

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

Université 08 Mai 1945 – Guelma

Faculté de Mathématiques et de l'Informatique et Sciences de
la Matière

Département de Mathématiques



Mémoire de Fin d'Etude
De Master Académique en Mathématiques

Par :

Bougoufi Henen

THEME

**Résolution des équations intégrales-différentielles par les
méthodes variationnelles et homotopiques**

Soutenu le 08 /07 /2019 devant le jury composé de :

Dr. MEHRI Allaoua	MCB	Université 08 Mai 1945-Guelma	Président
Dr. TABOUCHE Nora	MCB	Université 08 Mai 1945-Guelma	Examineur
Dr. Fernane Khaireddine	MCA	Université 08 Mai 1945-Guelma	Rapporteur

Résumé:

Dans ce mémoire, nous avons présenté et expliqué la méthode variationnelles et la méthode de perturbation homotypique et leur applications pour la résolution approchée sur quelle que exemples différents des équations intégral-différentielles et essayé de faire une comparaison des méthodes les plus utilisées dans le calcul des approximations numériques. Nous avons pris des exemples d'équation intégral-différentielle de différents types. Nous avons ainsi comparé l'approche numérique des résultats donnés par la méthode VIM, la méthode HPM, nous avons comparé le résultat obtenu par les deux méthodes avec la solution exacte.

ملخص:

في هذه المذكرة ، قدمنا و شرحنا الطريقة المتغيرة والطريقة الهوموتوبية المتدببة و تطبيقاتهم في حل أنواع مختلفة من المعادلات التفاضلية التكاملية وحاولنا إجراء مقارنة بين أكثر الطرق المستخدمة في لذلك VIM و طريقة HPM. لقد أخذنا أمثلة على المعادلات التفاضلية التكاملية. حساب التقريب العددي ، وقمنا بمقارنة النتيجة التي حصلت عليها طريقتان مع الحل قمنا بمقارنة النهج العددي للنتائج لطريقة الدقيق.



Table des matières

1	Introduction à la Théorie des équations intégrales et intégréo-différentielles	5
1.1	Opérateur intégrale linéaire	5
1.2	Equations intégrales	6
1.2.1	Classification et terminologie	6
1.2.2	Equation intégrales mixtes	8
1.3	Relation entre équation différentielle et équation intégrale	9
1.3.1	Problème avec condition initiale et équation Volterra	9
1.4	Equation intégréo-différentielle	11
1.4.1	Classification des équations intégréo- différentielles (E.I-D)	12
2	Méthodes itératives pour la résolution des EQI et les EQID	14
2.1	Introduction	14
2.2	Méthode d'itération variationnelle (VIM)	14
2.2.1	Description de la méthode	15
2.2.2	Application de la méthode itérative variationnelle (VIM) pour les EDOs d'ordre n	15
2.2.3	Application de la méthode (VIM) pour les EDOs d'ordre un	16
2.2.4	Application de la méthode (VIM) pour les équations intégréo- différentielles	18
2.3	Exemples	22
2.4	Méthode des perturbation de l'homotopie HPM	31
2.4.1	Description de la méthode HPM	32
2.4.2	Application de la méthode HPM pour un EDO d'ordre un	33
2.4.3	Application de HPM pour les équations intégréo-différentielles E-I-D . .	34
2.4.4	Application de la méthode (HPM) pour l'équation intégréo-différentielle non-linéaire de (Volterra-Fredholm)	38

2.5 Conclusion	40
--------------------------	----



Remerciements

Je tiens à exprimer toutes mes reconnaissances au Docteur "**Fernane Khairddine**" de m'avoir proposé ce sujet de recherche et d'avoir dirigé mon travail.

Je lui témoigne aussi, ma gratitude pour son soutien, sa grande disponibilité et surtout ses conseils et ses encouragements tout au long de mes recherches.

j'exprime également mes chaleureux remerciement au docteur **MEHRI Allaoua** et au Docteur **Tabouche Noura**, pour l'honneur qu'ils m'ont fait d'avoir accepté de faire partie de ce jury.



Introduction générale

La plupart des phénomènes mécaniques, physiques, chimiques, biologiques, ou même économiques sont modélisés par des équations aux dérivées partielles (EDP) où une équation intégrale (équation intégrale différentielle linéaires et non linéaires de Fredholm, et les équations intégrales linéaires et non linéaires de Volterra.

La résolution d'une équation intégrale (équation intégrale-différentielle) à priori plus difficile que celle d'une équation différentielle ordinaire (EDO) du fait qu'une EDO relie une fonction et sa - ses dérivées qui ne portent que sur une seule variable.

Fredholm (1866-1927) a étudié la méthode pour résoudre les équations intégrales du deuxième espèce.

En 1887, V. Volterra (1860-1940) a établi la méthode de résolution des équations intégrales par les noyaux itérés. En outre, il a étendu la théorie des équations intégrales aux équations intégrale-différentielles et aux équations intégrales singulières.

Ainsi, la théorie des équations intégrales a été un domaine de recherche actif dans les mathématiques appliquées et la physique mathématique.

L'importance des équations intégrales dans toutes les branches de la science et l'ingénierie nous amène à étudier certaines de ces équations et les résoudre numériquement.

Plusieurs méthodes de résolution ont été développées, nous citerons : la méthode de collocation par spline [3], polynômes par morceaux [5], ondelettes de Haar [15]- [16], la méthode de perturbation de l'homotopie HPM [8], la méthode des ondelettes-Galerkin [6], les polynômes de Taylor [17], la méthode de Tau [18], la méthode de sinc-collocation [20], la méthode de décomposition de Adomian [24] combinée et la méthode de décomposition asymptotique de Adomian [24] pour déterminer des solutions exactes et approchées. Mais, à notre connaissance, il n'existe pas toujours d'approche analytique fiable pour la résolution des équations intégrale-différentielles de Volterra et de Fredholm.

La résolution des équations intégrale-différentielles par les méthodes dites classiques, telles que

les méthodes des éléments finis, des différences finies, des volumes finis et la méthode spectrale, donnent des approximations de la solution en des points discrets. En outre, ces méthodes font appel à des techniques de discrétisation de l'espace et du temps et elles linéarisent souvent les équations.

Notre présent travail s'inscrit dans le cadre de l'analyse numérique, le but est de trouver une solution approchée des (E.I-D) en utilisant deux méthodes itératives.

Ce mémoire se compose de deux chapitres. Le premier chapitre est consacré à une introduction à la théorie des équations intégrales et les équations intégrales-différentielles. Le deuxième chapitre sera consacré à la résolution numérique des équations définies au premier chapitre. Après un rappel des méthodes numériques, leurs applications aux équations intégrales-différentielles.

Les résultats numériques obtenus seront analysés et commentés. Ce travail est terminé par une conclusion qui va synthétiser l'apport de ce travail dans la résolution des équations intégrales-différentielles par les méthodes itératives.



Introduction à la Théorie des équations intégrales et intégro-différentielles

Dans ce chapitre on présente quelques définitions des équations intégrales avec leurs classifications avec une petite introduction théorique comme on s'intéresse aussi à la signification d'équation intégro-différentielles.

1.1 Opérateur intégrale linéaire

Définition 1.1.1 Soit ω un ensemble compact et $k : C(\omega) \times C(\omega) \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue, l'opérateur intégrale A est définie par :

$$A : u \in C(\omega) \rightarrow Au \in C(\omega); \text{ et } Au(x) = \int_{\omega} k(x,t)u(t)dt. \quad (1.1)$$

où k : s'appelle le noyau.

Théorème 1.1.1 Soit ω un ensemble compact de \mathbb{R}^n et soit $k : C(\omega) \times C(\omega) \rightarrow C$,

Alors l'opérateur linéaire A définie par :

$$Au(x) = \int_{\omega} k(x,t)u(t)dt. \quad x \in \omega$$

est appelée opérateur intégrale à noyau continue. Cet opérateur est borné de norme : $\|A\|$ est donnée par :

$$\|A\| = \underbrace{\max}_{x \in \omega} \int_{\omega} |k(x,t)| dt \quad (1.2)$$

Proposition 1.1.1 Si $k(x,t) \in \mathbb{L}^2(\omega \times \omega)$ alors l'opérateur A définie par (1.1) est compact de $\mathbb{L}^2(\omega)$ dans $\mathbb{L}^2(\omega)$.

1.2 Equations intégrales

Définition 1.2.1 Une équation intégrale est une équation dans la quelle l'inconnue généralement une fonction d'une ou plusieurs variable s'apparait sous le signe intégrale de la forme suivante :

$$\beta(x)u(x) = f(x) + \gamma \int k(x,t)u(t)dt \quad (1.1)$$

Où $\beta(x)$, $f(x)$ et $k(x,t)$, sont des fonctions données.

γ est un paramètre numérique, La fonction $u(x)$ qui figure à l'intérieur et à l'extérieur du signe intégrale est l'inconnue à déterminer.

La fonction $k(x,t)$ est appelée noyau de l'équation intégrale.

1.2.1 Classification et terminologie

La classification des équations intégrales est centrée sur trois caractéristiques de base :

– Le type (espèce)

Ce caractère s'intéresse à la localisation de la fonction inconnue donc on a deux cas :

pour l'équation de premier espèce la fonction $u(x)$ apparait uniquement à l'intérieur de signe intégrale, cependant pour les équations de deuxième espèce la fonction inconnue $u(x)$ apparait également à l'extérieure de signe intégrale.

– Caractérisation des bornes

Une équation de la forme (1.1) dont les bornes d'intégrations sont fixées est dite équation intégrale de Fredholm, par contre si les bornes d'intégrations sont indéfinies l'équation intégrale est dite de Volterra.

– L'adjective singulière

Est parfois employé d'une part, quand l'intégration est impropre, d'autre part si l'une des bornes d'intégration ou les deux sont infinies ou si l'intégrant est non borné sur l'intervalle donné, évidemment, une équation intégrale peut être singulière dans les deux sens.

Remarque 1.2.1 L'équation (1.1) est dit homogène si $f(x) = 0$, sinon on dit que l'équation (1.1) est non homogène.

Remarque 1.2.2 On dit que l'équation intégrale est non linéaire si elle est de la forme suivante :

$$\beta(x)u(x) = f(x) + \gamma \int k((x,t), u(t))dt \quad (1.2)$$

C-à-d le noyau a l'inconnu $u(t)$ considérée comme une troisième variable.

Les équations intégrales les plus fréquemment utilisées sont les équations intégrales de Volterra et celles de Fredholm qui constituent donc les deux principales catégories.

Equations intégrale de Fredholm

On appelle équation intégrale de Fredholm dans laquelle les deux bornes d'intégrations sont constantes avec la forme suivante :

$$\beta(x)u(x) = f(x) + \gamma \int_a^b k((x, t), u(t))dt \quad (1.3)$$

1. Une équation intégrale de Fredholm (première espèce) si $\beta(x) = 0$ et de la forme suivante :

$$f(x) + \gamma \int_a^b k((x, t), u(t))dt = 0 \quad (1.4)$$

2. Une équation intégrale de Fredholm (2^{ème} espèce) si $\beta(x) \neq 0$ est de la forme :

$$f(x) + \gamma \int_a^b k((x, t), u(t))dt = u(x) \quad (1.5)$$

Equations intégrale de Volterra

On appelle équation intégrale de Volterra dans laquelle l'un des deux bornes d'intégrations est variable avec la forme suivante :

$$\beta(x)u(x) = f(x) + \gamma \int_a^x k((x, t), u(t))dt \quad (1.6)$$

1. Une équation intégrale de Volterra (première espèce) si $\beta(x) = 0$ est de la forme :

$$f(x) + \gamma \int_a^x k((x, t), u(t))dt = 0 \quad (1.7)$$

2. Une équation intégrale de Volterra (2^{ème} espèce) si $\beta(x) = \text{constant} \neq 0 = c$, Donc l'équation (1.6) est de la forme suivante :

$$cu(x) = f(x) + \gamma \int_a^x k((x, t), u(t))dt \quad (1.8)$$

3. Si $\beta(x) \neq 0$ c.-à-d. est une fonction alors l'équation (1.6) est appelée une équation intégrale de Volterra (3^{ème} espèce).

Equation intégrale d'Abel linéaire (Singulière)

On appelle équation intégrale d'Abel linéaire une équation de la forme :

$$f(x) = \int_a^x \frac{u(t)}{|x-t|^\alpha} dt, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (1.9)$$

Où α est une constant.

Equation intégrale d'Abel non-linéaire

On appelle équation intégrale d'Abel non-linéaire une équation de la forme :

$$u(x) = \int_a^x |x-t|^{\alpha-1} g(u(t)) dt \quad \text{où } , 0 < \alpha < 1 \quad (1.10)$$

et $g :]0, \infty[\rightarrow]0, \infty[$ tel que $g(0) = 0$ et $g(x) > 0$.

1.2.2 Equation intégrales mixtes

Equation intégrale de Fredholm-Volterra

On appelle équation de Fredholm-Volterra une équation de la forme :

$$\beta(x)u(x, t) + \gamma \int_a^b k(x, y)u(y, t)dy + \gamma \int_0^t F(t, s)u(x, s)ds = f(x, t), \quad t \in [0, T], \quad T < \infty \quad (1.11)$$

Equation intégrale de Volterra- Fredholm

On appelle équation de Volterra-Fredholm une équation de la forme :

$$\beta(x)u(x, t) + \gamma \int_0^t \int_a^b k(x, t)F(t, s)u(y, s)dyds = f(x, t), \quad t \in [0, T] \quad (1.12)$$

Equations intégrales singulières

On dit qu'une équation intégrale est singulière si l'une ou les deux bornes d'intégration sont infinies, ou bien le noyau $k(x, t)$ devient infini au voisinage des bornes d'intégration.

Définition 1.2.2 Une équation intégrale de la forme :

$$u(x) = f(x) + \int_\omega M(x, t)k(x, t)u(t)dt \quad (1.13)$$

Est singulière si $M(x, t)$ admet une singularité ou le domaine ω n'est pas bornée.

1.3 Relation entre équation différentielle et équation intégrale

Définition 1.3.1 On appelle équation différentielle ordinaire une équation établissant une relation entre la variable indépendante x La fonction inconnue $y = f(x)$ et ses dérivées $y', y'', \dots, y^{(n)}$ On peut écrire symboliquement une équation différentielle comme Suit :

$$F(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1.1)$$

Définition 1.3.2 Une équation aux dérivées partielles est une relation entre la fonction inconnue f dépendant de deux ou plusieurs variables x, y et les dérivées partielles de f :

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}, \dots, \frac{\partial^n f}{\partial^n x} \quad (1.2)$$

Théorème 1.3.1 Soit $f : \omega \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue, définie sur le produit d'un ouvert ω de \mathbb{R}^n et d'un intervalle I de \mathbb{R} , L'équation différentielle :

$$u'(t) = f(u(t), t) \quad (1.3)$$

Qui passe par u_0 à $t = 0$, est équivalente à l'équation intégrale :

$$u(t) = u_0 + \int_0^t f(u(\tau), \tau) d\tau \quad (1.4)$$

1.3.1 Problème avec condition initiale et équation Volterra

Soit $u(x)$ satisfais le problème suivant :

$$\begin{cases} u''(x) = \psi(x, u(x)) \\ u(0) = u_0, u'(0) = u'_0 \end{cases} \quad (1.5)$$

Avec u'_0, u_0, ψ sont données ;

1er intégration de (1.5) donne :

$$u'(x) = u'_0 + \int_0^x \psi(t, u(t)) dt \quad (1.6)$$

2ème intégration de (1.6) nous donne :

$$u(x) = u_0 + u'_0 + \int_0^s \left(\int_0^x \psi(t, u(t)) dt \right) ds \quad (1.7)$$

intégration par partie On a :

$$\int_0^s \left(\int_0^x \psi(t, u(t)) dt \right) ds = \left[s \int_0^s \psi(t, u(t)) dt \right]_0^x - \int_0^x s \psi(s, u(s)) ds = x \int_0^x \psi(x, u(x)) dx - \int_0^x s \psi(s, u(s)) ds. \quad (1.8)$$

Posons $s = t$ donc (1.7) devient :

$$x \int_0^x \psi(t, u(t)) dt - \int_0^x t \psi(t, u(t)) dt = \int_0^x (x-t) \psi(t, u(t)) dt. \quad (1.9)$$

Donc (1.7) devient :

$$u(x) = u_0 + u'_0(x) + \int_0^x (x-t) \psi(t, u(t)) dt \quad (1.10)$$

Equation de Volterra d 2^{ème} espèce.

Problème avec condition aux limites et équation Fredholm

Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} u''(x) = \psi(x, u(x)) & 0 < x < 1 \\ u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1 \end{cases} \quad (1.11)$$

Avec ψ, u_0, u_1 sont données.

1^{ère} intégration de (1.11) donne :

$$u'(x) = u'_0 + \int_0^x \psi(t, u(t)) dt \quad (1.12)$$

2^{ème} intégration de (1.12) nous donne :

$$u(x) - u_0 = cx + \int_0^x \int_0^s \underbrace{\psi(t, u(t))}_{\text{}} dt ds \quad (1.13)$$

De (1.11) et (1.12), (1.13) on obtient :

$$u(x) = u_0 + cx + \int_0^x (x-t) \psi(t, u(t)) dt \quad (1.14)$$

On détermine c : on a $u(1) = u_1$ et donc :

$$c = u(1) - u_0 - \int_0^1 (1-t)\psi(t, u(t))dt \quad (1.15)$$

On remplace c dans(1.14) on obtient :

$$u(x) = u_0 + u_1x - u_0x - \int_0^1 x(1-t)\psi(t, u(t))dt + \int_0^x (x-t)\psi(t, u(t))dt \quad (1.16)$$

Ce qui implique :

$$u(x) = u_0 + (u_1 - u_0)x - \int_0^x x(1-t)\psi(t, u(t))dt - \int_x^1 x(1-t)\psi(t, u(t))dt + \int_0^x (x-t)\psi(t, u(t))dt \quad (1.17)$$

$$= u_0 + (u_1 - u_0)x + \int_0^x t(x-t)\psi(t, u(t))dt + \int_x^1 x(t-t)\psi(t, u(t))dt \quad (1.18)$$

Ce qui implique :

$$u(x) = u_0 + (u_1 - u_0)x + \int_0^1 k(s, t)\psi(t, u(t))dt \quad (1.19)$$

L'équation (1.19) est une équation de Fredholm de 2^{ème} espèce où :

$$k(x, t) = \begin{cases} t(x-1) & 0 < t < x \\ x(t-1) & x < t < 1 \end{cases} \quad (1.20)$$

1.4 Equation intégro-différentielle

Définition 1.4.1 Une équation intégro-différentielle (E.I.D) composée de deux opérations Intégrales et différentielles qui impliquent la fonction inconnu $u(x)$ avec la forme générale d'une équation intégro- différentielle non linéaire d'ordre n :

$$u^{(n)}(x) = F(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(n-1)}(x), \lambda \int_E k(x, t, u(t), u'(t), \dots, u^{(n-1)}(t))dt) \quad (1.1)$$

avec les conditions initiales :

$$u(\alpha) = \beta_0, u'(\alpha) = \beta_1, u''(\alpha) = \beta_2, \dots, u^{(n-1)}(\alpha) = \beta_{n-1} \quad (1.2)$$

Telle que : $\beta_i, 0 \leq i \leq n-1$ nombres donnés, $u, u', u'', \dots, u^{(n)}$ sont des fonctions inconnues ;

$k(x, t)$: Noyau de l'équation intégro-différentielle,

E : est un ensemble fermé borné d'un espace euclidien de dimension finie,

x, t : sont des éléments de cet espace. n, m : sont des nombres naturelles.

λ : Est un paramètre numérique.

Remarque 1.4.1 Une équation intégro-différentielle linéaire d'ordre n est de la forme :

$$\sum_{i=0}^n p_i(x)u^{(i)}(x) = \lambda \int_T k(x, t) \sum_{j=0}^m b_j(t)u^{(j)}(t)dt + f(x) \quad (1.3)$$

Nous pouvons écrit :

$$\sum_{j=0}^m b_j(t)u^{(j)}(t) = M_t(u) \quad (1.4)$$

et

$$\sum_{i=0}^n p_i(x)u^{(i)}(x) = L_x(u) \quad (1.5)$$

Avec $p_i(x), b_j(x)$ et $f(x)$:sont des fonctions données aves ($0 \leq j \leq m$, $0 \leq i \leq n$).

1.4.1 Classification des équations intégro- différentielles (E.I-D)

Les classifications de (E.I-D) ont un rôle très important et sont classées par leurs caractéristiques en quatre types qui convient.

Bornes d'intégration

-a) Si les bornes d'intégration sont fixés, alors l' (E.I-D) est dite de Fredholm :

$$L_x(u) = \lambda \int_a^b k(x, t)M_t(u) + f(x) \quad (1.6)$$

-b) si $b = x$ alors (E.I-D) est dit de Volterra :

$$L_x(u) = \lambda \int_a^x k(x, t)M_t(u) + f(x) \quad (1.7)$$

-c) si les deux opérateurs de l'intégration de Fredholm et Volterra consistent alors l' (E.I-D) est dite de Fredholm-Volterra :

$$L_x(u) = \lambda_1 \int_a^b k(x, t)M_t(u) + \lambda_2 \int_a^x k(x, t)M_t(u) + f(x) \quad (1.8)$$

Ordre de l' (E.I-D)

L'ordre de (E.I-D) est l'ordre de dérivation le plus élevé qui apparaît dans l'opérateur différentiel.

Type de (E.I-D), (espèce)

l' (E.I-D) est dite de première espèce si la partie différentiel est nul, sinon est dit de deuxième espèce.

Remarque 1.4.2 *Si la fonction dépend d'une seule variable alors l' (E.I-D) est dite ordinaire sinon (E.I-D) est dite partielle.*

Equation intégral-différentielle singulier

Une équation intégral-différentielle est dite singulier si :

- 1- L'un ou les deux bornes de l'intégration sont infinis,
- 2- Le noyau devient infini au voisinage d'un ou plusieurs points de l'intervalle de l'intégration.

Méthodes itératives pour la résolution des EQI et les EQID



2.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de fournir, de manière succincte, les principes de base de la méthode itérative variationnelle et la méthode de perturbation Homotopique pour la résolution des équations intégrales et les équations intégro-différentielles.

2.2 Méthode d'itération variationnelle (VIM)

Dans ce chapitre, nous examinerons un certain nombre de types classiques d'équations intégro-différentielles d'ordre n . Nous nous concentrons ici sur les techniques de résolution approchées qui peut amener le calcul des solutions aux calculs des suites d'itérations. L'étude théorique étudiés dans [[18], [11], [8]] où les différents auteurs montrent l'existence et l'unicité de la solution exacte.

Il n'existe pas de méthode générale de la résolution exacte d'une équation intégro-différentielles. La première démarche à faire pour résoudre une équation intégro-différentielles, est de déterminer l'ordre et le type d'équation auquel on a affaire et ensuite, si c'est l'un des types usuels, on applique la méthode analytique, sinon on peut essayer des méthodes numériques.

Notre travail consiste à appliquer la méthode variationnelle (VIM), cette méthode a été développée a été développée par JI-HUAN HE au début des années 1990, cette méthode a été utilisée par beaucoup des chercheurs et elle est permet de résoudre des problèmes linéaire et non-linéaire, elle est utilisée pour obtenir une solution approcher ; Cette méthode basée sur la détermination de multiplicateur de Lagrange et elle donne par la formulation suivante :

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda(t)[Lu_n(t) + N\tilde{u}_n(t) - h(t)] ds \quad (2.1)$$

2.2.1 Description de la méthode

Nous considérons l'équation différentielle suivante :

$$L(u) + N(u) = h(x) \quad (2.2)$$

Avec

L : est un opérateur linéaire,

N : est un opérateur non linéaire,

$h(x)$: est une fonction connue.

La forme de la solution est donnée par la formulation suivante :

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda(t) [Lu_n(t) + N\tilde{u}_n(t) - h(t)] dt \quad (2.3)$$

Où

λ : est un multiplicateur générale de Lagrange,

n : est un indice représente la nièmes approximation,

$\tilde{u}_n(t)$ est une variation restreinte c.à.d. $\delta\tilde{u}_n(t) = 0$,

et la solution est donné par : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = u(x)$.

2.2.2 Application de la méthode itérative variationnelle (VIM) pour les EDOs d'ordre n

Théorème 2.2.1 Soit $\alpha_i(x)$ avec $(i = 1, \dots, n-1)$ et $h(x)$ est une fonction définie et continue sur l'intervalle $[a; b]$, et soit $a \leq x_0 \leq b$, alors le problème suivante :

$$u^{(n)}(x) + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t) u^{(i)}(x) = h(x) \quad (2.4)$$

Avec les conditions $u(a) = \mu_0$, $u'(a) = \mu_1$, $u^{(n-1)}(a) = \mu_{n-1}$, a une solution unique qui définit sur $[a; b]$ de plus l'application de la méthode VIM sur ce problème est donnée par la formulation qui convient :

$$u_{m+1}(x) = u_m(x) + \int_0^x \lambda(t) \left[u_m^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t) \tilde{u}_m^{(i)}(t) - h(t) \right] dt \quad \text{et} \quad (m \geq 0) \quad (2.5)$$

Avec $\lambda(t)$: est un multiplicateur générale de Lagrange,

n : est un indice représente la nièmes approximation,

$\tilde{u}_m(t)$: est une valeur restreinte i.e. $\delta\tilde{u}_m(t) = 0$,

d'abord la détermination de $\lambda(t)$ est de façons optimale et par l'intégration par partie et l'utilisation de la valeur restreinte $\delta\tilde{u}_m(t)$ on trouve le système suivante :

$$\begin{cases} 1 + (-1)^{(n-1)}\lambda_{t=x}^{(n)} = 0 \\ \lambda_{t=x}^{(i)} = 0 \quad i = 0, \dots, n-2 \end{cases} \quad (2.6)$$

qui nous prouve que $\lambda(t)$ est de la forme suivant :

$$\lambda(t) = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} (t-x)^{(n-1)} \quad (2.7)$$

Comme un résultat nous trouvons l'itération suivante : pour tout $m \geq 0$:

$$u_{m+1}(x) = u_m(x) + \int_0^x \frac{(-1)^n}{(n-1)!} (t-x)^{(n-1)} \left[u_m^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t) \tilde{u}_m^{(i)}(t) - h(t) \right] dt \quad (2.8)$$

2.2.3 Application de la méthode (VIM) pour les EDOs d'ordre un

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} u'(x) + \beta(x)u(x) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq b \\ u(0) = \alpha \end{cases} \quad (2.9)$$

la correction fonctionnelle selon VIM de cette équation donne :

$$u_{m+1}(x) = u_m(x) + \int_0^x \lambda(t) [u_m'(t) + \beta(t)\tilde{u}_m(t) - \varphi(t)] dt \quad (2.10)$$

tout d'abord on cherche $\lambda(t)$:

prenons la variations des deux cotés de (2.10) nous trouvons :

$$\frac{\delta u_{m+1}}{\delta u_m} = 1 + \frac{\delta}{\delta u_m} \int_0^x \lambda(t) [u_m'(t) + \beta(t)\tilde{u}_m(t) - \varphi(t)] dt \quad (2.11)$$

qui est équivalent à

$$\delta u_{m+1} = \delta u_m + \delta \int_0^x \lambda(t) [u_m'(t) + \beta(t)\tilde{u}_m(t) - \varphi(t)] dt \quad (2.12)$$

En utilisant $\delta\tilde{u}_m(t) = 0$ et $\delta\beta(t) = 0$ cela donne :

$$\delta u_{m+1} = \delta u_m + \delta \int_0^x \lambda(t) u_m'(t) dt \quad (2.13)$$

Intégrons (2.13) par parties nous obtenons

$$\delta u_{m+1} = \delta u_m + \delta \lambda u_m(x) - \delta \int_0^x \lambda'(t) u_m(t) dt \quad (2.14)$$

qui est équivalent à

$$\delta u_{m+1} = \delta(1 + \lambda_{t=x})u_m - \delta \int_0^x \lambda'(t)u_m(t)dt \quad (2.15)$$

les conditions de u_{m+1} aux extrémums exige que $\delta u_{m+1} = 0$ cela veut dire que

$$0 = \delta(1 + \lambda_{t=x})u_m - \delta \int_0^x \lambda'(t)u_m(t)dt \quad (2.16)$$

En suite nous conclurons cette exprésion

$$\begin{cases} 1 + \lambda_{t=x} = 0 \\ \lambda'_{t=x} = 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

qui donne $\lambda = -1$ on substituant cette valeurs dans (2.10) on trouve la forme qui convient :

$$u_{m+1}(x) = u_m(x) - \int_0^x [u'_m(t) + \beta(t)\tilde{u}_m(t) - \varphi(t)]dt \quad (2.18)$$

Etant donné $u(0) = \alpha$, nous pouvons prendre $u_0 = \alpha$, nous obtenons les approximations successives suivantes :

$$\begin{cases} u_0(x) = \alpha \\ u_1(x) = u_0(x) - \int_0^x [u'_0(t) + \beta(t)u_0(t) - \varphi(t)]dt \\ u_2(x) = u_1(x) - \int_0^x [u'_1(t) + \beta(t)u_1(t) - \varphi(t)]dt \\ u_{m+1}(x) = u_m(x) - \int_0^x [u'_m(t) + \beta(t)\tilde{u}_m(t) - \varphi(t)]dt \\ \vdots \end{cases}$$

Exemple 2.2.1 Considérons l'équation différentielle ordinaire :

$$u'(x) - u(x) = e^x \quad \text{avec} \quad u(0) = 0$$

donc $\beta(t) = -1$, $\alpha = 0$, $u_0 = 0$ et $n = 1$, d'après (2.7) on a

$$\lambda(t) = \frac{(-1)^1}{(1-1)!}(t-x)^{(1-1)} = -1$$

donc $\lambda(t) = -1$ alors on a les approximations suivantes :

$$\begin{cases} u_0(x) = 0 \\ u_1(x) = u_0(x) - \int_0^x [u'_0(t) - u_0(t) - e^t]dt = e^x - 1 \\ u_2(x) = u_1(x) - \int_0^x [u'_1(t) - u_1(t) - e^t]dt = 2e^x - x - 2 \\ u_3(x) = u_2(x) - \int_0^x [u'_2(t) - u_2(t) - e^t]dt = 3e^x - 2x - \frac{1}{2}x^2 - 3 \\ u_4(x) = u_3(x) - \int_0^x [u'_3(t) - u_3(t) - e^t]dt = 4e^x - 3x - x^2 - \frac{1}{6}x^3 - 4 \\ \vdots \end{cases}$$

par le développement de Taylor de e^x au voisinage de zero la solution approcher est donne par :

$$\begin{aligned} u(x) &= (e^x - 1) + (2e^x - x - 2) + (3e^x - 2x - \frac{1}{2}x^2 - 3) + \dots \\ &= x(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots) = xe^x \end{aligned}$$

2.2.4 Application de la méthode (VIM) pour les équations intégrales différentielles

On distingue alors trois cas :

A) Cas d'équations intégrales-différentielle de Volterra d'ordre n .

Dans cette partie, nous étendons l'application de la méthode d'itération variationnelle (VIM) afin de construire des solutions approchées pour les équations intégrales-différentielles de Volterra d'ordre n dont la forme général :

$$\sum_{i=0}^n a_i(x)u^{(i)}(x) - f(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^x k_i(x, s, u(s), u^{(i)}(s))ds = 0, \quad a \leq a_i \leq x \leq b \quad (2.19)$$

avec les condition :

$$u(a) = \mu_0, u'(a) = \mu_1, u^{(n-1)}(a) = \mu_{n-1}$$

On obtient l'algorithme suivant :

Algorithme.

Etape 1

On construit la correction fonctionnelle de (2.19) selon la méthode(VIM) pour trouver le multiplicateur de lagrange $\lambda(t)$ de cette façon :

$$u_{m+1}(x) = u_m(x) + \int_0^x \lambda(t) \left[\sum_{i=0}^n a_i(x)u^{(i)}(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^t k_i(x, s, \tilde{u}_m(s), \tilde{u}_m^{(i)}(s) - f(s) \right] dt \quad (2.20)$$

avec $u_m^{(i)}(i = 1, 2, \dots, n)$ est considéré comme une valeur restreint qui est $\delta u_m^{(i)} = 0, i = 0, 1, \dots, n$

Etape 2

avec la condition $\delta u_m^{(i)} = 0$ on a :

$$\delta u_{m+1}(x) = \delta u_m(x) + \delta \int_0^x \lambda(t) \left[\sum_{i=0}^n a_i(x)u^{(i)}(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^t k_i(x, s, \tilde{u}_m(s), \tilde{u}_m^{(i)}(s) - f(s) \right] dt \quad (2.21)$$

et par l'intégration on trouve l'équation d'Euler-lagrange suivante :

$$\begin{cases} 1 + (-1)^{(n-1)} \lambda_{t=x}^{(n)} = 0 \\ \lambda_{t=x}^{(i)} = 0 \quad i = 0, \dots, n-2 \end{cases} \quad (2.22)$$

donc $\lambda(t)$ est de la même formulation précédant (2.7) et d'abord :

$$u_{m+1}(x) = u_m(x) + \int_0^x \frac{(-1)^n}{(n-1)!} (t-x)^{(n-1)} \left[\sum_{i=0}^n a_i(x) u^{(i)}(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^t k_i(x, s, \tilde{u}_m(s), \tilde{u}_m^{(i)}(s) - f(s)) \right] dt \quad (2.23)$$

Etape 3

finalemt et par intégration de (2.23) on peut calculer la solution approchéé avec la condition initiale $u_0(x) = \mu_0$, on trouve les approximation successisive suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1(x) = u_0(x) + \int_0^x \frac{(-1)^n}{(n-1)!} (t-x)^{(n-1)} \left[\sum_{i=0}^n a_i(x) u^{(i)}(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^t k_i(x, s, \tilde{u}_0(s), \tilde{u}_0^{(i)}(s) - f(s)) \right] dt \\ u_2(x) = u_1(x) + \int_0^x \frac{(-1)^n}{(n-1)!} (t-x)^{(n-1)} \left[\sum_{i=0}^n a_i(x) u^{(i)}(x) - \sum_{i=0}^n \int_{a_i}^t k_i(x, s, \tilde{u}_1(s), \tilde{u}_1^{(i)}(s) - f(s)) \right] dt \\ \vdots \\ u_{m+1}(x) = u_m(x) + \int_0^x \frac{(-1)^n}{(n-1)!} (t-x)^{(n-1)} \left[\sum_{i=0}^n a_i(x) u^{(i)}(x) - \sum_{i=0}^n \int_{a_i}^t k_i(x, s, \tilde{u}_m(s), \tilde{u}_m^{(i)}(s) - f(s)) \right] dt \end{array} \right.$$

la solution exacte est donné par :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = u(x).$$

B) Cas d'équations intégro-différentielle de Fredholm d'ordre n .

Dans cette partie, nous étendons l'application de la méthode d'itération variationnelle (VIM) afin de construire des solutions approchées pour les équations intégro-différentielles de Volterra d'ordre n dont la forme général :

$$\sum_{i=0}^n \beta_i(x) y^{(i)}(x) - f(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{b_i} k_i(x, s, u(s), u^{(i)}(s)) ds = 0, \quad a \leq a_i \leq x \leq b_i \leq b \quad (2.24)$$

avec les conditions initiales

$$u(a) = \mu_0, \quad u'(a) = \mu_1, \dots, \quad u^{(n-1)}(a) = \mu_{n-1} \quad (2.25)$$

On obtient l'algorithme suivant :

Algorithme.

Etape 1. Premièrement, nous construisons la fonction de correction en utilisant la méthode VIM pour trouver le multiplicateur de Lagrange sous les formes suivantes :

$$u_{m+1}(x) = u_m(x) + \int_a^x \lambda [Lu_m(t) + N\tilde{u}_m(t) - f(t)] dt, \quad (m \geq 0) \quad (2.26)$$

En substituant (2.24) dans le côté droit de (2.26), on obtient :

$$u_{m+1}(x) = u_m(x) + \int_a^x \lambda(t) \left[\sum_{i=0}^n \beta_i(t) u_m^{(i)}(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{b_i} k_i(x, s, u(s), u^{(i)}(s)) ds - f(t) \right] dt \quad (2.27)$$

Ici, $u_m^{(i)}$ ($i = 1, \dots, n$) sont considérés comme une variation restreinte [9]. i.e. $\delta u_m^{(i)} = 0$ $i = 0, \dots, n-1$.

Étape 2. Prenons la variation des deux côtés de (2.27), par l'utilisation de $\delta \tilde{u}_n(t) = \delta \tilde{u}_n'(t) = \dots = \delta \tilde{u}_n^{(m-1)}(t) = 0$ et $\delta f(t) = 0$. Intégrons par parties (2.27) nous obtenons :

$$\delta u_{m+1}(x) = \delta u_m(x) + \delta \int_0^x \lambda(t) \left[\sum_{i=0}^n \beta_i(t) u_m^{(i)}(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{b_i} k_i(x, s, u(s), u^{(i)}(s)) ds - f(t) \right] dt \quad (2.28)$$

Les extrémums conditionnels d'un u_{m+1} exigent que $\delta u_{m+1} = 0$. Cela veut dire que le côté gauche de (2.28) égal à zéro et le côté droit devrait être aussi 0.

Cela donne les conditions stationnaires

$$\begin{cases} 1 + (-1)^{(n-1)} \lambda|_{t=x}^{(n)} = 0 \\ \lambda|_{t=x}^{(i)} = 0, \quad i = 0, \dots, n-2 \end{cases}$$

Par conséquent, le multiplicateur de Lagrange peut être identifié comme suit :

$$\lambda(t) = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} (t-x)^{n-1}. \quad (2.29)$$

Par conséquence, nous obtenons la formule d'itération suivant :

$$u_{m+1}(x) = u_m(x) + \int_0^x \frac{(-1)^n}{(n-1)!} (t-x)^{n-1} \left[\sum_{i=0}^n \beta_i(t) u_m^{(i)}(t) - f(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{b_i} k_i(x, s, u(s), u^{(i)}(s)) ds \right] dt$$

Étape 3. Calcul de la solution approchée.

Étant donné $u(a) = \mu_0$, $u'(a) = \mu_1, \dots, u^{(n-1)}(a) = \mu_{n-1}$, nous obtenons les approximations successives suivantes :

$$u_0(x) = \mu_0 + x\mu_1 + \dots + \mu_{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1(x) = u_0(x) + \int_0^x \frac{(-1)^n}{(n-1)!} (t-x)^{n-1} \left\{ \begin{array}{l} [\sum_{i=0}^n \beta_i(t)u_0^{(i)}(t) - f(t) \\ - \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{b_i} k_i(x,s,\tilde{u}_0(t),\tilde{u}_0^{(i)}(s))ds \end{array} \right\} dt \\ \\ u_2(x) = u_1(x) + \int_0^x \frac{(-1)^n}{(n-1)!} (t-x)^{n-1} \left\{ \begin{array}{l} [\sum_{i=0}^n \beta_i(t)u_1^{(i)}(t) - f(t) \\ - \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{b_i} k_i(x,s,\tilde{u}_1(t),\tilde{u}_1^{(i)}(s))ds \end{array} \right\} dt \\ \\ \vdots \\ \\ u_{m+1}(x) = u_m(x) + \int_0^x \frac{(-1)^n}{(n-1)!} (t-x)^{n-1} \left\{ \begin{array}{l} [\sum_{i=0}^n \beta_i(t)u_m^{(i)}(t) - f(t) \\ - \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{b_i} k_i(x,s,\tilde{u}_m(t),\tilde{u}_m^{(i)}(s))ds \end{array} \right\} dt \end{array} \right.$$

C) Cas des équations intégro- différentielles mixtes (Volterra-Fredholm)

Considérons l'équation intégro- différentielle (Volterra-Fredholm) suivante :

$$\sum_{j=0}^k p_j(x)u^{(j)}(x) = f(x) + \rho_1 \int_a^x \sum_{i=0}^p k_1(x,t)g_1(t,u^{(i)}(t))dt + \rho_2 \int_a^b \sum_{r=0}^s k_2(x,t)g_2(t,u^{(r)}(t))dt \quad (2.30)$$

avec les conditions suivante :

$$u^{(r)}(a) = b_r, \quad r = 0, \dots, s \quad (2.31)$$

avec : a, b, ρ_1, ρ_2 et b_r sont des constantes, $f(x)$, $k_1(x, t)$, $k_2(x, t)$, $g_1(t, u(t))$, $g_2(t, u(t))$ et $p_j(x)$, $j = 0, \dots, k$ sont des fonctions dérivables sur l'intervale $a \leq t \leq x \leq b$.

Si on pose $g_1(t, u(t)) = G_1(u(t))$, $g_2(t, u(t)) = G_2(u(t))$, telle que G_1 et G_2 sont des fonctions connus et lisses linéaire par rapport a $u(t)$ alors l'équation (2.30) devient :

$$\sum_{j=0}^k p_j(x)u^{(j)}(x) = f(x) + \rho_1 \int_a^x \sum_{i=0}^p k_1(x,t)G_1(t,u^{(i)}(t))dt + \rho_2 \int_a^b \sum_{r=0}^s k_2(x,t)G_2(t,u^{(r)}(t))dt \quad (2.32)$$

Description de la méthode

Pour trouve la solution approcher de l'équation (Volterra-Fredholm) par la méthode VIM on a toujours la correction fonctionnelle suivante :

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + L^{-1}[\lambda(x)[\sum_{j=0}^k p_j(x)u^{(j)}(x) - f(x)]$$

$$-\rho_1 \int_a^x \sum_{i=0}^p k_1(x,t)G_1(\tilde{u}(t))dt - \rho_2 \int_a^b \sum_{r=0}^s k_2(x,t)G_2(\tilde{u}(t))dt] \quad (2.33)$$

avec L^{-1} est un opérateur multiple d'intégration

$$L^{-1}(\cdot) = \int_a^x \int_a^x \dots \int_a^x (\cdot) dx dx \dots dx \quad (k \text{ fois}) \quad (2.34)$$

Pour trouver le multiplicateur de Lagrange $\lambda(s)$ on utilise les mêmes étapes précédentes on trouve les conditions stationnaires (2.29) suivantes

$$\begin{cases} 1 + \lambda|_{t=x} = 0 \\ \lambda'_{t=x} = 0 \end{cases} \quad (2.35)$$

alors on trouve :

$$\lambda(t) = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} (t-x)^{(n-1)}$$

On substituant cette formule dans (2.2.4) on trouve la forme itérative :

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) - L^{-1} \left[\frac{(-1)^n}{(n-1)!} (t-x)^{(n-1)} \left[\sum_{j=0}^k p_j(x) u^{(j)}(x) - f(x) \right] \right] \quad (2.36)$$

$$-\rho_1 \int_a^x \sum_{i=0}^p k_1(x,t)G_1(\tilde{u}(t))dt - \rho_2 \int_a^b \sum_{r=0}^s k_2(x,t)G_2(\tilde{u}(t))dt], \quad n \geq 0. \quad (2.37)$$

Remarque 2.2.1 Pour déterminer la solution de l'équation (2.30) nous suivons les mêmes étapes précédentes de la méthode VIM pour le cas des équations intégrales-différentielles de Volterra d'ordre n .

2.3 Exemples

Dans cette partie, l'exactitude de la méthode présentée est illustrée dans trois exemples suivants. Le logiciel (**Mathematica 11.0**) est utilisé pour calculer la solution approchée.

Exemple 2.3.1 Considérons l'équation intégrale-différentielle de second ordre :

$$u'' + u' - 2u = \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}x^2\right)e^{2x} - \frac{1}{4}x + \int_0^x xsu'(s)u(s)ds, \quad x \in [0, 1]$$

avec les conditions initiales $u(0) = u'(0) = 1$.

La solution exacte du problème est $u(x) = e^x$. En utilisant la méthode d'itération variationnelle présentée dans [9], La correction fonctionnelle selon VIM de cette équation donne :

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x (t-x) \left\{ \begin{array}{l} [u_n'' + u_n' - 2u_n - \\ \left(\left(\frac{1}{4}t - \frac{1}{2}t^2\right)e^{2t} - \frac{1}{4}t\right) \\ - \int_0^x xsu_n'(s)u_n(s)ds] dt \end{array} \right.$$

et en utilisant les valeurs initiales on trouve $u_0(x) = x+1$. Alors nous avons les approximations successives suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1(x) = \left(-\frac{1}{4} + \frac{5}{16}x - \frac{1}{8}x^2\right)e^{2x} + \frac{1}{90}x^6 + \frac{1}{40}x^5 + \frac{7}{24}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{19}{16}x + \frac{5}{4} \\ \\ u_2(x) = \left(\begin{array}{l} +\frac{1}{2048}x^6 - \frac{33}{8192}x^5 + \frac{61}{4096}x^4 - \frac{515}{16384}x^3 \\ +\frac{2625}{65536}x^2 - \frac{7677}{262144}x + \frac{1263}{131072} \end{array} \right) e^{4x} \\ \\ + \left(\begin{array}{l} -\frac{1}{2880}x^{10} + \frac{43}{11520}x^9 - \frac{97}{3840}x^8 + \frac{323}{2560}x^7 - \frac{251}{480}x^6 \\ +\frac{4593}{2560}x^5 - \frac{2567}{512}x^4 + \frac{11343}{1024}x^3 - \frac{147}{8}x^2 + \frac{2597}{128}x - \frac{1431}{128} \end{array} \right) e^{2x} \\ \\ +\frac{1}{4212000}x^{16} + \frac{11}{9072000}x^{15} + \frac{1}{640640}x^{14} + \frac{7}{374400}x^{13} + \frac{37}{427680}x^{12} \\ +\frac{259}{1267200}x^{11} + \frac{31}{37800}x^{10} + \frac{85}{41472}x^9 + \frac{115}{16128}x^8 + \frac{337}{20160}x^7 + \\ \frac{13}{512}x^6 + \frac{509}{7680}x^5 + \frac{1}{96}x^4 + \frac{16747}{98304}x^3 + \frac{21}{32}x^2 + \frac{802437}{262144}x + \frac{1595153}{131072} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n(x) = \dots \end{array} \right.$$

L'utilisation de développement de Taylor de e^x au voisinage de 0, la solution exacte de l'équation est donnée comme suite :

$$u_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \dots$$

La solution exacte est la suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = e^x = u(x).$$

La figure (2.1) et le tableau (2.1) illustrent la précision de la solution approchée pour $n = 9$. La figure (2.1) montre que la solution numérique et analytique sont identiques et les résultats sont satisfaisants.

Exemple 2.3.2 Considérons l'équation intégral-différentielle du troisième ordre :

$$u^{(3)}(x) = f(x) + \int_0^x u''(s)u(s)ds + \int_0^x x \sin(s)u'(s)u(s)ds$$

la fonction :

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \sin x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{12}x \sin 3x - \frac{1}{4}x \sin x$$

est choisi tel que $u(x) = \cos(x)$ est la solution exacte du problème.

avec les conditions initiales $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$, $u''(0) = -1$.

x	u_{ex}	u_n	$ u_{ex} - u_n $
0	1.0000000000000000	1.0000000000000000	0
0.1	1.10517091807565	1.10517091807565	$4.440892098500626e - 016$
0.2	1.22140275816017	1.22140275816017	$2.220446049250313e - 016$
0.3	1.34985880757600	1.34985880757600	$2.220446049250313e - 016$
0.4	1.49182469764127	1.49182469764127	0
0.5	1.64872127070013	1.64872127070013	$4.440892098500626e - 016$
0.6	1.82211880039051	1.82211880039051	$2.220446049250313e - 016$
0.7	2.01375270747048	2.01375270747048	$8.881784197001252e - 016$
0.8	2.22554092849247	2.22554092849247	$4.440892098500626e - 016$
0.9	2.45960311115695	2.45960311115695	0
1	2.71828182845905	2.71828182845905	0

TABLE 2.1 – Comparaison de la solution exacte et approchée pour $n = 9$

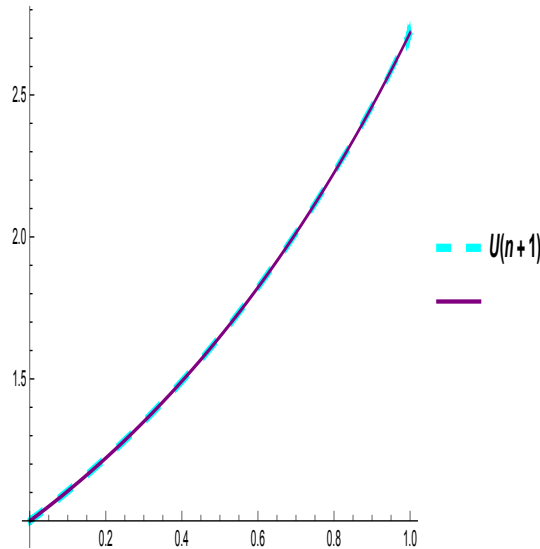


FIGURE 2.1 – Comparaison de la solution exacte et approchée pour $n = 9$

En utilisant la méthode d'itération variationnelle présentée dans [9], La correction fonctionnelle selon VIM de cette équation donne :

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \frac{(t-x)^2}{2} \left[u_n^{(3)}(t) - f(t) - \int_0^x u_n''(s)u_n(s)ds + \int_0^x t \sin(s)u_n'(s)u_n(s)ds \right] dt \quad (2.1)$$

Nous choisissons une approximation initiale de la solution $u_0(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 1$ qui satisfait aux conditions initiales, on obtient :

x	u_{ex}	u_n	$ u_{ex} - u_n $
0	1.000000000000000	1.000000000000000	0
$\frac{\pi}{10}$	0.95105651629515	0.95105651629515	0
$\frac{\pi}{5}$	0.80901699437495	0.80901699437495	0
$\frac{3\pi}{10}$	0.58778525229247	0.58778525229247	$2.220446049250313e - 016$
$\frac{2\pi}{5}$	0.30901699437495	0.30901699437495	$5.551115123125783e - 017$
$\frac{\pi}{2}$	0.000000000000000	0.000000000000000	$1.868937859973605e - 017$
$\frac{3\pi}{5}$	-0.30901699437495	-0.30901699437495	$5.551115123125783e - 017$
$\frac{7\pi}{10}$	-0.58778525229247	-0.58778525229247	$2.220446049250313e - 016$
$\frac{4\pi}{5}$	-0.80901699437495	-0.80901699437495	0
$\frac{9\pi}{10}$	-0.95105651629515	-0.95105651629515	$1.110223024625157e - 016$
π	-1.000000000000000	-1.000000000000000	$2.220446049250313e - 016$

TABLE 2.2 – Comparaison de la solution exacte et approchée pour $n = 5$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 1 \\ u_1(x) = \frac{1}{720}x^6 + (-1/48 + 1/2 \sin(x))x^4 + 15/2 x^3 \cos(x) \\ + \left(-\frac{107}{2} \sin(x) + 1/16\right)x^2 + \left(-\frac{1}{324} \cos(3x) - \frac{10328}{81} - \frac{807}{4} \cos(x)\right)x \\ -1/32 + \frac{1}{324} \sin(3x) + \frac{1317}{4} \sin(x) \\ + \cos(x) + 1/32 \cos(2x) \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n(x) = \dots \end{array} \right. \quad (2.2)$$

L'utilisation de développement de Taylor de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ au voisinage de 0, la solution exacte de l'équation est donnée comme suite :

$$u_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \dots$$

La solution exacte est la suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = \cos(x) = u(x).$$

Le figure (2.2) et le tableau (2.2) illustrent la précision de la solution approchée pour $x = \overline{0, \pi}$, et $n = 5$.

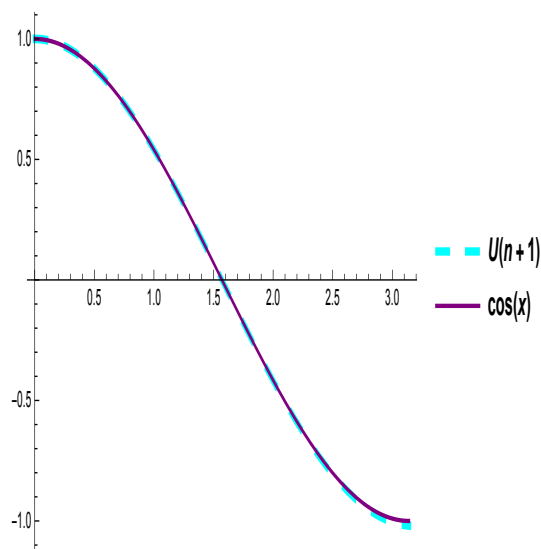


FIGURE 2.2 – Comparaison de la solution exacte et approchée pour $n = 3$

Comme l'exemple précédent les solutions numériques et analytiques sont presque semblables et les résultats sont très encourageants.

Exemple 2.3.3 Soit l'équation intégrale-différentielle de Fréholm de deuxième ordre

$$u^{(2)}(x) - 2u'(x) + u(x) = -1 + \int_0^1 su(s)ds, \quad 0 \leq x \leq 1$$

avec les conditions initiales suivantes : $u(0) = u'(0) = 1$. La solution exacte du problème est

$$u(x) = e^x.$$

En utilisant la méthode d'itération variationnelle présentée dans [9], La correction fonctionnelle selon VIM de cette équation donne :

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x (t-x)[u_n'' - 2u_n' + u_n + 1 - \int_0^1 su_n(s)ds]dt \quad (2.3)$$

et en utilisant les valeurs initiales on trouve $u_0(x) = x+1$. Alors nous avons les approximations successives suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0(x) = x + 1 \\ u_1(x) = -\frac{x^3}{6} + \frac{5x^2}{12} + x + 1 \\ u_2(x) = \frac{x^5}{120} - \frac{17x^4}{144} + \frac{x^3}{9} + \frac{217x^2}{480} + x + 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n(x) = \dots\dots\dots \end{array} \right. \quad (2.4)$$

La solution exacte de l'équation est donnée comme suite :

x	u_{ex}	u_n	$ u_{ex} - u_n $
0	1.0000000000000000	1.0000000000000000	0
0.1	1.10517091807565	1.10517091807565	$4.440892098500626e - 016$
0.2	1.22140275816017	1.22140275816017	$2.220446049250313e - 016$
0.3	1.34985880757600	1.34985880757600	$2.220446049250313e - 016$
0.4	1.49182469764127	1.49182469764127	0
0.5	1.64872127070013	1.64872127070013	$4.440892098500626e - 016$
0.6	1.82211880039051	1.82211880039051	$2.220446049250313e - 016$
0.7	2.01375270747048	2.01375270747048	$8.881784197001252e - 016$
0.8	2.22554092849247	2.22554092849247	$4.440892098500626e - 016$
0.9	2.45960311115695	2.45960311115695	0
1	2.71828182845905	2.71828182845905	0

TABLE 2.3 – Comparaison de la solution exacte et approchée pour $n = 9$

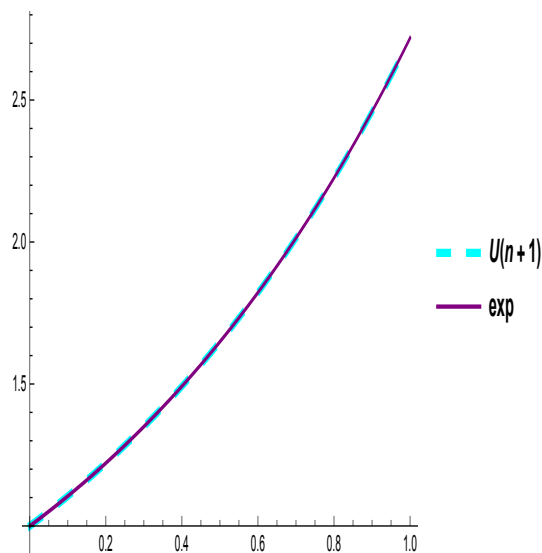


FIGURE 2.3 – Comparaison de la solution exacte et approchée pour $n = 3$

$$u_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \dots = e^x$$

La figure (2.3) et le tableau (2.3) illustrent la précision de la solution approchée pour $n = 9$.

les solutions numériques et analytiques sont presque semblables et les résultats sont très encourageants. (Figure 2.3)

Exemple 2.3.4 Soit l'équation intégrale-différentielle de Fréholm de deuxième ordre

$$u''(x) = \frac{11}{6} - \frac{4}{3}x + \int_{-1}^1 xsu'(s)ds + \int_0^1 su^2(s)ds, \quad -1 \leq x \leq 1$$

avec les conditions initiales suivantes : $u(-1) = 1$, $u'(-1) = -2$. La solution exacte du problème est $u(x) = x^2$.

En utilisant la méthode d'itération variationnelle présentée dans [9], La correction fonctionnelle selon VIM de cette équation donne :

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x (t-x) \left[u_n'' - \frac{11}{6} - \frac{4}{3}t - \int_0^x su_n(s)ds \right] dt \quad (2.5)$$

et en utilisant les valeurs initiales on trouve $u_0(x) = 0$. Alors nous avons les approximations successives suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0(x) = 0 \\ u_1(x) = \frac{11x^2}{12} - \frac{2x^3}{9} \\ u_2(x) = \frac{34861x^2}{36288} - \frac{x^3}{54} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n(x) = x^2 \end{array} \right. \quad (2.6)$$

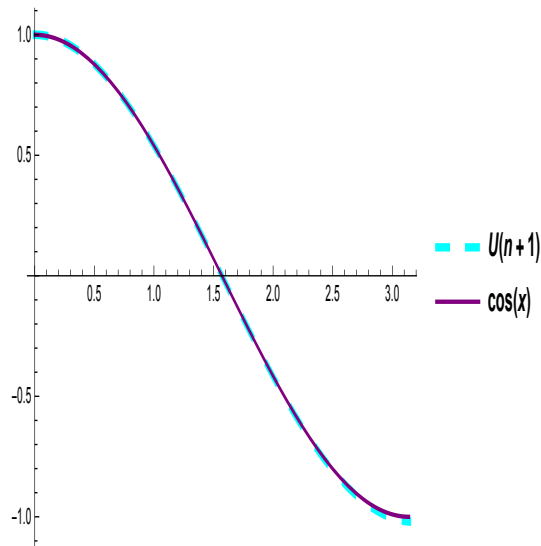
la solution exacte de l'équation est donnée comme suite :

$$u_n(x) = x^2$$

La figure (2.4) et le tableau (2.4) illustrent la précision de la solution approchée pour $n = 9$.

La figure (2.4) montre que la solution numérique et analytique sont presque semblable et les résultats sont très satisfaisants.

x	u_{ex}	u_n	$ u_{ex} - u_n $
0	1.0000000000000000	1.0000000000000000	0
0.1	1.10517091807565	1.10517091807565	$4.440892098500626e - 016$
0.2	1.22140275816017	1.22140275816017	$2.220446049250313e - 016$
0.3	1.34985880757600	1.34985880757600	$2.220446049250313e - 016$
0.4	1.49182469764127	1.49182469764127	0
0.5	1.64872127070013	1.64872127070013	$4.440892098500626e - 016$
0.6	1.82211880039051	1.82211880039051	$2.220446049250313e - 016$
0.7	2.01375270747048	2.01375270747048	$8.881784197001252e - 016$
0.8	2.22554092849247	2.22554092849247	$4.440892098500626e - 016$
0.9	2.45960311115695	2.45960311115695	0
1	2.71828182845905	2.71828182845905	0

 TABLE 2.4 – Comparaison de la solution exacte et approchée pour $n = 9$

 FIGURE 2.4 – Comparaison de la solution exacte et approchée pour $n = 9$

Exemple 2.3.5 On considère l'équation intégro-différentielle non linéaire de Volterra-Fredholm :

$$u^{(4)}(x) - 3xu^{(3)}(x) - u(x) = \frac{1}{4}e^{2x} - \sinh 2 - \frac{1}{2}xe^{2x} - 3xe^x - \frac{1}{4} + \int_{-1}^1 u''(s)u(s)ds + \int_0^x su^2(s)ds$$

avec les conditions initiales : $u(0) = 1$, $u'(0) = 1$, $u''(0) = 1$, $u^{(3)}(0) = 1$.

La solution exacte du problème est $u(x) = e^x$.

La correction fonctionnelle selon VIM de cette équation donne :

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \frac{(t-x)}{6} [u_n^{(4)}(t) - 3tu_n^{(3)}(t) - u_n(t) - \frac{1}{4}e^{2t} + \sinh 2 + \frac{1}{2}xe^{2t} + 3te^t + \frac{1}{4} - \int_{-1}^1 u''(s)u(s)ds - \int_0^t su^2(s)ds] dt \quad (2.8)$$

x	u_{ex}	u_n	$ u_{ex} - u_n $
0	1	1	0
0.1	1.10517	1.10517	1.82608E - 06
0.2	1.2214	1.22137	0.0000289626
0.3	1.34986	1.34971	0.000148585
0.4	1.49182	1.49135	0.000478659
0.5	1.64872	1.64752	0.00119976
0.6	1.82212	1.81955	0.00257227
0.7	2.01375	2.00878	0.0049683
0.8	2.22554	2.21662	0.00891629
0.9	2.4596	2.44443	0.0151719
1	e	2.69346	0.0248211

TABLE 2.5 – Comparaison de la solution exacte et approchée pour $n = 3$

et en utilisant les valeurs initiales on trouve $u_0(x) = \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{2} x^3 + x + 1$. Alors nous avons les approximations successives suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^3 + x + 1 \\ u_1(x) = 0.0833333 \left(\begin{array}{l} e^x(144. - 36.x) + e^{2.x}(0.9375 - 0.375x) + 3.507295173962345 \times 10^{-6}x^{12} \\ +0.000036075x^{11} + 0.000231481x^{10} + 0.0010582x^9 + 0.00357143x^8 \\ +0.0119048x^7 + 0.0333333x^6 \\ +0.4x^5 + 0.0949031x^4 - 6.5x^3 - 37.125x^2 - 109.5x - 144.938 \end{array} \right) \\ + \frac{x^3}{6} + 0.5x^2 + x + 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n(x) = \dots \end{array} \right. \quad (2.9)$$

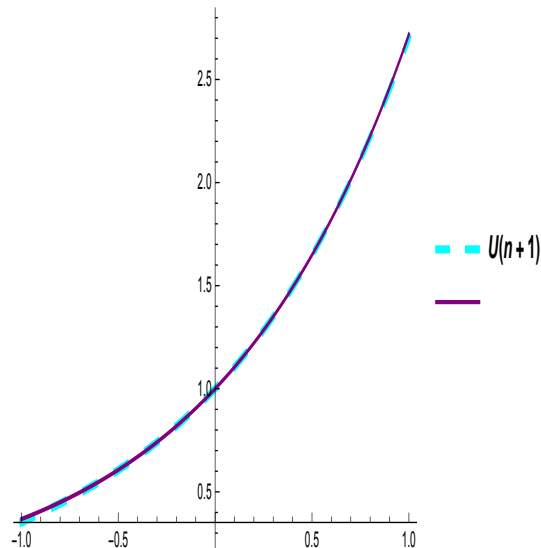
L'utilisation de développement de Taylor de e^x , e^{2x} , e^{3x} ,... au voisinage de 0, la solution exacte de l'équation est donnée comme suite :

la solution exacte de l'équation est donnée comme suite :

$$u_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \dots = e^x$$

La figure et le tableau (Tab 3) illustrent la précision de la solution approchée pour $n = 3$.

La figure (2.5) montre que les résultat est relativement moins bon. Les résultats précédents

FIGURE 2.5 – Comparaison de la solution exacte et approchée pour $n = 3$

peuvent être amélioré en faisant tendre n très grand.

Commentaire.

A travers les résultats numériques obtenues dans les exemples précédant, nous pouvons conclure que ces résultats calculés par cette approche montre que cet algorithme est plus efficace relativement au nombre d'itérations.

2.4 Méthode des perturbation de l'homotopie HPM

La méthode des perturbations homotopiques a été développée par JI-HUAN HE au début des années 1999, elle a été utilisée par beaucoup des chercheurs pour résoudre plusieurs des équations linéaire et non-linéaire pour ce la elle a été prouvée comme l'une des plus importantes techniques des résolutions des nombreuses équations integro-différentielles, avant de donner le principe de cette méthode avec des exemples illustré, on présente un petit peu d'Homotopie.

Définition 2.4.1 Soit X et Y deux espace Topologique et f, g deux fonctions continues définies de $X \rightarrow Y$ sont dites homotopes dans Y , s'il existe une application continue $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ telle que :

$$\forall x \in X, H(x, 0) = f(x),$$

$$\forall x \in X, H(x, 1) = g(x),$$

on dit alors que H est une homotopie de f à g .

Autrement dit selon les valeurs du paramètre t , la fonction H passe continument de f pour $(t = 0)$ et $(t = 1)$ chaque valeur du paramètre t correspond à une fonction

$h_t : X \rightarrow Y, \quad x \rightarrow H(x, t)$ “situé entre f et g ”

une autre manière de le voir est que pour chaque $x \in X$, la fonction H définit un chemin $\eta_x : [0, 1] \rightarrow Y, \quad t \rightarrow H(x, t)$.

Exemple 2.4.1 On prend $X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}, f(x) = 1$ et $g(x) = -1$ alors f et g sont homotopes dans Y via la fonction continue $H(x, t) = 1 - 2t$.

(cette exemple est une cas exceptionnelle, car rien ne dépend de la variable x)

NB : la mention “homotope dans Y peut s'avérer très importante : en effet dans l'exemple précédent si on remplace $Y = \mathbb{R}$ par le sous-espace $Y' = \mathbb{R}^*$,

f et g sont toujours à valeurs dans Y' mais elles ne sont pas homotopes dans Y' , car il n'existe pas la fonction continue reliant -1 à 1 dans \mathbb{R}^* (voir le théorème des valeurs intermédiaires).

2.4.1 Description de la méthode HPM

Pour illustrer les idées fondamentales de perturbation homotopique nous considérons l'équation non-linéaire suivante :

$$N(u) + L(u) - f(s) = 0, \quad s \in \omega \quad (2.1)$$

avec les conditions aux limites

$$B(u, \frac{\partial u}{\partial \eta}) = 0, \quad s \in \Gamma \quad (2.2)$$

avec :

L : est un opérateur linéaire,

N : est un opérateur non linéaire,

$f(s)$: est une fonction connue,

Γ : est la frontière de domaine ω .

Remarque 2.4.1 On peut écrit : $N(u) + L(u) = A(u)$ c'est à dire (2.1) devient :

$$A(u) - f(s) = 0, \quad s \in \omega \quad (2.3)$$

Avec la technique de l'homotopie, nous construisons une homotopie : $\mathfrak{D}(s; p) : \omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait :

$$H(\mathfrak{D}; p) = (1 - p)[L(\mathfrak{D}) - L(u_0)] + p[A(\mathfrak{D}) - f(s)] = 0, \quad p \in [0, 1] \text{ et } s \in \omega \quad (2.4)$$

par une simplification nous trouvons cette relation :

$$H(\vartheta; p) = L(\vartheta) - L(u_0) + pL(u_0) + p[N(\vartheta) - f(s)] = 0 \quad (2.5)$$

où

$$L(\vartheta) = L(u_0) + p[f(s) - L(u_0) - N(\vartheta)] \quad (2.6)$$

Tant que $p \in [0, 1]$ est une paramètre et u_0 est une approximation initiale de (2.1) qui satisfait les conditions aux limites.

Evidemment, des équations (2.5) et (2.6) on a :

$$\begin{cases} H(\vartheta; 0) = L(\vartheta) - L(u_0) = 0 \\ H(\vartheta; 1) = A(\vartheta) - f(s) = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

Selon la méthode de perturbation homotopique, nous pouvons d'abord employer le paramètre p comme petite paramètre et assumer cela la solution d'équation (2.6) peut être écrit comme une série de puissance p .

En faisant varier p de 0 à 1, on change $\vartheta(s, p)$ de $u_0(s)$ à $u(s)$, en topologie, cela s'appelle la déformation, $L(\vartheta) - L(u_0)$ et $f(s) - L(u_0) - N(\vartheta)$ sont homotopie.

le principe de base et que la solution des équations (2.5) et (2.6) peuvent être écrites sous forme de série :

$$\vartheta = \vartheta_0 + p\vartheta_1 + p^2\vartheta_2 + \dots \quad (2.8)$$

Si $p = 1$, la solution approximative de (2.3) sera obtenu comme suit :

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} (\vartheta_0 + p\vartheta_1 + p^2\vartheta_2 + \dots) = \sum_{i=0}^{+\infty} \vartheta_i \quad (2.9)$$

2.4.2 Application de la méthode HPM pour un EDO d'ordre un

Considérons l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\begin{cases} u' = -u^2 & \text{avec } s \geq 0, s \in \omega \\ u(0) = 1 \end{cases} \quad (2.10)$$

D'ou, la solution exacte est de cette forme : $u(s) = \frac{1}{1+s}$;

Selon la méthode HPM, on peut construire l'homotopie suivant : $u : \omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$(1-p)(\vartheta' - u_0') + p(\vartheta' + \vartheta^2) = 0, \quad p \in [0, 1] \quad (2.11)$$

Avec $u_0 = 1$, la solution de(2.10) peuvent être écrit sous forme d'une série :

$$\vartheta = \vartheta_0 + p\vartheta_1 + p^2\vartheta_2 + \dots \quad (2.12)$$

En remplaçant (2.12) dans (2.11) et identifiant les termes avec ceux de mêmes puissances de p , on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} p^0 : \vartheta'_0 - u'_0 = 0; \\ p^1 : \vartheta'_1 = -u_0 - \vartheta_0^2 ; \vartheta_1(0) = 0; \\ p^2 : \vartheta'_2 = -2\vartheta_0\vartheta_1 ; \vartheta_2(0) = 0; \\ \vdots \end{array} \right.$$

Par conséquent, les premiers composant de la solution sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} p^0 : \vartheta_0 = 1; \\ p^1 : \vartheta_1 = -s; \\ p^2 : \vartheta_2 = s^2; \\ \vdots \end{array} \right.$$

Donc la solution de l'équation (2.10) est : $u = \lim_{p \rightarrow 1} \vartheta = (\vartheta_0 + \vartheta_1 + \vartheta_2 + \dots) = 1 - s + s^2 + \dots$

2.4.3 Application de HPM pour les équations intégral-différentielles E-I-D

Description de la méthode

On a l'équation intégral-différentielle de Volterra suivante :

$$\sum_{i=0}^n a_i(x)u^{(i)}(x) - f(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^x k_i(x,s,u(s),u^{(i)}(s))ds = 0, \quad a \leq a_i \leq x \leq b \quad (2.13)$$

Avec les condition :

$$B(u, \frac{\partial u}{\partial \eta}) = 0 \quad (2.14)$$

où :

$$u(a) = \mu_0, u'(a) = \mu_1, \dots, u^{(n-1)}(a) = \mu_{n-1} \quad \text{et} \quad u(b) = \mu_0, u'(b) = \mu_1, \dots, u^{(n-1)}(b) = \mu_{n-1}$$

Avec la solution exacte est $u(x) = g(x)$, pour illustrée la méthode de perturbation homotopique on a les étapes suivantes :

Donc avec la technique de HPM nous peut définir l'homotopie $H(\vartheta, p)$ comme suivante :

$$H(\vartheta, p) = (1-p) \left[\sum_{i=0}^n a_i(x)\vartheta^{(i)}(x) - \sum_{i=0}^n a_i(x)u_0^{(i)}(x) \right] \quad (2.15)$$

$$+ p \left[\sum_{i=0}^n a_i(x)\vartheta^{(i)}(x) + \sum_{i=0}^{n-1} \int_a^x k_i(x,s)\vartheta(s), \vartheta^{(i)}(s)ds - f(s) \right] \quad (2.16)$$

$$\text{avec } p \in [0, 1] \text{ et } x \in \omega \quad (2.17)$$

Par une simplification nous trouvons cette relation :

$$H(\vartheta; p) = \sum_{i=0}^n a_i(x)\vartheta^{(i)}(x) - \sum_{i=0}^n a_i(x)u_0^{(i)}(x) + p \sum_{i=0}^n a_i(x)u_0^{(i)}(x) + p \left[\sum_{i=0}^{n-1} \int_a^x k_i(x,s)\vartheta(s), \vartheta^{(i)}(s)ds - f(s) \right] = 0 \quad (2.18)$$

Tanque $p \in [0, 1]$ est une paramètre et u_0 est une approximation initiale de (2.13) qui satisfait les conditions aux limites, et d'après les équations (2.15) et (2.18)

on a :

$$\begin{cases} H(\vartheta; 0) = \sum_{i=0}^n a_i(x)\vartheta^{(i)}(x) - \sum_{i=0}^n a_i(x)u_0^{(i)}(x) = 0 \\ H(\vartheta; 1) = \sum_{i=0}^n a_i(x)\vartheta^{(i)}(x) + \sum_{i=0}^{n-1} \int_a^x k_i(x,s)\vartheta(s), \vartheta^{(i)}(s)ds - f(s) = 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

En faisant varier p de 0 à 1, on change $\vartheta(s, p)$ de $u_0(s)$ à $u(s)$, en topologie, cela s'appelle homotopie. D'après la méthode HPM, nous pouvons utiliser le paramètre p comme un petite paramètre, et supposé que les solutions des (2.15) et (2.18) peuvent être écrites sous forme de série :

$$\vartheta = \vartheta_0 + p\vartheta_1 + p^2\vartheta_2 + \dots \quad (2.20)$$

Pour $p = 1$, la solution approximative de (2.13) devient :

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} (\vartheta_0 + p\vartheta_1 + p^2\vartheta_2 + \dots)$$

Exemple 2.4.2 *Considérons l'équation intégro- différentielle de volterra suivante :*

$$u'(x) = 1 + \int_0^x u(s)u'(s)ds \quad \text{où} \quad x \in [0, 1] \quad (2.21)$$

Et la solution exact est $u(x) = \sqrt{2} \tan(\frac{\sqrt{2}}{2}x)$ donc avec HPM on a :

Etape 1

On mette $L(u) = u'(x) - g(x) = 0$, nous pouvons choisir une homoyopie convexe par :

$$H(\vartheta, p) = \vartheta'(x) - g(x) - p \int_0^x K(x, s, \vartheta(s), \vartheta'(s))ds = 0 \quad (2.22)$$

Et trace en permanence une courbe définie implicitement à partir d'un point de départ $H(\vartheta; 0)$ jusqu'à la fonction solution $H(\vartheta; 1)$.

Substituant (2.8) dans (2.22) et assimilant les termes avec des puissances identiques de p nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} p^0 : \vartheta'_0(x) = g(x) \Rightarrow \vartheta_0(x) = x; \\ p^1 : \vartheta'_1(x) = \int_0^x \vartheta_0(s)\vartheta'_0(s)ds \Rightarrow \vartheta_1(x) = \frac{1}{6}x^3; \\ p^2 : \vartheta'_2(x) = \int_0^x (\vartheta_0(s)\vartheta'_1(s) + \vartheta_1(s)\vartheta'_0(s))ds \Rightarrow \vartheta_2(x) = \frac{1}{30}x^5; \\ p^3 : \vartheta'_3(x) = \int_0^x (\vartheta_0(s)\vartheta'_2(s) + \vartheta_1(s)\vartheta'_1(s) + \vartheta_2(s)\vartheta'_0(s))ds \Rightarrow \vartheta_3(x) = \frac{1}{2520}x^7; \\ p^4 : \vartheta'_4(x) = \int_0^x (\vartheta_0(s)\vartheta'_3(s) + \vartheta_1(s)\vartheta'_2(s) + \vartheta_2(s)\vartheta'_1(s) + \vartheta_3(s)\vartheta'_0(s))ds \Rightarrow \vartheta_4(x) = \frac{1}{2520}x^7; \\ \vdots \end{array} \right.$$

et donc nous pouvons écrire la solution sous la forme :

$$u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \vartheta_n(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{30}x^5 + \frac{1}{2520}x^7 + \frac{29}{22680}x^9 + \frac{431}{2494800}x^{11} + \dots \quad (2.23)$$

pratiquement, on ne peut pas déterminier tous les termes de la séries $u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \vartheta_n(x)$, et nous utilisons donc une approximation de solution par les séries tronquée suivantes :

$$\phi_m = \sum_{n=0}^{m-1} \vartheta_n(x) \quad \text{avec} \quad u(x) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \phi_m(x) \quad (2.24)$$

Etape 2

Un homotopie peut construire comme suit :

$$H(\vartheta, p) = \vartheta'(x) - g(x) - \int_0^x \left[(1-p)\sqrt{2} \tan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right) (1 + \tan^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right) + p\vartheta(s)\vartheta'(s)) \right] ds = 0 \quad (2.25)$$

Substituant (2.8) dans (2.25) : et assimilant les termes avec des puissances identiques de p nous anons

$$\left\{ \begin{array}{l} p^0 : \vartheta'_0(x) = g(x) + \int_0^x \sqrt{2} \tan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right) (1 + \tan^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right)) ds = 1 + \tan^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) \Rightarrow \vartheta_0(x) = \sqrt{2} \tan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right); \\ p^1 : \vartheta'_1(x) = \int_0^x \left[-\sqrt{2} \tan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right) + (1 + \tan^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right)) + \vartheta_0(s)\vartheta'_0(s) \right] ds = 0 \Rightarrow \vartheta_1(x) = 0; \\ p^2 : \vartheta'_2(x) = \int_0^x (\vartheta_0(s)\vartheta'_1(s) + \vartheta_1(s)\vartheta'_0(s)) ds \Rightarrow \vartheta_2(x) = 0; \\ p^3 : \vartheta'_3(x) = \int_0^x (\vartheta_0(s)\vartheta'_2(s) + \vartheta_1(s)\vartheta'_1(s) + \vartheta_2(s)\vartheta'_0(s)) ds = 0 \Rightarrow \vartheta_3(x) = 0; \\ \vdots \\ \vartheta_4(x) = \vartheta_5(x) = \dots = 0 \end{array} \right.$$

On obtient :

$$u(x) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \phi_m(x) = \sqrt{2} \tan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)$$

Exemple 2.4.3 Considérons l'équation intégro- différentielle de volterra suivante :

$$u''(x) = \sinh(x) + \frac{1}{2} \cosh(x) \sinh(x) - \frac{1}{2}x - \int_0^x u^2(s)ds \quad (2.26)$$

Avec les condition suivante :

$$u(0) = 1, \quad u'(0) = 1. \quad (2.27)$$

Pour trouver la solution de (2.26) par la méthode HPM, nous construisons l'homotopie suivante :

$$H(\vartheta, p) = \vartheta''(x) - \sinh(x) - p \left(\frac{1}{2} \cosh(x) \sinh(x) - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x \right) + p \int_0^x \vartheta^2(s) ds = 0 \quad (2.28)$$

Et trace en permanence une courbe définie implicitement à partir d'un point de départ $H(\vartheta; 0)$ jusqu'à la fonction solution $H(\vartheta; 1)$

Substituant (2.8) dans (2.28) et assimilant les termes avec des puissances identiques de p nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} p^0 : \vartheta_0''(x) - \sinh(x) = 0 \Rightarrow \vartheta_0(x) = \sinh(x), \\ p^1 : \vartheta_1''(x) - \frac{1}{2} \cosh(x) \sinh(x) + \frac{1}{2}x + \int_0^x \vartheta_0^2(s) ds = 0 \Rightarrow \vartheta_1(x) = 0 \\ p^2 : \vartheta_2''(x) + \int_0^x (2\vartheta_0(s)\vartheta_1(s)) ds = 0 \Rightarrow \vartheta_2(x) = 0 \\ \vdots \\ \vartheta_3(x) = \vartheta_4(x) = \dots = 0 \end{array} \right.$$

On obtient

$$u(x) = \vartheta_0(x) = \sinh(x)$$

Exemple 2.4.4 Considérons l'équation intégro- différentielle de Fredholm suivante :

$$u'(x) = 1 - e^{-1} + \int_0^1 e^{u'(s)} ds \quad \text{où} \quad x \in [0, 1] \quad (2.29)$$

La solution exact est $u(x) = x$ donc avec HPM on a :

Etape 1

Généralement nous pouvons choisir une homoyopie par :

$$H(\vartheta, p) = \vartheta'(x) - g(x) - p \int_0^1 K(x, s, \vartheta(s), \vartheta'(s)) ds = 0 \quad (2.30)$$

Et trace en permanence une courbe définie implicitement à partir d'un point de départ $H(\vartheta; 0)$ jusqu'à la fonction solution $H(\vartheta; 1)$

Substituant (2.8) dans (2.30) et assimilant les termes avec des puissances identiques de p nous avons :

$$\begin{array}{l} p^0 : \vartheta_0'(x) = g(x) \Rightarrow \vartheta_0(x) = (1 - e^{-1})x ; \\ p^1 : \vartheta_1'(x) = \int_0^1 e^{-\vartheta_0'(s)} ds \Rightarrow \vartheta_1(x) = e^{-(1-e^{-1})}x ; \\ p^2 : \vartheta_2'(x) = \int_0^1 (-\vartheta_1'(s)e^{-\vartheta_0'(s)}) ds \Rightarrow \vartheta_2(x) = -e^{-2(1-e^{-1})}x ; \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 p^3 : \vartheta_3'(x) &= \int_0^1 (-\vartheta_2'(s) + \frac{1}{2!}\vartheta_1'^2(s))e^{-\vartheta_0'(s)}ds \Rightarrow \vartheta_3(x) = \frac{3}{2}e^{-3(1-e^{-1})}x ; \\
 p^4 : \vartheta_4'(x) &= -\int_0^1 (\frac{-1}{3!}\vartheta_1'^3(s) + \vartheta_1'(s)\vartheta_2'(s) - \vartheta_3'(s))e^{-\vartheta_0'(s)}ds \\
 &\Rightarrow \vartheta_4(x) = -\frac{8}{3}e^{-4(1-e^{-1})}x ; \\
 p^5 : \vartheta_5'(x) &= \int_0^1 (-\vartheta_4'(s) + \frac{1}{2!}\vartheta_2'^2(s) - \frac{1}{2!}\vartheta_1'^2(s)\vartheta_2'(s) + \frac{1}{4!}\vartheta_1'^4(s))e^{-\vartheta_0'(s)}ds \\
 &\Rightarrow \vartheta_5(x) = \frac{8}{3}e^{-4(1-e^{-1})}x ;
 \end{aligned}$$

et donc nous pouvons écrire la solution sous la forme :

$$u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \vartheta_n(x) = (1 - e^{-1})x + (e^{-(1-e^{-1})} - e^{-2(1-e^{-1})} + \frac{3}{2}e^{-3(1-e^{-1})} - \frac{8}{3}e^{-4(1-e^{-1})} + \dots)x \quad (2.31)$$

Etape 2

Un homotopie peut construire comme suit :

$$H(\vartheta, p) = \vartheta'(x) - 1 + e^{-1} - \int_0^1 [(1-p)e^{-1} + pe^{-\vartheta'(s)}]ds = 0 \quad (2.32)$$

Substituant (2.8) dans (2.32) et assimilant les termes avec des puissances identiques de p nous avons :

$$\begin{aligned}
 p^0 : \vartheta_0'(x) &= g(x) - \int_0^1 e^{-1}ds = 1 \Rightarrow \vartheta_0(x) = x, \\
 p^1 : \vartheta_1'(x) &= \int_0^1 (-e^{-1} + e^{-\vartheta_0'(s)})ds = 0 \Rightarrow \vartheta_1(x) = 0 \\
 p^2 : \vartheta_2'(x) &= \int_0^1 (-\vartheta_1'(s)e^{\vartheta_0'(s)})ds = 0 \Rightarrow \vartheta_2(x) = 0, \\
 p^3 : \vartheta_3'(x) &= \int_0^1 (-\vartheta_2'(s) + \frac{1}{2!}\vartheta_1'^2(s))e^{-\vartheta_0'(s)}ds = 0 \Rightarrow \vartheta_3(x) = 0,
 \end{aligned}$$

⋮

Et en répétant cette approche nous obtenons : $\vartheta_4(x) = \vartheta_5(x) = \dots = 0$, donc $u(x) = x$.

2.4.4 Application de la méthode (HPM) pour l'équation intégrale-différentielle non-linéaire de (Volterra-Fredholm)

On a l' équation intégrale-différentielle de Volterra-Fredholm suivante :

$$\sum_{i=0}^n a_i(x)u^{(i)}(x) = f(x) + \alpha_1 \int_a^x k_1(x,s)[u(s)]^\beta ds + \alpha_2 \int_a^b k_2(x,s)[u^\gamma(s)]ds = 0 \quad (2.33)$$

Avec : $a_i(x)(i = 0, \dots, n)$, $f(x)$, $k_1(x,s)$, $k_2(x,s)$ sont des fonctions ; $a \leq x$ et $s \leq b$ et a, b, α_1, α_2 sont des constantes, β et γ sont positive.

Description de la méthode

Pour illustrée la méthde de perturbation homotopique nous considérons (2.33) comme suit :

$$l(u) = \sum_{i=0}^n a_i(x)u^{(i)}(x) - f(x) - \alpha_1 \int_a^x k_1(x,s)[u(s)]^\beta ds - \alpha_2 \int_a^b k_2(x,s)[u^\gamma(s)]ds \quad (2.34)$$

Avec les conditions aux limites

$$B(u, \frac{\partial u}{\partial \eta}) = 0, \quad (2.35)$$

Et la solution exacte $u(x) = g(x)$. Avec la Technique de l'homotopie, nous construisons une homotopie suivante :

$$H(u, p) = (1 - p)F(u) + pl(u) \quad (2.36)$$

Avec $F(u)$ est un opérateur fonctionnelle avec la solution connue $u_0(x)$ qui satisfis les condition aux limites, donc on a :

$$H(u, 0) = F(u), \quad (2.37)$$

$$H(u, 1) = l(u),$$

En faisant varier p de 0 à 1, on change $\vartheta(s, p)$ de $u_0(s)$ à $u(s)$, en topologie, cela s'appelle homotopie. D'après la méthode HPM, nous pouvons utiliser le paramètre p comme un petite paramètre, et supposé que les solutions des (2.36) peuvent être écrites sous forme de série :

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots \quad (2.38)$$

Pour $p = 1$, la solution approchée de l'équation (2.33) devient :

$$g = \lim_{p \rightarrow 1} u = (u_0 + u_1 + u_2 + \dots) \quad (2.39)$$

Exemple 2.4.5 *Considérons l'équation intégro- différentielle de Volterra-Fredholm non- li- naire suivante :*

$$u'(x) + 2xu(x) = f(x) + \int_0^x (x+s)[u(s)]^3 ds + \int_0^1 (x-s)u(s)ds, \quad (2.40)$$

Avec $f(x) = \left(-\frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right)e^{3x} + (2x+1)e^x + \left(\frac{4}{3} - e\right)x + \frac{8}{9}$, avec la condition suivante : $u(0) = 1$, et la solution exact est donnée par : $u(x) = e^x$.

Nous construisons l'homotopie suivante :

$$u'(x) + (1-p)2xe^x + p2xu(x)$$

$$-f(x) - \int_0^1 (1-p)(x+s)[e^s]^3 + p(x+1)[u(s)]^3 ds - \int_0^x (1-p)(x-s)e^s + p(x-1)u(s)ds = 0. \quad (2.41)$$

Substituant (2.8) dans (2.41) et assimilant les termes avec des puissances identiques de p nous avons :

$$p^0 : u'_0(x) + 2xe^x = f(x) + \int_0^x (x+s)[e^s]^3 ds + \int_0^1 (x-s)e^s ds = 0 \\ \Rightarrow u_0(x) = e^x.$$

$$p^1 : u'_1(x) + 2xe^x + 2xu_0(x) = \int_0^x -(x+s)[e^s]^3 + (x+s)[u_0(s)]^3 ds \\ + \int_0^1 -(x-s)e^s + (x-s)u_0(s)ds = 0 \Rightarrow u_1(x) = 0.$$

$$p^2 : u'_2(x) + 2xu_1(x) = \int_0^x (x+s)[u_1(s)]^3 ds + \int_0^1 (x-s)u_1(s)ds = 0 \\ \Rightarrow u_2(x) = 0.$$

$$p^3 : u'_3(x) + 2xu_2(x) = \int_0^x (x+s)[u_2(s)]^3 ds + \int_0^1 (x-s)u_2(s)ds = 0 \\ \Rightarrow u_3(x) = 0.$$

Et en répétant cette approche nous obtenons : $u_4(x) = u_5(x) = \dots = 0$. Alors la solution approximative est donnée de cette forme :

$$u(x) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i = e^x + 0 + 0 + \dots$$

Donc :

$$u(x) = e^x.$$

C'est la solution exacte de cette exemple.

2.5 Conclusion

Dans ce travail, Nous avons défini deux méthodes numériques pour la résolution des équations intégro-différentielles la première est connue sous le nom la méthode d'itération variationnelle (VIM), cette méthode fournit des solutions approchées sous la forme d'une série convergente. Cette méthode est simple, facile à utiliser, efficaces et très précises pour la résolution numérique des équations intégro-différentielles linéaires ou non linéaires. Les résultats numériques obtenus démontrent la fiabilité de cette méthode d'un point de vue numérique et qu'elle moins coûteuse de point de vue numérique que les méthodes traditionnelles.

La deuxième méthode est la méthode de perturbation d'homotopie (HPM), cette méthode fournit des séries de fonctions qui converge rapidement vers la solution exacte (quand elle existe).



Bibliographie

- [1] S. Abbasbandy, E. Shivanian, *Application of the variational iteration method for system of nonlinear Volterra's integro-differential equations*, Mathematical and Computational Applications, Vol. 14, No. 2, pp. 147-158, (2009).
- [2] F. Bachiri, *Théorèmes du point fixe et Applications aux équations intégrales*, mémoire de master, université M'sila 2010.
- [3] H. Brunner, *Collocation method for Volterra integral and related functional equations*, Cambridge Monograph on Applied and Computational Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, MA, (2004).
- [4] S. Benyoussef, *Résolution numérique des équations intégro-différentielles de Fredholm*, mémoire de magistère, Université de M'sila 2010.
- [5] H. Brunner, A. Pedas, and G. Vainikko, *Piecewise Polynomial Collocation Methods for Linear Volterra Integro-Differential Equations with Weakly Singular Kernels*, SIAM Journal on Numerical Analysis, (2001), Vol. 39, No. 3 : pp. 957-982.
- [6] W.S. Chen, W. Lin, *Galerkin trigonometric wavelet methods for the natural boundary integral equations*. Appl. Math. Comput, (2005), 121, 7992.
- [7] K. Fernane, *Numerical solution of the general Volterra nth-order integro-differential equations via variational iteration method*, Asian-European Journal of Mathematics Vol. 12, No. 1 (2020) 2050042 (15 pages).
- [8] M. Ghasemi, M. Tavassoli Kajani and E. Babolian, *Numerical solutions of the nonlinear integro-differential equations : Wavelet-Galerkin method and homotopy perturbation method*, Appl. Math. Comput., 188 (2007), pp. 450-455.
- [9] JH. He, *Variational iteration method a kind of non-linear analytical technique : some examples*, International Journal of Non-Linear Mechanics 34 (1999) 699-708.

- [10] JH. JH, Variational iteration method - Some recent results and new interpretations, J. Computat. Appl. Math., (2007), 207(1) 3-17.
- [11] JH. He, XH. Wu, Variational iteration method : New development and applications, Comput. Meth. Appl. Mech. Eng, (2007),54(7-8) : 881-894.
- [12] H. Jafari, M. Saeidy and D. Baleanu, *The variational iteration method for solving n-th order fuzzy differential equations*, Central European Journal of Physics, Cent. Eur. J. Phys. o 10(1) (2012) 76-85, DOI : 10.2478/s11534-011-0083-7.
- [13] D. Khojasteh Salkuyeh, *Convergence of the variational iteration method for solving linear systems of ODEs with constant coefficients*, Computers and Mathematics with Applications 56 (2008) 2027-2033.
- [14] R. Lamri, Résolution des équations integro-différentielles de type Volterra, mémoire de magistère, université de M'sila 2012.
- [15] U. Lepik, E. Tamme, *Solution of nonlinear Fredholm integral equations via the Haar wavelet method*, Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math., (2007), 56, 1, 17-27.
- [16] U. Lepik, *Haar wavelet method for nonlinear integro-differential equations*, Applied Mathematics and Computation 176 (2006) 324-333.
- [17] Y. Mahmoudi, *Taylor polynomial solution of non-linear Volterra-Fredholm integral equation*, International Journal of Computer Mathematics Volume 82, (2005) - Issue 7.
- [18] J. P. Mahmoud, M.Y. Rahimi-Ardebili and S. Shahmorad, *Numerical solution of Volterra integro-differential equations by the Tau method with the Chebyshev and Legendre bases*, Appl. Math. Comput , 170 (2005) :314-338.
- [19] M. Moussai, Résolution des équations intégro-défférentielles,Thèse de doctorat, université de M'sila 2018.
- [20] J. Rashidinia, M. Zarebnia, *Solution of a Volterra integral equation by the Sinc-collocation method* : Journal of Computational and Applied Mathematics Volume 206, Issue 2, 15 September (2007), Pages 801-813.
- [21] A. Rahmoune, équations intégrales linéaires et non linéaires, Analyse et techniques de résolution.
- [22] D. Slota, A. Zielonka, *A new application of He's variational iteration method for the solution of the one-phase Stefan problem*,Computers and Mathematics with Applications 58 (2009) 2489-2494.
- [23] M. Tatari, M. Dehghan , *On the convergence of He's variational iteration method*, Journal of Computational and Applied Mathematics 207 (2007) 121-128.

- [24] A. M. Wazwaz, *The combined Laplace transform-Adomian decomposition method for handling nonlinear Volterra integro-differential equations* , Applied Mathematics and Computation, Volume 216 Issue 4, April, (2010) Pages 1304-1309 .
- [25] X. Shang, D. Han, *Application of the variational iteration method for solving nth-order integro-differential equations*, Journal of Computational and Applied Mathematics 234 (2010) 1442-1447.
- [26] M. Zellal, *Résolution des équations différentielles par les méthodes variationnelles et homotopiques*, Mémoire de Magistère, Université D'oran 2014.