République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire pour l'obtention du diplôme Master en Mathématiques

Par :

Zalani Widad et **Zaalani Hakima**

Intitulé

Méthode de concavité pour une équation parabolique semi linéaire avec conditions mixtes

Jury :

Président : BOULARES Hamid **MCA** Université 8 Mai 1945 Guelma

Rapporteur : BAHLOUL Tarek **MCB** Université 8 Mai 1945 Guelma

Examinateur : BENDJAZIA Nassima **MCB** Université 8 Mai 1945 Guelma

Soutenu le :08/07/2019

Année Universitaire **2018-2019**

Remerciement

Nos remerciements sont tout d'abord à notre dieu qui a nous donné la fore pour achever ce modeste travail ainsi qu'à nos parents.

Nous tenons à remercier notre directeur de recherche Bahloul Tarek, qui a suivi notre travail avec rigueur et enthousiasme, et surtout pour sa patience ses orientations.

Nos remerciement vont également à nos professeurs de département de math, qui ont veillé à nous bien former.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à mes très chers parents :Djabali fella et lakhder.

Pour tous leur sacrifices, leur soutien, leur amour qui ont été la raison de ma réussite, sans lesquels je ne saurais pu progresser et arriver à l'achèvement de ce travail que dieu vaux garde et vaux procure santé et langue vie à mes grands parents, que dieu ail leurs âme.

A mes chères et adorables sœurs : Ilhem, Samiha et Sara, pour leurs encouragements et leurs précieux conseils avec toute mon estime, affection, je vous souhaite santé bonheur et prospérité.

A mes tantes et oncles, cousins et cousines.
A mon trésor et mon cœur : Mouataz

Je tiens à travers ce travail à vous exprimer toute ma gratitude et respect à mes amies surtout :Bouthayna , Manal, Hadjer et Aicha

Je dédie aussi à mon marié Haddad Hichem

et a mon amie intime et partenaire : Widdad

A tous mes collègues de la promotion de mathématique 2018/2019

Dédicaces

Merci mon dieu de m'avoir donner la capacité d'écrire et de réfléchir et la patience d'allez jusqu'au bout du rêve

Avec un cœur plein d'affection je dédie ce modeste travail :

A la lumière de ma vie « mes parents : Mezghich et Sellami Akilla » qui ont cultivé en moi la confiance en soi, le courage et la tendresse.

Je dédie également ce mémoire à mon très cher oncles, cousins et cousines

A mon trésor et mon cœur : Anisse.

A ma très chère sœur : Aya, Amira et Abla.

A mes très chers frères : sami et Adem.

A toute ma grande famille surtout Nina et Sarah

A toutes mes amies surtout :Zahra, Rayan et Wahida.

Sans oublier mon binôme et amie « Hakima »avec qui j'ai partagé ce travail.

A tous mes collègues de la promotion de mathématique 2018/2019. A tous ceux que j'ai connus

Résumé

Dans ce travail, on étudie problème mixte pour équations aux dérivées partielles . Ces problèmes peuvent être rencontrés en théorie de la conduction thermique, semi-conducteurs, électrochimie, transmission de chaleur, élasticité, thermo-élasticité, physique de plasmas, mémoire des matériaux et dynamique de populations etc .... .

La méthode utilisée dans le problème est la méthode de concavité, qui est basée sur la construire une fonction fonctionnelle définie positive, qui dépend de la fonction u, ses dérivées, ses primitives, et t.
N'importe qu'elle $F \neq 0$, il en résulte que F^{-2} serait concave.
depuis le graphique d'une fonction concave doit être ci-dessous à une ligne tangente.
Par conséquent que $t \to T \leq \frac{F(0)}{2F'(0)}$, on aperçoit $F(t) \to +\infty$. Ceci est le point critique de l'argument de la concavité.

Mots Clés :

Explosion en temps fini, la méthode de concavité.

Abstract

In this work, we study a mixed problem with for a differentials equations of mixed type. These problems may be encountered in the theory of thermo conduction, semiconductors, electrochemistry, heat transfer, elasticity, thermo-elasticity, plasma physics, memory materials and population dynamics etc....

The method used in the problem is the concavity method, which is based on the construct a definite positive functional function, which depends on the which usually depends on the function u, its derivatives, its primitives, and t.

anytime $F \neq 0$, it would result that F^{-2} would be concave.

since the graph of a concave function must be less than a tangent line.

so that $t \to T \leq \frac{F(0)}{2F'(0)}$, we see $F(t) \to +\infty$. This is the crucial point of the concavity argument.

Key words :

Explosion in finite time, the method of concavity.

ملخص

تهدف هذه الأطروحة إلى دراسة حالة خاصة من المسائل المختلطة العامة.

يمكن مصادفة هذه المسائل في نظرية النقل الحراري و المرونة، أنصاف النواقل، الكهروكيمياء، المرونة و المرونة الحرارية، فيزياء البلازما، ذاكرة المعادن وديناميك المجموعات إلخ ...

نستعمل طريقة التقعر التي ترتكز أساسا على استحداث دالة توابع موجبة $F(t)$ ، يتعلق بالتابع u ، وبمشتقاته و دالته الاصلية، و الزمن t .

في أي وقت $F \neq 0$ ، سيؤدي ذلك إلى أن F^{-2} سيكون مقعرًا.

لأن الرسم البياني للدالة المقعرة يجب أن يكون أقل من المماس.

بحيث $t \to T \leq \frac{F(0)}{2F'(0)}$ ، نرى $F(t) \to +\infty$. هذه هي النقطة الحاسمة في حجة التقعر.

الكلمات المفتاحية

انفجار في وقت محدود ، وطريقة التقعر.

Table des matières

Chapitre 0

Introduction

Pour la démonstration des possibilités d'explosion de certain modèle étudié, on utilise classiquement des idées et techniques introduites dans les travaux de B. Hu, A. Cambini, L. Martein, B. Straughan, H.A Levine, et d'autres auteurs, indiqués dans la Bibliographie.
Nous avons rappelé succinctement quelques-une de ces techniques dans le texte.

Le phénomène d'explosion en temps fini, montre que la solution est infinie quand t approche le temps d'explosion T^*, qui est fini. Le phénomène d'extinction est relatif et proche de celui d'explosion, seulement la solution reste bornée, mais ses dérivées explosent. Naturellement la raison de ce comportement de la solution est dû en effet, à la singularité du terme non linéaire dans l'équation.

Dans nos mémoire, nous appliquons un développement important de la méthode de concavité à de nouvelles classes de problèmes non linéaire. Elle comporte des résultats intéressants et originaux.

Notre mémoire est composée d'une introduction et de deux chapitres. Le premier chapitre donne les définition , notations et remarques importantes. Dans le deuxième chapitre, nous examinons l'explosion d'un problème mixte. Nous appliquons la méthode de concavité pour étudier l'explosion de la solution d' un problème aux limites avec condition initiale.

Cette méthode de concavité a été étudiée par [3,2], qui a découvert le phénomène de explosion en temps fini et autres instabilités très rapides se produisent dans des situations de la mécanique et autres domaines des mathématiques appliquées, faire exploser dans un temps fini de démontrer quand une solution d'une équation différentielle partielle explose en un temps fini, La figure [2.1](page 21) est en fait assez puissant pour être appliqué à de nombreux autres types de deuxième équations paraboliques ainsi que d'autres types d'équations d'évolution, et est une technique qui a trouvé une large application. Voir [4, 5, 6, 7, 14, 15].

Chapitre 1

Notions préliminaires

Dans ce chapitre,nous décrirons les fonctions principales utilisées dans notre travail. Nous allons définir les fonctions concave et convexe et nous allons terminer par un ensemble des exemples avec des solution proposées.

1. Fonctions concaves, convexes

Nous allons présenter les définitions et les propriétés principales de ces fonctions.
Soit $S \subseteq \mathbb{R}^2$ un ensemble convexe.

Définition 1.1

Une fonction f définie sur S est dite concave sur S si et seulement si pour tout $x_1, x_2 \in S$,

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2), \lambda \in [0,1].$$

Définition 1.2

Une fonction f définie sur S est dite strictement concave sur S si pour tout $x_1, x_2 \in S$, avec $x_1 \neq x_2$,

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 > \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2), \forall \lambda \in (0,1).$$

Définition 1.3

Une fonction f définie sur S est dite quasi-concave sur S si pour tout $x_1, x_2 \in S$,

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{f(x_1), f(x_2)\}, \lambda \in [0,1].$$

Définition 1.4

Une fonction f définie sur S est dite strictement quasi-concave sur S si pour tout $x_1, x_2 \in S$, $x_1 \neq x_2$,

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) > \min\{f(x_1), f(x_2)\}, \lambda \in (0,1).$$

Définition 1.5

Une fonction f définie sur S est dite quasi-concave quasi-circulaire sur S si pour tout $x_1, x_2 \in S$, avec $f(x_1) \neq f(x_2)$,

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) > \min\{f(x_1), f(x_2)\}, \lambda \in (0,1).$$

Définition 1.6

Une fonction f définie sur S est dite pseudo-concave sur S (sous hypothèse de différentiabilité) si pour tout $x_1, x_2 \in S$,

$$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow \nabla f(x_1)^T (x_2 - x_1) > 0.$$

Définition 1.7

Une fonction f définie sur S est dite strictement pseudo-concave sur S (sous hypothèse de différentiabilité) si pour tous $x_1, x_2 \in S, x_1 = x_2$,

$$f(x_1) \leq f(x_2) \Rightarrow \nabla f(x_1)^T (x_2 - x_1) > 0.$$

Remarque 1.1

Une fonction quasi-concave semi-strict sur l'ensemble convexe S n'est pas nécessairement une fonction quasi concave. C'est vrai en supposant que la demi-continuité supérieure de f sur S.

Soit $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe.

Propriétés 1.1

-) Si f est une fonction concave sur S, l'ensemble du niveau supérieur $S_{\geq \alpha} = \{x \in S : f(x) \geq \alpha\}$ est convexe pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

-) Une combinaison linéaire non négative de fonctions concaves sur S est une fonction concave sur S.

-) Une combinaison linéaire non négative de fonctions strictement concaves sur S est un fonction strictement concave sur S.

-) Si $f_i, i = 1, ..., m$ sont des fonctions concaves sur S, alors

$$z(x) = \min_{i \in 1,..,m} \{f_i(x)\}$$

est concave sur S.

-) Si

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

est une fonction concave non décroissante et que

$$h : S \to \mathbb{R}$$

est une fonction concave sur S, la fonction composée

$$f(x) = (g \circ h)(x)$$

est une concave sur S.

-) Si

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

est une fonction concave croissante et

$$h : S \to \mathbb{R}$$

est une fonction strictement concave sur S, la fonction composée

$$f(x) = (g \circ h)(x)$$

est strictement concave sur S.

-) Si f est une fonction quasi-concave (respectivement, strictement quasi-concave, quasi-concave quasi-circulaire) sur S et

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

une fonction croissante, alors la fonction composée $g \circ f$ est quasi-concave (respectivement, strictement quasi-concave, semi-strictement quasi-concave) sur S. Ce résultat est toujours valable pour une fonction quasi-concave, même si g est une fonction non décroissante.

-) Si f est pseudo concave sur S et

$$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

est une fonction différentiable telle que que $\phi(z) > 0, \forall z$, alors la fonction composite f est pseudo-concave.

-) Soit

$$g(x) = Ax + b$$

Où A est une matrice

$$m \times n, b \in \mathbb{R}^m$$

et f est une fonction quasi-concave (pseudo-concave) sur S. Alors,

$$z(x) = f(Ax + b)$$

est quasi-concave (pseudo-concave) sur S.

Soit $S \in \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe et f une fonction définie sur S.

Définition 1.8

f est quasi-concave sur S si et seulement si tous ses ensembles de niveaux supérieurs

$$S_{\geq\alpha} = \{x \in S : f(x) \geq \alpha\}$$

sont convexes.

Définition 1.9

f est strictement quasi-concave sur S si et seulement f est quasi-concave et chaque restriction sur un segment de ligne n'est pas constante.

Définition 1.10

f est concave si et seulement si

$$f(y) \leq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x), \forall x, y \in S.$$

Et elle est strictement concave si et seulement l'inégalité est stricte.

Définition 1.11

f est quasi-concave sur S si et seulement si l'implication suivante est vraie :

$$x_1, x_2 \in S, f(x_1) \leq f(x_2) \Rightarrow f(x_1)^T (x_2 - x_1) \geq 0.$$

Notez que pour une fonction strictement quasi-concave et semi-délimitée, il n'y a pas une caractérisation du premier ordre.

Définition 1.12

f est (strictement) pseudo-concave sur S si et seulement si f est quasi-concave sur S et chaque point critique est un maximum local (strict) pour f sur S.

Définition 1.13

f est (strictement) pseudo-concave si et seulement si pour tout $x_0 \in S$ et $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $u^T \nabla f(x_0) = 0$, la fonction $\phi(t) = f(x_0 + tu)$ atteint un (strict) local maximum à t = 0.

Définition 1.14

f est (strictement) pseudo-concave sur S si et seulement si pour tout $x_0 \in S$ et $u \in \mathbb{R}^n$ tels que $u^T \nabla f(x_0) = 0$, soit $u^T \nabla^2 f(x_0) u < 0$ ou $u^T \nabla^2 f(x_0) u = 0$ et la fonction $\phi(t) = f(x_0 + tu)$ atteint un maximum local (strict) à t = 0.

Définition 1.15

f est (strictement) pseudo-concave si et seulement si
(i) $x \in S, u \in \mathbb{R}^n, u^T f(x_0) = 0 \Rightarrow u^T \nabla^2 f(x_0) u \leq 0$.
(ii) $x \in S, \nabla f(x) = 0 \Rightarrow f$ a un maximum local (strict) en x.

Théorème 1.1

Soit f et g des fonctions définies sur un ensemble convexe $S \subseteq \mathbb{R}^n$.

$$z(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Ensuite, les propriétés suivantes sont valables :
(i) Si f est non négative et convexe et que g est positive et concave, alors z est quasi convexe semi-restrictif.
(ii) Si f est non positive et convexe et que g est positive et convexe, alors z est quasi convexe semi-restrictif.
(iii) Si f est convexe et que g est positive et affine, alors z est semi-restrictif quasi convexe

Preuve

(i) Nous devons prouver que :

$$z(x) = \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = z(x_0)$$

Implique que :

$$z((1-\lambda)x_0 + \lambda x)) < z(x_0), \lambda \in (0,1)$$

Prise en compte de la convexité de f et de la concavité de g, ainsi que avec leur signe, on a :

$$f((1-\lambda)x_0 + \lambda x) \leq (1-\lambda)f(x0) + \lambda f(x)$$

$$< (1-\lambda)f(x_0) + \lambda \frac{f(x_0)}{g(x_0)} g(x)$$

$$= \frac{f(x_0)}{g(x_0)}((1-\lambda)g(x_0) + \lambda g(x)) \leq \frac{f(x_0)}{g(x_0)} g((1-\lambda)x_0 + \lambda x)$$

Il en résulte que :

$$\frac{f((1-\lambda)x_0 + \lambda x)}{g((1-\lambda)x_0 + \lambda x)} < \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$$

C'est-à-dire :

$$z((1-\lambda)x_0 + \lambda x) < z(x_0)$$

(ii) Ceci peut être prouvé de la même manière.
(iii) Cela découle des points (i) et (ii) en notant qu'une fonction affine est à la fois convexe et concave.

Théorème 1.2

La fonction Cobb – Douglas

$$f(x) = Ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots . x_n^{\alpha_n}, A > 0, x_i > 0, \alpha_i > 0, i = 1 \ldots . n$$

est quasi-concave et est concave si et seulement si $\alpha = \Sigma_{i=1}^{n} \leq 1$.

Preuve

Depuis $\log f(x) = \log A + \Sigma_{i=1}^{n} \alpha_i \log x_i$ est une fonction concave en tant qu'une combinaison linéaire positive de fonctions concaves, la fonction $f(x) = \exp^{\log f(x)}$ est quasi-concave. La dernière déclaration suit au moyen de la propriété qu'un fonction homogène positive de degré $\alpha \leq 1$ est concave si et seulement si elle est quasi-concave.

Exemple 1

Soit f une fonction définie sur l'ensemble convexe $S \subseteq \mathbb{R}^n$.
Prouve-le :
(a) si f est positive et convexe, alors $-\frac{1}{f}$ est quasi-convexe.
(b) si f est négative et quasi-convexe (strictement quasi-convexe), alors $\frac{1}{f}$ est quasi-concave (strictement quasi-concave).

Solution 1

(a) Définissez $L_{\leq\alpha} = \{x \in S : -\frac{1}{f(x)} \leq \alpha\}$. Si $\alpha \geq 0$, alors$L_{\leq\alpha} = S$, sinon $L_{\leq\alpha} = x \in S : f(x) \leq -\frac{1}{\alpha}$. Dans chaque cas, $L_{\leq\alpha}$ est un ensemble convexe.
(b) Nous avons que $-\frac{1}{f}$ est (strictement) quasi-convexe et par conséquent, $\frac{1}{f}$ est (strictement) quasi-concave.

Exemple 2

Soit f et g des fonctions définies sur un ensemble convexe $S \subseteq \mathbb{R}^n$, et soit $z(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.
Prouver que z est strictement quasi-convexe si l'une des conditions suivantes détient :
1. f est non négative et strictement convexe et g est positive et concave.
2. f est non négative et convexe et g est positive et strictement concave.
3. f est non positive et strictement convexe et g (x) est positive et convexe.

Solution 2

(i) Nous devons prouver que

$$z(x_1) = \frac{f(x_1)}{g(x_1)} \geq \frac{f(x_2)}{g(x_2)}.$$

Implique :

$$z(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < z(x_1), \lambda \in (0,1).$$

Compte tenu de la convexité stricte de f et de la concavité de g, ainsi que avec leur signe, on a :

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)\frac{f(x_1)}{g(x_1)}g(x_2)$$

$$= \frac{f(x_1)}{g(x_1)}(\lambda g(x_1) + (1-\lambda)g(x_2)) \leq \frac{f(x_1)}{g(x_1)}g(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$$

Il en résulte :

$$\frac{f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)}{g(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)} < \frac{f(x_1)}{g(x_1)}$$

C'est-à-dire :

$$z(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < z(x_1), \lambda \in (0,1)$$

Les preuves de (ii) et (iii) sont similaires.

Définition 1.16

Une fonction différentiable f définie sur un ensemble convexe ouvert $S \subseteq \mathbb{R}^n$, s'appelle strictement pseudo-convexe si :

$$x_1, x_2 \in S, x_1 \neq x_2, f(x_1) \geq f(x_2) \Rightarrow \nabla f(x_1)^T(x_2 - x_1) < 0.$$

Il résulte immédiatement des définitions données qu'un code strictement pseudo-convexe, la fonction est aussi pseudo-convexe. La déclaration inverse n'est pas vraie. En réalité une fonction constante est pseudo-convexe, mais pas strictement pseudo-convexe. Une fonction f est dite pseudo-concave (strictement pseudo-concave) si et seulement si -f est pseudo-convexe (strictement pseudo-convexe). Par conséquent, les résultats nous allons établir peut être facilement adapté au cas pseudo-concave.

Exemple 3

Soit f une fonction pseudo-concave positive ou négative (strictement pseudo-concave) sur un ensemble convexe $S \subseteq \mathbb{R}^n$.

Montrer que la fonction réciproque $z(x) = \frac{1}{f(x)}$ est pseudo-convexe sur S (strictement pseudo-convexe).

Solution 3

Il suffit de noter que la dérivée de la fonction $\phi(y) = -\frac{1}{y}$est positive pour tout $y \neq 0$, de sorte que $-\frac{1}{f(x)}$est pseudo-concave (strictement pseudo-concave) si f est pseudo-concave (strictement pseudo-concave). Il s'ensuit que $\frac{1}{f(x)}$ est pseudo-convexe (strictement pseudo-convexe).

Théorème 1.3

Soit f une fonction définie sur un ensemble convexe $S \subseteq \mathbb{R}^n$ et x_0 est un point limite de S.
(i) Si f est pseudo-convexe, alors x_0 est un point minimum global pour f si et seulement si l'inégalité suivante est vraie :

$$\nabla f(x_0)^T(x - x_0) \geq 0, \forall x \in S.$$

(ii) Si f est pseudo-concave, alors x_0 est un point maximum global pour f si et seulement si l'inégalité suivante est vraie :

$$\nabla f(x_0)^T(x - x_0) \leq 0, \forall x \in S.$$

Théorème 1.4

Considérons le problème $P(\alpha)$. Si $g(x, \alpha)$ est concave dans le paramètre α, alors $z(\alpha)$ est quasi-convexe.

Preuve

Soit $\alpha_1, \alpha_2 \in A$ et soit $x_\lambda, \lambda \in [0, 1]$ une solution optimale du problème

$$P(\lambda\alpha_1 + (1 - \lambda)\alpha_2).$$

Au moyen de la concavité de g par rapport à α, on a :

$$0 \geq g(x_\lambda, \lambda\alpha_1 + (1 - \lambda)\alpha_2) \geq \lambda g(x_\lambda, \alpha_1) + (1 - \lambda)g(x_\lambda, \alpha_2).$$

Par conséquent, depuis λ et$1 - \lambda$ sont tous deux non négatives, au moins un de $g(x_\lambda, \alpha_1)$ et $g(x_\lambda, \alpha_2)$ est non positive. Supposons, sans perte de généralité, que $g(x_\lambda, \alpha_1) \leq 0$. Alors, x_λ est faisable pour le problème $P(\alpha_1)$ de sorte que $z(\alpha_1) \geq f(x_\lambda)$. Il en résulte que, pour chaque $\lambda \in [0, 1]$

$$\max\{(\alpha_1), z(\alpha_2)\} \geq z(\alpha_1) \geq f(x_\lambda) = z(\lambda\alpha_1 + (1 - \lambda)\alpha_2)$$

et le la thèse est réalisée.

Chapitre 2

La méthode de concavité

Dans ce chapitre, nous allons montrer l'explosion de la solution en temps fini, et de ce fait nous utilisons la méthode de concavité. Le phénomène d'explosion en temps fini, montre que la solution est infinie pour la norme de l'espace considéré quand t approche le temps d'explosion T^*, qui est fini.

$$lim_{t \longrightarrow T^*} \mid\mid u \mid\mid_H = \infty.$$

Le phénomène d'extinction est relative et proche de celui d'explosion, seulement dans ce cas, la solution reste toujours bornée, mais ses dérivées explosent.

Nous définissons la fonction $F(t)$ par :

$$F(t) = \int_0^t \parallel u \parallel^2 d\tau + (T - t) \parallel u_0 \parallel^2 + \beta(t + \tau).$$

Maintenant :

$$F''(t)F(t) - 3\left[F'(t)\right]^2 > 0.$$

Ensuite :

$$\left(F^{-2}\right)'' = -2F^{-4}\left[F''F - 3\left(F'\right)^2\right].$$

N'importe quand $F \neq 0$, il en résulterait que F^{-2} serait concave.

Ainsi,

$$F^{-2}(t) \leq F^{-3}(0)[-2F'(0)t + F(0)]$$

Depuis le graphique d'une fonction concave doit être inférieure à une ligne tangente .

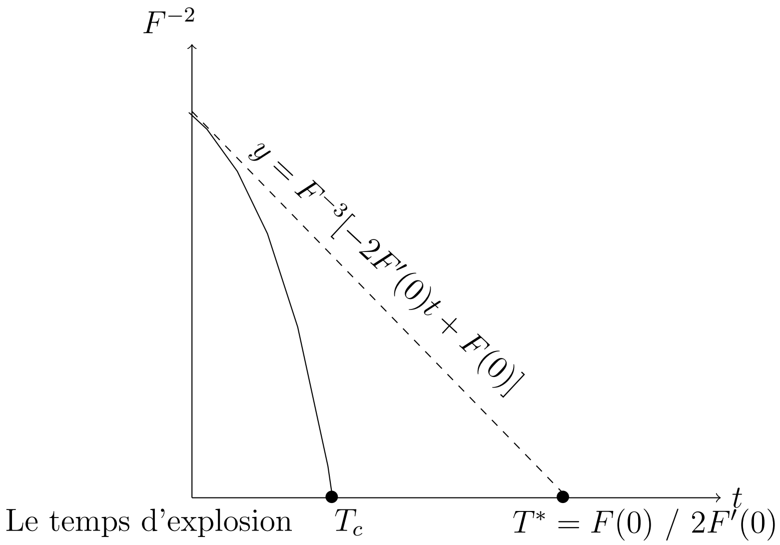

Fig 2.1 La fonction $F^{-2}(t)$

Par conséquent :

$$F^2(t) \geq F^3(0)[-2F'(0)t + F(0)]^{-1}$$

et par conséquent que $t \to T \leq \frac{F(0)}{2F'(0)}$, on aperçoit : $F(t) \to +\infty$. Ceci est le point crucial de l'argument de la concavité.

La méthode de concavité est une technique, qui a trouvé une large application. l'idée de base est de construire une fonction fonctionnelle positive définie,F(t)de la solution a une équation différentielle partielle,puis montrer F^{-2} est une fonction concave de t, dans ce cas, F satisfait l'inégalité différentielle.

$$\frac{d^2F^{-2}}{dt^2} \leqslant 0 \tag{2.0.1}$$

Et donc par l'intégration de cette inégalité on déduit la limite inférieure suivante pour F(t).

$$y = -2F'(0)F^{-3}t + F^{-2}(0)$$

$$2F'(0)F^{-3}(0)t + F^{-2}(0) - F^{-2}(t) \geqslant 0$$

$$-2\frac{F'(0)}{F(0}t + 1 \geqslant \frac{F^{-2}(t)}{F^{-2}(0)}$$

$$F^{-2}(0)[\frac{-2F'(0)t + F(0)}{F(0)}] \geqslant \frac{1}{F^2(t)}$$

$$\frac{-2F'(0)t + F(0)}{F^3} \geqslant \frac{1}{F^2(t)}$$

$$\frac{F^3(0)}{F(0) - 2F'(0)t} \leqslant F^2(t)$$

Donc :

$$F^2(t) \geqslant \frac{F^3(0)}{F(0) - 2tF'(0)} \tag{2.0.2}$$

La fonction $F^2(t)$ est donc délimité ci-dessous par une fonction qui explose en temps finis à condition $F'(0) > 0$. Le gonflement doit alors être :

$$y = F'(0)(t - 0) + F^{-2}(0)$$

$$= -2F'(0)F^{-3}(0)(t - 0) + F^{-2}(0)$$

$$0 = -2F'(0)F^{-3}(0)t + F^{-2}(0)$$

$$-F^{-2}(0) = -2F'(0)F^{-3}(0)t$$

$$t = \frac{F^{-2}(0)}{2F'(0)F^{-3}(0)}$$

$$t = \frac{F^{-2}F^3(0)}{2F'(0)} \Longrightarrow t = \frac{F(0)}{2F'(0)}$$

Donc :

$$T^* = \frac{F(0)}{2F'(0)} > 0 \tag{2.0.3}$$

Cet argument ne permet pas d'établir que F(t) explose réellement. Cependant, cela montre certainement que la solution ne peut pas exister pour toujours dans un sens classique.

L'interprétation en géométrique de la méthode de la concavité telle qu'elle peut être tirée de la figure [2.1] montre $F^{-2}(t)$ se trouve sous le graphique en ligne droite.

$$y = F^{-3}(0)[F(0) - 2tF'(0)]$$

Quand $F'(0) > 0$. La pente de cette ligne est négative et de puis F^{-2} est concave alors il se trouve en dessous de cette ligne. Et coupe ainsi l'axe t en un point $T_c < \infty$, à condition que la solution peut être poursuivie jusqu'à ce point. Nous illustrons cette méthode en l'appliquant à l équation aux dérivées partielles .

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u^3 + u \tag{2.0.4}$$

défini sur $[0,1] \times [0,T]$, pour certains $T > 0$. Et [0,1] un domaine délimité en $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$. Nous devions remplacer u^2 par $u \mid u \mid$ dans (2.0.4). La solution u est soumise à la condition limite.

$$u = 0, \ on \quad \Gamma \tag{2.0.5}$$

Où Γ est la limite de [0,1], et est également nécessaire pour satisfaire les données initiales

$$u(x,0) = u_0(x), x \in [0,1] \tag{2.0.6}$$

une fonction appropriée F(t) à utiliser pour (2.0.4)-(2.0.6) est :

$$F(t) = \int_0^t \parallel u \parallel^2 d\tau + (T-t) \parallel u_0 \parallel^2 + \beta(t+\tau) \tag{2.0.7}$$

Où T, β, $\tau > 0$ doivent être choisis. C'est essentiellement la fonction choisie par [4] qui traite l'équation abstraite

$$pu_t = -Au + F(u).$$

Dans un espace de Hilbert, où p, A sont (éventuellement non liés) des opérateurs linéaires symétrique et F est une fonction non linéaire appropriée.

Il est à noter que la solution à la version linéarisée de (2.0.4)-(2.0.6) est stable et que les solutions décroissent rapidement jusqu'à zéro. Ainsi, toute explosion est dû au terme non linéaire.
pour appliquer la méthode de la concavité, il est nécessaire de montrer que F satisfait à l'inégalité (2.0.1). Ainsi, puisque :

$$\left(F^{-2}(t)\right)' = -2F'(t)F^{-3}(t)$$

$$\left(F^{-2}(t)\right)'' = [-2F'(t)F^{-3}(t)]'$$

$$= -2F''(t)F^{-3}(t) + (-3)F'(t)F^{-2}(-2F'(t))$$

$$= -2F''(t)F^{-3}(t) + (-5)F'(t)F^{-4}(t)$$

Donc :

$$\frac{d^2F^{-2}}{dt^2} = -2F''(t)F^{-3}(t) + (-5)F'(t)F^{-4}(t) \tag{2.0.8}$$

Pour $F > 0$, on voit qu'il faut montrer que F satisfait l'inégalité différentielle

$$F > 0, F^{-4} = \frac{1}{F^4} > 0, F^{-4} > 0$$

Mais (2.0.1)

$$(F'')^{-2} \leqslant 0$$

Donc :

$$FF'' - 3(F')^2 \geqslant 0 \tag{2.0.9}$$

Ainsi, on différence (2.0.7) pour obtenir :

$$\frac{dF}{dt} = 2\int_0^t (u, u_\tau)d\tau + 2\beta(t+\tau) \tag{2.0.10}$$

On a :

$$F(t) = \int_0^t \parallel u \parallel^2 d\tau + (\tau - t) \parallel u_0 \parallel^2 + \beta(t+\tau)^2$$

$$\frac{dF}{dt} = \parallel u \parallel^2 - \parallel u_0 \parallel^2 + 2\beta(t+\tau)$$

Mais on sait que :

$$\int_0^t \frac{d}{dt}(\parallel u \parallel)^2 d\tau = \parallel u \parallel^2 - \parallel u_0 \parallel^2$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \parallel u \parallel^2 d\tau = \int_0^t \frac{d}{d\tau}(u,u)d\tau &= \int_0^t (u_\tau, u)d\tau + \int_0^t (u, u_\tau)d\tau \\ &= 2\int_0^t (u_\tau, u)d\tau \\ &= 2\int_0^t (u, u_\tau)d\tau \end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{dF}{dt} = 2\int_0^t (u, u_\tau)d\tau + 2\beta(t+\tau)$$

Où(.,.)désigne le produit intérieur sur $L^2\,(0,1)$. Pour continuer,nous observons que par substitution de u_τ à l'équation différentielle partielle (2.0.4) et par intégration, F peut être réécrit de la manière suivante :

$$\frac{dF}{dt} = -2\int_0^t \parallel \frac{\partial u}{\partial x} \parallel^2 d_\tau + 2\int_0^t\int_0^1 u^4 dx d\tau + 2\int_0^t\int_0^1 u^2 dx d\tau + 2\beta(t+\tau) \tag{2.0.11}$$

D'après (4) :

$$u_t = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u^3 + u$$

D'après (10) :

$$\frac{dF}{dt} = 2\int_0^t (u, u_\tau) d\tau + 2\beta(t+\tau)$$

$$= 2\int_0^t (u, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u^3 + u) d\tau + 2\beta(t+\tau)$$

$$= 2\int_0^t (u, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) d\tau + 2\int_0^t (u, u^3) d\tau + 2\int_0^t (u, u) d\tau + 2\beta(t+\tau)$$

$$= 2\int_0^t (u, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) d\tau + 2\int_0^t u^4 d\tau + 2\int_0^t u^2 d\tau + 2\beta(t+\tau)$$

On supposons :

$$I_1 = 2\int_0^t (u, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) d\tau$$

$$I_2 = 2\int_0^t (u, u^4) d\tau$$

$$I_3 = 2\int_0^t u^2 d\tau$$

Par intégration par partie on obtient :

$$I_1 = -2\int_0^t \parallel \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \parallel^2 d\tau$$

$$I_2 = 2\int_0^t\int_0^1 u^4 dx d\tau$$

$$= 2\int_0^t \parallel u \parallel^4 d\tau$$

$$I_3 = 2\int_0^t\int_0^1 u^2 dx d\tau$$

$$= 2\int_0^t \| u \|^2 \, d\tau$$

Alors :

$$\frac{dF}{dt} = -2\int_0^t \| \frac{\partial u}{\partial x} \|^2 \, d\tau + 2\int_0^t \int_0^1 u^4 dx d\tau + 2\int_0^t \int_0^1 u^2 dx d\tau + 2\beta(t+\tau)$$

Cette expression est différenciée et avec un peu de réarrangement et d'intégration par parties nous trouvons :

$$F'' = 4\int_0^t (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u_\tau) d\tau - 2 \| \frac{\partial u_0}{\partial x} \|^2 + 2\int_0^1 u^4 dx + 2\beta \tag{2.0.12}$$

On a :

$$u_t = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u^3 + u \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_t - u^3 - u$$

On remplacent dans(2.0.12) :

$$F'' = 4\int_0^t (u_\tau - u^3 - u, u_\tau) d\tau - 2 \| \frac{\partial u_0}{\partial x} \|^2 + 2\int_0^1 u^4 dx + 2\beta$$

$$= 4\int_0^t (u_\tau, u_\tau) d\tau - 4\int_0^t (u^3, u_\tau) d\tau - 4\int_0^t (u, u_\tau) d\tau - 2 \| \frac{\partial u_0}{\partial x} \|^2 + 2\int_0^1 u^4 dx + 2\beta$$

On supposons :

$$J_1 = 4\int_0^t (u_\tau, u_\tau) d\tau$$

$$J_2 = -4\int_0^t (u^3, u_\tau) d\tau$$

$$J_3 = -4\int_0^t (u, u_\tau) d\tau$$

Par intégration par partie on obtient :

$$J_1 = 4\int_0^t \| u_\tau \|^2 \, d\tau$$

$$J_2 = -4\int_0^t (u^3, u_\tau) d\tau$$

$$= -4\int_0^t (\int_0^1 u^3 u_\tau dx) d\tau$$

$$= -4\int_0^1 (\int_0^t u^3 u_\tau d\tau) dx$$

$$= -\int_0^1 u^4 dx + \int_0^1 u_0^4 dx$$

$$J_3 = -4\int_0^t (u, u_\tau) d\tau$$

$$= -4\int_0^t (\int_0^1 u u_\tau dx) d\tau$$

$$= -4\int_0^1 (\int_0^t u u_\tau d\tau) dx$$

$$= -2\int_0^1 u^2 dx + 2\int_0^1 u_0^2 dx$$

Alors :

$$F'' = 4\int_0^t \parallel u_\tau \parallel^2 d\tau - \int_0^1 u^4 dx + \int_0^1 u_0^4 dx - 2\int_0^1 u^2 dx + 2\int_0^1 u_0^2 dx - 2 \parallel \frac{\partial u_0}{\partial x} \parallel^2$$

$$+2\int_0^1 u^4 dx + 2\beta$$

Le terme $\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}$ est substitué en utilisant (2.0.4) pour trouver ensuite

$$F'' = 4\int_0^t \parallel u_\tau \parallel^2 d\tau - \int_0^1 u^4 dx + \int_0^1 u_0^4 dx - 2 \parallel \frac{\partial u_0}{\partial x} \parallel^2 + 2\int_0^1 u^4 dx + 2\beta$$

En prévision de la formation du coté gauche de l'inégalité (2.0.9) cette équation est reformulée de la manière suivante :

$$F'' = 12[\int_0^t \parallel u_\tau \parallel^2 d\tau + \beta] - 8\int_0^t \parallel u_\tau \parallel^2 d\tau - 10\beta + \int_0^1 u^4 dx + \int_0^1 u_0^4 dx - 2 \parallel \frac{\partial u_0}{\partial x} \parallel^2 \tag{2.0.13}$$

On a :

$$12[\int_0^t \parallel u_\tau \parallel^2 d\tau + \beta] = 12\int_0^t \parallel u_\tau \parallel^2 d\tau + 12\beta$$

$$-8\int_0^t \parallel u_\tau \parallel^2 d\tau - 10\beta$$

$$= 4\int_0^t \parallel u_\tau \parallel^2 d\tau + 2\beta$$

Donc :

$$F'' = 4\int_0^t \parallel u_\tau \parallel^2 d\tau + 2\beta + \int_0^1 u^4 dx + \int_0^1 u_0^4 dx - 2 \parallel \frac{\partial u_0}{\partial x} \parallel^2 .$$

Nous formons maintenant le coté gauche de l'inégalité (2.0.9) en utilisant (2.0.13)-(2.0.7) pour trouver :

$$FF'' - 3(F')^2 = 12S^2 + 12(T-t) \parallel u_0 \parallel^2 (\int_0^t \parallel u_\tau \parallel^2 d\tau + \beta)$$

$$+F\{-8\int_0^t \parallel u_\tau \parallel^2 d\tau - 10\beta + \int_0^1 u^4 dx + \int_0^1 u_0^4 dx - 2 \parallel \frac{\partial u_0}{\partial x} \parallel^2\} \quad (2.0.14)$$

On a :

$$F'' = 4\int_0^t (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u_\tau) d\tau - 2 \parallel \frac{\partial u_0}{\partial x} \parallel^2 + 2\int_0^1 u^4 dx + 2\beta$$

$$(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u_0) = \int_0^1 \frac{\partial^2 u_\tau}{\partial x^2} u_0 dx$$

$$= -\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u_\tau}{\partial x} dx$$

$$= \int_0^1 (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u_\tau) dx$$

$$(-2\int_0^t \parallel \frac{\partial u}{\partial x} \parallel^2 d\tau)_t = -2\int_0^t 2\int_0^1 (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u_\tau}{\partial x}) dx d\tau$$

$$= -4\int_0^t \int_0^1 (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u_\tau}{\partial x}) dx d\tau$$

$$(\int_0^t \parallel \frac{\partial u}{\partial x} \parallel^2 d\tau)_t = \parallel \frac{\partial u}{\partial x} \parallel^2 - \parallel \frac{\partial u_0}{\partial x} \parallel^2$$

$$(-2\int_0^t \parallel \frac{\partial u}{\partial x} \parallel^2 d\tau)_t = 4\int_0^t (\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}, u_\tau) d\tau - 2 \parallel \frac{\partial u_0}{\partial x} \parallel^2 - 2\int_0^t \frac{d}{dt}(\parallel \frac{\partial u}{\partial x} \parallel^2) d\tau$$

$$= -2 \parallel \frac{\partial u}{\partial x} \parallel^2 + 2 \parallel \frac{\partial u_0}{\partial x} \parallel^2$$

On a :

$$F = \int_0^t \parallel u \parallel^2 d\tau + (T-t) \parallel u_0 \parallel^2 + \beta(t+\tau)^2$$

$$F'' = 12[\int_0^t \parallel u_\tau \parallel^2 d\tau + \beta] - 8\int_0^t \parallel u_\tau \parallel^2 d\tau - 10\beta + \int_0^1 u^4 dx + \int_0^1 u_0^4 dx - 2 \parallel \frac{\partial u_0}{\partial x} \parallel^2$$

$$S^2 = [\int_0^t \parallel u \parallel^2 d\tau + \beta(t+\tau)^2][\int_0^t \parallel u_\tau \parallel^2 d\tau + \beta] - [\int_0^t (u, u_\tau) d\tau + \beta(t+\tau)]^2$$

Où la quantité S^2, qui est non négatif en vertu de l'inégalité de Cauchy Schwarz, est défini par :

$$S^2 = [\int_0^t \parallel u \parallel^2 d\tau + \beta(t+\tau)^2][\int_0^t \parallel u_\tau \parallel^2 d\tau + \beta] - [\int_0^t (u, u_\tau) d\tau + \beta(t+\tau)]^2$$

Notons qu'on utilisant l'équation aux dérivées partielles (2.0.4) et on intégrant par parties, nous pouvons montrer que :

$$\int_0^t \parallel u_\tau \parallel^2 d\tau = \int_0^t (u_\tau, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u^3 + u) d\tau$$

$$= \frac{-1}{2} \parallel \frac{\partial u}{\partial x} \parallel^2 + \frac{1}{2} \parallel \frac{\partial u_0}{\partial x} \parallel^2 + \frac{1}{4} \int_0^1 u^4 dx - \frac{1}{4} \int_0^1 u_0^4 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 u^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^1 u_0^2 dx \tag{2.0.15}$$

On a :

$$\int_0^t \parallel u_\tau \parallel^2 d\tau = \int_0^t (u_\tau, u_\tau) d\tau$$

$$= \int_0^t (u_\tau, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u^3 + u) d\tau$$

$$= \int_0^t (u_\tau, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) d\tau + \int_0^t (u_\tau, u^3) d\tau + \int_0^t (u_\tau, u) d\tau$$

On supposons :

$$k_1 = (u_\tau, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2})$$

$$k_2 = (u_\tau, u^3)$$

$$k_3 = (u_\tau, u)$$

Par intégration par partie on obtient :

$$k_1 = (u_\tau, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2})$$

$$= \int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u_\tau dx$$

$$= -\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u_\tau}{\partial x} dx$$

$$= -\int_0^1 \int_0^t \frac{\partial u_\tau}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} d\tau dx$$

$$\int_0^t k_1 d\tau = \frac{-1}{2} \parallel \frac{\partial u}{\partial x} \parallel^2 + \frac{1}{2} \parallel \frac{\partial u_0}{\partial x} \parallel^2$$

$$\int_0^t k_2 d\tau = \int_0^t (u_\tau, u^3) d\tau$$
$$= \int_0^t \int_0^1 u_\tau u^3 d\tau$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^1 u^4 dx - \frac{1}{4} u_0^4 dx$$
$$\int_0^t k_3 d\tau = \int_0^t (u_\tau, u) d\tau$$
$$= \int_0^t \int_0^1 u_\tau u dx d\tau$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 u^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^1 u_0^2 dx$$

Alors :

$$\int_0^t \parallel u_\tau \parallel^2 d\tau = \frac{-1}{2} \parallel \frac{\partial u}{\partial x} \parallel^2 + \frac{1}{2} \parallel \frac{\partial u_0}{\partial x} \parallel^2 + \frac{1}{4}\int_0^1 u^4 dx - \frac{1}{4} u_0^4 dx$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^1 u^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^1 u_0^2 dx$$

Les deux premiers termes du cote droite de(2.0.14) sont non négatifs et nous les écartons. Alors(2.0.15) est utilisé pour remplacer le premier terme dans les accolades du coté droit de (2.0.14) et nous obtenons ainsi,

$$FF'' - 3(F')^2 \geqslant 4F \parallel \frac{\partial u}{\partial x} \parallel^2 - F\int_0^1 u^4 dx + F[3\int_0^1 u_0^4 dx - 6 \parallel \frac{\partial u_0}{\partial x} \parallel^2 - 10\beta]$$

Nous sélectionnons maintenant pour faire disparaitre le deuxième terme à droite En faisant cette sélection on se retrouve avec l'inégalité

$$FF'' - 3(F')^2 \geqslant 4F \parallel \frac{\partial u}{\partial x} \parallel^2 - 6\beta F + F[2\int_0^1 u_0^4 dx - 4 \parallel \frac{\partial u_0}{\partial x} \parallel^2] \quad (2.0.16)$$

Supposons maintenant que les données initiales soient telles que l'inégalité suivante soit satisfaite.

$$\int_0^1 u_0^4 dx > 2 \parallel \frac{\partial u_0}{\partial x} \parallel^2 \quad (2.0.17)$$

On choisit alors β si petit qu'il satisfait à la restriction

$$\frac{1}{3}\int_0^1 u_0^4 dx - \frac{2}{3} \parallel \frac{\partial u_0}{\partial x} \parallel^2 > \beta \quad (2.0.18)$$

En sélectionnant β de cette manière, il découle immédiatement de(2.0.17) que l'inégalité(2.0.9) est vraie et que,par conséquent, F satisfait(2.0.1). Ainsi,la solution u à(2.0.4)-(2.0.6) ne peut exister ou-delà deT^* donnée par(2.0.3). Dans le cas présent(2.0.3)prend la forme :

$$T^* = \frac{T \parallel u_0 \parallel^2 + \beta\tau^2}{2\beta\tau}.$$

Au départ, le nombre T dans la définition de F sur(2.0.7) doit être choisi de telle sorte que :

$$T \geqslant T^* = \frac{T \parallel u_0 \parallel^2 + \beta\tau^2}{2\beta\tau}$$

On a :

$$T^* = \frac{F(0)}{2F'(0)}$$

$$F(0) = T \parallel u_0 \parallel^2 + \beta\tau^2$$

$$2 = \frac{1}{2}F'(0) = \beta\tau$$

Donc :

$$T^* = \frac{F(0)}{2F'(0)} = \frac{T \parallel u_0 \parallel^2 + \beta\tau^2}{2\beta\tau}$$

Et donc nous devons choisir T pour satisfaire.

$$T \geqslant \frac{\beta\tau^2}{2\beta\tau - \parallel u_0 \parallel^2} \qquad (2.0.19)$$

On a :

$$T \geqslant T^* = \frac{T \parallel u_0 \parallel^2 + \beta\tau^2}{2\beta\tau}$$

$$2\beta\tau T - T \parallel u_0 \parallel^2 \geqslant \beta\tau^2$$

$$T[2\beta\tau - \parallel u_0 \parallel^2] \geqslant \beta\tau^2$$

Donc :

$$T \geqslant \frac{\beta\tau^2}{2\beta\tau - \parallel u_0 \parallel^2}$$

Le coefficient β a déjà été limité à(2.0.19). Mais nous pouvons maintenant choisir τ si grand que :

$$\tau > \frac{\parallel u_0 \parallel^2}{2\beta} \qquad (2.0.20)$$

Et simultanément tel que(2.0.20)est satisfait. Ainsi,la solution de(2.0.4)-(2.0.6) doit exploser dans F mesurée a au avant T^*, où cesser d'exister par manque

de régularité.Dans ce ces,la solution explose.
Effectivement il existe plusieurs extensions intéressantes de la méthode de la concavité[5]. Ont montré comment il pouvait conduire à une explosion en temps fini,lorsque l'équation aux dérivées partielles est linéaire alors que les conditions aux limites sont non linéaires. A montré comment appliquer la technique de la concavité lorsque les coefficients de l'équation aux dérivées partielles sont singuliers, en dérivant un théorème de non-existence pour la solution d'une équation non linéaire de Euler-poisson. Ont également montré comment étendre l'argument de la non-existence à l'inégalité généralisée de la concavité.

$$FF'' - 3(F')^2 \geqslant -aF^2 - bFF' \tag{2.0.21}$$

lorsque $b = 0$, il n'est pas difficile de comprendre pourquoi cela fonctionne, pour en suite en multipliant(2.0.22) par $-2F^{-4}$, on démontre que :

$$(F^{-2})'' \leqslant 2aF^{-2}$$

Mettez :

$$w = \sqrt{2a} > 0$$

puis avec :

$$x = F^{-2}$$

cette inégalité peut être arrangée de manière à voir :

$$\frac{d}{dt}[\exp^{-wt}(\frac{dx}{dt} + wx)] \leqslant 0 \tag{2.0.22}$$

Conclusion générale

Nous avons discuté de la méthode de la concavité,nous sommes appuyés principalement sur les études réalisées dans les deux livres [2] et [3] qui reposait sur des idées [4,5,6].

La définition initiale de la méthode est dérivée du concept de convexité, pour donner une visualisation complète de la méthode de la concavité , nous utilisons une courbe.

Le seul objectif du problème que nous avons étudié est : la procédure suivie pour apprendre à appliquer la méthode de concavité uniquement.

Bibliographie

[1] A. A. Samarskii,V. A. Galaktionov, S. P. Kurdyumov,A. P. Mikhailov, Blow-up in Quasilinear Parabolic Equations ,Walter de Gruyter, Berlin (1995).

[2] B. Hu, Blow-up Theories for Semilinear Parabolic Equations, Springer Heidelberg Dordrecht London New York (2011)

[3] B. Straughan, Explosive Instabilities in Mechanics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York (1998)

[4] H.A Levine, Some nonexistence and instability theorems for formally parabolic equations of the form $Pu_{tt} = -Au + \mathcal{F}(u)$, Arch. Ral. Mech. Anal., 51 (1973), pp. 371–386 .

[5] H.A Levine,Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the form $Pu_{tt} = -Au + \mathcal{F}(u)$, transations of the american mathematical societ, 192(1974), pp. 1–21 .

[6] H.A. Levine, L.E. Payne, Nonexistence of global weak solutions for classes of nonlinear wave and parabolic equations, J. Math. Anal. Appl., 55 (1976), pp. 329-334.

[7] J.L.Lions, Contrôle des Systèmes Distribués Singuliers, Gauthier, Paris ,(1983).

[8] K.Deng,Behavior of solutions of Burgers's equation with nonlocal conditions , Quarterly of Applied Mathematics.,52(1994), pp. 553-567 .

[9] M. Nakao, Periodic solutions of some nonlinear degenerate parabolic equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 104(1984), 554-567.

[10] V.K. Kalantarov, O.A. Ladyzhenskaya,On the origin of collapses for quasilinear equations of parabolic and hyperbolic type. In Boundary Problems of Mathematical Physics and Related Questions of the Function Theory, O.A. Ladyzhenskaya. Zapiski, Nauchnih Seminarov LOMI,Nauka, Moscow. **69** (1977), 77-102.

[11] J.N. Flavin, S. Rionero,Qualitative Estimates for Partial Differential Equations. ,CRC Press, Boca Raton. (1995).

[12] N. Mizoguchi and E. Yanagida, Critical exponents for the blow-up of solutions with sign changes in a semilinear parabolic equation, Math. Ann. 307 (1997), 663-675.

[13] R. Arima and Y. Hasegawa, On Global Solutions for Mixed Problem of a Semi.linear Differential Equation , Proc. Japan Acad., 39(1963), 721-725.

[14] A. Cambini, L. Martein, Generalized Convexity and Optimization Theory and Applications , Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2009).

[15] J.L. Lions, Contrôle des systèmes distribués singuliers, Gauthier-Villars, (1983).

[16] M. Djermoune, Explosion et extinction de la temperateure dans les materiaux viscoplastiques. thermo-adoucissants, *Thèse de doctorat*, (1999).