquels $\int_{E_n} k(x)^2 dx$ existe et qui satisfaisant aux conditions :

$$E_1 \leq E_2 \leq E_3 \dots \leq E_n \leq \dots,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [\text{mesure de } E_n] = b - a.$$

Pour voir qu'il en est bien ainsi, il suffit de considérer les ensembles E_n pour lesquelles $k(x) \leq n$. Considérons maintenant une fonction $K_n(x, y)$ égale à $K(x, y)$ si x ou y appartient à E_n et égale à un noyau hermitique arbitraire à carré intégrable si x et y n'appartient pas à E_n .

Nous appellerons $K_n(x, y)$ la réduite généralisée de $K(x, y)$. On voit que l'intégrale,

$$\int_a^b \int_a^b |K_n(x, y)|^2 dx dy$$

existe²

Soit l'équation intégrale

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\varphi(y) dy = f(x), \quad (2.1)$$

où

$$\checkmark \lambda = \alpha + i\beta, \quad \beta \neq 0.$$

Nous ne considérons que des fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ à carré intégrable.

Introduisons d'abord les solutions $\varphi_n(x)$ des équations intégrales

$$\varphi_n(x) - \lambda \int_a^b K_n(x, y)\varphi_n(y) dy = f(x); \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2.2)$$

En multipliant par $\overline{\varphi_n(x)}$ et en intégrant, on obtient

$$\int_a^b \overline{\varphi_n(x)}\varphi(x) - \lambda \int_a^b \int_a^b K_n(x, y)\overline{\varphi_n(x)}\varphi_n(y) dx dy = \int_a^b f(x)\overline{\varphi_n(x)}$$

$$\frac{1}{\lambda} \int_a^b \overline{\varphi_n(x)}((\varphi_n(x) - f(x))) dx = \int_a^b \int_a^b K_n(x, y)\overline{\varphi_n(x)}\varphi_n(y) dx dy.$$

2. On peut aussi considérer des réduites plus générales définies par la condition :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |K(x, y) - K_n(x, y)|^2 dy = 0 \text{ pour presque toutes les valeurs de } x \text{ dans } (a, b).$$

Le second membre étant réel, on en déduit

$$\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\bar{\lambda}}\right) \int_a^b |\varphi_n(x)|^2 dx = \frac{1}{\lambda} \int_a^b \overline{\varphi_n} f dx - \frac{1}{\bar{\lambda}} \int_a^b \varphi_n \bar{f} dx. \quad (2.3)$$

C'est une relation tout à fait indépendante du noyau. En appliquant l'inégalité de **SCHWARZ** on trouve

$$\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\bar{\lambda}}\right) \int_a^b |\varphi_n|^2 dx \leq \frac{2}{|\lambda|} \sqrt{\int_a^b |\varphi_n(x)|^2 dx \int_a^b |f(x)|^2 dx},$$

d'où l'on conclut

$$\int_a^b |\varphi_n(x)|^2 dx \leq \frac{4|\lambda|^2}{|\lambda - \bar{\lambda}|^2} \int_a^b |f(x)|^2 dx. \quad (2.4)$$

Les intégrales $\int_a^b |\varphi_n(x)|^2 dx$ sont donc bornées dans leur ensemble.

Nous avons maintenant besoin de quelques notions introduites par **M. F. RIESZ** [11].

Soit

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots \quad (2.5)$$

une suite de fonctions à carré intégrable telles que

$$\int_a^b |f_v(x)|^2 dx \leq M, \quad (2.6)$$

où

✓ M est une constante indépendante de v .

Nous dirons que $f_v(x)$ converge faiblement vers une fonction $f(x)$ à carré intégrable si

$$\lim_{v \rightarrow +\infty} \int_a^x f_v(x) dx = \int_a^x f(x) dx, \quad a < x < b$$

et que $f_\nu(x)$ converge fortement vers $f(x)$ si

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \int_a^b |f(x) - f_\nu(x)|^2 dx = 0.$$

Citons les théorèmes suivants dûs à **M. F. RIESZ**.

I. De chaque ensemble $f_\nu(x)$ satisfaisant à la condition (2.6) on peut toujours extraire une suite partielle qui soit faiblement convergente.

II. Si $f_\nu(x)$ converge faiblement vers $f(x)$, on a

$$\overline{\lim}_{\nu \rightarrow +\infty} \int_a^b |f_\nu(x)|^2 \geq \int_a^b |f(x)|^2 dx, \quad (2.7)$$

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \int_a^b f_\nu(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)g(x)dx, \quad (2.8)$$

$g(x)$ étant une fonction à carré intégrable.

III. Si $f_\nu(x)$ converge faiblement vers $f(x)$ tandis que $g_\nu(x)$ tend fortement vers $g(x)$, on a

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \int_a^b f_\nu(x)g_\nu(x)dx = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

IV. Si une suite $f_\nu(x)$ faiblement convergente vers $f(x)$ converge (en sens ordinaire) presque partout vers une fonction $F(x)$ on a presque partout $f(x) = F(x)$.

Revenons maintenant aux fonctions $\varphi_n(x)$ introduites à la page 12.

A cause de la condition (2.4), on peut trouver une suite n_ν telle que $\varphi_{n_\nu}(x)$ converge faiblement vers une fonction $\varphi(x)$ à carré intégrable.

En vertu du théorème II on a pour presque toutes les valeurs de x dans (a, b) (**plus précisément pour les valeurs de x appartenant à $E = \lim E_n$**) :

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_a^b k_{n_\nu}(x, y)\varphi_{n_\nu}(y)dy = \int_a^b k(x, y)\varphi(y)dy.$$

En tenant compte de (2.2) il s'ensuit que $f_{n_\nu}(x)$ converge presque partout.

En posant dans (2.2) $n = n_\nu$ et en faisant $\nu \rightarrow \infty$, on trouve donc **en vertu du théorème IV** que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} f_{n_\nu}(x) = \varphi(x)$$

est une solution³ de (2.1).

Il est facile de voir qu'on peut choisir les nombres n_ν de manière que $\lim \varphi_{n_\nu}(x)$ existe presque partout pour toutes les fonctions $f(x)$ à carré intégrable. On obtient ainsi une fonctionnelle $T(f, \lambda)$ solution de l'équation

$$T_x(f, \lambda) - \lambda \int_a^b k(x, y) T_y(f, \lambda) dy = f(x).$$

Si l'on introduit le symbole

$$D(\varphi, f; \lambda) = \frac{1}{\lambda \bar{\lambda}} \int_a^b |\varphi|^2 dx + \frac{1}{\lambda - \bar{\lambda}} \left[\frac{1}{\lambda} \int_a^b \bar{\varphi} f dx - \frac{1}{\bar{\lambda}} \int_a^b \varphi \bar{f} dx \right],$$

nous pouvons écrire la relation (2.3) sous la forme

$$D(\varphi_n, f; \lambda) = 0.$$

Par un passage à la limite il vient

$$D(F(f, \lambda), f; \lambda) \leq 0. \quad (2.9)$$

Il convient de considérer en même temps les équations associées

$$\psi(x) - \lambda \int_a^b K(y, x) \psi(y) dy = g(x), \quad (2.10)$$

$$\psi_n(x) - \lambda \int_a^b K_n(y, x) \psi_n(y) dy = g(x). \quad (2.11)$$

3. Nous dirons que $\varphi(x)$ est solution de (2.1) si cette équation est vérifiée pour presque toutes les valeurs de x dans (a, b)

Nous pouvons choisir les n_v de telle manière que $\varphi_{n_v}(x)$ et $\psi_{n_v}(x)$ convergent simultanément vers des solutions $\varphi(x) = T(f, \lambda)$ et $\psi(x) = T'(g, \lambda)$ de (2.1) et de (2.10) et cela pour toutes les fonctions $f(x)$ et $g(y)$ à carré intégrable et même pour toutes les valeurs non réelles de λ . Des formules (2.2) et (2.11) on déduit

$$\int_a^b f(x)\psi_n(x)dx = \int_a^b g(x)\varphi_n(x)dx.$$

Par un passage à la limite il vient

$$\int_a^b f T'(g, \lambda) dx = \int_a^b g T(f, \lambda) dx, \quad (2.12)$$

formule fondamentale pour l'étude qui suivra.

Si, au lieu de la fonction φ , on introduit une nouvelle fonction u par la transformation

$$\varphi = \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda} - \lambda} (f + u),$$

l'expression $D(\varphi, f; \lambda)$ prend la forme simple suivante

$$D(\varphi, f; \lambda) = \frac{1}{|\lambda - \bar{\lambda}|^2} \left[\int_a^b u \bar{u} dx - \int_a^b f \bar{f} dx \right].$$

En désignant par $u(f)$ la fonctionnelle qui correspond à $T(f)$, nous pouvons donc remplacer l'inégalité (2.9) par

$$\int_a^b |u(f)|^2 dx \leq \int_a^b |f|^2 dx. \quad (2.13)$$

Pour que le signe d'égalité ait lieu dans cette formule il faut et il suffit que $\varphi_{n_v}(x)$ converge fortement vers sa limite.

Résumé : pour λ non réel l'équation (2.1) admet au moins une solution à carré intégrable. De chaque suite de réduites $K_n(x, y)$ on peut extraire une suite partielle $K_{n_v}(x, y)$ telle que les solutions $\varphi_{n_v}(x)$ et $\psi_{n_v}(x)$ de (2.2) et (2.11) tendent vers des solutions bien déterminées $\varphi(x) = T(f, \lambda)$, $\psi(x) = T'(g, \lambda)$ de (2.1) et (2.10) et cela pour toutes les fonctions f et g à

carré intégrable et pour toutes les valeurs non réelles de λ .

Les fonctionnelles φ et ψ satisfont à certaines relations qui, moyennant les transformations

$$\varphi = \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda} - \lambda}(f + u), \quad \psi = \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda} - \lambda}(g + v),$$

peuvent s'écrire :

$$\int_a^b |u|^2 dx \leq \int_a^b |f|^2 dx, \quad \int_a^b |v|^2 dx \leq \int_a^b |g|^2 dx,$$

$$\int_a^b u g dx = \int_a^b v f dx. \quad (2.14)$$

Il est bien connu que l'équation (2.1) ne possède qu'une seule solution à carré intégrable pour $I[\lambda] \neq 0^4$, si $K(x, y)$ est un noyau borné (au sens de **MM. HILBERT** et **WEYL**). L'exemple suivant montre qu'il n'est pas toujours ainsi pour les noyaux plus généraux que nous considérons ici. Définissons, comme suit, un système de fonctions $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots$ orthogonales et normales dans l'intervalle $(0, 1)^5$ [9].

$$\psi_0(x) = 1 \quad \text{pour } 0 \leq x \leq 1,$$

$$\psi_1(x) = \begin{cases} -1 & \text{pour } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{pour } \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

.....

$$\psi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 \leq x < 1 - \frac{1}{2^{n-1}}, \\ -2^{\frac{n-1}{2}} & \text{pour } 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \leq x < 1 - \frac{1}{2^n}, \\ 2^{\frac{n-1}{2}} & \text{pour } 1 - \frac{1}{2^n} \leq x < 1. \end{cases}$$

4. $I[\lambda]$: partie imaginaire de λ .

5. Ce système de fonctions orthogonales a été introduit par **M.HAAR**

L'équation intégrale

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, y)\varphi(y) dy = 0,$$

où

$$\checkmark K(x, y) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p \psi_p(x)\psi_p(y),$$

admet certainement pour $\lambda = i$ une solution $\varphi(x)$ telle que

$$\int_a^b |\varphi(x)|^2 dx \neq 0$$

si la série

$$\sum \frac{2^{\nu}}{1 + a_{\nu}^2}$$

converge [12].

Il convient de classer les noyaux considérés en deux classes **I** et **II** suivant que l'équation homogène

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\varphi(y) dy = 0,$$

n'admet pas ou admet de solution non nulle à carré intégrable lorsque λ n'est pas réel. Il est facile de voir que la classe **I** est plus étendue que la classe des noyaux bornés d'**HILBERT**. Nous verrons plus loin qu'un grand nombre de propriétés des noyaux bornés subsistent pour les noyaux de la classe **I**.

Ecrivons pour abrégé

$$\int_a^b K(x, y)\varphi(y) dy = S(\varphi), \quad \int_a^b K(y, x)\psi(y) dy = S'(\psi).$$

Théorème 2.1.1. *Si les équations*

$$\varphi - \lambda S(\varphi) = 0, \quad (2.15)$$

$$\psi - \lambda S'(\psi) = 0, \quad (2.16)$$

n'ont pas de solution non nulle pour une valeur particulière

$$\lambda = \lambda^* = x^* + i\beta^*, \quad (\beta^* \neq 0)$$

alors :

$$\int_a^b |\varphi|^2 dx = 0.$$

Démonstration. De l'équation (2.15) on peut déduire les relations

$$\varphi - \lambda^* S(\varphi) = \left(1 - \frac{\lambda^*}{\lambda}\right)\varphi,$$

$$\bar{\varphi} - \lambda^* S'(\bar{\varphi}) = \left(1 - \frac{\lambda^*}{\lambda}\right)\bar{\varphi}.$$

On a donc, en tenant compte des hypothèses du théorème :

$$\varphi = T\left(\left(1 - \frac{\lambda^*}{\lambda}\right)\varphi; \lambda^*\right), \quad \bar{\varphi} = T\left(\left(1 - \frac{\lambda^*}{\lambda}\right)\bar{\varphi}; \lambda^*\right)$$

En appliquant la formule (2.12) il vient

$$\left(1 - \frac{\lambda^*}{\bar{\lambda}}\right) \int_a^b \varphi \bar{\varphi} dx = \left(1 - \frac{\lambda^*}{\lambda}\right) \int_a^b \varphi \bar{\varphi} dx,$$

d'où l'on conclut, si $\lambda \neq \bar{\lambda}$, que

$$\int_a^b |\varphi|^2 dx = 0.$$

□

Par un raisonnement analogue, on obtient le théorème suivant :

L'équation (2.15) admet le même nombre de solutions à carré intégrable pour toutes les valeurs de λ situées du même côté de l'axe réel.

Signalons enfin que les noyaux de la classe **I** sont caractérisés par la propriété suivante : Soit **D** l'ensemble des fonctions f telles que $\mathbf{S}(f)$ soit aussi à carré intégrable, et \bar{D} l'ensemble des fonctions conjuguées de **D**.

La condition nécessaire et suffisante pour que $K(x, y)$ appartienne à la classe **I** est que la relation

$$\int_a^b f S'(g) dx = \int_a^b g S(f) dx,$$

ait lieu chaque fois f appartient à **D** et g à \bar{D} .

2.2 Application

Les formes hermitique à une infinité de variables :

Il est presque évident que la théorie générale des équations intégrales à noyau hermitique embrasse comme cas particulier celle des formes hermitiques

$$A(x) = \sum_{p,q}^{\infty} a_{pq} x_p x_q$$

à une infinité de variables. On peut, en effet, faire correspondre à $A(x)$ un noyau hermitique $K(x, y)$ défini par les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} K(x, y) = a_{pq} \quad \text{pour} \quad \left\{ \begin{array}{l} p-1 < x < p, \\ q-1 < y < q, \end{array} \right. \\ K(x, y) = 0 \quad \text{sur les lignes} \quad x = p, \quad y = q, \\ p = 1, 2, \dots, \quad q = 1, 2, \dots, \end{array} \right.$$

tel que l'on ait

$$\sum_{p,q}^m a_{pq} x_p x_q = \int_0^\infty \int_0^\infty k(x,y) h_m(x) h_m(y) dx dy,$$

où l'on a posé

$$\begin{cases} h_m(x) = x_p & \text{pour } p-1 < x < p, \quad p < m, \\ h_m(x) = 0 & \text{pour } x > m. \end{cases}$$

Supposons maintenant que les séries

$$\sum_{q=1}^{\infty} |a_{pq}|^2,$$

soient convergentes quel que soit p . Cela revient à dire que l'intégrale

$$\int_0^\infty |K(x,y)|^2 dy$$

est convergente. Considérons le système d'équations linéaires à une infinité d'inconnues

$$x_p - \lambda \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq} x_q = \alpha_p \quad (p = 1, 2, \dots).$$

En posant

$$\begin{cases} \varphi(x) = x_p & \text{pour } p-1 < x < p \\ & \text{et} \\ f(x) = \alpha_p & \text{pour } p-1 < x < p \end{cases}$$

On voit que la détermination de toutes les solutions $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ dont la somme $\sum |x_p|^2$ converge est équivalente à la recherche des solutions à carré intégrable de l'équation intégrale

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^\infty K(x,y) \varphi(y) dy = f(x).$$

On voit qu'un grand nombre des théorèmes que **M.HILBERT** a établis pour les formes quadratiques bornées subsistent sous les hypothèses que nous avons considérées ici.

L'équation de Schrödinger.

Nous essayerons d'abord une déduction de l'équation de **Schrodinger**.

Considérons un point matériel de masse m se mouvant dans un champ des forces ayant une fonction des forces U indépendante du temps.

En vertu du principe de moindre action les trajectoires correspondant à la l'énergie E sont déterminées par la condition de rendre minimum l'intégrale

$$\int_{p_0}^p \sqrt{2(U+E)} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

✓ p_0 et p étant deux points quelconques de la trajectoire.

Écrivons, pour abrégé, $2(U+E) = \omega$. On obtient les équations différentielles :

$$\frac{d}{ds} \left(\sqrt{\omega} \frac{dx}{ds} \right) = \frac{1}{2\sqrt{\omega}} \frac{\partial \omega}{\partial x}.$$

$$\frac{d}{ds} \left(\sqrt{\omega} \frac{dy}{ds} \right) = \frac{1}{2\sqrt{\omega}} \frac{\partial \omega}{\partial y},$$

$$\frac{d}{ds} \left(\sqrt{\omega} \frac{dz}{ds} \right) = \frac{1}{2\sqrt{\omega}} \frac{\partial \omega}{\partial z}.$$

En introduisant les notations

$$\sqrt{\omega} \frac{dx}{ds} = p, \quad \sqrt{\omega} \frac{dy}{ds} = q, \quad \sqrt{\omega} \frac{dz}{ds} = r,$$

On en déduit le système

$$\frac{dx}{p} = \frac{dy}{q} = \frac{dz}{r} = \frac{dp}{\frac{1}{2} \frac{\partial \omega}{\partial x}} = \frac{dq}{\frac{1}{2} \frac{\partial \omega}{\partial y}} = \frac{dr}{\frac{1}{2} \frac{\partial \omega}{\partial z}} = \frac{ds}{\sqrt{\omega}}. \quad (2.17)$$

Or, on voit aisément que ces équation sont les équation différentielles des bicaractéristiques(ou plutôt la projection des bicaractéristiques dans l'espace)d'une certaine équation aux dérivées partielles du second ordre et du type hyperbolique

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - C\omega(x, y, z) \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0, \quad (2.18)$$

où

✓ C est une constante arbitraire.

Les surface caractéristiques de (2.18) sont définies par l'équation

$$\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^2 - C\omega = 0. \quad (2.19)$$

Les bicaractéristique sont les caractéristiques de cette équation du premier ordre (voir **HADAMARD, Propagation des ondes**). Les équation différentielles de ces caractéristiques sont les suivantes

$$\frac{dx}{2p} = \frac{dy}{2q} = \frac{dz}{2r} = \frac{dp}{C\frac{\partial\omega}{\partial x}} = \frac{dq}{C\frac{\partial\omega}{\partial y}} = \frac{dr}{C\frac{\partial\omega}{\partial z}} = \frac{dt}{2(p^2 + q^2 + r^2)}, \quad (2.20)$$

où l'on a posé $\frac{\partial t}{\partial x} = p$, $\frac{\partial t}{\partial y} = q$, $\frac{\partial t}{\partial z} = r$. Remplaçons dans (2.20) p , q , r par $p\sqrt{C}$, $q\sqrt{C}$, $r\sqrt{C}$. On obtient le système :

$$\frac{dx}{p} = \frac{dy}{q} = \frac{dz}{r} = \frac{dp}{\frac{1}{2}\frac{\partial\omega}{\partial x}} = \frac{dq}{\frac{1}{2}\frac{\partial\omega}{\partial y}} = \frac{dr}{\frac{1}{2}\frac{\partial\omega}{\partial z}}$$

En comparant avec les formules (2.17), on voit que les trajets des *bicaractéristiques dans* l'espace coïncident avec les trajectoires du *mouvement dynamique*. Les bicaractéristiques jouent le rôle de rayons pour le mouvement ondulatoire régi par l'équation (2.18).

Il est remarquable que la vitesse dynamique v et cela quelle que soit la constante C . On déduit, en effet, de (2.20)

$$\frac{ds}{2\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} = \frac{ds}{2\sqrt{C\omega}} = \frac{dt}{2C\omega},$$

d'où il suit

$$a = \frac{1}{\sqrt{C\omega}},$$

tandis qu'on a

$$v = \sqrt{\frac{\omega}{m}}.$$

Or, il est possible de choisir C de manière que v soit la vitesse de groupe de certaines ondes de (2.18) correspondant à différentes valeurs de E . Pour définir cette vitesse de groupe, il faut choisir, pour chaque valeur de E , une certaine fréquence ν fonction de E . On peut aussi considérer E comme fonction de ν . Ceci posé, la vitesse de groupe b est définie par l'équation

$$\frac{1}{b} = \frac{d}{d\nu} \left(\frac{\nu}{a} \right) = \frac{d}{d\nu} (\nu\sqrt{C}\sqrt{\omega}) = \sqrt{\omega} \frac{d(\nu\sqrt{C})}{d\nu} + \nu \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{\omega}} \frac{dE}{d\nu}.$$

En écrivant $b = v = \sqrt{\frac{\omega}{m}}$, et en utilisant la relation $\omega = 2(U + E)$, on en déduit

$$2U \frac{d(\nu\sqrt{C})}{d\nu} + 2E \frac{d(\nu\sqrt{C})}{d\nu} + \nu\sqrt{C} \frac{dE}{d\nu} = \sqrt{m}. \quad (2.21)$$

Remarquons que E et C sont indépendants de x, y, z , tandis que U est une fonction de ces variables, pour (2.21) ait lieu il faut donc que le coefficient de U soit égal à zéro, c'est-à-dire

$$\frac{d(\nu\sqrt{C})}{d\nu} = 0. \quad (2.22)$$

L'équation (2.21) nous donne encore

$$\nu\sqrt{C} \frac{dE}{d\nu} = \sqrt{m}. \quad (2.23)$$

De (2.22) et (2.23) on déduit maintenant les relations suivantes

$$E = h\nu \quad (\text{Relation de PLANCK}^6),$$

où

✓ h est une constante

et

$$C = \frac{m}{E^2}.$$

6. une relation de base de la mécanique quantique, elle traduit le modèle corpusculaire de la lumière (plus généralement de toute ondes électromagnétique) en permettant de calculer l'énergie transportée par un photon.

L'équation (2.18) peut donc s'écrire

$$\Delta V - 2m \frac{U + E}{E^2} \frac{\delta^2 V}{\delta t^2} = 0. \quad (2.24)$$

En posant

$$V = \exp(2\Pi i v t) \varphi(x, y, z),$$

On obtient

$$\Delta \varphi + 2m(U + E) \left(\frac{2\Pi}{h} \right)^2 \varphi = 0. \quad (2.25)$$

Le point fondamental dans la théorie de **M.Schrodinger** est l'hypothèse que les "niveaux d'énergie" qui correspondent aux "orbites possibles" de la théorie de **M.Bohr** sont les valeurs caractéristique de l'équation (2.25), E étant le paramètre, c'est-à-dire les valeurs de E , pour laquelle l'équation (2.25) admet une solution φ à carré intégrable, le domaine d'intégration étant l'espace entier.

Nous allons étudier de plus près le cas où le champ des forces U est créé par l'attraction newtonienne d'un nombre fini de masses concentrées en des points fixes dans l'espace. Nous montrerons que l'équation (2.25) ne peut admettre de solution à carré intégrable que pour un nombre dénombrable de valeurs réelles de E .

En écrivant $\lambda = E \left(\frac{2\Pi}{h} \right)^2$, nous pouvons écrire l'équation (2.25) sous la forme

$$\Delta \varphi + (W + \lambda) \varphi = 0, \quad (2.26)$$

Où

$$W(p) = \sum \frac{\alpha_v}{r_v} + \beta,$$

les α_v et β étant des constantes positives et les r_v désignant les distances du point variable p à certains points fixes. Nous chercherons d'abord une fonction de **Green** $G(p, q)$ de l'équation

$$\Delta \varphi - x^2 \varphi + W \varphi = 0,$$

Où x a une valeur que nous allons préciser plus loin. En adjoignant l'équation

$$\Delta H - x^2 H = 0,$$

qui admet la solution $H(p, q) = \frac{\exp(-xr_{pq})}{r_{pq}}$ (r_{pq} désignant la distance entre les points p et q), et en appliquant une formule de **Green**, on démontre que la fonction $G(p, p_1)$ peut s'obtenir par la résolution de l'équation intégrale

$$G(p, p_1) - H(p, p_1) - \frac{1}{4\Pi} \int H(p, q)U(q)G(q, p_1)d\omega_q = 0. \quad (2.27)$$

En introduisant les fonctions

$$\begin{aligned} \Omega(p, q) &= \sqrt{W(p)}H(p, q)\sqrt{W(q)}, \\ L(p, q) &= \sqrt{W(p)}G(p, q)\sqrt{W(q)}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

nous pouvons écrire (2.27) sous la forme

$$L(p, p_1) - \frac{1}{4\Pi} \int \Omega(p, q)L(q, p_1)d\omega_q = \Omega(p, p_1). \quad (2.29)$$

Pour résoudre cette équation, nous avons besoin du théorème suivant : [12]

S'il existe une fonction positive $A(p)$ telle que

$$\int |K(p, q)| A(q)d\omega_q < kA(p)$$

(k = constante indépendante de p) $K(p, q)$ est un noyau borné (au sens de **M.Hilbert**) dont la borne ne dépasse pas k .

Prenons $A(q) = \sqrt{W(q)}$.

On a

$$\int \Omega(p, q)A(q)d\omega_q = A(p) \int \frac{\exp(-xr_{pq})}{r_{pq}} \left(\sum_{v=1}^N \frac{x_v}{r_{pq_v}} + \beta \right) d\omega_q$$

On peut prendre x suffisamment grand pour que l'intégrale du second membre soit inférieure à un nombre positif $< 4\Pi$ quel que soit p . $\Omega(p, q)$ est donc un noyau bornée et l'on

peut résoudre l'équation (2.29) par la série de Neumann. La solution obtenue $L(p, q)$ est elle aussi, un noyau borné. La fonction $G(p, q)$ cherchée s'obtient maintenant par la formule (2.28). En remarquant que $\sqrt{W(p)} < \sqrt{\beta}$ on trouve que $G(p, q)$ est un noyau borné. Ceci posé, on démontre (par une formule de **Green**) que chaque solution à carré intégrable de l'équation différentielle (2.26) est en même temps solution de l'équation intégrale

$$\varphi(p) - \frac{\lambda + x^2}{4\Pi} \int G(p, q)\varphi(q)d\omega_q = 0,$$

et inversement. Le noyau de cette équation étant un noyau borné d'**Hilbert**, il s'ensuit que l'équation (2.25) ne peut admettre de solution à carré intégrale que un nombre dénombrable de valeurs réelles de λ .

[5]

Chapitre 3

Equations intégrales singulières de Volterra et ses applications

3.1 Préliminaires

•Le présent travail concerne la théorie de l'équation de **VOLTERRA** de première espèce

$$\int_0^y \varphi(\xi) K(\xi, y) d\xi = h(y) \quad (3.1)$$

(où l'inconnue est $\varphi(y)$), dans le cas singulier où la diagonale $K(y, y)$ du noyau s'annule pour la valeur particulière $y = 0$. On sait que l'équation (3.1) se ramène par dérivation à l'équation

$$\varphi(y) K(y, y) + \int_0^y \varphi(\xi) K'_y(\xi, y) d\xi = h'_y(y) \quad (3.2)$$

ou bien

$$\varphi(y) + \int_0^y \varphi(\xi) \frac{K'_y(\xi, y)}{K(y, y)} d\xi = \frac{h'_y(y)}{K(y, y)} \quad (3.3)$$

(équation de **VOLTERRA** de seconde espèce). En admettant par exemple que $h'_y(y)$, $K(y, y)$, $k'_y(x, y)$ sont des fonctions continues dans les domaines respectifs

(I)

$$0 \leq y \leq b$$

(D)

$$0 \leq x \leq y \leq b$$

et en ajoutant l'hypothèse que $K(y, y)$ ne s'annule pas dans **(I)**, on a une équation intégrale régulière, dont la solution est bien connue. Lorsque $K(y, y)$ s'annule pour la valeur particulière $y = 0$, le noyan $\frac{K'_y(x, y)}{K(y, y)}$ de (3.3) n'est plus borné dans **(D)** : les équations (3.3) et (3.1) sont singulières.

•Ce cas singulier a été traité pour la première fois par **M. VOLTERRA**[2], qui introduit les conditions suivantes :

A). On a

$$h(y) = y^{n+1} h_1(y)$$

$$K(x, y) = \sum_{i=0}^n a_i x^i y^{n-i} + \sum_{i=0}^{n+1} x^i y^{n+1-i} L_i(x, y)$$

n étant un entier, les a_i des constantes, $h_1(y)$ et $L_i(x, y)$ des fonctions continues, ainsi que leurs dérivées par rapport à y , dans les domaines respectifs **(I)** et **(D)**.

B). $K(y, y)$ ne s'annule dans l'intervalle **(I)** que pour la valeur $y = 0$.

C). $\sum_{i=0}^n a_i \neq 0$, de sorte que $K(y, y)$ admet la racine $y = 0$ à un ordre de multiplicité exactement égal à n .

D). L'équation algébrique

$$\frac{a_0}{\sigma-1} + \frac{a_1}{\sigma-2} + \dots + \frac{a_n}{\sigma-n-1} = 0 \quad (3.4)$$

a toutes ses racines distinctes.

M. VOLTERRA établit alors les résultats suivants :

1°) Si toutes les racines de (3.4) ont leurs parties réelles positives, (3.1) admet une solution et une seule $\varphi(y)$ continue dans (I).

2°) Si (3.1) a des racines dont la partie réelle est négative, la solution $\varphi(y)$ de l'équation (3.1) n'est plus unique.

Le second de ces résultats a été complété par **M. HOLMGREN** [2] en suivant la même méthode. On obtient l'énoncé :

3°) Si (3.3) admet r racines dont les parties réelles sont négatives, les autres ayant leurs parties réelles positives, la solution générale de (3.1) dépend de r constantes arbitraires et s'écrit :

$$\varphi(y) = \phi(y) + C_1\phi_1(y) + \dots + C_r\phi_r(y),$$

$\phi_1(y), \phi_2(y), \dots, \phi_r(y)$ étant des solutions, linéairement distinctes, de l'équation homogène

$$\int_0^y \varphi(\xi)K(\xi, y)d\xi = 0.$$

•La question a été reprise par **LALESCO** [6] qui retrouve les mêmes résultats en suivant un analyse tout à fait différente de celle de **MM. VOLTERRA** et **HOLMGREN**.

Nous ferons quelques remarques comparatives sur les deux méthodes.

LALESCO admet pour le noyan $K(x, y)$ un développement de forme

$$K(x, y) = A_0(x) + A_1(x)\frac{y-x}{1!} + \dots + A_n(x)\frac{(y-x)^n}{n!} + \frac{(y-x)^{n+1}}{(n+1)!}P(x, y),$$

puis il détache le cas particulier où $P(x, y)$ est identiquement nul. Dans ce cas particulier l'équation (3.1) conduit, après $(n+1)$ dérivations, à l'équation différentielle

$$\frac{d^n}{dy^n}(A_0(y)\varphi) + \frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}}(A_1(y)\varphi) + \dots + A_n(y)\varphi = H(y) \quad (3.5)$$

qui, sous des restrictions correspondantes aux précédentes A, C , est du type de **FUCHS**.

Dans le cas général ($P(x, y)$ non identiquement nul) **LALESCO** procède par approximations successives dont chacune est définie par une équation du type (3.5) où le second membre est connu et s'explique donc (méthode de variation des constantes) par des intégrales où interviennent les solutions fondamentales de (3.5).

En allant au fond des choses, il est aisé de voir que, dans la méthode de **M. VOLTERRA**, on détache de même la partie du noyau

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i y^{n-i},$$

ensemble des termes principaux pour x et y petits, laquelle amènerait, si elle était seule, à l'équation différentielle

$$\sum_i a_i \cdot \frac{d^n}{dy^n} (y^n \varphi) + \sum_i (n-i) a_i \cdot \frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}} (y^{n-1} \varphi) + \dots + n! a_0 \cdot \varphi = H(y). \quad (3.6)$$

Mais, tandis que **LALESCO** a pu employer directement, dans son analyse, l'équation différentielle (3.5), **MM. VOLTERRA** et **HOLMGREN** ne pouvaient utiliser de même (3.5) qu'il est pourtant loisible de retrouver derrière leurs calculs et qui en donne le fil directeur.

La méthode de **LALESCO** est formellement beaucoup plus simple, de sorte que c'est elle qui est généralement exposée dans les traités. Elle permet d'éviter la condition D posée plus haut mais, d'un autre point de vue, elle est pourtant un peu moins générale :

LALESCO l'a exposée pour le cas où le noyau $K(x, y)$ de l'équation (3.1) est analytique ; il est clair, comme il l'a indiqué, que l'analyse vaut sous des hypothèses plus larges, mais de toutes façons, le passage par l'équation différentielle nécessite que l'on dérive $(n+1)$ fois l'équation (3.1) et il faudra donc admettre l'existence des dérivées $n+1$ ^{ièmes} de $K(x, y)$ et de $h(y)$ ¹. Or **M. VOLTERRA** pose seulement les conditions précédentes A, C : existence

1. Au moins en première analyse et s'il est possible d'éviter de telles restrictions, ce ne pourrait être, croyons-nous, que par des modifications profondes de la méthode, qui perdrait alors ses avantages de simplicité.

des dérivées premières et hypothèses sur l'allure infinitésimale de $K(x, y)$ et $h(y)$ lorsque x et y approchent de zéro dans (D) ou (I) : ce sont là des conditions plus larges et tout à fait naturelles.

Observons d'autre part que la méthode de **M. VOLTERRA** pourra être préférable s'il s'agit non seulement d'obtenir les théorèmes d'existence, mais de déterminer effectivement la ou les solutions d'une équation singulière (3.1) donnée. Cela vient au fond de ce que l'équation (3.6) est infiniment plus élémentaire que (3.5). Les formules de **M. VOLTERRA** ne font intervenir que des fonctions élémentaires alors que les approximations successives de **LALESCO** se calculent à l'aide des solutions fondamentales de (3.5), qui ne sont en général pas connues en termes finis².

• Il apparaît donc comme souhaitable de simplifier la démonstration donnée par **M. VOLTERRA** pour les théorèmes d'existence tout restant à son point de vue.

C'est ce que nous avons cherché à faire ici. La méthode que nous exposons plus loin amène aux théorèmes en question par des calculs simples et d'une manière qui paraît très naturelle. Elle repose sur une décomposition du noyau qui permet de procéder par récurrence et qui présente d'ailleurs, en elle-même, un certain intérêt.

3.2 Les noyaux de forme $\frac{1}{y}P\left(\frac{x}{y}\right)$ et leur décomposition

• Nous utiliserons dans la suite les notations de la théorie de la composition de **M. VOLTERRA**. Rappelons seulement que le produit de composition de deux fonctions $f(x, y)$

2. Au même point de vue, il est intéressant de tenir compte d'un résultat de **M. VOLTERRA** qui montre, dans sa seconde note, que l'on peut introduire systématiquement des fonctions symétriques des racines de (3.4).

et $g(x, y)$ est (composition de première espèce)

$$f^*g^*(x, y) = \int_x^y f(x, \xi)g(\xi, y)d\xi$$

et renvoyons, pour les propriétés utiles de la composition et des fonctions permutables (c'est-à-dire telles que $f^*g^* = g^*f^*$) aux exposés de la théorie [12]. Les équations précédentes (3.1) et (3.3) peuvent alors s'écrire

$${}_0\varphi^*K^* = {}_0h^* \quad (3.7)$$

$${}_0\varphi^*(1^0 - M^*) = {}_0H^* \quad (3.8)$$

en introduisant le symbole 1^0 (unité de composition³) et en posant

$$M(x, y) = -\frac{K'(x, y)}{K(y, y)}, \quad H(y) = \frac{h'_y(y)}{K(y, y)}.$$

Il est d'ailleurs sous entendu que, dans (3.1) et (3.3), φ , h , H ne dépendent que de y et que, dans les compositions φ^*K^* et φ^*M^* la limite inférieure d'intégration est $x = 0$ (nous l'indiquons ici par l'indice zéro placé en avant et au dessous de la ligne).

Rappelons enfin que, noyau et second membre étant supposés continus (c'est-à-dire si l'on n'est pas dans le cas singulier), l'équation (3.3) a pour solution

$$\varphi(y) = {}_0H^*(1^0 - R^*) \equiv H(y) - \int_0^y H(\xi)R(\xi, y)d\xi, \quad (3.9)$$

le noyau R (noyau résolvant de M) étant donné par la série de composition

$$R = -(M + M^2 + M^3 + \dots); \quad (3.10)$$

ce noyau est permutable avec M et vérifie les équations

$$(1^0 - M^*)(1^0 - R^*) = (1^0 - R^*)(1^0 - M^*) = 1^0$$

3. Loc. cit, p8

d'où

$$(1^0 - R) = (1^0 - M)^{-1},$$

équations qui rendent d'ailleurs intuitif le passage de (3.3) à (3.9).

•Plaçons nous maintenant dans le cas singulier et supposons que le noyau $K(x, y)$ se réduise à ses termes principaux $\sum_i^n a_i x^i y^{n-i}$, avec la condition C :

$$\sum_{i=0}^n a_i \neq 0$$

Le noyau M de l'équation (3.3) se réduira à

$$-\frac{1}{y} \sum_{i=0}^n (n-i) a_i \frac{x^i}{y^i} \frac{1}{\sum_{i=0}^n a_i}; \quad (3.11)$$

il est de forme

$$-\frac{1}{y} P\left(\frac{x}{y}\right) \quad (3.12)$$

P étant un polynome et nous allons examiner quelques propriétés de tels noyaux.

Soient deux noyaux de type (3.12) :

$$\frac{1}{y} P\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{y} P_1\left(\frac{x}{y}\right)$$

P et P_1 étant des polynomes, ou mêmes des fonctions quelconques de la variable $t = \frac{x}{y}$, fonctions bornées et intégrables pour $0 < t \leq 1$. Les noyaux sont alors définis pour $0 < x \leq y$; on voit de suite qu'ils sont permutables entre eux [7], leur produit de composition étant défini, lui aussi, dans le champ

$$0 < x \leq y,$$

et donnant un nouveau noyau de type (3.12).

Il en sera de même des puissances de composition de $\frac{1}{y} P\left(\frac{x}{y}\right)$. Donc enfin le noyau

résolvant de $\frac{1}{y}P\left(\frac{x}{y}\right)$ sera défini pour $0 < x \leq y$ et sera de type (3.12).

• Prenons le cas particulier de deux noyaux

$$f = \frac{a}{y} \left(\frac{x}{y}\right)^\lambda, \quad g = \frac{b}{y} \left(\frac{x}{y}\right)^\mu$$

où

✓ a et b sont des constantes quelconques, ainsi que les exposants λ et μ .

Bornons-nous, ce qui suffit pour la suite, au cas où λ et μ sont différents et formons

$$(1^0 - f)(1^0 - g) = (1^0 - F)$$

Il vient, comme on le vérifie de suite

$$F = \frac{1}{y} \left(\frac{x}{y}\right)^\lambda \left(a + \frac{ab}{\lambda - \mu}\right) + \frac{1}{y} \left(\frac{x}{y}\right)^\mu \left(b + \frac{ab}{\mu - \lambda}\right).$$

Pour que les noyaux f et g soient résolvant l'un de l'autre il sera nécessaire et suffisant que

$$a + \frac{ab}{\lambda - \mu} = 0, \quad b + \frac{ab}{\mu - \lambda} = 0$$

d'où immédiatement

$$\mu = \lambda - a, \quad b = -a.$$

D'où l'énoncé suivant : Le noyau résolvant de $a \frac{x^\lambda}{y^{\lambda+1}}$ est $-a \frac{x^{\lambda-a}}{y^{\lambda-a+1}}$.

• Le calcul qui précède entraîne aussi que : si l'on compose des binômes en nombre quelconque de forme

$$\left(1^0 - a_s \frac{x^{\lambda_s}}{y^{\lambda_s+1}}\right) \quad (s = 1, 2, \dots, p),$$

où

✓ les constantes λ_s sont différentes entre elles.

On obtiendra une expression de forme $1^0 - F$ avec

$$F = \sum_{s=1}^p b_s \frac{x^{\lambda_s}}{y^{\lambda_s+1}},$$

les coefficients b_s se calculant aisément à partir des a_s et des λ_s .

Nous nous trouvons tout naturellement amenés à étudier la question inverse :

étant donné le noyau

$$F = \sum_{s=1}^p b_s \frac{x^{\lambda_s}}{y^{\lambda_s+1}}, \quad (3.13)$$

peut-on trouver une décomposition de $1^0 - F$ en produits de composition

$$(1^0 - F) = \prod_{s=1}^{s=p} \left(1^0 - a_s \frac{x^{\lambda_s}}{y^{\lambda_s+1}} \right). \quad (3.14)$$

et une telle décomposition est-elle unique ?

• Or l'étude de cette question est bien simple. Les coefficients b_s , et λ_s sont connus, les λ_s étant tous distincts. On recherche les a_s . Nous imposons aux décompositions cherchées la condition que les exposants λ_s des divers binomes du produit symbolique \prod interviennent tous effectivement dans F , nous devons donc supposer que aucun des b_s n'est nul⁴.

Si nous remarquons que

$$\left(1^0 - a_1 \frac{x^{\lambda_1}}{y^{\lambda_1+1}} \right)^{-1} = \left(1^0 + a_1 \frac{x^{\lambda_1-a_1}}{y^{\lambda_1-a_1+1}} \right)$$

4. C'est là une condition qu'il n'est pas indispensable d'introduire. Notons en effet que, pour un choix convenable des a_s et des λ_s il peut fort bien arriver que quelques uns des b_s soient nuls. On pourrait donc envisager des décomposition du type (3.14) dans lesquels le produit symbolique \prod introduirait des exposants qui ne se retrouvent pas dans F . Cela n'a pas grand intérêt pour la suite et ne présente d'ailleurs pas de difficultés.

tout revient à déterminer a_1 de façon que l'on ait

$$(1^0 - F) \left(1^0 + a_1 \frac{x^{\lambda_1 - a_1}}{y^{\lambda_1 - a_1 + 1}} \right) = 1^0 - F',$$

avec

$$F'(x, y) = \sum_{s=2}^p b'_s \frac{x^{\lambda_s}}{y^{\lambda_s + 1}}, \quad (3.15)$$

les b'_s étant de nouvelles constantes.

Admettons, pour faire le calcul, que $\lambda_1 - a_1$ est différent de $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ quitte à vérifier à la fin que cette hypothèse est bien satisfaite. La valeur de F' s'écrit de suite d'après le calcul précédant. On trouve dans F' un terme en $\frac{x^{\lambda_1}}{y^{\lambda_1 + 1}}$. Dont le coefficient est nul, un terme en $\frac{x^{\lambda_1 - a_1}}{y^{\lambda_1 - a_1 + 1}}$ qui doit disparaître, ce qui donne

$$1 + \sum_{s=1}^p \frac{b_s}{\lambda_1 - \lambda_s - a_1} = 0 \quad (3.16)$$

C'est une équation de degré p pour déterminer l'inconnue a_1 ; il apparaît dès maintenant que le problème de la décomposition de $1^0 - F$ ne sera pas entièrement déterminé ; il apparaît aussi que la condition préalable posée $\lambda_1 - a_1 \neq \lambda_s (s = 1, 2, \dots, p)$ est satisfaite par toutes les racines de (3.16), les b_s étant tous différents de zéro.

En choisissant a_1 racine de (3.16) on est ramené à la question analogue avec $1^0 - F, F'$ ayant la même forme de F mais étant somme de $(p - 1)$ termes seulement. On renouvelera l'application de la méthode.

On arrive ainsi à l'énoncé suivant : *la décomposition (3.14) est toujours possible et de plusieurs manières.*

• On vient de voir que, pour déterminer les a_s , on a à résoudre une suite d'équations algébriques : d'abord

$$1 + \sum_{s=1}^p \frac{b_s}{\lambda_1 - \lambda_p - a_1} = 0 \quad (\text{inconnue } a_1)$$

puis l'équation analogue formée avec F'_1

$$1 + \sum_{s=1}^p \frac{b'_s}{\lambda_2 - \lambda_s - a_2} = 0 \quad (\text{inconnue } a_2) \quad (3.17)$$

etc. Mais il existe des relations très simples entre ces équations successives (3.16), (3.17), ..., de sorte que les décompositions cherchées s'écrivent immédiatement dès que l'on connaît les racines de (3.16). Posons, en effet,

$$\lambda_1 - a_1 = \sigma$$

on a, pour σ , l'équation algébrique

$$1 + \sum_{s=1}^p \frac{b_s}{\sigma - \lambda_s} = 0. \quad (3.18)$$

Or le calcul précédant entraîne de suite que

$$b'_s = b_s \frac{\lambda_s - \lambda_1}{\lambda_s - \lambda_1 + a_1} = b_s \frac{\lambda_s - \lambda_1}{\lambda_s - \sigma_1} \quad (s = 2, 3, \dots, p)$$

en désignant par σ_1 la racine de (3.18) qui a été prise pour valeur de $\lambda_1 - a_1$

Ecrivons maintenant (3.18) sous la forme :

$$f(\sigma) \equiv \sigma - \lambda_1 + b_1 + \sum_{s=2}^p s \frac{b_s(\sigma - \lambda_1)}{\sigma - \lambda_s} = 0$$

puis transformons-la de façon à y faire disparaître le facteur $\sigma - \sigma_1$ (*enformant* $\frac{f(\sigma) - f(\sigma_1)}{\sigma - \sigma_1}$).

Il vient

$$1 + \sum_{s=2}^p \frac{b_s(\lambda_s - \lambda_1)}{(\sigma - \lambda_s)(\lambda_s - \sigma_1)} = 0$$

c'est-à-dire

$$1 + \sum_{s=2}^p \frac{b'_s}{\sigma - \lambda_s} = 0$$

qui coïncide avec (3.17) en prenant $\sigma = \lambda_2 - a_2$.

L'application de la méthode suppose donc seulement connues les racines de (3.18), puisque toutes les équations algébriques que l'on doit considérer se déduisent de (3.18) en y éliminant les facteurs binomes donnant les racines déjà utilisées.

Toutes les racines de (3.18) seront utilisées à tour de rôle; (3.18) peut avoir des racines multiples, cela n'amènera aucune difficulté, chacune comptant autant de fois qu'il y a d'unités dans son ordre de multiplicité.

En résumé : les décompositions cherchées de l'expression $1^0 - F$ s'obtiendront de la façon suivante : prenons toutes les p racines de l'équation (3.18) (distinctes ou confondues) et faisons correspondre à chacune d'elles σ_s des exposants λ_s on aura, d'après ce qui précède,

$$a_s = \lambda_s - \sigma_s \quad (3.19)$$

et on aura

$$1^0 - F = \prod_{s=1}^{s-p} \left(1^0 - (\lambda_s - \sigma_s) \frac{x^{\lambda_s}}{y^{\lambda_s+1}} \right) \quad (3.20)$$

d'où immédiatement

$$(1^0 - F)^{-1} = \prod_{s=1}^{s-p} \left(1^0 - (\sigma_s - \lambda_s) \frac{x^{\sigma_s}}{y^{\sigma_s+1}} \right) \quad (3.21)$$

On voit très nettement l'arbitraire des décompositions cherchées qui est dans la correspondance établie entre les λ_s et les σ_s ; il y a donc $p!$ décompositions possibles du type précédent.

3.3 Application à l'équation intégrales singulière de Volterra

• Nous n'aurons besoin que d'un résultat très particulier entre les précédents et nous l'énonçons ainsi :

Lemme. - Soit le noyau

$$M(x, y) = -\frac{1}{y} \sum_{i=0}^n (n-i) a_i \frac{x^i}{y^i} \cdot \frac{1}{\sum_i a_i} \quad \left(\sum_i a_i \neq 0, a_r \neq 0 \right) \quad (3.22)$$

auquel nous faisons correspondre l'équation (3.4)

$$\frac{a_0}{\sigma-1} + \frac{a_1}{\sigma-2} + \dots + \frac{a_n}{\sigma-n-1} = 0.$$

Cette équation, rendue entière, est de degré p , si $p+1$ est le nombre des coefficients a_0, a_1, \dots, a_n qui ne sont pas nuls. Soit σ_1 l'une de ses racines et soit r le plus grand entier inférieur à n tel que $a_r \neq 0$. Considérons les deux noyaux (résolvant l'un de l'autre)

$$f_1 = (\sigma_1 - r - 1) \frac{x^{\sigma_1-1}}{y^{\sigma_1}}, \quad g_1 = (r + 1 + \sigma_1) \frac{x^r}{y^{r+1}},$$

on aura, dans le domaine $0 < x \leq y$, les égalités équivalentes :

$$(1^0 - M)(1^0 - f_1) = (1^0 - M_1) \quad (3.23)$$

$$(1^0 - M) = (1^0 - M_1)(1^0 - g_1) \quad (3.24)$$

$M_1(x, y)$ étant un noyau de même type que (3.22)

$$M_1(x, y) = -\frac{1}{y} \sum_{i=0}^r (r-i) a'_i \frac{x^i}{y^i} \cdot \frac{1}{\sum a'_i}, \quad \left(\sum a'_i \neq 0, a'_r \neq 0 \right) \quad (3.25)$$

mais tel que la somme qui y figure a un terme de moins.

Les coefficients a'_i sont donnés par

$$a'_i = \frac{a_i(n-i)}{\sigma_1 - i - 1}$$

et l'équation analogue à (3.4) formée avec les a'_i coïncide avec l'équation (3.4) débarassée du facteur $\sigma - \sigma_1$

La vérification directe est immédiate. Si l'on veut avoir l'énoncé précédent comme cas particulier des résultats du § 2 on fera attention aux changements de notations : les λ_s du § 2 sont ici les nombres $0, 1, 2, \dots, n-1$, ou du moins ceux de ces nombres qui correspondent à des coefficients a_i non nuls ; l'inconnue σ de l'équation (3.18) est notée ici $\sigma - 1$ de manière que (3.18) prenne exactement la forme (3.4) donnée par **M. VOLTERRA**.

•Revenons alors à l'équation singulière (3.1), ou à son équivalente

$$\varphi(y) + \int_0^y \varphi(\varepsilon) \frac{k'_y(\varepsilon, y)}{k(y, y)} d\varepsilon = \frac{h'_y(y)}{k(y, y)}.$$

Nous nommerons $H(y)$ le second membre et nous poserons le noyau

$$-\frac{k'_y(x, y)}{k(y, y)} = M(x, y) + \overline{M}(x, y)$$

$M(x, y)$ étant l'expression (3.22). Les conditions A, B, C posées au début entraînent immédiatement la suivante :

A'). $H(y)$ et $\overline{M}(x, y)$ sont bornées et continues respectivement dans (I) et (D). ($M(x, y)$ est cependant discontinue pour $x = y = O$, mais en restant bornée ; il importe peu pour la suite où l'essentiel est que les fonctions considérées restent bornées et soient intégrables).

Nous avons donc à traiter l'équation

$$\varphi(y) - \int_0^y \varphi(\varepsilon) M(\varepsilon, y) d\varepsilon - \int_0^y \varphi(\varepsilon) \overline{M}(\varepsilon, y) d\varepsilon = H(y) \quad (3.26)$$

5. Bien entendu les valeurs de l'indice i qui correspondraient à des a_i nuls ne doivent pas intervenir dans le calcul, et l'on peut être ainsi assuré de ne jamais rencontrer de dénominateur $\sigma_1 - i - 1$ nul.

qui peut encore s'écrire

$${}_0^* \varphi (1^0 - M) - {}_0^* \varphi \overline{M} = {}_0^* H$$

sous les hypothèses A' . Toute la difficulté vient de la partie singulière du noyau $M(x, y)$; mais le lemme précédent permettra de réduire cette partie singulière.

• Si les noyaux M, f, g_1 étaient bornés dans (D) (ce qui n'est pas le cas) la réduction, laquelle serait d'ailleurs sans intérêt, serait fort simple.

(3.26), en la composant par $1^0 - f_1^*$ et en tenant compte de (3.23) donnerait

$${}_0^* \varphi (1^0 - M_1) - {}_0^* \varphi \overline{M}_1 = {}_0^* H_1 \quad (3.27)$$

avec

$$\begin{cases} H_1 = H(y) - \int_0^y H(\varepsilon) f_1(\varepsilon, y) d\varepsilon; \\ \overline{M}_1(x, y) = \overline{M}(x, y) - \int_0^y \overline{M}(x, \varepsilon) f_1(\varepsilon, y) d\varepsilon \end{cases} \quad (3.28)$$

(3.27) étant d'ailleurs équivalente à (3.26) à laquelle on repasse en composant par $(1^0 - g_1^*)$, puisque g_1^* est le noyau résolvant de f .

Mais les calculs que nous venons d'indiquer sont légitimes, malgré la limite inférieure d'intégration zéro, si les fonctions f_1, g_1 sont du type :

$$const \times \frac{x^{\mu-1}}{y^\mu},$$

l'exposant μ ayant sa partie réelle positive. Il est clair en effet que les intégrales que définissent les compositions restent convergentes et que l'on peut y échanger les signes d'intégration, ce qui donne l'associativité des produits de composition, sur laquelle repose en fait le calcul précédent.

Il n'y aura donc jamais de difficulté concernant g_1 , où apparait $\frac{x^r}{y^{r+1}}$, avec un exposant r

positif. Dans f_1 apparaît de même $\frac{x^{\sigma_1-1}}{y^{\sigma_1}}$ et le calcul du début de ce numéro sera valable si la partie réelle de σ est positive.

En résumé : Toute racine de (3.4) qui a sa partie réelle positive permet de passer de (3.26) à une équation (3.27) équivalente en ce qui concerne la recherche des solutions $\varphi(y)$ bornées, plus simple parcequ'il y a un terme de moins dans la partie singulière du noyau.

L'équation (3.27) est d'ailleurs exactement du même type que (3.26) car les fonctions \overline{M}_1 et H_1 qui y figurent sont bornées :

par exemple l'intégrale qui intervient dans \overline{M}_1 est telle que

$$\left| \int_x^y \overline{M}(x, \xi) f_1(\xi, y) d\xi \right| < \max de|\overline{M}| \int_x^y |\sigma_1 - r - 1| \frac{\xi^{\sigma_1-1}}{y^{\sigma_1}} d\xi =$$

$$\max de|\overline{M}| \frac{|\sigma_1 - r - 1|}{\sigma'_1} \left(1 - \left(\frac{x}{y}\right)^{\sigma_1} \right) < \max de|\overline{M}| \cdot \frac{|\sigma_1 - r - 1|}{\sigma'_1}$$

avec

σ'_1 = partie réelle de σ_1 .

Si (3.4) a une autre racine à partie réelle positive distincte ou non de σ_1 , on pourra appliquer à nouveau le procédé de réduction, et ainsi de suite.

Lorsque toutes les racines de (3.4) ont leurs parties réelles positives, on aura ainsi une équation

$${}_0\varphi^* - {}_0\varphi^* \overline{M}_p^* = {}_0H_p^* \quad (3.29)$$

où la partie singulière du noyau a disparue et où \overline{M}_p et H_p sont des fonctions bornées. C'est une équation de **VOLTERRA** de seconde espèce qui est du type habituel et à laquelle s'applique la théorie classique. Nous retrouvons ainsi le premier résultat de **M. VOLTERRA** : l'équation (3.1) a, dans ces conditions, une seule solution (bornée).

De toutes façons on pourra, par le procédé de réduction qui vient d'être donné, se dé-

barasser de toutes les racines qui ont leurs parties réelles positives. Il nous reste donc à examiner *le cas où toutes les racines de (3.3) ont leurs parties réelles négatives.*

• Il n'y a plus rien à tirer alors de la composition de (3.26) par $1^0 - f_1^*$ avec la limite inférieure d'intégration zéro, et cela nous oblige à modifier le procédé de réduction.

Le nouveau procédé conduit, comme on le verra, à une équation qui n'a pas tout à fait la même forme que (3.26), mais où figure en plus une intégrale \int_y^b . Nous envisagerons donc, dès le début, au lieu de (3.26), une équation contenant un tel terme, à savoir

$${}_0^* \varphi(1^0 - M) - \int_0^y \varphi(\xi) \overline{M}(\xi, y) - \int_y^b \varphi(\xi) \overline{N}(\xi, y) d\xi = H(y) \quad (3.30)$$

$\overline{N}(x, y)$ désignant un nouveau noyau donné dans le champ

$$(D') \quad 0 \leq y \leq x \leq b,$$

borné et continu (ou au moins intégrable) dans ce champ. L'équation (3.30) donne (3.26) comme cas particulier en y prenant $\overline{N} \equiv 0$ et on verra que les réductions successives conservent ce même type (3.30).

$\varphi(y)$ étant une solution bornée de (3.30) et σ_1 une racine (de partie réelle négative) de l'équation (3.4), il n'y a pas d'obstacle à remplacer ${}_0^* \varphi(1^0 - M)$ par ${}_0^* \varphi(1^0 - M_1)(1^0 - g_1)$: nous avons déjà vu que les compositions par g_1 n'apportaient pas de difficultés. En posant

$${}_0^* \varphi(1^0 - M_1) = \psi(y) \quad (3.31)$$

l'équation (3.30) s'écrit

$$\psi(y) - \int_0^y \psi(\xi) (r+1 - \sigma_1) \frac{\xi^r}{y^{r+1}} d\xi = H(y) + \int_0^y \varphi(\xi) \overline{M}(\xi, y) d\xi + \int_y^b \varphi(\xi) \overline{N}(\xi, y) d\xi.$$

En désignant par $L(y)$ le second membre, surement borné, et posant pour un instant

$$X(y) = \int_0^y \psi(\xi) \xi^r d\xi$$

On a l'équation différentielle

$$y \frac{dX}{dy} - (r+1-\sigma_1)X = y^{r+1}L(y)$$

d'où

$$X(y) = -y^{r+1-\sigma_1} \int_y^b \eta^{\sigma_1-1} L(\eta) d\eta + ay^{r+1-\sigma_1}$$

a étant une constante arbitraire. Le second membre tend vers zéro avec y , on dérive sans difficultés et obtient

$$\psi(y) = L(y) - (r+1-\sigma_1)y^{-\sigma_1} \int_y^b \eta^{\sigma_1-1} L(\eta) d\eta + \beta y^{-\sigma_1}$$

β étant une autre constante arbitraire. En tenant compte de (3.31) on a une nouvelle équation en $\varphi(y)$ qui, d'après le calcul précédent, est équivalente à (3.30) en ce qui concerne la recherche des solutions bornées. Or cette équation s'écrit :

$${}_0\varphi^*(1^0 - M_1^*) - \int_0^y \varphi(\xi) \overline{M}_1(\xi, y) d\xi - \int_y^b \varphi(\xi) \overline{N}_1(\xi, y) d\xi = H_1(y) \quad (3.32)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} H_1(y) = H(y) - (r+1-\sigma_1)y^{-\sigma_1} \int_y^b \eta^{\sigma_1-1} H(\eta) d\eta + \beta y^{-\sigma_1}, \\ \overline{M}_1(x, y) = \overline{M}(x, y) - (r+1-\sigma_1) \int_y^b \eta^{\sigma_1-1} \overline{M}(x, \eta) d\eta + y^{-\sigma_1}, \\ \overline{N}_1(x, y) = \overline{N}(x, y) - (r+1-\sigma_1)y^{-\sigma_1} \int_y^x \overline{N}(x, \eta) \eta^{\sigma_1-1} d\eta - (r+1-\sigma_1)y^{-\sigma_1} \int_x^b \overline{M}(x, \eta) \eta^{\sigma_1-1} d\eta \end{array} \right. \quad (3.33)$$

et il est clair que H_1 , \overline{M}_1 , \overline{N}_1 respectivement définis dans les champs (I), (D) et (D') y sont bornées.

La réduction est ainsi faite. La nouvelle équation (3.32) a même forme que (3.25), mais avec un terme de moins dans la partie singulière du noyau et une constante arbitraire au second membre.

σ_2 étant une autre racine de (3.4) ayant sa partie réelle négative, on peut recommencer la réduction sur (3.32). Le terme du second membre $\beta y^{-\sigma_1}$ donnera un terme de forme $\beta(Ay^{-\sigma_1} + \beta y^{-\sigma_2})$ ou bien $\beta(Ay^{-\sigma_1} + \beta y^{-\sigma_1} \log y)$ dans le cas où $\sigma_1 = \sigma_2$ (cas où σ_1 est racine multiple de (3.4)), A et B ayant des valeurs évidentes ; on aura de plus au second membre un terme $\gamma y^{-\sigma_1}$ où γ est une nouvelle constante arbitraire.

•Puisque, par hypothèse, toutes les racines de (3.4) ont leurs parties réelles négatives, on pour suivra la réduction en éliminant complètement la partie singulière M . On aboutira enfin à une équation de forme

$$\varphi(y) - \int_0^y \varphi(\xi)P(\xi, y)d\xi + \int_y^b \varphi(\xi)Q(\xi, y)d\xi = R_0 + \sum_{i=1}^p a_i R_i(y) \quad (3.34)$$

où les fonctions P, Q, R_0, R_i sont connues et bornées et où les a_i sont des constantes arbitraires, P étant d'ailleurs le degré de l'équation (3.4). Il est évident que les fonctions R_1, R_2, \dots, R_p sont linéairement indépendantes⁶.

L'équation (3.29) est du type à limites fixes ; elle peut s'écrire

$$\varphi(y) - \int_0^b \varphi(\xi)S(\xi, y)d\xi = R_0 + \sum_i a_i R_i$$

en prenant le noyau S égal à P ou à Q suivant que ξ est inférieur ou supérieur à y . On en aura la solution par des approximations successives, évidemment convergentes si b est assez petit pour que

$$\int_0^b |S(\xi, y)|d\xi < 0 \leq 1,$$

6. Ces fonctions sont d'ailleurs solutions fondamentales de l'équation différentielle associée au noyau $M(x, y)$ (l'équation (3.6))

ce qui ne fait pas de difficulté ; on retrouvera dans cette solution les constantes arbitraires, sûrement indépendantes a_s .

En combinant ces résultats et ceux des numéros précédents on a bien tous les théorèmes d'existence énoncés au début.

3.4 Quelques remarques pour terminer

• Dans le cas du racines à partie réelle négative il faut supposer b assez petit, ce qui restreint l'intervalle (I) de définition des solutions $\varphi(y)$ obtenues. C'est là une restriction qui se présentait aussi dans l'analyse de *HOLMGREN* et qui est sans importance, car il est aisé de *prolonger* une solution $\varphi(y)$. Les calculs de **MM. VOLTERRA** et **HOLMGREN** supposent essentiellement que l'équation (3.4) a toutes ses racines distinctes. Dans la méthode de **LALESCO** également il faut traiter à part le cas où les racines de l'équation (3.4) ont des différences nulles ou entières, la forme analytique des solutions fondamentales de l'équation de **FUCHS** (3.5) étant alors modifiée. Il est intéressant de noter que notre méthode *n'établit pas de distinction* entre ces divers cas : tandis que l'expression analytique des solutions fondamentales de l'équation différentielle (3.6) se modifie pour le cas des racines multiples, notre décomposition de $(1^0 - M)$, décomposition du type (3.20), se fait toujours exactement de même, que les racines soient simples ou multiples.

Nous avons laissé de côté le cas où (3.4) aurait des racines dont la partie réelle serait nulle.

Il est à peine besoin d'indiquer que les racines imaginaires de (3.4) n'amèneront, dans l'analyse précédente, aucune difficulté ; les imaginaires disparaissent bien entendu d'elles-mêmes dans les formules finales.

Conclusion

Notre but est de faire l'étude générale des équations intégrales singulières de Fredholm et de Volterra.

Dans le cas des équations intégrales singulières de Fredholm à noyau hermétique, comme nous l'avons vu, la stratégie est basée sur les hypothèses de M.Hilbert, tel que l'équation étudiée admet au moins une solution satisfaisant les hypothèses de Hilbert.

L'équation intégrale singulière de Volterra repose sur les conditions et les résultats que ce dernier a établit et sur les notations de la théorie de la composition.

Bibliographie

- [1] Annali della Scuola Norm.Sup.-Pisa.
- [2] Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, 8 Mars et 26 Avril 1896, 25 Fevrier 1900.
- [3] A. WINTNER, Spektraltheorie der unendlichen Matrizen, Leipzig,(1929)
- [4] C.Constanda and M.E.Pérez, Integral Methods in Science and Engineering Volume 1 :analytic methods. BIRTHÄUSER BORTON (2010)
- [5] Conférences faites à l'Institut H. Poincaré entre le 30 Avril et le 24 Mai 1930.
- [6] Journal de Mathématiques,(1908), p. 125.
- [7] Journ. de Math,(1915), p.60.
- [8] J.v.NEUMANN, Allg. Eigenwertheorie Hermitescher Funktionaloperatoren, Math. Ann, (1930).
- [9] M. HAAR. (Cf. PLANCHEREL Ann.de l'Ecole Normale, 1914, p-244).
- [10] MM. HELLINGER et TOEPLITZ dans l'Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften, (1928).
- [11] Über Systeme integrierbarer Funktionen (Math . Ann. 1910)
- [12] Upsala universitets arsskrift, (1923, p-12, 62-66).
- [13] V. VOLTERRA et J. PÉRÈS. (Gauthier-Villars, 1924).