République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : EDP Et Analyse Numérique

Par :

Mr Makhlouf Salah Eddine

Intitulé

Problèmes de Sturm-Liouville réguliers

Dirigé par : Laribi Naima

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. Boussetila Nadjib	Professeur	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. Laribi Naima	MCB	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. Bendjazia Nassima	MCB	Univ-Guelma

Session Juillet 2019

Table des matières

Remerciements

En préambule à ce mémoire, je tiens à remercier en premier lieu ***ALLAH*** *qui m'a donné le pouvoir d'effectuer ce modeste travail.*

Mes profonds remerciements, ma reconnaissance et ma gratitude vont à mon directeur de mémoire madame Dr ***Laribi Naima****. Je la remercie sincèrement pour la confiance qu'elle m'a accordé, ses encouragements, ses conseils précieux ainsi que pour le temps qu'elle m'a accordé malgré ses obligations et ses responsabilités. Je la remercie également pour sa rigueur, sa bonne humeur et sa modestie.*

J'adresse aussi mes sincères remerciements aux membres de jury qui ont accepté la lourde tâche de lire, commenter et juger ce mémoire.

Mes vifs remerciements vont également *à tous les professeurs qui nous ont enseigné et qui par leurs compétences nous ont soutenu dans la poursuite de nos études.*

Mes derniers remerciements, et pas les moindres, vont à **ma mère** *et à* **mon père** *qui m'ont tant apporté d'amour, d'encouragement et sans eux je n'aurais pas pu aller au bout de ce travail, à mes chères frères* ***Walid*** *et* ***karim*** *qui m'ont toujours apporté leur support moral, ainsi que toute ma famille*

Je termine avec un grand remerciement bien particulier à toute personne qui de près ou de loin a contribué à ma réussite.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail:

À mes parents

À ma très chère Mère ; et à mon très cher Père ; pour ses sacrifices

De tous les instants.

À mes beaux frères

À Toute ma famille Guernine et Bazine

À tous Mes enseignants sans Exception

À mes tendres amies

Mourad, Zaki, Amin, Bilal.Ikhlasse

Et à tous ceux qui ont toujours cru en moi, m'ont accompagné et soutenu ...

Résumé

Résumé : On va étidier le problème de Sturm-Liouville régulier défini par:

$$\begin{cases} \lambda u - Lu = f \\ u \in D_L \end{cases}$$

où f est un paramétre complexe et L est l'opérateur de Sturm-Liouville défini par:

$$\begin{cases} L : D_L \to C\left[a, b\right] \\ Lu = \frac{d}{dx}\left(p\left(x\right)\frac{du}{dx}\right) - q\left(x\right)u \end{cases}$$

sur un intervalle $[a, b]$ et des conditions au bord:

$$\begin{aligned} p\left(a\right)u\prime\left(a\right)\sin\theta - u\left(a\right)\cos\theta &= 0 \\ p\left(b\right)u\prime\left(b\right)\sin\gamma - u\left(b\right)\cos\gamma &= 0 \end{aligned}$$

la fonction p est dans C^1 et strictement positive sur $[a, b]$, la fonction q est réelle et continue sur $[a, b]$ et $D_L = \left\{ \begin{array}{c} u \in C^2\left[a, b\right] \ / \ p\left(a\right)u\prime\left(a\right)\sin\theta - u\left(a\right)\cos\theta = 0, \\ p\left(b\right)u\prime\left(b\right)\sin\gamma - u\left(b\right)\cos\gamma = 0 \end{array} \right\}$ pour cela on fait l'étude spectrale de l'opérateur de Sturm-Liouville. On trouve que les valeurs propres sont réelle et les fonction propre sont orthogonaux.

Mots-clés : opérateur de Sturm-Liouville, problème de Sturm Liouville, opérateur intégral, fonction de Green, la Résolvante.

Introduction

Plusieurs équations de la physique mathématique telles que l'équation des ondes, l'équation de Laplace, l'équation de la chaleur, l'équation de Schrodrnger etc...., peuvent être traitées grâce à la méthode de sépartion des variables qui raméne ces équations au dérivées partielles à des équation différentielles linéaires du second ordre de la forme:

$$\alpha(x)\,u'' + \beta(x)\,u' + \gamma(x)\,u = \lambda u, \ \ où\ \lambda \in \mathbb{C}$$

dont on cherche les solutions u satisfaisant à des conditions imposées par le probléme physique étudié.

Dans le cas où $\alpha'(x) = \beta(x)$ avec $\alpha(x) \in C^1$ et $\alpha(x) > 0\ \forall x \in I$ et $\gamma(x)$ est une fonction réelle l'équation précidente s'écrit sous la forme:

$$Lu = \lambda u$$

où $Lu = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) - q(x)\,u$ avec $p(x) = \alpha(x)$ et $q(x) = -\gamma(x)$. Cet opérateur s'appelle l'opérateur de Sturm-Liouville.

Dans ce travail, on va étudier le problème de Sturm-Liouville régulier défini par:

$$\begin{cases} \lambda u - Lu = f \\ u \in D_L \end{cases}$$

sur un intervalle $[a,b]$ et $D_L = \left\{ \begin{array}{c} u(x) \in C^2([a,b]) : p(a)\,u'(a)\sin\theta - u(a)\cos\theta = 0 \ et \\ q(b)\,u'(b)\sin\gamma - u(b)\cos\gamma = 0 \end{array} \right\}$

Notre mémoire est construit en trois chapitres:

Dans le premier chapitre, on introduit les outils de base. Tout d'abord nous rappellons quelques définitions et rappels qui seront utilisé par la suite $[4-6]$

Dans le deuxiéme chapitre, on va étudier le problème de Sturm-Liouville régulier [4] . Finalement, dans le troisiéme chapitre, on va faire une application numérique sur le problème donné.

CHAPITRE 1 Préliminaires

Dans ce chapitre, on va rappeler quelques notions de base qui seront utilisées par la suite $[4-6]$.

1.1 Rappels et définitions

Définition 1.1.1 *On dit qu'une famille $\{x_i,\ i \in I\}$ d'éléments d'un espace de Hilbert E, est totale dans E si le sous-espace de Hilbert qu'elle engendre est égal à E.*

Une suite orthonormée et totale dans E est appelée une base hilbertienne de E.

Définition 1.1.2 *On dit que T est de type Hilbert-Schmidt s'il existe une base hilbertienne $(e_n)_{n\in N^*}$ telle que:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| Te_n \|^2 < \infty$$

Définition 1.1.3 *Soient E un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un unique opérateur continu de E dans E, noté A^* et appelé l'adjoint de A, tel que*

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle,\ \forall x, y \in E$$

En outre, on a $(A^*)^* = A$ et $\| A^* \| = \| A \| = \| A^*A \|^{\frac{1}{2}}$

Définition 1.1.4 *Un opérateur $A \in \mathcal{L}(E)$ est dit auto-adjoint (ou parfois hermitien) s'il est égal à son adjoint, c'est-à-dire si, quels que soient x et y dans E,*

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$$

Définition 1.1.5 *Une équation intégrale est une équation de la forme:*

$$f(x) = \int_a^b K(x,t)\,\phi(t)\,dt$$

la notation est celle d'Arfken et Weber. Ici la fonction inconnue est ϕ, tandis que f et K sont des fonctions connues. la fonction de deux variables K est souvent appelée le noyau de l' opérateur intégral.

Définition 1.1.6 *Une série à termes réels ou complexes $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolument quand la série de terme général $|an|$ converge. Dans ce cas, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge elle aussi et l'inégalité triangulaire se généralise en*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mid a_n \mid$$

Si la série est convergente, mais non absolument convergente, elle est dite semi-convergente.

Définition 1.1.7 *Un nombre complexe λ est une valeur propre de (D_L, L) s'il existe une fonction u dans D_L, non nulle et vérifiant*

$$\lambda u - Lu = 0$$

la fonction u est alors apelée une fonction propre de (D_L, L) associée à la valeur propre de λ.

Définition 1.1.8 (*Inégalité de Cauchy-Schwarz*) *Soit $(E, \langle ., . \rangle)$ un espace préhilbertien réel ou complexe. Alors, pour tous vecteurs x et y de E,*

$$\mid \langle x, y \rangle \mid \leq \| x \| \| y \|$$

De plus, les deux membres sont égaux si et seulement si x et y sont linéairement dépendants.

Définition 1.1.9 *Soient un espace mesurable (X, A) et $a \in X$.On appelle mesure de Dirac au point a, et l'on note δ_a, la mesure sur (X, A) définie par :*

$$\forall A \in A,\ \delta_a(A) = 1_A(a) = \begin{cases} 1,\ si\ a \in A \\ 0,\ si\ a \notin A \end{cases} \text{ où } 1_A \text{ désigne la fonction indicatrice de } A.$$

Les mesures de Dirac ont une utilité pratique ; elles permettent par exemple de construire des mesures par approximations successives.

Définition 1.1.10 *La série $(\sum f_n)$ converge uniformément sur I si la suite de fonctions (S_n) converge uniformément sur I.*

Définition 1.1.11 *Soient X un ensemble, (Y, d) un espace métrique et A un sous-ensemble de X. Soient $(f_n)_{n \in N}$ une suite de fonction définies sur X et à valeurs dans Y et f une fonction définie sur X à valeurs dans Y. On dit que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur A si:*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in N, \forall n \in N\ \ [n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \forall x \in A,\ d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon]$$

Définition 1.1.12 *On dit qu'une partie A d'un espace métrique est compacte si toute suite bornée de A possède une suite extraite convergente.*

Définition 1.1.13 *Soit E un espace de Hilbert et A un élément de $\mathcal{L}(E)$. On dit que A est compact s'il transforme tout sous-ensemble borné de E en un ensemble relativement compact.*

Définition 1.1.14 *Un sous-ensemble F de E est relativement compact si son adhérence $\overline{F}$ est compacte. le sous-ensemble F est dit précompact si son complété est compact.*

1.2 Opérateur à Noyau Hermitien Continu

Dans cette section, on va étudier les propriétés des opérateurs à noyau. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et k une fonction de $I \times I$ à valeurs complexes, mesurable et de carré intégrable pour la mesure de Lebesgue. On suppose que k est hermitienne, c'est-à-dire vérifiant

$k(x,y) = \overline{k(y,x)}$. On désigne par K l'opérateur de noyau k défini, pour f dans $L^2(I)$, par

$$Kf(x) = \int_I k(x,y)\, f(y)\, dy$$

On sait que K est un opérateur de Hilbert-Schmidt (donc compact) et auto-adjoint.

Soit (λ_n) la suite des valeurs propres non nulles de K, chacune répétée un nombre de fois égal à sa multiplicité, et rangées de façon que $(|\ \lambda_n\ |)$soit une suite décroissante, et soit (ϕ_n) la suite des fonctions propres associées, qu'on suppose normalisées

$$K = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \phi_n \otimes \overline{\phi_n} \text{ égalité dans } L^2(I \times I)$$

et la norme de Hilbert-Schmidt de l'opérateur K est donnée par

$$|||\ K\ |||^2 = \|\ k\ \|^2_{L^2(I\times I)} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2$$

L'équation intégrale de Fredholm s'écrit ici

$$\int_I k(x,y)\, u(y)\, dy - \lambda u = g$$

où g est donnée et u la fonction à chercher. Cette équation est appelée équation de Fredholm de première espèce si $\lambda = 0$, et équation de Fredholm de second espèce si $\lambda \neq 0$.

On suppose, dans toute la suite, que I est un intervalle fermé borné $[a,b]$ et que k est continu sur $[a,b] \times [a,b]$. Nous allons voir que, dans ces conditions, non seulement au sens de la norme de $L^2[a,b]$, mais aussi uniformément et absolument, dès que le second membre g est une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$.

Théorème 1.2.1 *L'opérateur K est une application compacte de l'espace de Hilbert $L^2[a,b]$ dans l'espace $(C[a,b] \parallel \infty \parallel)$.*

Remarque 1.2.1 *Ce qui précède montre en outre que, pour toute f dans $L^2[a,b]$, Kf est une fonction continue sur $[a,b]$. En particulier, puisque $K\phi_n = \lambda_n \phi_n$, les fonctions propres associées aux valeurs propres non nulles de l'opérateur K sont des fonctions continues sur l'intervalle $[a,b]$.*

Théorème 1.2.2 *Pour toute fonction f de $L^2[a,b]$, on a*

$$Kf(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x) \tag{1.2.1}$$

où la série converge absolument et uniformément sur $[a,b]$.

Considérons maintenant l'équation intégrale

$$\lambda u(x) - \int_a^b k(x,y)\, u(y)\, dy = f(x) \tag{1.2.2}$$

où λ est un nombre complexe non nul, f est une fonction continue donnée sur $[a,b]$ et où u est une fonction continue à déterminer.

Théorème 1.2.3 *(i) Si λ n'est pas valeur propre de K , l'équation (1.2.2) admet une solution unique donnée par*

$$u(x) = \frac{1}{\lambda} f(x) + \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x) \tag{1.2.3}$$

où la série converge absolument et uniformément sur $[a,b]$.

(ii) Si λ est une valeur propre de K, l'équation (1.2.2) n'admet de solution que si f est orthogonale au sous-espace propre E_λ correspondant à λ, les solutions sont alors données par

$$u(x) = \frac{1}{\lambda} f(x) + \frac{1}{\lambda} \sum_{\lambda_n \neq \lambda}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x) + u_\lambda$$

où u_λ est une fonction arbitraire dans le sous-espace propre E_λ; la convergence de la série du second membre étant absolue et uniforme sur $[a,b]$.

Corollaire 1.2.1 *L'unique solution u de l'équation (1.2.2) s'écrit*

$$u(x) = -\frac{1}{\lambda} f(x) + \int_a^b R(x,y;\lambda)\, f(y)\, dy$$

avec

$$R(x,y;\lambda) = -\frac{1}{\lambda^2} K(x,y) + \frac{1}{\lambda^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2}{(\lambda_n - \lambda)} \phi_n(x)\, \overline{\phi_n}(y)$$

et où la série du second membre est absolument et uniformément convergente sur $[a,b]$.

Notons que, en général, la série $\sum \lambda_n \phi_n(x)\, \overline{\phi_n}(y)$ ne converge pas. Nous allons donner, dans ce qui suit, une condition sur le noyau k qui assure sa convergence uniforme sur l'intervalle produit.

Définition 1.2.1 *On dit qu'un noyau k, continu sur $[a,b]\times[a,b]$, est de type positif s'il vérifie pour tout f dans $L^2[a,b]$*

$$\int_a^b \int_a^b k(x,y)\, f(y)\, \overline{f(y)} dydx \geq 0$$

k est de type positif si, et seulement si, l'opérateur K est positif.

Proposition 1.2.1 *Tout noyau k de type positif vérifie, pour tout (x,y) dans $[a,b]\times[a,b]$,*

(a) $k(x,x) \geq 0$

(b) $k(x,y) = \overline{k(y,x)}$

Notons que si le noyau k est de type positif, l'opérateur intégral K qui lui est associé est positif et ses valeurs propres sont positives ou nulles. Comme précédemment nous désignerons par (λ_n) et (ϕ_n) les valeurs propres et fonctions propres de K.

Théorème 1.2.4 *(de Mercer) Si k est continu sur $[a,b]\times[a,b]$ et de type positif. Alors, pour tout (x,y) dans $[a,b]\times[a,b]$*

$$K(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \phi_n(x)\, \overline{\phi_n(y)}$$

où la série converge absolument et uniformément sur $[a,b]\times[a,b]$

Corollaire 1.2.2 *(Formule de Trace) Si k est un noyau continu sur $[a,b]\times[a,b]$ et de type positif, alors*

$$\int_a^b K(x,x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$$

Le second membre est appelé la trace de l'opérateur K.

1.3 Opérateur différentiel linéaire du second ordre

Soient α_0, α_1 et α_2 des fonctions continues sur un intervalle I à valeurs réelles, on suppose α_0 strictement positive dans I.

On désigne par $\mathcal{L}$ l'opérateur différentiel linéaire et du second ordre qui, à une fonction u dans l'espace $C^2(I)$ des fonctions deux fois continûment dérivables sur I, associe

$$\mathcal{L}u = \alpha_0 u'' + \alpha_1 u' + \alpha_2 u$$

On rappelle le théoréme d'existence et d'unicité de Picard qui dit que, pour chaque choix de x_0 dans I, de $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ dans $C \times C$ et de f dans $C(I)$, le problème

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f \\ u(x_0) = \varepsilon_1, \ u'(x_0) = \varepsilon_2 \end{cases}$$

admet une unique solution u dans $C^2(I)$.

IL en résult que:

(i) l'ensemble des solution de l'équation différentielle homogène $\mathcal{L}u = 0$ est un sous-espace vectoriel de $C^2(I)$ de dimension deux.

(ii) Si u_0 est un solution particuliére de l'équation $\mathcal{L}u = f$ et si u_1 et u_2 sont deux solution linéairement indépendantes de l'équation homogéne $\mathcal{L}u = 0$, alors, la solution générale de l'équation

$\mathcal{L}u = f$ est de la forme

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + u_0$$

où c_1 et c_2 sont deux constantes arbitraires.

Définition 1.3.1 *(L'opérateur adjoint) On appelle adjoint formel de l'opérateur* $\mathcal{L}$ *, et on note* $\mathcal{L}^+$ *, l'opérateur défini par*

$$\mathcal{L}^+ u = (\alpha_0 u)'' - (\alpha_1 u)' + \alpha_2 u$$

L'adjoint formel de $\mathcal{L}$ *est en général différentiel de* $\mathcal{L}$ *, il lui est rattaché par la relation suivante , dite identité de lagrange*[2]

Proposition 1.3.1 *Quels que soient* u *et* v *dans* $C^2(I)$

$$v\mathcal{L}u - u\mathcal{L}^+ v = \frac{d}{dx}[u, v]$$

avec

$$[u, v] = \alpha_0 W(u, v) + (\alpha_1 - \alpha_0) uv$$

La vérification de cette identité est immédiate et on en déduit

Corollaire 1.3.1 *(Fomule de Green) Pour toutes fonction u et v dans $C^2(I)$ et x_1 , x_2 dans I , on a*

$$\int_{x_1}^{x_2} (v\mathcal{L}u - u\mathcal{L}^+v)dx = [u,v](x_2) - [u,v](x_1)$$

La formule de Green est souvent utilisée lorsque le second membre est nul .Elle s'écrit de façon trés simple lorsque l'opérateur $\mathcal{L}$ est formellement auto-adjoint

Définition 1.3.2 *L'opérateur différentiel $\mathcal{L}$ est dit formellement auto-adjoint si , pour tout u dans $C^2(I)$, $\mathcal{L}u = \mathcal{L}^+u$.*

Théorème 1.3.1 *(a) L'opérateur $\mathcal{L}$ est formellement auto-adjoint si , et seulement si , les coefficients α_0 et α_1 sont reliés par $\alpha_0\prime = \alpha_1$.*

(b) Tout opérateur L, formellement auto-adjoint (à coefficients réels), s'écrit sous la forme

$$Lu = (pu\prime)\prime + qu$$

et pour un tel opérateur , la formule de Green s'écrit

$$\int_{x_2}^{x_2} (uLv - vLu)dy = p(x_2)W(u,v)(x_2) - p(x_1)W(u,v)\,(x_1)$$

(c) Si $Lu = 0$ et $Lv = 0$, alors $pW(u,v)$ est une constante.

Théorème 1.3.2 *Soit $\mathcal{L}$ l'opérateur différentiel défini par*

$$\mathcal{L}u = \alpha_0 u" + \alpha_1 u\prime + \alpha_2 u$$

alors l'opérateur $\mu\mathcal{L}$, avec

$$\mu(x) = \exp(\int_{\tau}^{x} \frac{\alpha_1 - \alpha_0'}{\alpha_0} dy)$$

est formellement auto-adjoint (τ est quelconque dans I).

CHAPITRE 2

Opérateur de Sturm-Liouville régulier

Dans cette section, on va étudier le problème de Sturm-Liouville.

Définition 2.0.3 *On appelle opérateur de Sturm-Liouville l'opérateur L défini par*

$$\begin{aligned} L &: C^2(\Omega) \to C(\Omega) \\ Lu &= \frac{d}{dx}(p(x)\frac{du}{dx}) - q(x)u \end{aligned}$$

où Ω est un intervalle de $\mathbb{R}$, p est une fonction de C^1 et strictement positive sur Ω, la fonction q est réelle et continue sur Ω..

Remarque 2.0.1 *L'opérateur de Sturm-Liouville est formellement auto-adjoint)*

Définition 2.0.4 *Le problème de Sturm-Liouville consiste à résoudre l'équation de Sturm-Liouville définie par*

$$\begin{cases} \lambda u - Lu = f \\ u \in D_L \end{cases} \tag{2.0.1}$$

avec

$$D_L = \left\{u \in C^2(\Omega) : p(a)\,u\prime(a)\sin\theta - u(a)\cos\theta = 0,\ p(b)\,u\prime(b)\sin\gamma - u(b)\cos\gamma = 0\right\}$$

où f est une fonction continue sur Ω donnée, λ est un paramètre complexe et u est une fonction inconnue à chercher.

Si $\Omega = [a,b]$ le problème de Sturm-Liouville est régulier.

Définition 2.0.5 *Soient u et v deux fonction dans $C^2[a,b]$. On designe par $W\ (u,v)$ leur Wronskien c'est -à-dire*

$$W\,(u,v) = uv\prime - vu\prime$$

et

$$[u,v] = pW\,(u,v)$$

et on obtient

$$\int_a^b (uLv)dx = \int_a^b (vLu)dx \tag{2.0.2}$$

Pour cette raison, on dit que l' operateur (D_L, L) est symétrique ou formellement auto-adjoint.

2.1 Fonction de Green et Résolvante

Soit u_1 la solution de $Lu = 0$ qui vérifie

$$u_1\,(a) = \sin\theta, \quad p\,(a)\,u\prime_1\,(a) = \cos\theta$$

et soit u_2 la solution de $Lu = 0$ qui vérifie

$$u_2\,(b) = \sin\gamma, \; p\,(b)\,u\prime_2\,(b) = \cos\gamma$$

Proposition 2.1.1 *La fonction $[u_1, u_2]$ est constante. Comme p est strictement positive sur $[a,b]$, cette constante est nulle si, et seulement si, le Wronskien $W\,(u_{1,}u_2)$ est identiquement nul.*

Preuve. On a

$$\frac{d}{dx}\,[u_1, u_2] = u_1 L u_2 - u_2 L u_1 \tag{2.1.1}$$

de telle sorte que

$$\int_a^b (u_1 L u_2 - u_2 L u_1)\,dx = [u_1, u_2]\,(b) - [u_1, u_2]\,(a)$$

et si u_1 et u_2 sont dans D_L, le second membre de l'égalité ci-dessus est nul.

D'où le résultat est prouvé. ■

Proposition 2.1.2 *Si l'opérateur (D_L, L) est injectif, alors les solutions u_1 et u_2 sont nécessairement liéairement indépendantes.*

On peut donc énoncer

Théorème 2.1.1 [4] *On suppose l'opérateur (D_L, L) injectif.*

(i) Soient f une fonction de $C[a,b]$ et u la fonction définie par

$$u(x) = \int_a^b G(x,y) f(y)\, dy$$

alors, la fonction u appartient à D_L et vérifie $Lu = -f$

(ii) Soient u une fonction de D_L et $f = -Lu$, alors

$$u(x) = \int_a^b G(x,y) f(y)\, dy$$

Démonstration. [4] (i) On suppose que l'opérateur (D_L, L) est injectif, c'est-à-dire que le problème

$$\begin{cases} Lu = 0 \\ u \in D_L \end{cases}$$

■

n'admet que la solution nulle $u = 0$. Les fonctions u_1 et u_2, sont donc linéairement indépendantes. On va résoudre, par la méthode de la variation des constantes de Lagrange, le problème

$$\begin{cases} Lu = -f \\ u \in D_L \end{cases} \tag{2.1.2}$$

où f est une fonction donnée, continue sur $[a,b]$. la méthode consiste à poser

$$u(x) = c_1(x) u_1(x) + c_2(x) u_2(x)$$

où les fonctions c_1 et c_2 vérifient $u_1 c\prime_1 + u_2 c\prime_2 = 0$, de telle sorte que l'on ait :

$$\begin{cases} p(u\prime_1 c\prime_1 + u\prime_2 c_2) = f \\ u_1 c\prime_1 + u_2 c\prime_2 = 0 \end{cases}$$

d'où il vient $[u_{1,}u_2]\, c\prime_1 = -u_1 f$. En tenant compte du fait que u appartient à D_L, c'est-à-dire satisfait les conditions à la frontière, on trouve $c_2(a) = 0$ et $c_1(b) = 0$ et par suit l'intégration du système précédent donne :

$$c_1(x) = -\int_x^b \frac{u_{2(y)} f(y)}{[u_{1,}u_2]} dy, c_2(x) = -\int_a^x \frac{u_{1(y)} f(y)}{[u_{1,}u_2]} dy$$

Ainsi, le problème (2.1.1) admet une solution qui s'écrit :

$$u(x) = \int_a^b G(x, y) f(y) dy$$

avec

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{-1}{[u_{1,}u_2]} u_1(y) u_2(x), \ si \ a \leq y \leq x \leq b \\ \frac{-1}{[u_{1,}u_2]} u_1(x) u_2(y), \ si \ a \leq x \leq y \leq b \end{cases} \tag{2.1.3}$$

Démonstration. (ii)On pose :

$$v(x) = \int_a^b G(x, y) f(y) dy$$

■

d'aprés l'assertion (i) la fonction v appartient à D_L et $Lv = -f$,

donc $L(u - v) = 0$. Comme l'opérateur (D_L, L) est injectif, on en déduit que $u = v$.

Définition 2.1.1 [4]*La fonction $G(.,.)$ s'appelle la fonction (ou le noyau) de Green de l'opérateur (D_L, L).*

Le théorème 2.1.1 exprime que si l'opérateur $(D_L, -L)$ est injectif, alors il est inversible et que son inverse est l'opérateur intégral à noyau donné par

$$\mathbf{G} f(x) = \int_a^b G(x, y) f(y) dy$$

La fonction de Green est caractérisée par les propriétés qui permettent donc de la construire.

proprieté : Soit G_x la fonction $y \to G(x, y)$

(a) La fonction G_x vérifie les conditions à la frontiére en a et en b, elle est de classe C^2 sur $[a, x[$ et $]x, b]$ et sur chacun de ces intervalles elle satisfait

$$LG_x = 0$$

(b) En x la dérivée de G_x est discontinue et le saut en ce point est

$$\frac{d}{dy}G_x(x+0) - \frac{d}{dy}G_x(x-0) = -\frac{1}{p(x)}$$

Si δ_x désigne la masse de Dirac au point x, ces propriétés montrent qu'au sens des distributions,

$$LG_x = -\delta_{x.}$$

Exemple 2.1.1 *Soit $(D_L, -L)$ l'opérateur défini par*

$$D_L = \left\{u \in c^2[0,1] \ / \ u(0) = 0, \ u(1) = 0\right\}$$

$$Lu = u\prime\prime, u \in D_L$$

Pour trouver son inverse, on doit résoudre:

$$\begin{cases} u\prime\prime = -f \\ u(0) = 0 \ , \ u(1) = 0 \end{cases}$$

pour démontrer que (L, D_L) est injectif il suffit de démontrer que

$$\begin{cases} Lu = 0 \\ u \in D_L \end{cases} \qquad (*)$$

admet une solution unique $u = 0$

l'équation caractiristique est $r^2 = 0 \Leftrightarrow r = 0$ est une racine double alors la solution de l'équation $u\prime\prime = 0$ est $u = c_1x + c_2$ avec $u \in D_L \Leftrightarrow u(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$, $u(1) = 0 \Rightarrow$ $c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

donc l'unique solution de $(*)$ est $u = 0$ alors (L, D_L) est injectif donc u_1 et u_2 sont linéairement indépendant tel que: u_1 est la solution du probléme

$$\begin{cases} Lu = 0 \\ u(0) = 0, \ u\prime(0) = 1 \end{cases}$$

$u(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

$u\prime(0) = c_1 = 1 \Rightarrow u_1 = x$

avec u_2 *est la solution de:*

$$\begin{cases} Lu = 0 \\ u(1) = 0, \ \ u\prime(1) = 1 \end{cases}$$

$u(1) = c_1 + c_2 = 0$

$u\prime(1) = c_1 = 1 \Rightarrow c_2 = -1$ *donc* $u_2 = x - 1$ *alors d'aprés le theorème* (2.1.1) *on trouve que la solution* u *du problème* $(*)$ *est donné par:*

$$u(x) = \int_0^1 G(x,y)\, f(y)\, dy$$

avec:

$$G(x,y) = \begin{cases} \frac{-1}{[u_1,u_2]} u_1(y)\, u_2(x)\,, \ \ si \ 0 \le y \le x \le 1 \\ \frac{-1}{[u_1,u_2]} u_1(x)\, u_2(y)\,, \ \ si \ 0 \le x \le y \le 1 \end{cases}$$

et $[u_1, u_2] = u_1 u_2\prime - u_2 u_1\prime = x - (x-1) = 1,$ *alors*

$$G(x,y) = \begin{cases} -y(x-1)\,, \ \ si \ 0 \le y \le x \le 1 \\ -x(y-1)\,, \ \ si \ 0 \le x \le y \le 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} y(1-x)\,, \ \ si \ 0 \le y \le x \le 1 \\ x(1-y)\,, \ \ si \ 0 \le x \le y \le 1 \end{cases}$$

donc

$$u(x) = \int_0^x y(1-x)\, f(y)\, dy + \int_x^1 x(1-y)\, f(y)\, dy$$

Exemple 2.1.2 *Soit* $(D_L, -L)$ *l'opérateur défini par*

$$D_L = \left\{ u \ \in \ c^2[0,\pi] \ \ / \ u(0) = 0, u(\pi) = 0 \right\}$$

$$Lu = e^{-2x}\left[\left(e^{2x} u\prime \right) + e^{2x} u \right], \ \ u \in D_L$$

Pour inverser cet opérateur, on doit résoudre

$$\begin{cases} Lu = -f \\ u(0) = 0, u(\pi) = 0 \end{cases}$$

L'équation différentielle s'écrit :

$$u\prime\prime + 2u\prime + u = -f$$

En posant $u = e^{-x}v$*, l'équation devient* $e^{-x}v'' = -f$*, et sa solution générale est donc de la forme :*

$$v(x) = -\int_0^x (x-y)\, e^y f(y)\, dy + c_1 x + c_2$$

Soit

$$u(x) = -\int_0^x (x-y)\, e^{(y-x)} f(y)\, dy + c_1 x e^{-x} + c_2 e^{-x}$$

Ecrivant que u *vérifie les conditions aux bords en* 0 *et en* π*, on trouve*

$$c_2 = 0 \text{ et } c_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\pi - y)\, e^y f(y)\, dy$$

La solution u *est donc donnée par :*

$$u(x) = \int_0^\pi G(x,y)\, e^{2y} f(y)\, dy$$

avec

$$G(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}(\pi - x)\, y e^{-(x+y)}, & 0 \le y \le x \le \pi \\ \frac{1}{\pi}(\pi - y)\, x e^{-(x+y)}, & 0 \le x \le y \le \pi \end{cases}$$

On vérifie que la fonction G*, ainsi trouvée, est bien la fonction de Green de l'opérateur* $(D_L, -L)$*. Le théorème 2.1.1 s'applique à l'opérateur* $(D_L, \lambda I - L)$*, pourvu que celui-ci soit injectif. dans ce cas,* $(D_L, -\lambda I - L)$ *est inversible et son inverse, qu'on notera* G_λ *est de la forme*

$$G_\lambda f(x) = \int_a^b G_\lambda(x,y)\, f(y)\, dy$$

Où la fonction G_λ *est construite de façon analogue au cas où* $\lambda = 0$*. Plus précisément, soit* $u_1(.,\lambda)$ *la solution de* $\lambda u - Lu = 0$ *vérifiant*

$$u_1(a,\lambda) = \sin\theta, \quad p(a)\, u'_1(a,\lambda) = \cos\theta$$

et soit $u_2(.,\lambda)$ *la solution de* $\lambda u - Lu = 0$ *vérifiant*

$$u_2(b,\lambda) = \sin\gamma, \quad p(b)\, u'_2(b,\lambda) = \cos\gamma$$

Si $\lambda I - L$ *est injectif, les solution* $u_1(.,\lambda)$ *et* $u_2(.,\lambda)$ *sont linéairement indépendantes et par suit* $[u_1(.,\lambda), u_2(.,\lambda)]$ *est une constante non nulle qui ne dépend que de* λ*.*

On vérifie alors que le noyau G_λ est donné par

$$G_\lambda(x,y) = \begin{cases} \frac{-1}{[u_1(.,\lambda),u_2(.,\lambda)]} u_1(y,\lambda)\, u_2(x,\lambda)\,, & si\ a \le y \le x \le b \\ \frac{-1}{[u_1(.,\lambda),u_2(.,\lambda)]} u_1(x,\lambda)\, u_2(y,\lambda)\,, & si\ a \le y \le x \le b \end{cases} \tag{2.1.4}$$

Le théorème 2.1.1 se traduit par

Théorème 2.1.2 [4] *On suppose l' opérateur $(D_L, \lambda I - L)$ injectif*

(i) Soient f une fonction continue sur $[a,b]$ et u la fonction définie par

$$u(x) = \int_a^b G_\lambda(x,y)\, f(y)\, dy$$

alors , la fonction u appartient a D_L et vérifie $\lambda u - Lu = f$

(ii) Soient u une fontiocn de D_L et $f = \lambda u - Lu$, alors

$$u(x) = \int_a^b G_\lambda(x,y)\, f(y)\, dy$$

La famille des opérateurs G_λ s'appelle la Résolvante de l'opérateur (D_L, L). Dans la suite on pose

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\,\overline{g(x)}dx, \quad et \quad \|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$$

L'espace $C[a,b]$ est ainsi muni d'une structure d'espace préhilbertien dont le complété est l'espace $L^2[a,b]$.

Théorème 2.1.3 [4] *Les valaurs propres de l'opérateur (D_L, L) sont réelles. Les sous-espace propres correspondant sont de dimension 1 et deux à orthogonaux*

Démonstration. La formule (2.1.3) se traduit par $\langle Lu, u\rangle = \langle u, Lv\rangle$ si u et v sont dans D_L de sort que si u appartient à D_L, le nombre $\langle Lu, u\rangle$ est réel. Soient λ une valeur propre de (D_L, L) et ϕ une fonction propre associée

$$\langle L\phi, \phi\rangle = \lambda \|\phi\|^2$$

la valeur propre λ est donc réelle . Si ψ est une autre fonction propre associée a λ . la formule (2.1.3) montre que $pW(\phi,\psi)$ est une constante , comme sa valeur en a est nulle , on a $W(\phi,\psi) = 0$ et les fonctions ϕ et ψ sont donc proportionnelles.

Soient ϕ et ψ des fonction propre correspondant aux valeurs propre λ et υ

$$\langle L\phi,\psi\rangle = \lambda \langle \phi,\psi\rangle = \langle \phi, L\psi\rangle = \upsilon \langle \phi,\psi\rangle$$

d'ou

$$\langle \lambda - \upsilon\rangle \langle \phi,\psi\rangle = 0 \qquad etsi \qquad \lambda \neq \upsilon \quad , \quad \langle \phi,\psi\rangle = 0$$

■

Exemple 2.1.3 *Soit (D_L, L) l'opérateur défini par*

$$\lambda u - Lu = f$$

$$D_L = \left\{ u \ \in \ C^2 \ [0,1] \ \mid \ u(0) = 0, u(1) = 0 \right\}$$

$$Lu = u'', \quad u \in D_L$$

on a avec les notions utilisées

$$u_1(x,\lambda) = \frac{sh \ \sqrt{\lambda \ x}}{\sqrt{\lambda}}, \qquad u_2(x,\lambda) = \frac{sh \ \sqrt{\lambda \ (x-1)}}{\sqrt{\lambda}} \quad , \quad [u_1, u_2] = \frac{sh\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}$$

Les valeurs propres de l'opérateur (D_L, L) sont les complexes λ tels que $[u_1, u_2] = 0$, on en déduit que les valeurs propres de (D_L, L) et les fonctios propres (normalisées) associées sont

$$\lambda_n = -n^2\pi^2 \quad , \quad \phi_n(x) = \sqrt{2}\sin(n\pi x) \ , \quad n \geq 1$$

Compte tenu de la formule (2.1.3) , la fonction de Green G_λ est définie

pour $\lambda \neq \lambda_n$ par :

$$G_\lambda(x,y) = \frac{sh \ \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \begin{cases} \frac{sh \ \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \frac{sh \ \sqrt{\lambda}(1-y)}{\sqrt{\lambda}} \ , \ 0 \leq x \ \leq y \leq 1 \\ \frac{sh \ \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \frac{sh \ \sqrt{\lambda}(1-x)}{\sqrt{\lambda}} \ , \ 0 \leq y \ \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Exemple 2.1.4 *Soit (D_L, L) l'opérateur défini par*

$$D_L = \left\{ u \ \in \ C^2 \ [0,\pi] \ \mid \ u(0) = 0, u(\pi) = 0 \right\}$$

$$Lu = e^{-2x} \left[\left(e^{2x} u\prime \right) \prime \ + e^{2x} \ u \right], \quad u \in D_L$$

On vérifie que ses valeurs propres et les fonctions propres associées sont

$$\lambda_n = -n^2 \ , \ \phi_n(x) = c_n e^{-x} \sin nx \ , \ n \geq 1$$

où c_n est choisie de façon que ϕ_n soit normalisée.

2.2 Application des opérateurs intégraux à l'étude des opérateurs de Sturm-Liouville

Le théoréme 2.1.2 montre que si λ_0 n'est pas valeur propre de (D_L, L), le problème

$$\begin{cases} \lambda u - Lu = f \\ u \in D_L \end{cases}$$

est équivalent à l'équation intégrale

$$(\lambda - \lambda_0)\, G_{\lambda_0} u + u = G_{\lambda_0} f$$

qui fait intervenir l'opérateur intégral G_{λ_0} de noyau la fonction de green $G_{\lambda_0}(.,.)$ Nous allons voir qu'il est possible de choisir λ_0 de façon que $G_{\lambda_0}(.,.)$ soit un noyau de type positif, on pourra alors appliquer les résultats du section 1 et notamment le théoréme de mercer. Les notations étant toujours celles du section 3, montrons d'abord le théoréme suivant

Théorème 2.2.1 [4]*L'opérateur (D_L, L) est semi-borné supérieurement, c'est-à-dire qu'il existe une constante M telle que, pour tout u dans D_L, on ait*

$$\langle Lu, u\rangle \leq M \parallel u \parallel^2$$

Démonstration. Par intégration par parties on obtient

$$\langle Lu, u\rangle = [pu\prime\bar{u}]_a^b - \int_a^b \left(p \mid u\prime \mid^2 + q \mid u \mid^2\right) dx$$

Si les nombres θ et γ sont des multiples de $\pi/2$, le crochet est nul pour toute fonction u de D_L, donc pour une telle fonction

$$\langle Lu, u\rangle = -\int_a^b \left(p \mid u\prime \mid^2 + q \mid u \mid^2\right) dx \leq M \parallel u \parallel^2$$

avec

$$M = -\inf \{q(x)\,;\ a \leq x \leq b\}$$

Dans les autres cas, on a

$$\langle Lu, u\rangle = \mid u(b) \mid^2 \cot g\gamma - \mid u(a) \mid^2 \cot g\theta - \int_a^b \left(p \mid u\prime \mid^2 + q \mid u \mid^2\right) dx$$

(en convenant de poser, pour $\theta = k\pi, \mid u(a) \mid^2 \cot g\theta = 0$) ■

Lemme 2.2.1 [4]*Soit u une fonction dans $C^2[a,b]$. Pour tout ϵ strictement compris entre* 0 *et* $(a+b)/2$,

$$\max_{a\leq x\leq b} \mid u(x) \mid^2 \leq \frac{2}{\epsilon}\int_a^b \mid u(y) \mid^2 dy + 2\epsilon \int_a^b \mid u\prime(y) \mid^2 dy$$

Démonstration. De l'égalité

$$u(x) - u(y) = \int_y^x u\prime(t)\, dt$$

on déduit, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\mid u(x) - u(y) \mid^2 \leq \mid x - y \mid \int_a^b \mid u\prime(t) \mid^2 dt$$

de plus

$$\mid u(x) \mid^2 \leq 2 \mid u(x) - u(y) \mid^2 + 2 \mid u(y) \mid^2$$

d'où par intégration par rapport à y sur $[x, x+\epsilon]$ ou $[x-\epsilon, x]$ (l'un au moins de ces deux intervalles est inclus dans $[a,b]$)

$$\epsilon \mid u(x) \mid^2 \leq 2\int_a^b \mid u(y) \mid^2 dy + 2\epsilon^2 \int_a^b \mid u\prime(t) \mid^2 dt$$

le lemme est ainsi prouvé.

Terminons la preuve du théoréme 2.2.2. posons

$$A = \inf_{a \leq x \leq b} p(x), \qquad b = \inf_{a \leq x \leq b} q(x), \qquad et \;\; C = \sup_{a \leq x \leq b} \{|\cot g\theta|, |\cot g\gamma|\}$$

Nous avons

$$\langle Lu, u\rangle \leq C \max |u|^2 - A\int_a^b |u\prime|^2 \, dx - B\int_a^b |u|^2 \, dx$$

d'aprés le lemme, pour tout $\epsilon > 0$

$$\langle Lu, u\rangle \leq (2C\epsilon - A)\int_a^b |u\prime|^2 \, dx + \left(\frac{2C}{\epsilon} - B\right)\int_a^b |u|^2 \, dx$$

Or, par hypothése l'opérateur A est strictement positif, on peut donc choisir ϵ de sorte que $2C\epsilon$ soit inférieur ou égal à A et il suffit alors de poser $M = 2C\epsilon^{-1} - B$ ■

Corollaire 2.2.1 [4] *Tout valeur propre de (D_L, L) est inférieur ou égale à*

$$M - \inf\{q(x);\ a \leq x \leq b\}$$

posons

$$m = \sup\{\langle Lu, u\rangle \;/\; u \in D_L, \;\; \|u\| = 1\}$$

D'aprés le théoréme 2.2.2, m est fini, inférieure ou égale à M et toute valeur propre de (D_L, L) est inférieure ou égale à m.

Théorème 2.2.2 *Si $\lambda_0 > m$, la fonction de Green $G_{\lambda_0}(.,.)$ est un noyau de type positif.*

Démonstration. [4]Soit f une fonction de $C[a,b]$ et soit $u = G_{\lambda_0} f$. D'aprés le théoréme 2.1.2, on sait que $u \in D_L$ et $\lambda_0 u - Lu = f$ d'ou ■

$$\langle G_{\lambda_0} f, f\rangle = \langle u, \lambda_0 u - Lu\rangle = \lambda_0 \|u\|^2 - \langle Lu, u\rangle \geq (\lambda_0 - m)\|u\|^2 \geq 0$$

ce qui est le résultat cherché.

Théorème 2.2.3 [4] (a) *Les valeurs propres de (D_L, L) constituent une suite (λ_n) qui tend vers $-\infty$*

(b) Les fonctions propres correspondantes, (ϕ_n), normalisés constituent une base hilbertienne de $L^2[a,b]$.

(c) Tout fonction u de D_L s'écrit

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u, \phi_n \rangle \phi_n(x)$$

où la convergence est absolue et uniforme sur $[a,b]$.

(d) Si λ n'est pas valeur propre de (D_L, L), le problème

$$u \in D_L, \lambda u - Lu = f$$

admet, pour tout f continue, une solution unique.

(e) Si λ est une valeur propre et ϕ une fonction propre correspondant à λ, le problème

$$u \in D_L, \lambda u - Lu = f$$

admet une solution si, et seulement si, $\langle f, \phi \rangle = 0$

(f) Si λ n'est pas valeur propre, le noyau de la résolvante G_λ s'écrit

$$G_\lambda \quad (x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x)\,\phi_n(y)}{\lambda - \lambda_n}$$

la convergence étant absolue et uniforme sur $[a,b] \times [a,b]$

Démonstration. (*voir* [4])Soit λ_0 un nombre réel qui n'est pas une valeur propres de (D_L, L). L'opérateur G_{λ_0} admet les mémes sous-espaces propres que (D_L, L), ses valeurs propres sont les nombres

$$\mu = \frac{1}{\lambda_0 - \lambda}$$

où λ est une valeur propre de (D_L, L). On sait que les valeurs propres de G_{λ_0} constituent une suite (μ_n), $n \geq 1$, infinie qui tend vers 0. On en déduit que les valeurs propres de (D_L, L) constituent une suit (λ_n) reliée à (μ_n) par la relation

$$\mu_n = \frac{1}{\lambda_0 - \lambda_n}$$

et qui tend donc vers $-\infty$ quand n tend vers l'infini, comme G_{λ_0} est un opérateur injectif, les fonction propres (ϕ_n) correspondant à (λ_n) et normalisées, constituent une base hilbertienne de $L^2[a,b]$. la partie (c) de l'énoncé est une conséquence du théoréme 1.3 de ce chapitre. L partie (d) a déja été démontrée, c'est le (i) du théoréme 2.1.2 De plus, le problème

$$u \in D_L, \lambda u - Lu = f$$

est, d'aprés ce même théorème, équivalent à l'équation intégrale

$$(\lambda - \lambda_0)\, G_{\lambda_0} u + u = G_{\lambda_0} f$$

celle-ci admet une solution si, et seulement si, $G_{\lambda_0} f$ est orthogonale à ϕ. Comme

$$\langle G_{\lambda_0} f, \phi \rangle = \langle f, G_{\lambda_0} \phi \rangle = (\lambda - \lambda_0) \langle f, \phi \rangle$$

on en déduit la partie (e).

Pour $\lambda_0 > m$, le noyau $G_{\lambda_0}(x,y)$ est de type positif (théoréme 2.2.3), donc d'aprés le théoréme de Mercer

$$G_{\lambda_0}\ (x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x)\,\phi_n(y)}{\lambda_0 - \lambda_n}$$

La convergence étant absolue et uniforme sur $[a,b] \times [a,b]$. si λ n'est pas valeur propre, le rapport $(\lambda_0 - \lambda_n) / (\lambda - \lambda_n)$ est borné et par suite la série

$$G_{\lambda}\ (x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x)\,\phi_n(y)}{\lambda - \lambda_n}$$

converge également absolument et uniformément sur $[a,b] \times [a,b]$. Il est facile de montrer que sa somme est égale à $G_\lambda\ (x,y)$. Ce qui démontre la partie (f) de l'énoncé. ■

CHAPITRE 3

Exemples

Exemple 3.0.1 *Pour résoudre:*

$$\begin{cases} \frac{1}{4}u + u'' = f \\ u(0) = 0 \ , \ u(\pi) = 0 \end{cases}$$

on cherche l'inverse l'opérateur (L, D_L) *avec* $L = \frac{1}{4}u + u''$, *on va démontrer que* (L, D_L) *est injectif. Alors il suffit de démontrer que*

$$\begin{cases} Lu = 0 \\ u \in D_L \end{cases} \qquad (*)$$

admet une solution unique $u = 0$

l'équation caractiristique est $r^2 + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow r = \pm i\frac{1}{2}$ *alors la solution de l'équation*

$$\frac{1}{4}u + u'' = 0$$

est

$$u = c_1 \cos \frac{x}{2} + ic_2 \sin \frac{x}{2}$$

avec $u \in D_L$

alors

$$\begin{aligned} u(0) &= 0 \Rightarrow c_1 = 0, \\ u(\pi) &= ic_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \end{aligned}$$

donc l'unique solution de $(*)$ *est* $u = 0$ *alors* (L, D_L) *est injectif donc* u_1 *et* u_2 *sont linéairement indépendant tel que* u_1 *est la solution du problème*

$$\begin{cases} Lu = 0 \\ u(0) = 0, \; u\prime(0) = 1 \end{cases}$$

$$u(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$u\prime(0) = \frac{i}{2}c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = \frac{2}{i} = -2i \Rightarrow u_1 = 2\sin\frac{x}{2}$$

avec u_2 *est la solution de:*

$$\begin{cases} Lu = 0 \\ u(\pi) = 0, \; u\prime(\pi) = 1 \end{cases}$$

$$u(\pi) = ic_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$u\prime(\pi) = -\frac{c_1}{2} = 1 \Rightarrow c_1 = -2$$

donc

$$u_2 = -2\cos\frac{x}{2},$$

alors d'aprés le theoréme (2.2.1) *on trouve que la solution* u *du probléme* $(*)$ *est donné par:*

$$u(x) = \int_0^\pi G(x,y) f(y) \, dy$$

avec:

$$G(x,y) = \begin{cases} \frac{-1}{[u_1,u_2]} u_1(y) u_2(x), & si \; 0 \leq y \leq x \leq \pi \\ \frac{-1}{[u_1,u_2]} u_1(x) u_2(y), & si \; 0 \leq x \leq y \leq \pi \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} [u_1, u_2] &= u_1 u_2\prime - u_2 u_1\prime \\ &= 2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}\right) + 2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}\right) \\ &= 2 \end{aligned}$$

alors

$$G(x,y) = \begin{cases} 2\sin\frac{y}{2}\cos\frac{x}{2}, & si \; 0 \leq y \leq x \leq \pi \\ 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}, & si \; 0 \leq x \leq y \leq \pi \end{cases}$$

pour $f(x) = \sin 2x$,

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^\pi G(x,y)\sin 2y dy \\ &= \int_0^x 2\sin\frac{y}{2}\cos\frac{x}{2}\sin 2y dy + \int_x^\pi 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\sin 2y dy \end{aligned}$$

On a

$$\sin\frac{y}{2}\sin 2y = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{y}{2}-2y\right) - \cos\left(\frac{y}{2}+2y\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{3y}{2} - \cos\frac{5y}{2}\right]$$

et

$$\cos\frac{y}{2}\sin 2y = \frac{1}{2}\left[\sin\frac{5y}{2} + \sin\frac{3y}{2}\right]$$

alors

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^x \left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3y}{2} - \cos\frac{x}{2}\cos\frac{5y}{2}\right)dy + \int_x^\pi \left(\sin\frac{x}{2}\sin\frac{5y}{2} + \sin\frac{x}{2}\sin\frac{3y}{2}\right)dy \\ &= \frac{2}{3}\left[\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{3x}{2}\right)\right] + \frac{2}{5}\left[\sin\left(\frac{5x}{2}-\frac{x}{2}\right)\right] \\ &= \frac{2}{3}\sin 2x + \frac{2}{5}\sin 2x = \frac{13}{15}\sin 2x \end{aligned}$$

pour $f(x) = \frac{x}{2}$,

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^x 2\sin\frac{y}{2}\cos\frac{x}{2}.\frac{y}{2}dy + \int_x^\pi 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}.\frac{y}{2}dy \\ &= \cos\frac{x}{2}\int_0^x y\sin\frac{y}{2}dy + \sin\frac{x}{2}\int_x^\pi y\cos\frac{y}{2}dy \end{aligned}$$

On a

$$I_1 = \int_0^x y\sin\frac{y}{2}dy$$

par intégration par partie, on trouve

$$\begin{aligned} I_1 &= \left[-2y\cos\frac{y}{2}\right]_0^x + \int_0^x 2\cos\frac{y}{2}dy \\ &= -2x\cos\frac{x}{2} + \left[4\sin\frac{y}{2}\right]_0^x \\ &= -2x\cos\frac{x}{2} + 4\sin\frac{x}{2} \end{aligned}$$

et

$$I_2 = \int_x^\pi y \cos \frac{y}{2} dy$$

par intégration par partie

$$\begin{aligned} I_2 &= \left[2y \sin \frac{y}{2}\right]_x^\pi - \int_x^\pi 2 \sin \frac{y}{2} dy \\ &= 2\pi - 2x \sin \frac{s}{2} + \left[4 \cos \frac{y}{2}\right]_0^\pi \\ &= 2\pi - 2x \sin \frac{x}{2} - 4 \cos \frac{x}{2} \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} u(x) &= -2x \cos^2 \frac{x}{2} + 2\pi \sin \frac{x}{2} - 2x \sin^2 \frac{x}{2} \\ &= -2x + 2\pi \sin \frac{x}{2} \end{aligned}$$

Exemple 3.0.2 *Soit* $(D_L, -L)$ *l'opérateur défini par*

$$D_L = \left\{u \in c^2 [1, e] \ / \ u(1) = 0, \ u(e) = 0\right\}$$

$$Lu = x^2 u'' + 2xu' + \frac{1}{4} u, u \in D_L$$

Pour trouver son inverse, on doit résoudre:

$$\begin{cases} Lu = x^{-\frac{1}{2}} \\ u(1) = 0 \ , \ u(e) = 0 \end{cases}$$

pour démontrer que (L, D_L) *est injectif il suffit de démontrer que*

$$\begin{cases} Lu = 0 \\ u \in D_L \end{cases} \qquad (*)$$

admet une solution unique $u = 0$

on a

$$\begin{aligned} Lu &= x^2 u'' + 2xu' + \frac{1}{4} u \\ &= \left(x^2 u'\right)' + \frac{1}{4} u \end{aligned}$$

On fait le changement de variable

$$x = e^t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = e^t$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{\frac{du}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = e^{-t}\frac{du}{dt}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dx^2} &= \frac{\frac{d\left(\frac{du}{dx}\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \\ &= \frac{-e^{-t}\frac{du}{dt} + e^{-t}\frac{d^2u}{dt^2}}{e^t} \end{aligned}$$

on remplace $u\prime$et $u\prime\prime$ dans Lu, on obtient

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{du}{dt} + \frac{1}{4}u = 0$$

donc pour démontrer que (L, D_L) est injectif il suffit de démontrer que

$$\begin{cases} u\prime\prime + u\prime + \frac{1}{4}u = 0 \\ u \in D_L \end{cases}$$

l'équation caractiristique est

$$r^2 + r + \frac{1}{4} = 0$$

alors $r = -\frac{1}{2}$ est une racine double, la solution de l'équation $x^2u\prime\prime + 2xu\prime + \frac{1}{4}u = 0$ est

$$u\left(x\left(t\right)\right) = \left(c_1t + c_2\right)e^{-\frac{1}{2}t}$$

alors

$$u\left(x\right) = \left(c_1 \ln x + c_2\right)x^{-\frac{1}{2}}$$

avec

$$u \in D_L \Leftrightarrow \begin{cases} u\left(1\right) = c_2 = 0 \\ u\left(e\right) = c_1e^{-\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \end{cases}$$

donc l'unique solution de $(*)$ est $u = 0$ alors (L, D_L) est injectif c-à-d u_1 et u_2 sont linéairement indépendant telque u_1 la solution du problème

$$\begin{cases} Lu = 0 \\ u\left(1\right) = 0,\ u\prime\left(1\right) = 1 \end{cases}$$

$$u(1) = c_2 = 0$$
$$u\prime(x) = c_1\left(1 - \frac{1}{2}\ln x\right)x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}c_2 x^{-\frac{3}{2}}$$

alors

$$u\prime(1) = c_1 = 1 \Rightarrow u_1 = \ln x . x^{-\frac{1}{2}}$$

avec u_2 la solution du problème

$$\begin{cases} Lu = 0 \\ u(e) = 0, \ u\prime(e) = 1 \end{cases}$$

$$u(e) = (c_1 + c_2)\, e^{-\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow c_1 = -c_2$$
$$u\prime(e) = c_1\frac{e^{-\frac{3}{2}}}{2} - c_2\frac{e^{-\frac{3}{2}}}{2} = 1$$

alors

$$c_1 = e^{\frac{3}{2}} \ \ et\ c_2 = -e^{\frac{3}{2}}$$

donc

$$u_2 = e^{\frac{3}{2}}(\ln x - 1)\, x^{-\frac{1}{2}}$$

D'aprés le theoréme $(2.2.1)$, *on trouve que la solution u du probléme* $(*)$ *est donné par:*

$$u(x) = \int_1^e G(x,y)\, f(y)\, dy$$

avec:

$$G(x,y) = \begin{cases} \frac{-1}{[u_1,u_2]}u_1(y)\, u_2(x), \ si\ 1 \leq y \leq x \leq e \\ \frac{-1}{[u_1,u_2]}u_1(x)\, u_2(y), \ si\ 1 \leq x \leq y \leq e \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} [u_1, u_2] &= p(x)\, W(u_1, u_2) \\ &= x^2 (u_1 u_2\prime - u_2 u_1\prime) \\ &= e^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

alors

$$G(x,y) = \begin{cases} \ln y\,(-1 + \ln x)\, y^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}}, \ si\ 1 \leq y \leq x \leq e \\ \ln x\,(-1 + \ln y)\, y^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}}, \ si\ 1 \leq y \leq x \leq e \end{cases}$$

donc

$$u(x)=\int_1^x \ln y\,(-1+\ln x)\,y^{-\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}f(y)\,dy+\int_x^e \ln x\,(-1+\ln y)\,y^{-\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}f(y)\,dy$$

si $f(x)=x^{-\frac{1}{2}}$,

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_1^x \ln y\,(-1+\ln x)\,y^{-\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}dy+\int_x^e \ln x\,(-1+\ln y)\,y^{-\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}dy \\ &= \int_1^x \frac{\ln y}{y}(-1+\ln x)\,x^{-\frac{1}{2}}dy+\int_x^e \ln x\left(\frac{-1+\ln y}{y}\right)x^{-\frac{1}{2}}dy \end{aligned}$$

$$I_1=(\ln x-1)\int_1^x \frac{\ln y}{y}dy$$

par intégration par partie

donc

$$\int_1^x \frac{\ln y}{y}dy=\left[\ln^2 y\right]_1^x-\int_1^x \frac{\ln y}{y}dy$$

alors

$$\begin{aligned} 2\int_1^x \frac{\ln y}{y}dy &= \left[\ln^2 y\right]_1^x \\ &= \frac{\ln^2 x}{2} \end{aligned}$$

donc

$$I_1=\frac{(-1+\ln x)\,x^{-\frac{1}{2}}\ln^2 x}{2}$$

et

$$I_2=x^{-\frac{1}{2}}\ln x\left(-\frac{1}{2}\ln^2 x-\frac{1}{2}+\ln x\right)$$

alors

$$u(x)=\frac{(-1+\ln x)\,x^{-\frac{1}{2}}\ln^2 x}{2}+x^{-\frac{1}{2}}\ln x\left(\ln x-\frac{1}{2}\ln^2 x-\frac{1}{2}\right)$$

Bibliographie

[1] A.Achour, Calcul Différentiel, Cours et Exercices, Collection M/ Sciences fondamentales, Centre de Publication Universitaire, 1999.

[2] J.P.Aubin, Initiation à l'analyse appliquée, Masson 1994.

[3] F.Bayer-C. Margaria, Espaces de Hilbert et opérateurs, Tome 2, Ellipse, 1986.

[4] H.chebli, analyse Hilbertienne, Collection M/ Sciences fondamentales, Centre de Publication Universitaire, Tunis, 2001

[5] Samuel S. Holland Jr., Applied analysis by hilbert space method, Marcel Dekker, Inc, 1990.

[6] T.Kato, Perturbation theory linear operators, Spring-verlag, 1966

[7] A.Kirillov, A. Gvichiani, Théorémes et problémes d'analyse fonctionnelle, Traduction française, Editions Mir, 1982.

[8] W.Rudin, Analyse fonctionnelle, Ediscience international, Paris, 1995