République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : **EDP Et Analyse numérique**

Par :

HADDADA Fatima Zohra Et **MESSAI Wissam**

Intitulé

Contrôlabilité stochastique avec retard

Dirigé par :

BENCHAABANE Abbes

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. BOUHADJAR Slimane	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. BENCHAABANE Abbes	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. SEKRANI Soumia	Univ-Guelma

Session Juillet 2019

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

A ceux qui m'ont appris le succès et la patience

A ceux qui lui manquent face aux difficultés

Et ne l'a pas laissé tomber pour montrer sa tendresse

Chèr père

Et à ceux qui font la course aux mots pour s'exprimer

Qui m'a appris et a souffert des difficultés pour le premier à ce que je suis dedans

Quand tu t'occupes des soucis, je nage dans la mer de la tendresse pour soulager ma douleur

Ma chère mère

À l'homme qui a servi de père et de frère

Cher frère Abd elmadjid

A celui que j'aime beaucoup et qui m'a soutenue tout au long de ce projet :

mon mari Moussa

À mes frères et sœurs

À ma famille et à la famille de mon mari

Aux petits-enfants bien-aimés

À mes professeurs, collègues et collègues à tous ceux qui m'ont appris les caractères

Je dédie cette recherche humble, demandant au Tout-Puissant de trouver l'acceptation et le succès.

Et à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin pour que ce

projet soit possible, je vous dis merci.

« *Mme Fatima Zohra* »

Dédicaces

Je dédie ce travail de longues années d'étude à :

La lumière de ma vie, au cœur le plus tendre et le plus doux, à celle qui s'est tellement sacrifiée pour me voir toujours meilleure :

Ma très Chère Mère

A l'être le plus cher à mon cœur, à celui qui m'a toujours guidée par ses conseils et qui m'a encouragée à poursuivre mes études :

Chèr Père

A mon fiancé ***Brahim***, signe d'amour, de respect et surtout de courage qui était toujours patient avec moi et qui a su par sa tendresse et son sacrifice me mettre sur les bonnes rails

A Mes chers frères et sœurs

« Melle. Messai Wissam »

Remerciements

قـال رسول الله صلى الله عليه و سلم :

"من لم يشكر الناس لم يشكر الله"

صدق رسول الله صلى الله عليه و سلم

Tout d'abord, nous remercions le Dieu, notre créateur de nos avoir donné les forces, la volonté et le courage afin d'accomplir ce travail modeste.

Nous adressons le grand remerciement à notre encadreur Benchaabane Abbes qui a proposé le thème de ce mémoire, pour ses conseils et ses dirigés du début à la fin de ce travail.

Nous tenons également à remercier messieurs les membres de jury pour l'honneur qu'ils nos ont fait en acceptant de siéger à notre soutenance, tout particulièrement :

Mr Bouhadjar.S pour nous avoir fait l'honneur de présider le jury de cette mémoire.

Nous souhaitons exprimer notre gratitude à Mme. Sekrani.S pour avoir faire de lecteur notre mémoire, aller l'examiner et il peut évaluer cette mémoire.

Nous vous remercions pour l'intérêt que vous avez porté à ce travail et pour vos précieux conseils et remarques.

Finalement, nous tenons à exprimer notre profonde gratitude à nos familles qui nous ont toujours soutenues et à tout ce qui participe de réaliser ce mémoire. Ainsi que l'ensemble des enseignants qui ont contribué à notre formation.

الملخص:

تتطرق هذه الأطروحة الى دراسة قابلية التحكم الكامل للنظام العشوائى شبه الخطي بالتأخير مع فرضية ان يكون النظام الخطي المقابل قابلاً للتحكم الكامل. يتم إنشاء وظيفة التحكم لهذا النظام بشكل مناسب باستخدام مشغل التحكم ، وبهذه الوظيفة التحكمية ، يتم وضع شروط كافية لإمكانية التحكم في المشكلة المقترحة في البعد المحدود. يتم الحصول على النتائج باستخدام نظرية Banach ذات النقطة الثابتة. وأخيرًا ، يتم تقديم مثال لتوضيح تطبيق النتائج التي تم الحصول عليها.

Résumé :

Ce mémoire consiste à étudier la contrôlabilité complète du système stochastique semi-linéaire avec retard dans l'hypothèse où le système linéaire correspondant est complètement contrôlable. La fonction de contrôle de ce système est construite de manière appropriée en utilisant l'opérateur de contrôle Avec cette fonction de contrôle, les conditions suffisantes pour la contrôlabilité du problème proposé en dimension finie est établie. Les résultats sont obtenu en utilisant le théorème à points fixes de Banach. Enfin, un exemple est fourni pour illustrer l'application des résultats obtenus.

Table des matières

Notation

Certaines notations seront utilisées tout au long de ce mémoire que nous listons ci-dessous :

- $\mathbb{R}$: **l'ensemble des nombres réels.**
- $\mathbb{R}^n$: **espace vectoriel de dimension** n **sur** $\mathbb{R}$.
- T : **réel positif.**
- Ω : **ouvert non vide de** $\mathbb{R}^n$ **de frontière** $\partial\Omega$ **de classe** $\mathcal{C}^2$.
- $\mathcal{L}(E,F)$: **ensemble des applications linéaires continues définies sur un espace vectoriel** E **et à valeurs dans un autre espace vectoriel** F.
- $\mathcal{L}(E)$ **l'espace de tous les applications linéaires continues définies de** E **dans lui même .**
- $\mathcal{E}'$ **Espace dual de** E.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: **ensemble des matrices carrées réelles de taille** n.
- $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$: **ensemble des matrices réelles à** n **lignes et** m **colonnes.**
- A^* : **L'adjoint d'un opérateur** A.
- $L^p(\Omega, X)$: **ensemble des applications mesurables de** Ω **dans** X **de puissance** p **intégrable.**
- $L^p(\Omega, X)$: **ensemble des applications mesurables bornées de** Ω **dans** X.
- $L^p(\Omega) = L^p(\Omega, \mathbb{C})$.
- **L'espace de probabilité** $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
- $(\mathcal{F}_t / t \in [0,T])$ **le filtration engendré par** $(\omega(s), 0 \leq s \leq t)$.
- $L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{R}^n)$ **l'espace de Hilbert de toutes les variables** $\mathcal{F}_T$**-mesurables quarrée intégrables à valeurs dans** $\mathbb{R}^n$.
- $L_p^{\mathcal{F}}([0,T], \mathbb{R}^n)$ **est l'espace de Hilbert de tous les processus quarré intégrables et** $\mathcal{F}_t$**-mesurables à valeurs dans** $\mathbb{R}^m$.
- H_2 **l'espace de Banach de tous les processus quarré intégrables et** $\mathcal{F}_t$ **-adapté** $\varphi(t)$**, muni de la norme**
$$\|\varphi\|^2 = \sup_{t\in[0,T]} \mathbf{E}\|\varphi(t)\|^2.$$
- $U_{ad} = L_2^{\mathcal{F}}([0,T], \mathbb{R}^m)$
- $\phi(t) = \exp(At)$.

Introduction

La notion de contrôlabilité est d'une grande importance dans la théorie de contrôle ; c'est une propriété de base dans l'analyse des systèmes dynamiques. De nombreux problèmes fondamentaux de la théorie de contrôle (stabilité et stabilisation, contrôle optimal) ne peuvent être résolus que sous l'hypothèse que le système soit contrôlable. Un système de contrôle est un système dynamique sur lequel on peut agir au moyen d'un contrôle ou d'une commande. La contrôlabilité fait partie des propriétés dites structurales qui caractérisent les systèmes, et éventuellement permettent de les classiffier, par leurs propriétés algébriques et géométrique. Elle est indispensable dans les applications pour qu'un système puisse être convenablement commandé et permet de construire des lois de commande de façon effective. Le problème de contrôlabilité est celui de savoir si, en partant d'un état donné arbitraire, on peut atteindre, à l'aide d'un contrôle dépendant du temps bien choisi, un état désiré, arbitraire aussi.
L'étude de la contrôlabilité a commencé le début des années soixante, quand la théorie de contrôlabilité était basée sur la description sous forme d'espace d'état sous des systèmes de contrôle linéaires invariants dans le temps et variables dans le temps ont été mis au points. De plus, Pour les systèmes dynamiques déterministes linéaires et non linéaires, il existe plusieurs différentes conditions de nécessité et de suffisance pour la contrôlabilité globale et locale.
Pour les systèmes de contrôle stochastique linéaires et non linéaires, la situation est un peut délicate. Jusqu'à maintenant, le problème de contrôlabilité des systèmes dynamiques linéaires a été largement étudié. Néanmoins ce n'est pas le cas pour les systèmes non-linéaires et semi-linéaires, en particulier, les systèmes avec des retards dans le contrôle et avec des contrôles limités.
Rappelons que les systèmes de contrôle dynamiques semi-linéaires retardés en contrôle doivent contenir différents types de retards, à la fois dans les parties linéaires pures et non-linéaires pures dans les équations différentielles d'état.
La théorie de contrôle classique est basé sur approches déterministes. Cependant, l'incertitude est la caractéristique fondamentale de plusieurs systèmes dynamiques réels. La théorie des systèmes dynamiques stochastiques est maintenant un sujet de recherche bien établi, qui est encore en développement intensif et offre de nombreux problèmes ouverts dans plusieurs domaines d'application, problèmes de l'économie, problèmes de décision, la physique statistique,l'épidémiologie, théorie de risque, les

mathématique de l'assurance, la théorie de fiabilité et autres méthodes basées sur des équations stochastiques. la modélisation stochastique a été largement utilisée pour modéliser les phénomènes apparaissant dans de nombreuses branches de la science comme la biologie, l'économie, la mécanique l'électronique et la télécommunication. La contrôlabilité dans le cas des systèmes dynamiques stochastiques linéaires et non-linéaires

Chapitre 1

Introduction au contrôlabilité

Le problème de la contrôlabilité est le suivant : étant donnés deux états $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, existe-il un temps T et un contrôle admissible u tels que la trajectoire $x_u(t)$ associée à ce contrôle joigne $x_0 = x(0)$ à $x_1 = x(T)$? C'est le problème de la contrôlabilité. On peut poser le même problème avec le temps T fixé.
L'objet de la sous section suivante est de caractérisation algébrique de la contrôlabilité d'un système linéaire due à Kalman.

1.0.1 Contrôlabilité des systèmes linéaires

Considérons le système de controle linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t)\,, \; t \in I \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

On suppose que

- les application $t \to A(t)\,,\; B(t)$ sont L^∞ sur I,

- la commande u est mesurable et localement bornée sur I, à valeur dans $\mathbb{R}^m$.

Les théorèmes d'existence de solutions d'équation différentielles nous assurent l'existence sur I d'une unique application $t \longmapsto x(t)$ absolument continue telle que

$$\forall t \in I,\; x(t) = M(t)\,x_0 + M(t)\int_0^t M(s)^{-1}\,B(s)\,u(s)\,ds. \tag{1.2}$$

où $M(t)$ est la résolvante du système linéaire homogène $\dot{x}(t) = A(t)\,x(t)$.

1.1 Ensemble accessible

Définition 1.1.1 ***L'ensemble des points accessible à partir de x_0 en un temps $T^* > 0$ est***

$$\begin{aligned} &Acc(x_0, T^*) = \{x_1 \in \mathbb{R}^n \exists u \in L^\infty_{loc}([0,T^*], \mathbb{R}^m)\,,\; \exists x : [0,T^*] \to R^n \\ &\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t) \;\; p.p.\; sur \;\; [0,T^*]\,, \\ &x(0) = x_0,\;\; x(T^*) = x_1\} \end{aligned}$$

Autrement dit, $Acc(x_0, T^*)$ ***est l'ensemble des extrémités des solutions du système*** (1.1) ***en temps*** T^****, lorsqu'on fait varier le contrôle*** u***.***

Définition 1.1.2 ***Le système*** (1.1) ***est dit contrôlable*** (***ou comondable***) ***en temps*** T ***si*** $Acc(x_0, T^*) = \mathbb{R}^n$ ***auterement dit pour tout*** $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ ***il existe un contrôle*** u ***tel que la trajectoire associée relie*** x_0 ***à*** x_1 ***en temps*** T***. i.e :***

$$\begin{array}{l} \forall x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n, \exists u \in L^{\infty}_{loc}([0, T^*], \mathbb{R}^m), \ \exists x : [0, T^*] \to \mathbb{R}^n \\ \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \ \ p.p. \ sur \ \ [0, T^*] \\ x(0) = x_0, \ x(T^*) = x_1 \end{array}$$

Le système (1.1) ***est dit cotrôlable*** (***en temps quelconque***) ***depuis*** x_0 ***si***

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{T \geq 0} Acc(x_0, T).$$

Le théorème suivant nous donne une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité dans le cas ou A ***et*** B ***ne dépendent pas de*** t***, elle est dite condition de Kalman.***

Théorème 1.1.1 ***Le système*** $x'(t) = Ax(t) + Bu(t)$ ***est dite contrôlable en temps*** T ***si est seulement si : la matrice*** $C = \left(B, AB, ..., A^{n-1}B\right)$ ***est de rang égal à*** n***.***

La matrice C ***est est appellée matrice de Kalmane. La condition rg*** $C = n$ ***est appellée condition de Kalman.***

La démonstration de ce théorème repose sur le lemme suivant :

Lemme 1.1.1 ***La matrice*** C ***est est de rang*** n ***si est seulement si l'application linéaire :***

$$\begin{array}{ccl} \phi & : & L^{\infty}([0, T^*], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n \\ u & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{T^*} \exp^{(T^*-t)A} Bu(t)\, dt \end{array}$$

est surjective.

Preuve 1.1.1 ***Supposons tout d'abord que*** $Rg\ C \prec n$***, et montrons que*** ϕ ***n'est pas surjective. L'application*** C ***étant non surjective, il existe un vecteure*** $\Psi \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ ***que l'on suppsera être un vecteur ligne, tel que*** $\Psi C = 0$***. par conséquent :***

$$\Psi B = \Psi AB = ... = \Psi A^{n-1}B = 0$$

Or d'après le théorème d'Hamilton-Cayley, il existe des réels $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ ***tels que***

$$A^n = a_0 I + ... + a_{n-1}A^{n-1}.$$

On en déduit par récurrence immédiate que pour tout entier K ***:***

$$\Psi A^K B = 0.$$

et donc, pour tout $t \in [0, T^*]$:

$$\Psi \exp^{tA} B = 0.$$

Par conséquent pour tout contrôle u ***on a :***

$$\Psi \int_0^T \exp^{(T^*-t)A} Bu(t) = 0.$$

i.e. $\Psi\Phi(u) = 0$, ***et donc*** Φ ***n'est pas surjectif, alors il existe un vecteur ligne*** $\Psi \in R^n - \{0\}$ ***tel que pour tout controle*** u ***on ait :***

$$\Psi \int_0^T \exp^{(T^*-t)A} Bu(t) = 0.$$

Ceci implique, pour tout $t \in [0, T^*]$:

$$\Psi \exp^{(T^*-t)A} B = 0.$$

En $t = T^*$ ***on obtient*** $\Psi B = 0$. ***Ensuite, en dérivant par rapport à*** t, ***puis en prenant*** $t = T^*$,***on obtient*** $\Psi AB = 0$. ***Ainsi par dérivation successives on obtient finalement :***

$$\Psi B = \Psi AB = ... = \Psi A^{n-1} B = 0,$$

donc $\Psi C = 0$, ***et donc*** $rgC \prec n$.

Ce lemme permet maintenant de montrer facilement te théorème (1.1).
si la matrice C **est de rang** n**, alors d'après le lemme (1.1), l'application** ϕ **est surjective,i.e.**$\phi(L^\infty) = \mathbb{R}^n$**. Or pour tout contrôle** u **l'extrémité au temps** T **de la trajectoire associée à** u **est :**

$$x(T^*) = \exp^{TA} x_0 + \int \exp^{(T^*-t)A} Bu(t)\,dt,$$

donc l'ensemble accessible en temps T **depuis un point** $x_0 \in \mathbb{R}^n$ **est :**

$$Acc(T^*, x_0) = \exp^{T^*A} x_0 + \phi(L^\infty) = \mathbb{R}^n,$$

et donc le système est contrôlable.
Réciproquement si le système est contrôlable, alors il est en particulier contrôlable en x_0 **et l'ensemble accessible en temps** T **s'écrit :**

$$Acc(T, x_0) = \phi(L^\infty) = \mathbb{R}^n,$$

ce qui prouve que ϕ **est surjective, et donc d'après le lemme (1.1) la matrice** C **est de rang** n**.**

Exemple 1.1.1 ***Le système suivant :***

$$x' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = Ax + Bu$$

est contrôlable car la matrice de Kalman $C = (B, AB) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ***est de*** $rang$ 2 $= n$***.***

Le théorème suivant nous donne une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité dans le cas non autonome (instationnaire) i.e. dans le cas ou les matrices A **et** B **dépendent du temps** t**.**

Théorème 1.1.2 ***Le système*** $x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ ***est contrôlable en temps*** T^* ***si et seulement si :***

$$C(T^*) = \int_0^{T^*} M(t)^{-1} B(t) B^T(t) \left(M(t)^{-1}\right)^T dt \tag{1.3}$$

est inversible.

La matrice $C(T^*)$ **est appelée matrice de contrôlabilité. On a** $C(T^*) = C^T(T^*)$ **; et** $x^T C(T^*) x \geq 0$ **pour tout** $x \in \mathbb{R}^n$**, i.e.** $C(T^*)$ **est une matrice symétrique positive.**

Preuve 1.1.2 ***pour tout solution*** $x(t)$***, on a***

$$x(T^*) = M(T^*) x_0 + M(T^*) \int_0^{T^*} M(s)^{-1} B(s) u(s) ds.$$

Posons

$$x^* = M(T^*) x_0.$$

Si $C(T^*)$ ***esi inversible, posons*** $u(t) = \left(M(t)^{-1} B(t)\right)^T \Psi$, ***avec*** $\Psi \in \mathbb{R}^n$***. Alors***

$$x(T^*) = x^* + M(T^*) C(T^*) \Psi,$$

et il suffit de prendre

$$\Psi = \left(M(T^*) C(T^*)\right)^{-1} (x_1 - x^*).$$

Réciproquement, si $C(T^*)$ ***n'est pas inversible, alors il existe*** $\Psi \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ ***tel que*** $\Psi^T C(T^*) \Psi = 0$***. On en déduit :***

$$\int_0^{T^*} \left\| \left(M(t)^{-1} B(t)\right)^T \Psi \right\|^2 dt = 0,$$

d'où $\left(M(t)^{-1} B(t)\right)^T \Psi = 0$ $p.p.$ ***sur*** $[0, T^*]$***, et donc, pour tout contrôle*** u***, on a***

$$\Psi^T \int_0^{T^*} M(t)^{-1} B(t) u(t) dt = 0.$$

Posons $\Psi_1 = \left(M\left(T^*\right)^{-1}\right)^T \Psi$; ***on a pour tout contrôle*** u

$$\Psi^T \left(x_u\left(T^*\right) - x^*\right) = 0,$$

i.e. $x_u\left(T^*\right) \in x^* + \Psi^\perp$ $\left(\Psi^\perp\right.$ ***étant l'ortogonal de*** $\left.\Psi\right)$***, et donc le système n'est pas contrôlable.***

Remarque 1.1.1 1. La condition (1.3) ***dépend de*** T^* ***mais ne dépand pas de la condition initiale*** x_0 ***autrement dit si un système linéaire instationnaire est contrôlable en temps*** T^* ***depuis*** x_0 ***alors il est contrôlable en temps*** T^* ***depuis tout point.***

2. Si le système est autonome, on a $M(t) = \exp(tA)$, ***et donc***

$$C\left(T^*\right) = \int_0^{T^*} \exp(-sA) BB^T \exp\left(-sA^T\right) ds.$$

Dans ce cas, $C\left(T_1\right)$***est inversible si et seulement si*** $C\left(T_2\right)$***est inversible, i.e. la condition ne dépend pas de*** T^* (***ce qui n'est pas le cas pour le système instationnaire***)

Exemple 1.1.2 ***Soit le système suivant :***

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) + u(t)\cos t \\ y'(t) = y(t) + u(t)\sin t \end{cases}$$

L'écriture matricielle du système est

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} u(t)$$

On posera

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, etX(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

La résolvant du système $X'(t) = A(t)X(t)$ ***est donnée par la formule*** $M(t) = \exp(tA)$. ***Les valeurs propres de la matrice*** A ***sont*** $\pm i$. ***Un calcul simple montre que***

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-it} + \frac{1}{2}e^{it} & \frac{1}{2}ie^{it} - \frac{1}{2}ie^{-it} \\ \frac{1}{2}ie^{-it} - \frac{1}{2}ie^{it} & \frac{1}{2}e^{-it} + \frac{1}{2}e^{it} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

par conséquent,

$$\begin{aligned} & M(t)^{-1} B(t) B(t)^T \left(M(t)^{-1}\right) T \\ = & \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}^T \left[\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}^{-1}\right]^T \\ = & \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos^2 t & \cos t \sin t \\ \cos t \sin t & \sin^2 t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} \cos 2t & 0 \\ \sin 2t & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matrice de contrôlabilité au temps T^* est alors

$$\begin{aligned} C(T^*) &= \int_0^{T^*} \exp(-sA) B(s) B(s)^T \exp\left(-sA^T\right) ds \\ &= \int_0^{T^*} \begin{pmatrix} \cos 2t & 0 \\ \sin 2t & 0 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sin 2T^* & 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2T^* & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Il est clair que la matrice $C(T^*)$ n'est pas inversible, donc le système donné n'est pas contrôlable.

1.2 Systèmes retardés

Jusqu'à maintenant, le problème de contrôlabilité des systèmes dynamiques linéaires a été largement étudié dans de nombreux journaux. Néanmoins ce n'est pas le cas pour les systèmes non-linéaires et semi-linéaires, en particulier, les systèmes avec des retards dans le contrôle et avec des contrôles limités.
Rappelons que les systèmes de contrôle dynamiques semi-linéaires retardés en contrôle doivent contenir différents types de retards, à la fois dans les parties linéaires pures et non-linéaires pures dans les équations différentielles d'état.

1.3 Systèmes stochastiques

La théorie de contrôle classique est basé sur approches déterministes. Cependant, l'incertitude est la caractéristique fondamentale de plusieurs systèmes dynamiques réels.
La théorie des systèmes dynamiques stochastiques est maintenant un sujet de recherche bien établi, qui est encore en développement intensif et offre de nombreux problèmes ouverts dans plusieurs domaines d'application, problèmes de l'économie, problèmes de décision, la physique statistique,l'épidémiologie, théorie de risque, les mathématique de l'assurance, la théorie de fiabilité et autres méthodes basées sur des équations stochastiques.
la modélisation stochastique a été largement utilisée pour modéliser les phénomènes apparaissant dans de nombreuses branches de la science comme la biologie, l'économie, la mécanique,l'électronique et la télécommunication.
La contrôlabilité dans le cas des systèmes dynamiques stochastiques linéaires et non-linéaires, a récemment reçue l'attention de beaucoup de chercheurs et a été discutées dans différents articles et monographies.

1.3.1 Processus stochastique

Un processus dynamique est une structure mathématique utilisée pour modéliser l'évolution déterministe de certains phénomènes (physique) dans le temps. Le mot clé ici est déterministe. On dit qu'un système est déterministe si son future est complètement prédictible connaissant de son état initial. Mais s'il y a quelques intrinsèque randomisations dans le système, qui rend la prédiction parfaite du future impossible, on utilise alors une autre structure mathématique dite processus stochastique. Donc un processus stochastique est une structure mathématique utilisée pour modeler les différents phénomènes où la prédiction de la future est impossible pour des raisons différentes : soit le système est soumis à une ou plusieurs forces inconnues, ou bien tout simplement, les forces agissent d'une façon aléatoire. Citant à titre d'exemple, les systèmes suivants : - Le mouvement d'une particule dans un fluide (mouvement Brownien). - Le nombre de photons absorbés ou émis par un atome. - La position d'un piston soumis au choc des molécules d'un gaz. - Le mouvement des planètes lointaines. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé complet i.e. si $B \in \mathcal{F}$ tel que $\mathbb{P}(B) = 0$ et $A \subset B$, alors $A \in \mathcal{F}$.
Une base stochastique est la donnée de $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ où $\mathcal{F}_t$ est une famille de sous tribus de $\mathcal{F}$ telle que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ pour $s \leq t$. $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ s'appelle une filtration.

Définition 1.3.1
Un processus stochastique $X := \{X_t, t \geq 0$ est une collection de variables aléatoires X_t, $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} X_t :& \Omega \to \mathbb{R}^n \\ & \omega \mapsto X_t(\omega) \end{aligned}$$

On dira que le processus $\{X_t,\, t \geq 0\}$ est adapté à $\mathcal{F}_t$ si $\forall t \geq 0, X_t$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable. L'application (pour $\omega \in \Omega$ fixé)

$$\begin{aligned} X.(\omega) :& \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n \\ & t \mapsto X_t(\omega) \end{aligned}$$

s'appelle une trajectoire du processus.

1.4 Mouvement Brownien

Robert Brown (1828) observe le mouvement irrégulier de particules de pollen en suspension dans l'eau. Delsaux (1877) explique les changements incessants de direction de trajectoire par les chocs entre les particules de pollen et les molécules d'eau. Bachelier (1900) met en évidence le caractère markovien du mouvement Brownien, en vue d'étudier les cours de la Bourse. Einstein (1905) détermine la densité de

transition du mouvement Brownien par l'intermédiaire de l'équation de la chaleur et relie ainsi le mouvement Brownien et les équations aux dérivées partielles de type parabolique. Smoluchowski (1905) décrit le mouvement Brownien comme une limite de promenades aléatoires. N. Wiener (1923) réalise la première étude mathématique rigoureuse et donne une démonstration de l'existence du Brownien.
On se donne un espace (Ω, F, P) et un processus $(B_t, t \geq 0)$ sur cet espace.
Le processus $(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement Brownien ou processuce de Wiener si

1. $P(B_0 = 0) = 1$ **(le mouvement Brownien est issu de l'origine).**
2. $0 \leq st, B_t - B_s$ **est une variable réelle de loi gaussienne, centrée de variance** $t - s$.
3. $\forall n, \forall t_i, 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$, **les variables** $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, ..., B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_0}$ **sont indépendantes.**

   Remarque 1.4.1

   (a) Notons que la filtration naturelle du mouvement brownien $(B_t, t \geq 0)$ ***est*** $\mathcal{F}_t^B = \sigma(B_s, s \leq t)$.

   (b) Un mouvement Brownien $W(t)$ ***est standard si*** $W_0 = 0\, ps$, $\mathbf{E}(W_t) = 0$, $\mathbf{E}((W_t)^2) = t$.

1.5 Martingale

1.5.1 Espérance conditionnelle

On fixe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
Rappelons que l'ensemble des variables aléatoires de carré intégrable, noté par $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle X, Y \rangle = E[XY]$.
Soit Z un élément de $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de F. On appelle espérance conditionnelle de Z sachant $\mathcal{G}$, l'unique élément Y de $L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$ tel que $\forall X \in L^\infty(\Omega, \mathcal{G}, P), E(XZ) = E(XY)$.
On notera cet élément $Y = E(Z|G)$.
Dans le cas particulier où la tribu $\mathcal{G}$ est engendrée par une variable aléatoire ou un vecteur aléatoire $V(\mathcal{G} = \sigma(V))$, on notera $E(Z|V)$ comme abréviation de $E(Z|\sigma(V))$.

propriétés 1.5.1
Soit X ***une variable aléatoire dans*** $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. ***On note*** $\mathcal{G}$ ***une sous-tribu de*** $\mathcal{F}$.

1. ***Pour tous réels*** a ***et*** b ***et toute variable aléatoire réelle*** X ***intégrable,*** $E[aX + b|\mathcal{G}] = aE[X|\mathcal{G}] + b$ ***; et pour toutes variables aléatoires réelles*** X_1, X_2 ***intégrables*** $E[X_1 + X_2|\mathcal{G}] = E[X_1|\mathcal{G}] + E[X_2|\mathcal{G}]$
2. ***Si*** $X_1 \leq X_2$ ***p.s. alors*** $E[X_1|\mathcal{G}] \leq E[X_2|\mathcal{G}]$.
3. ***Si*** X ***est une variable aléatoire réelle*** $\mathcal{G}$***-mesurable alors*** $E[X|\mathcal{G}] = X\, p.s.$ ***en particulier*** $E[1|\mathcal{G}] = 1$.

4. ***Si est une variable réelle alors*** $E[E[X|\mathcal{G}]] = E[X]$.
5. ***Soient*** X ***et*** Z ***deux variables aléatoires réelles intégrables telles que*** XZ ***soit aussi intégrable. Supposons*** Z ***est*** $\mathcal{G}$***-mesurable alors*** $E[XZ|\mathcal{G}] = ZE[X|\mathcal{G}]$ ***p.s.***

1.5.2 Martingales

Définition 1.5.1
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ***un espace probabilisé et*** $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ ***une filtration de cet espace. Une famille*** $(M_t)_{t\geq 0}$ ***adapté de variables aléatoires intégrables*** $(E|M_t| < +\infty)$ ***est***

une martingale si pour tout $s \leq t$, $E(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s$.

une sur martingale si pour tout $s \leq t$, $E(M_t|\mathcal{F}_s) \leq M_s$.

une sous martingale si pour tout $s \leq t$, $E(M_t|\mathcal{F}_s) \geq M_s$.

1.5.3 Intégrale stochastique

$W = (W(t))_{t\geq 0}$ ***est un mouvement Brownien standard défini sur un espace de probabilité*** $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. ***Cette espace de probabilité est de plus équipé de la filtration naturelle*** $(\mathcal{F}(W(t))_{t\geq 0}$.
Nous cherchons à définir l'intégrale

$$\int_0^T f(s)dw(s), \quad T > 0$$

pour tout $f \in L^2(0, T)$.
La construction de l'intégrale stochastique (ou de Itô) se construit de façon semblable à celle de l'intégrale classique de Riemann-Stieltjes. L'intégrale est tout d'abord définie sur une classe de processus étags (ou élémentaires) notée $\varepsilon([0, T], \Omega)$ ***et ensuite elle est étendue à une classe plus large par approximation.***

Théorème d'existence et d'unicité pour les équations différentielles stochastiques

Soit $T > 0$ **et**

$$b(.,.) : [0, T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \tag{1.1}$$
$$\sigma(.,.) : [0, T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times m} \tag{1.2}$$

deux fonctions mesurables satisfaisant ;

$$|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq C(1 + |x|), x \in \mathbb{R}^n, t \in [0, T],$$

pour un certain constant C,et tel que

$$|b(t,x)-b(t,y)|+|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)|\leq D|x-y|, x,y\in\mathbb{R}^n, t\in[0,T],$$

où D est un constant. Soit Z une variable aléatoire qui est indépendant du $\sigma-$ algèbre $\mathcal{F}_\infty^{(m)}$ engendré par $B_s(.), s\geq 0$ et tel que $E(|Z|^2)<\infty$. Alors l'équation stochastique

$$\begin{cases} dx(t) = Ax(t)+Bu(t)+\bar{\sigma}dwt \\ x(0)=x_0=Z, \qquad t\in[0,T\,] \end{cases}$$

a une solution $x_t(w)-$continue unique qui possède la propriété suivante :
$x_t(w)$ **est adapté à la filtration $\mathcal{F}_t^Z$ engendré par Z et $B_s(.), s<t$ et $E(\int_0^T |x_t|^2)<\infty$.**

Chapitre 2

Contrôlabilité stochastique des système linéaires à retard dans le contrôle

2.1 Définitions

Dans tout ce mémoire, on note par :

(i) L'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

(ii) $\{\mathcal{F}_t | t \in [0, T]\}$ **le filtration engendré par** $\{\omega(s) : 0 \leq s \leq t\}$.

(iii) $\mathbb{L}2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{R}^n)$ **l'espace de Hilbert de toutes les variables** $\mathcal{F}_T$**-measurables intégrables à valeurs dans** $\mathbb{R}^n$.

(iv) $\mathbb{L}_P^{\mathcal{F}}([0, T], \mathbb{R}^n)$ **est l'espace de Hilbert de tous les processus quarré intégrables et** $\mathcal{F}_t-$**mesurable à valeurs dans** $\mathbb{R}^n$.

(v) X_2 **l'espace de Banach de tous les processus quarré intégrables et** $\mathcal{F}_t$**-adaptet** $\varphi(t)$**, muni de la norm**

$$\|\varphi(t)\| = \left(\int_{-h}^{t} \mathbf{E} \|\varphi(t)\|^2\right), \textbf{where E is Expected value.}$$

(vi) $\mathbb{L}(X, Y)$ **l'espace de tous les opérateurs linéaires bornés d'un espace de Banach** X **dans un espace de Banach** Y.

(vii) $U_{ad} = \mathbb{L}_2([0, T], \mathbb{R}^m)$.

(viii) $\phi(t) = \exp(At)$.

La contrôlabilité complète du système stochastique linéaire à retard dans le contrôle

$$\begin{cases} dx(t) = [Ax(t) + B_0 u(t) + B_1 u(t-h)]\, dt + \sigma d\omega(t) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{L}_2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{R}^n) \quad and \quad u(t) = 0, \; t \in [-h, 0) \end{cases} \tag{1.1}$$

a été étudié par plusieurs auteurs, (voir Klamka [[1]]).

Le problème de contrôlabilité d'un système stochastique semi-linéaire à retard dans le contrôle

$$\begin{cases} dx(t) = [Ax(t) + Bu(t) + f(t, x(t))]\, dt + \sigma\,(t, x(t))d\omega(t))\,, t \in [0, T]\,, T \succ h \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

a été étudié par plusieurs auteurs, (voir Mahmudov [[2]])
Dans ce papier, on examine la contrôlabilité complète du système stochastique semi-linéaire avec retard suivant :

$$dx(t) = [Ax(t) + B_0u(t) + B_1u(t-h) + f(t, x_t)]\, dt + \sigma(t, x_t)d\omega(t), t \in (0, T] \tag{1.2}$$

$$x(t) = \Psi(t), t \in [-h, 0]\,, \quad x(0) = \Psi(0) = x_0 \tag{1.3}$$

$$u(t) = 0, t \in [-h, 0] \tag{1.4}$$

Où $h > 0$ **est le constant de retard et l'état** $x(t) \in \mathbb{L}_2(\Omega, F_t, \mathbb{R}^n) = X$ **et le contrôle** $u(t) \in \mathbb{L}_2([0, T], \mathbb{R}^m) = U$**,** A **est une matrice constante de dimension** $n \times n$ **,** B_0 **et** B_1 **sont des matrices constantes de dimension** $n \times m$**.**
Les processus stochastiques x_t **et** Ψ **dans** $\mathbb{L}_2([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ **définis de la manière suivante :**

$$x_t(s) = \{x(t+s)| -h \le s \le 0|\}$$
$$\Psi = \{\Psi(s), s \in [-h, 0]\}$$

Les fonctions $f(.,.), \sigma(.,.)$ **sont définies respectivement** $\sigma(.,.) : [0, T] \times \mathbb{L}^2([-h, 0], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^{n\times n}$**,** $f(.,.) : [0, T] \times \mathbb{L}^2([-h, 0], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ **comme des fonctions non linéaires et** ω **est un processus de Wiener de dimension** n**.**

2.2 Preliminaries

Sous les conditions initiales (1.3), (1.4),pour tout contrôle admissible $u \in U_{ad}$**,** $t \in [-h, T]$ **et des fonctions non linéaires** $f(t, x_t)$ **et** $\sigma(t, x_t)$ **il existe une solution unique** $x(t; x_0, u) \in \mathbb{L}_2(, t, \mathbb{R}^n)$ **du système différentiel stochastique semi-linéaire (1.2)qui peut se représenter par la forme intégrale suivante**

$$x(t; x_0, u) = \begin{cases} \exp(At)x_0 + \int_0^t \exp(A(t-s))(B_0u(s) + B_1u(s-h) + f(s, x_s))ds \\ + \int_0^t \exp(A(t-s))\sigma(s, x_s)d\omega(s) \textbf{ pour } t > 0 \\ \Psi(t) \textbf{ pour } t \in [-h, 0] \end{cases} \quad 2.1$$

Puisque $u(t) = 0$ **pour** $t \in [-h, 0]$ **alors la solution sur** $t \in [0, h]$**, prend la forme suivante**

$$\begin{aligned} x(t; x_0, u) &= \exp(At)x_0 + \int_0^t \exp\left(A\,(t-s)\right)\left(B_0u(s) + f\,(s, x_s)\right) ds 2.2 \\ &+ \int_0^t \exp\left(A\,(t-s)\right)\sigma\,(s, x_s)\, d\omega\,(s) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Pour $t > h$ on a

$$\begin{aligned} x(t;x_0,u) &= \exp(At)\,x_0 + \int_0^t \exp(A(t-s))\,(B_0u(s) + f(s,x_s))\,ds2.3 \\ &+ \int_0^{t-h} \exp(A(t-s-h))\,B_1u(s)\,ds \\ &+ \int_0^t \exp(A(t-s))\,\sigma(s,x_s)\,d\omega(s) \end{aligned} \tag{2.2}$$

c'est équivalent à

$$\begin{aligned} x(t;x_0,u) &= \exp(At)\,x_0 + \int_0^{t-h} (\exp(A(t-s))\,B_0 + \exp(A(t-s-h))\,B_1)\,u(s)\,ds \\ &+ \int_{t-h}^t \exp(A(t-s))\,B_0u(s)\,ds \\ &+ \int_0^t \exp(A(t-s))\,f(s,x_s)\,ds + \int_0^t \exp(A(t-s))\,\sigma(s,x_s)\,d\omega(s) \end{aligned}$$

Pour $T > h$, nous introduisons les ensembles et les opérateurs suivants
L'opérateur $\mathbb{L}_T \in \mathbb{L}\left(\mathbb{L}_2^{\digamma}([0,T],\mathbb{R}^m),\mathbb{L}_2(\Omega,\digamma_T,\mathbb{R}^n)\right)$,défini par

$$\begin{aligned} L_Tu &= \int_0^{T-h} (\exp(A(T-s))\,B_0 + \exp(A(T-s-h))\,B_1)\,u(s)ds \\ &+ \int_{T-h}^T \exp(A(T-s))\,B_0u(s)\,ds \end{aligned}$$

L'opérateur adjoint de $L_T^* \in \mathbb{L}_2(\Omega,\digamma_T,\mathbb{R}^n) \to \mathbb{L}_2^{\digamma}([0,T],\mathbb{R}^m)$défini

$$L_T^*z = \begin{cases} (B_0^*\exp(A^*(T-t)) + B_1^*\exp(A^*(T-t-h)))\,E\{z|\digamma_t\}\,\textbf{pour}\ t\in[0,T-h] \\ B_0^*\exp(A^*(T-t))\,E\{z|\digamma_t\}\,\textbf{pour}\ \ t\in(T-h,T] \end{cases}$$

L'ensemble de tous les états atteignables dans un temps T d'un état initial $x(0) = x_0$ $\in \mathbb{L}_2(\Omega,\digamma_T,\mathbb{R}^n)$,en utilisant les contrôles admissibles est défini par

$$\mathbb{R}_T(U_{ad}) = \{x(T;x_0,u) \in \mathbb{L}_2(\Omega,\digamma_T,\mathbb{R}^n) : u \in U_{ad}\}$$

où

$$x(T;x_0,u) = \exp(At)\,x_0 + L_Tu + \int_0^T \exp(A(t-s))\,(f(s,x_s)\,ds + \sigma(s,x_s)\,d\omega(s))$$

L'opérateur linéaire de contrôlabilité $\Pi_0^T \in \mathbb{L}\left(\mathbb{L}_2(\Omega,\digamma_T,\mathbb{R}^n),\mathbb{L}_2(\Omega,\digamma_T,\mathbb{R}^n)\right)$

$$\begin{aligned} \Pi_0^T\{.\} &= L_T(L_T)^*\{.\} \\ &= \int_0^{T-h} (\exp(A(T-t))\,B_0B_0^*\exp(A^*(T-t)) + \exp(A(T-t-h)) \\ &\quad \times B_1B_1^*\exp(A^*(T-t-h)))\,E\{.|\digamma_t\}\,dt \\ &\quad + \int_{T-h}^T (\exp(A(T-t))\,B_0B_0^*\exp(A(T-t)))\,E\{.|\digamma_t\}\,dt \end{aligned}$$

la matrice de contrôlabilité $\Gamma_s^T \in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned}\Gamma_s^T &= L_T(s)L_T^*(s)\\ &= \int_s^{T-h} (\exp(A(T-t))\, B_0B_0^* \exp(A^*(T-t)) + \exp(A(T-t-h))\\ &\quad \times B_1B_1^* \exp(A^*(T-t-h)))\, dt\\ &\quad + \int_{T-h}^{T} \exp(A(T-t))\, B_0B_0^* \exp(A^*(T-t))\, dt\end{aligned}$$

Définition 2.2.1 ***Un système de contrôle est dit totalement contrôlable dans l'intervalle $I=[0,T]$ si pour chaque état initial x_0 et l'état final désiré x_1, il existe un contrôle $u(t)$ tel que la solution $x(t)$ du système correspondant à ce contrôle u satisfait $x(T)=x_1$.***

Dans ce travail, o va obtenir quelques conditions suffisantes pour une contrôlabilité complète avec des contrôles admissibles sans contraintes du système 1.2.

2.3 Premier résultat

Le lemme suivant nous donne une formule pour un contrôle transférant l'état x_0 à un état arbitraire x_T.

Lemme 2.3.1 ***Supposons que l'opérateur Π_0^T est inversible. Alors pour un $x_T \in \mathbb{L}_2^F(\Omega, F_T, \mathbb{R}^n)$, $f(.,.) \in \mathbb{L}_2^F([0,T],\mathbb{R}^n)$, $\sigma(.,.) \in (\mathbb{L}_2^F([0,T],\mathbb{R}^{n\times n})$,le contrôle***

$$u(t) = \begin{cases} B_0^* \exp(A^*(T-t)) \\ \times E\left\{ \left(\Pi_0^T\right)^{-1} \left(x_T - \exp(AT)x_0 - \displaystyle\int_0^{T-h} \exp(A(T-s))(f(s,x_s)ds + \sigma(s,x_s)d\omega(s)) \right) | F_t \right\} \\ \textit{pour } t \in [0,h] \\ (B_0^* \exp(A^*(T-t)) + B_1^* \exp(A^*(T-h-t))) \\ \times E\left\{ (\Pi_0^T)^{-1} \left(x_T - \exp(AT)x_0 - \displaystyle\int_{T-h}^{T} \exp(A(T-s))(f(s,x_s)ds + \sigma(s,x_s)d\omega(s)) \right) | F_t \right\} \\ \textit{pour } t \in (h,T] \end{cases}$$

transfère le système (2.1) de $x_0 \in \mathbb{R}^n$ à x_T dans le temps T et

$$\begin{aligned} x(t) &= \exp(At)x_0 + \Pi_0^t \Big[\exp(A^*(T-t)) \left(\Pi_0^T\right)^{-1} \times (x_T - \exp(AT)x_0\ 3.1 \\ &\quad - \int_0^T \exp(A(T-r)) f(r,x_r) dr - \int_0^T \exp(A(T-r)) \sigma(r,x_r)\, d\omega(r)) \Big] \\ &\quad + \int_0^t \exp(A(t-s)) f(s,x_s) ds + \int_0^t \exp(A(t-s)) \sigma(s,x_s) d\omega(s) \end{aligned} \tag{2.3}$$

à condition que la solution de (2.3) existe.

Preuve 2.3.1 ***Par la substitution de*** $u(t)$ ***dans*** (2.1) ***et*** (2.2) ***, on obtient***
Pour $t \in [0,h]$

$$\begin{aligned} x(t;x_0,u) &= \exp(At)x_0 + \int_0^t \exp(a(t-s))B_0B_0^* \exp(A^*(t-s)) \\ &\times E\left\{\left(\Pi_0^T\right)^{-1}\left(x_T - \exp(AT)x_0 - \int_0^{T-h} \exp(A(T-s))(f(s,x_s)ds + \sigma(s,x_s)d\omega(s))\right)|\digamma_t\right\} \\ &+ \int_0^t \exp(A(t-s))(f(s,x_s)ds + \int_0^t \exp(A(t-s))\sigma(s,x_s)d\omega(s) \end{aligned}$$

Pour $t \in (h,T]$

$$\begin{aligned} x(t;x_0,u) &= \exp(At)x_0 + \int_0^{t-h} (\exp\left(A\left(t-s\right)\right)B_0B_0^* \exp\left(A^*\left(t-s\right)\right) \\ &+ \exp\left(A\left(T-h-s\right)\right)B_1B_1^* \exp\left(A^*\left(T-h-s\right)\right)) \\ &\times E\left\{\left(\Pi_0^T\right)^{-1}\left(x_T - \exp\left(AT\right)x_0 - \int_{T-h}^T \exp\left(A\left(T-s\right)\right)f(s,x_s)ds\right.\right. \\ &\left.\left. - \int_{T-h}^T \exp\left(A\left(T-s\right)\right)\sigma(s,x_s)d\omega(s)\right)|\digamma_s\right\}ds + \int_{t-h}^t \exp(A(t-s))B_0B_0^* \exp(A^*(T-s)) \\ &\times E\left\{\left(\Pi_0^T\right)^{-1}\left(x_T - \exp(AT)x_0 - \int_0^{T-h} \exp(A(T-s))(f(s,x_s)ds\right.\right. \\ &\left\{-\int_0^{T-h} \exp(A(T-s))\sigma(s,x_s)d\omega(s,x_s)\right)|\digamma_s\right\}ds + \int_0^t \exp(A(t-s))f(s,x_s)ds \\ &+ \int_0^t \exp(A(t-s))\sigma(s,x_s)d\omega(s) \end{aligned}$$

Ainsi, en tenant compte de la forme de l'opérateur Π_0^T***, Nous avons***

$$\begin{aligned} x(t;x_0,u) &= \exp(At)x_0 \\ &+ \Pi_0^t\left[\exp(A^*(T-t))(\left(\Pi_0^T\right)^{-1}(x_T - \exp(AT)x_0\right. \\ &\left. - \int_0^T \exp(A(T-s))(f(s,x_s)ds + \sigma(s,x_s)d\omega(s))\right)\Big] \\ &+ \int_0^T \exp(A(T-s))f(s,x_s)ds + \int_0^T \exp(A(T-s))\sigma(s,x_s)d\omega(s) \end{aligned}$$

En posant $t = T$ ***dans l'équation précédente, on obtient***

$$\begin{aligned} x(t;x_0,u) &= \exp(At)x_0 \\ &+\Pi_0^T\left[\left(\Pi_0^T\right)^{-1}\left(x_T-\exp(AT)x_0-\int_0^T\exp(A(T-s))\left(f(s,x_s)ds+\sigma(s,x_s)d\omega(s)\right)\right)\right] \\ &+\int_0^T\exp(A(T-s))f(s,x_s)ds+\int_0^T\exp(A(T-s))\sigma(s,x_s)d\omega(s) \\ x(t;x_0,u) &= x_T \end{aligned}$$

Le lemme suivant joue un rôle important dans la preuve de nôtre deuxième résultat.

Lemme 2.3.2 ***Pour tout*** $z \in L_2\left(\Omega,\ F_T,\ R^n\right)$***, il existe un processus*** $\varphi(.) \in L_2\left([0,T], R^{n\times n}\right)$ ***tel que***

$$\begin{aligned} z &= \mathbf{E}z+\int_0^T\varphi(s)\,d\omega(s) \\ \Pi_0^T z &= \Gamma_0^T\mathbf{E}z+\int_0^T\Gamma_s^T\varphi(s)\,d\omega(s) \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned} E\left\|\Pi_0^T z\right\|^2 &\leq ME\left\|E\left\{z \mid F_T\right\}\right\|^2 \\ &\leq ME\ \|z\|^2,\ z\in L_2\left(\Omega,F_T,R^n\right) \end{aligned}$$

la condition $(A3)$ ***est vérifiée, alors pour un certain*** $\gamma > 0$

$$E\left\langle \Pi_0^T z, z\right\rangle \geq \gamma E\|z\|^2,\ \textit{pour tout}\ \ z\in L_2\left(\Omega,F_T,R^n\right)$$

par conséquent

$$E\left\|\left(\Pi_0^T\right)^{-1}\right\|^2 \leq \frac{1}{\gamma} = l_4$$

Dans cette section, on donne les conditions de contrôlabilité du système (2.3) , ***en utilisons***

le principe de l'application contractante. Supposons les conditions suivantes :

(A1) (f,σ) **satisfait la condition de Lipschitz par rapport à** x **:**
$\|f(t,x_t)-f(t,y_t)\|^2 \leq L_1\|x_t-y_t\|^2, \|\sigma(t,x_t)-\sigma(t,y_t)\|^2 \leq L_2\|x_t-y_t\|^2$
pour tout $x_t, y_t \in L^2([-h,0], R^n),\ 0 < t \leq T$

(A2) (f,σ) **est continue sur** $[0,T]\times R^n$ **et satisfait**

$$\|f(t,x_t)\|^2 \leq L_3\left(\|x_t\|^2+1\right), \|\sigma(t,x_t)\|^2 \leq L_4\left(\|x_t\|^2+1\right)$$

(A3) Le système linéaire (1.1)**est complètement contrôlable.**

Soit S une application définie sous la forme suivante

$$\mathbf{S}(x)(t)=\begin{cases}\Psi(t)\ \ for\ t\in[-h,\ 0]\\ \exp(At)\,x_0+\Pi_0^t\Big[\exp(A^*(T-t))\Big(\big(\Pi_0^T\big)^{-1}\times(x_T-\exp(AT)\,x_0\\ -\displaystyle\int_0^T\exp(A(T-r))\,f(r,x_r)\,dr-\int_0^T\exp(A(T-r))\,\sigma(r,x_r)\,d\omega(r)\Big)\Big)\Big]\\ +\displaystyle\int_0^t\exp(A(t-r))\,f(s,x_s)\,ds+\int_0^t\exp(A(t-s))\,\sigma(s,x_s)\,d\omega(s)\ \ \textbf{pour}\ t\in[0,\ T]\end{cases}$$

D'après le lemme 1,le controle $u(t)$ transfère le système(2.3) d'un état initial x_0 vers un état final x_T à condition que l'opérateur S admet un point fixe. Donc, si l'opérateur S possède un point fixe alors le système (1.2) admet une solution unique. il est donc complètement contrôlable.
Donnons, maintenant les deux notations

$$\begin{aligned} l_1 &= \max\|\exp(At)\|^2 : t\in[0,T]\,.\ l_2=\max\left(\|B_0\|^2,\|B_1\|^2\right)\\ l_3 &= E\|x_T\|^2\,,M=\max\left\|\Gamma_s^T\right\|^2 : s\in[0,T]\end{aligned}$$

Théorème 2.3.1 ***Sous les conditions*** $(A1),(A2),(A3)$ ***et l'inégalité***

$$\left(4l_1L(Ml_1l_4+1)(T+1)T^2\right)^{\frac{1}{2}}<1 \tag{3.2}$$

le système 1.2 est complètement contrôlable.

Preuve 2.3.2 ***Comme mentionné ci-dessus, pour prover la contrilabilité complète, il suffit de montrer que*** **S** ***admet un point fixe dans***X_2***. Pour ce faire, nous utilisons le principe de l'application contractante. Appliquer le principe de la contraction, nous montons d'abort que*** S ***est défini de*** X_2 ***dans lui-même.Maintenant par Lemme 1 nous avons***

$$
\begin{aligned}
& E\left\|(\mathbf{S}x)(t)\right\|^2 \\
= \; & E\Bigg\|\Psi(t)+\exp(At)x_0+\Pi_0^t\Big[\exp(A^*(T-t))\times\left(\Pi_0^T\right)^{-1}\Big(x_T-\exp(AT)x_0 \\
& -\int_0^T\exp(A(T-r))f(r,x_r)\,dr-\int_0^T\exp(A(T-r))\sigma(r,x_r)\,d\omega(r)\Big)\Big] \\
& +\int_0^t\exp(A(t-s))f(s,x_s)\,ds+\int_0^t\exp(A(t-s))\sigma(s,x_s)\,d\omega(s)\Bigg\|^2 \\
\leq \; & 5\left\|\Psi(t)\right\|^2+5\left\|\exp(At)x_0\right\|^2+5E\Bigg\|\Pi_0^t\Big[\exp(A^*(T-t))\times\left(\Pi_0^T\right)^{-1}\Big(x_T-\exp(AT)x_0 \\
& -\int_0^T\exp(A(T-r))f(r,x_r)\,dr-\int_0^T\exp(A(T-r))\sigma(r-x_r)\,d\omega(r)\Big)\Big]\Bigg\|^2 \\
& +5t\int_0^t\left\|\exp(A(t-r))\right\|^2E\left\|f(r,x_r)\right\|^2dr+5\int_0^t\left\|\exp(A(t-r))\right\|^2E\left\|\sigma(r,x_r)\right\|^2dr \\
\leq \; & 5\left\|\Psi(t)\right\|^2+5l_1\left\|x_0\right\|^2_{L^2[-h,0]}+20Ml_1l_4\Bigg(l_3+l_1\left\|x_0\right\|^2+Tl_1\int_0^TE\left\|f(r,x_r)\right\|^2dr \\
& +l_1\int_0^TE\left\|\sigma(r,x_r)\right\|^2dr\Bigg)+5l_1\int_0^t\left(TE\left\|f(r,x_r)\right\|^2+E\left\|\sigma(r,x_r)\right\|^2\right)dr \\
\leq \; & B_1+B_2\left(\int_0^T\left(TE\left\|f(r,x_r)\right\|^2+E\left\|\sigma(r,x_r)\right\|^2\right)dr\right)
\end{aligned}
$$

ici $B_1>0$ ***and*** $B_2>0$ ***sont des constants. La condition*** A_2 ***affirme l'exixtence d'un constant*** $C_1>0$ ***tel que***

$$
\begin{aligned}
E\left\|(Sx)(t)\right\|^2 &\leq C_1\left(1+\int_0^TE\left\|x_r\right\|^2dr\right) \\
&= C_1\left(1+\left(\int_0^TE\int_{-h}^0\left\|x(r+s)\right\|^2dsdr\right)\right) \\
&= C_1\left(1+\left(\int_0^TE\int_{r-h}^r\left\|x(v)\right\|^2dvdr\right)\right) \\
&\leq C_1\left(1+\left(\int_0^TE\int_{-h}^T\left\|x(v)\right\|^2dvdr\right)\right) \\
&\leq C_1\left(1+T\left(\int_{-h}^TE\left\|x(v)\right\|^2dv\right)\right)
\end{aligned}
$$

Cela implique que

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{-h}^TE\left\|(Sx)(t)\right\|^2dt\right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\int_{-h}^TC_1\left(1+T\left(\int_{-h}^TE\left\|x(v)\right\|^2dv\right)\right)dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sqrt{C_1}\sqrt{T+h}\left(1+h\left(\int_{-h}^TE\left\|x(t)\right\|^2dt\right)\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

Pour tout $t \in [-h, T]$***. Alors*** S ***est une application interne de*** X_2***. Prouvons maintenant que*** S ***est une contraction. Soient*** x ***et*** y ***dans*** X_2***, alors***

$$\begin{aligned}
& E \left\| (\mathbf{S}x)(t) - (\mathbf{S}y)(t) \right\|^2 \\
= \; & E \Bigg\| \Pi_0^t \Bigg[\exp(A^*(T-t)) \left(\Pi_0^T\right)^{-1} \times \left(\int_0^T \exp(A(T-s)) \left(f(s, y_s) - f(s, x_s) \right) \right) ds \\
& + \int_0^T \exp(A(T-s)) \left(\sigma(s, y_s) - \sigma(s, x_s) \right) d\omega(s) \Bigg] \\
& + \int_0^t \exp(A(t-s)) \left(f(s, x_s) - f(s, y_s) \right) ds \\
& + \int_0^t \exp(A(t-s)) \left(\sigma(s, x_s) - \sigma(s, y_s) \right) d\omega(s) \Bigg\|^2 \\
\leq \; & 4Ml_1^2 l_4 \left(T \int_0^T E \left\| f(s, x_s) - f(s, y_s) \right\|^2 ds + \int_0^T E \left\| \sigma(s, x_s) - \sigma(s, y_s) \right\|^2 ds \right) \\
& + 4l_1 \left(T \int_0^t E \left\| f(s, x_s) - f(s, y_s) \right\|^2 ds + \int_0^t E \left\| \sigma(s, x_s) - \sigma(s, y_s) \right\|^2 ds \right) \\
= \; & 4Ml_1^2 l_4 L (T+1) \int_0^T E \left\| x_s - y_s \right\|^2 ds + 4l_1 L (T+1) \int_0^t E \left\| x_s - y_s \right\|^2 ds \\
\leq \; & 4l_1 L (Ml_1 l_4 + 1)(T+1) \int_0^T E \left\| x_s - y_s \right\|^2 ds \\
= \; & 4l_1 L (Ml_1 l_4 + 1)(T+1) \left(\int_0^T E \int_{-h}^0 \left\| x(t+s) - y(t+s) \right\|^2 dt ds \right) \\
= \; & 4l_1 L (Ml_1 l_4 + 1)(T+1) \left(\int_0^T E \int_{s-h}^s \left\| x(v) - y(v) \right\|^2 dv ds \right) \\
\leq \; & 4l_1 L (Ml_1 l_4 + 1)(T+1) \left(\int_0^T E \int_{-h}^T \left\| x(v) - y(v) \right\|^2 dv ds \right) \\
\leq \; & 4l_1 L (Ml_1 l_4 + 1)(T+1) T \left(\int_{-h}^T E \left\| x(v) - y(v) \right\|^2 dv \right)
\end{aligned}$$

Cela implique que

$$\begin{aligned}
\left(\int_{-h}^T E \left\| (\mathbf{S}x)(t) - (\mathbf{S}y)(t) \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} & = \left(\int_0^T E \left\| (\mathbf{S}x)(t) - (\mathbf{S}y)(t) \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \left(\int_0^T 4l_1 L (Ml_1 l_4 + 1)(T+1) T \left(\int_{-h}^T E \left\| x(v) - y(v) \right\|^2 dv \right) dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \left(4l_1 L (Ml_1 l_4 + 1)(T+1) T^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-h}^T E \left\| x(t) - y(t) \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Donc, $\mathbf{S}$ ***est une application de contraction si l'inégalité*** (3.2) ***est vérifiée. Alors***

l'application S ***admet un unique point fixe***$x(.)$ ***dans*** X_2 ***qui est la solution*** (1.2). ***Ainsi le système*** (1.2) ***est complètement controlable. Le théorème est prouvé.***

2.4 Exemple

Exemple 2.4.1 ***Considérons le système stochastique semi linéaire à deux dimensions avec retard dans le controle suivant***

$$\begin{cases} dx(t) = [A_0 x(t) + B_0 u(t-h) + B_1 u(t-h) + f(t.x_t)] + \sigma(t, x_t)\, d\omega(t) \ \ \textbf{\textit{pour}}\ t \in [0, T] \\ x(0) = \Psi(0) = x_0 \\ u(t) = 0, \ \ t \in [-h, 0]. \end{cases} \tag{4.1}$$

$\omega(t)$ ***est le processus de Wiener à une dimension et***

$$A_0 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \ B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ B_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f(t, x_t) = \frac{1}{a} \begin{bmatrix} \sin x_t \\ x_t \end{bmatrix} \ , \ \sigma(t, x_t) = \frac{1}{b} \begin{bmatrix} x_t & 0 \\ 0 & \cos x_t \end{bmatrix}$$

$$\|f(t, x_t) - f(t, y_t)\|^2 \leq \frac{2}{a^2} \|x_t - y_t\|^2$$

$$\|\sigma(t, x_t) - \sigma(t, y_t)\|^2 \leq \frac{2}{b^2} \|x_t - y_t\|^2$$

alors. En prenant la norme euclidienne

$$\|f(t, x_t) - f(t, y_t)\|^2 + \|\sigma(t, x_t) - \sigma(t, y_t)\|^2 \leq L \|x_t - y_t\|^2 \tag{4.2}$$

où

$$L = \left(\frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2} \right) \tag{4.3}$$

on a donc

$$\|A_0\| = 2, \ \ \|B_0\| = \sqrt{2}, \ \ \|B_1\| = \sqrt{2}$$

On peut voir que les conditions du théorème (3.1) ***et à l'aide de la définition et lemme*** 2 ***pour un*** L ***suffisament petit dans*** (4.3), ***sont vérifiées pour tout*** T. ***Alors le système*** (4.1) ***est complètement contrôlable.***

Conclusion

Dans ce mémoire, des conditions suffisantes pour une contrôlabilité exacte relative des systèmes de contrôle stochastiques linéaires à dimensions finies non stationnaires avec un retard dans le temps dans le contrôle ont été formulées et prouvées. Ces conditions s'étendent au cas d'un retard les conditions connues de contrôlabilité exacte stochastique pour des systèmes de commande dynamiques sans retards. Enfin, il convient de souligner qu'en utilisant les techniques standard, il est possible d'étendre les résultats présentés dans ce mémoire aux systèmes de contrôle stochastiques linéaires non stationnaires plus généraux avec de nombreux retards dans le temps. De plus, l'extension de la contrôlabilité exacte absolue stochastique et de la contrôlabilité approximative absolue stochastique dans un intervalle de temps donné est également possible.

Bibliographie

[1] Klamka, J. : *Stochastic controllability of linear systems with delay in control.* Bull. Pol. Acad. Sci. Tech. Sci.*55(1), 23â“29 (2007)*

[2] Mahmudov, N.I., Zorlu, S. : Controllability of nonlinear stochastic systems. J. Control *76, 95â“104 (2003)*

[3] Bernt, O. : Stochastic Differential Equations an Introduction with Applications*, 6th edn. Springer*

[4] Shukla, A., Sukavanam, N., & Pandey, D. N. (2015). Complete controllability of semi-linear stochastic system with delay. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1952-), 64(2), 209-220.

[5] Benabdallah, A. (2005). Une introductiona la théorie du contrôle. CMI-LATP, technopple Chateau-cobert, Univercité de provence.

[6] Bedraoui, S. (2019).la théorie du contrôle. Département mathématique, Cours Master 2, Univercité de Guelma.