République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'informatique

Et des Sciences de la Matière

Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématique

Option : EDP ET Analyse numérique

Par :

Boussaha fatma zohra

Intitulé

Analyse numérique par éléments finis du problème variationnel : écoulement d'un fluide visqueux dans une conduite cylindrique

***Dirigé par :** Mehri Allaoua*

Devant le jury

PRESIDENT	**Dr : Tabouche Noura**	**MCB Univ-Guelma**
RAPPORTEUR	**Dr: Mehri Allaoua**	**MCB Univ-Guelma**
EXAMINATEUR	**Dr :Benrabah abderrafik**	**MCA Univ-Guelma**

Session Julia

2019

<u>Dédications</u>

Je dédie ce travail :

Pour mes chers parents :

Djamel et Saliha

Merci beaucoup pour chaque minute offrait pour m'aider, m'encouragée, merci pour votre sacrifices, vous êtes la source de mon succès. Vous êtes ma vie.

A mon cher frère :

Abd El Rahim.

A mes chères sœurs :

Nada et Meryem.

A mon fiancé qui m'a encouragé tout le temps: Redwan Hadef

A tous mes chers amis.

A tous mes chers professeurs.

Pour toute ma famille aimable.

A tous ceux qui m'aidé dans ce mémoire.

Remerciement

Premièrement je remercie la bonne Dieu qui ma
Donné la force, le courage, et l'espoir nécessaire Pour
Arriver à ce modeste travail et surmonter tout les
Obstacles rencontrées.

Je remercie particulièrement mon encadreur
Dr. MEHRI Allaoua qui m'a proposé le sujet et me diriger
Honnêtement pour donner un travail mieux possible
Je le remercie beaucoup pour ses efforts, sa patience, son
Aide, ses encouragements et son soutien continu sans le quelle
Ce travail n'aurait pas pu être mené.

Je remercie aussi messieurs BENRABAH Abderrafik et
Tabouche Noura d'avoir été membre du jury et
D'avoir examiné ce travail.

Enfin, merci beaucoup à tous ceux qui m'aide et
À me encouragée dans ce mémoire.

Merci

Résumé

Ce mémoire est une analyse numérique du problème variationnel de l'écoulement d'un fluide visqueux dans une conduite cylindrique. Nous avons prouvé l'existence, l'unicité, la régularité de la solution puis nous avons approximé le problème par la méthode des éléments finis de degré un. L'objectif principal de ce travail est d'étudier la convergence de la solution approchée vers la solution exacte en combinant les estimations d'erreur de P.G. Ciarlet et une propriété de densité. En conclusion une estimation d'erreur non-optimale de la solution d'ordre $O(h^{(1/2)})$ est obtenue.

ملخص

-هذه المذكرة هي تحليل عددي للمتراجحة التغيراتية و تتمثل في تدفق ثابت رقائقي من سائل لزج على مستوى أنبوب اسطواني , نقوم بتقريب المسالة بإتباع طريقة العناصر المنتهية من الرتبة الأولى , الهدف الرئيسي من هذا العمل هو دراسة المقاربة و حصر الارتياب من الحل النظري و الحل التقريبي للمسالة .

Analyse numérique par éléments finis du problème variationnel : écoulement d'un fluide visqueux dans une conduite cylindrique

Boussaha F.Zohra

Département de mathématiques, université 08 mai 1945, Guelma

Table des matières

Introduction

Donnons pour commencer un exemple simple d'inéquation aux dérivées partielles apparaissant dans un problème physique élémentaire. Consiérons un fluide de pression $u(x)$ au point x, occupant une région Ω de R^3 limitée par une membrane Γ d'épaisseur négligeable mais semi-perméable, i.e laissant passer librement le fluide entrant dans Ω mais interdisant au contraire toute sortie de fluide. On vérifie alors que

$$-\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega. \tag{0.1}$$

Où f est une fonction donnée, avec une condition aux limites sous forme d'inégalité,

$$u \geq 0 \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial n} \geq 0, \forall x \in \Gamma. \tag{0.2}$$

Où $\dfrac{\partial}{\partial n}$ désigne la dérivée normale à Γ dirigée vers l'extérieur de Ω. Notons que la condition (0.2) est non linéaire ; elle implique qu'il y a sur Γ deux régions Γ_0 et Γ_1 où $u = 0$ et $\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0$ respectivement. Ces régions ne sont pas données à priori ; il s'agit donc d'un problème du type «frontière libre». On peut énoncer (0.1) et (0.2) sous la forme d'inéquation. On introduit dans ce cas l'ensemble K des fonctions test v :

$$K = \{v \mid \text{ fonction définie dans } \Omega, \ v \geq 0 \ \text{ sur } \ \Gamma\}. \tag{0.3}$$

Alors (0.1) et (0.2) est équivalent à

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que} \\ \int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla (v-u) dx \geq \int\limits_{\Omega} f(v-u) dx, \qquad \forall v \in K. \end{cases} \tag{0.4}$$

Le problème de trouver u solution de (0.4) est ce qu'on appelle une inéquation variatioonnelle de type elliptique. L'exemple ci-dessus a un caractère général : on rencontrera des problèmes s'énonçant en termes d'inéquations dans des situations où les contraintes, les équations d'état, les lois physiques, changent lorsque sont franchis ou atteints certains seuils.

Dans les soixantes dernières années, les inéquations variationnelles sont devenues un outil pertinent dans l'étude des problèmes non linéaires en physique et en mécanique. La théorie des inéquations variationnelles a été faite à partir des résultats concernant les problèmes unilatéraux obtenus par A.Signorini [19] et G.Fichera [7]. La théorie mathématiques obtenus par G. Stampacchia [20], J.L. Lions et G.Stampacchia [11] et puis développés par H. Brézis [12], G.Stampacchia[21], J.L.Lions [13], U.Mosco [16], D.Kinderlehrer et G.Stampacchia [10]. Pour l'approximation des inéquations variationnelles on rappelle, les contributions de U.Mosco[15], R.Glowinsky [9], J.L. Lions et R.Trémolières ou R.Glowinsky [8].

Dans [3] les auteurs ont établi une analyse numérique par éléments finis du problème variationnel de friction, problème de l'obstacle [14], problème de Signorini [17] et problème de la Torsion Elasto-Plastique [18].

Nous présentons dans ce mémoire un problème souvent rencontré dans la théorie visco-plasticité : écoulement stationnaire d'un fluide visqueux dans une conduite cylindrique (voir G.Duvaut, J.L.Lions [6], R.Glowinsky, J.L.Lions, R.Témolières [8]).

Ce mémoire est divisé en deux chapitres. On commence notre travail par des généralités sur l'inéquation variationnelle elliptique, dans la deuxième section du premier chapitre nous définissons le problème continu et nous démontrons un théorème d'existence et d'unicité de la solution. Dans la troisième section nous présentons une approximation de l'inéquation variationnelle elliptique et un théorème de convergence.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude du problème variationnelle d'écoulement d'un fluide visqueux dans un tuyau cylindrique, par analogie du chapitre un nous commençons par une définition du problème et nous donnons une propriété de régularité de la solution et une motivation physique. Dans la quatrième section nous introduisons quelques propriétés. A la section cinq nous prouvons un résultat de dualité. La section six est consacrée à l'approximation par éléments finis du problème où nous démontrons un théorème de convergence en combinant les estimations d'erreur de P.G.Ciarlet et une propriété de densité. En conclusion une estimation d'erreur non-optimale de la solution d'ordre $O(h^{\frac{1}{2}})$ est obtenue.

Chapitre 1

Généralités sur l'inéquation variationnelle elliptique

1.1 Introduction et contexte fonctionnel

1.1.1 Notations et hypothèses

Soient :

Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ à frontière $\Gamma = \partial\Omega$ suffisamment régulière.

V un espace de Hilbert réel, avec un produit scalaire $(.,.)$ et une norme associée $\| .\|$.

V^* le dual de V.

$a(.,.) : V \times V \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et V-elliptique (coercive) sur $V \times V$,

$$\exists M > 0 \text{ tel que } a(u,v) \leq M\|u\|\|v\|, \quad \forall u, v \in V.$$

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } a(u,u) \geqslant \alpha\|u\|^2, \ \forall u \in V.$$

K un sous-ensemble convexe fermé non vide de V.

$j(.) : V \to \overline{R} = R \cup \pm\infty$ une fonctionnelle convexe semi continue inférieurement (s.c.i) et propre, i.e (vérifiant $j(v) > -\infty, \forall \ v \in V, j \neq +\infty$).

1.1.2 IVE du premier genre

$$\begin{cases} \text{Trouver} \quad u \in K \quad \text{solution du problème} \\ a(u, v-u) \geqslant L(v-u), \forall \ \ v \in K. \end{cases} \tag{P1}$$

1.1.3 IVE du second genre

$$\begin{cases} \text{Trouver} \quad u \in K \quad \text{solution du problème} \\ a(u, v-u) + j(v) - j(u) \geqslant L(v-u), \forall \ \ v \in K. \end{cases} \tag{P2}$$

Remarque 1.1. *Si $k = V$ et $j \equiv 0$, les problèmes (P1) et (P2) se réduisent à une équation variationnelle classique*

$$\begin{cases} \textit{Trouver} \ \ u \in K \ \ \textit{tel que} \\ a(u, v) = L(v), \forall v \in K. \end{cases}$$

Remarque 1.2. *$(P1)$ est un cas particulier de $(P2)$. Il suffit de poser $j(v) = I_k(v)$ où I_k est une fonctionnelle sur K définie par*

$$I_k(v) = \begin{cases} 0 & si \quad v \ \in \ K \\ \infty & si \quad v \ \notin \ K. \end{cases}$$

1.2 Résultats d'existence et d'unicité de l'IVE du second genre

Théorème 1.1. *[8,9] Soit $a(.,.)$ une forme bilinéaire continue $V-$ elliptique, $L(.)$ une forme linéaire continue, $j : V \to \overline{R}$ une fonctionnelle convexe semi continue inférieurement (s.c.i) et propre. Alors le problème $(P2)$ a une unique solution.*

Preuve. 1) unicité :

Soient u_1 et u_2 deux solutions de (P2) , alors

$$a(u_1, v - u_1) + j(v) - j(u_1) \geqslant L(v - u_1), \forall v \in V \ , u_1 \in V, \tag{1.1}$$

$$a(u_2, v - u_2) + j(v) - j(u_2) \geqslant L(v - u_2), \forall v \in V, u_2 \in V, \tag{1.2}$$

Comme $j(.)$ est une fonctionnelle propre, il existe alors $v_0 \in V$ tel que

$$-\infty < j(v_0) < +\infty.$$

Ainsi on a pour i=1,2

$$-\infty < j(u_i) \leq j(v_0) - L(v_0 - u_i) + a(u_i, v_0 - u_i) < +\infty.$$

Cela montre que $j(u_i)$ est finie pour $i = 1, 2$.

Posons $v = u_2$ dans (1.1) et $v = u_1$ dans (1.2) et en additionnant les deux inéquations, nous obtenons

$$\alpha \|u_1 - u_2\|^2 \leq a(u_2 - u_1, u_2 - u_1) \leq 0.$$

D'où

$$u_1 = u_2$$

2) Existence

Considérons le cas où $a(.,.)$ est symétrique, alors le problème (P2) est équivalent à un problème de minimisation

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \quad \text{tel que} \\ J(u) \leq J(v), \forall v \in V, \end{cases} \tag{P3}$$

avec

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - j(v) - L(v). \tag{1.3}$$

Comme $j(.)$ est propre, convexe, s.c.i, donc elle est bornée inférieurement par une fonctionnelle affine

$$j(v) \geqslant L_j(v) + C_0, \forall v \in V. \tag{1.4}$$

Où L_j est une forme linéaire continue sur V et $C_0 \in R$ (voir l'ouvrage de K.Atkinson-Theoretical Numerical Analysis [1], page 326). Ainsi d'après les hypothèses sur $a(.,.), j(.)$ et $L(.)$, on voit que $J(.)$ est propre , strictement convexe , s.c.i , gâteaux différentiable et vérifie la propriété

$$J(v) \to \infty \text{ quand } \|v\| \to \infty.$$

Donc le problème (P3) possède une solution unique, ainsi le problème (P2) possède une solution.

Considérons ensuite le cas général sans l'hypothèse de symétrie. L'idée est de transformer le problème variationnel à un problème de point fixe. Pour $\theta > 0$ le problème (P2) est équivalent à

$$u \in V \quad (u, v-u) + \theta j(v) - \theta j(u) \geqslant (u, v-u) - \theta a(u, v-u) + \theta L(v-u), \forall v \in V \ .$$

Pour $u \in V$ considérons le problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } w \in V \text{ tel que} \\ (w, v-w) + \theta j(v) - \theta j(w) \geqslant (u, v-w) - \theta a(u, v-w) + \theta L(v-w), \forall v \in V \ , \forall w \in V \ . \end{cases} \tag{1.5}$$

Le problème (1.5) a une unique solution pour tout $u \in V, \theta > 0$, (voir l'ouvrage de R.Glowinsky [9] page 67). Pour $\theta > 0$ définissons l'application

$$P_\theta \ : V \to V \qquad \text{par } P_\theta u = w$$

où w est unique solution de (1.5). Montrons maintenant que P_θ est une contraction pour θ convenablement choisi : Pour tout $u_1, u_2 \in V$ soit $w_1 = P_\theta u_1$ et $w_2 = P_\theta u_2$, alors on a

$$(w_1, w_2 - w_1) + \theta j(w_2) + \theta j(w_1) \ \geq \ (u_1 \ , w_2 \ - w_1) - \theta a(u_1, w_2 - w_1) + \theta L(w_2 - w_1),$$

$$(w_2, w_1 - w_2) + \theta j(w_1) - \theta j(w_2) \geq (u_2 \ , w_1 - w_2) - \theta a(u_2, w_1 - w_2) + \theta L(w_1 - w_2),$$

additionnant les deux inégalités, on obtient

$$\begin{aligned}\|w_1 - w_2\|^2 &= (w_1 - w_2, w_1 - w_2) \leq (u_1 - u_2, w_1 - w_2) - \theta a(u_1 - u_2, w_1 - w_2) \\ &\leq (u_1 - u_2, w_1 - w_2) - \theta(A(u_1 - u_2), w_1 - w_2) \\ &\leq ((I - \theta A)(u_1 - u_2), w_1 - w_2),\end{aligned}$$

où l'opérateur A est défini par la relation $a(u,v) = (Au, v)$ pour tout $u, v \in V$, alors

$$\|w_1 - w_2\| \leq \|(I - \theta A)(u_1 - u_2)\|.$$

Maintenant pour tout $u \in V$, on a

$$\begin{aligned}\|(I - \theta A)u\|^2 &= \|u - \theta Au\|^2 = \|u\|^2 - 2\theta(Au, u) + \theta^2\|Au\|^2 \\ &= \|u\|^2 - 2\theta a(u, u) + \theta^2\|Au\|^2 \\ &\leq (1 - 2\theta\alpha + \theta^2 M^2)\|u\|^2,\end{aligned}$$

avec M et α sont les constantes de continuité et V-ellipticité de la forme bilinéaire $a(.,.)$. Par conséquent, en choisissent θ tel que

$$1 - 2\theta\alpha + \theta^2 M^2 < 1$$

l'application P_θ est une contraction sur l'espace de Hilbert V. Donc P_θ a un unique point fixe $u \in V$ tel que

$$P_\theta u = u.$$

Cela implique

$$(u, v - u) + \theta j(v) - \theta j(u) \geq (u, v - u) - \theta a(u, v - u) + \theta L(v - u), \forall v \in V,$$

par conséquent, il existe un unique $u \in V$ tel que

$$a(u, v - u) + j(v) - j(u) \geqslant L(v - u), \forall v \in V.$$

Alors le problème (P2) a une unique solution $u \in V$.

1.3 Approximation interne de l'I.V.E du second genre-Théorème de convergence

1.3.1 Problème continu

Considérons encore le problème (P2)

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ solution de} \\ a(u, v-u) + j(v) - j(u) \geqslant L(v-u), \forall v \in V. \end{cases}$$

1.3.2 Problème approché (discret)

Approximation de V

Soient données un paramètre $h \to 0$ et une famille$\{V_h\}_h$ de sous-espace de dimention finies dans V. Nous supposons que $\{V_h\}_h$ satisfait :

(i) $\exists\ U \subset V$ tel que $\bar{U} = V$ et $\forall h > 0,\quad \exists r_h : U \to V_h$ tel que $\lim\limits_{h\to 0} r_h\ v = v$ fortement dans V.

(ii) si $v_h \longrightarrow v$ faiblement dans V ,alors lim inf $j(v_h) \geq j(v)$.

(iii) lim $j(r_h v) = j(v), \forall\ v \in U$.

Approximation de (P2)

Le problème (P2) est approximé par

$$\begin{cases} \text{Trouver } \ u_h \in V_h \ \text{ tel que} \\ a(u_h, v_h - u_h) + j(v_h) - j(u_h) \geqslant L(v_h - u_h),\ \forall\ v_h \in V_h. \end{cases} \tag{P2h}$$

Théorème 1.2. *Le problème (P2h) a une unique solution.* V *par* V_h.

Preuve.

Il suffit d'appliquer le théorème 1.1 en remplaçant V par V_h.

1.3.3 Résultat de convergence

Théorème 1.3. *Sous les hypothèses ci-dessus de* $\{V_h\}_h$ *(i),(ii),(iii) on a :*

$$\lim_{h\to 0} \|u_h - u\| = 0.$$

Preuve.

On divise la démonstration en trois parties :

1. estimation à priori de $\{u_h\}_h$.
2. convergence faible de $\{u_h\}_h$.
3. convergence forte de $\{u_h\}_h$.

Pour plus de détails vour l'ouvrage de R.Glowinsky [8,9].

Chapitre 2

Le problème variationnel : écoulement d'un fluide visqueux dans une conduite cylindrique

2.1 Le problème continu : Existence et unicité

Soit Ω un domaine borné de R^2 avec une frontière suffisamment régulière $\Gamma = \partial\Omega$. en utilisant les mêmes notations que dans chapitre 1, nous définissons

$$V = H_0^1(\Omega), \tag{2.1}$$

$$a(u,v) = \int\limits_{\Omega} \nabla u . \nabla v dx, \tag{2.2}$$

$$L(v) = \langle f, v \rangle \,, \quad f \in V^*, \tag{2.3}$$

$$j(v) = \int\limits_{\Omega} |\nabla v| \, dx. \tag{2.4}$$

Nous avons ensuite :

Théorème 2.1. *Il existe une et une solution $u \in V$ de l'inéquation*

$$\mu a(u, v-u) + gj(v) - gj(u) \geq L(v-u), \forall v \in V, u \in V, \tag{2.5}$$

avec μ, g sont des constantes positives.

Preuve.

Pour appliquer le théorème 1.1 du chapitre 1, il suffit de vérifier que $j(.)$ est convexe, propre et s.c.i :

- **Convexité de j(.) :**

$$\begin{aligned} j(tu+(1-t)v) &= g\int_{\Omega} |\nabla(tu+(1-t)v)|\, dx \\ &\leq g[t\int_{\Omega} |\nabla u|\, dx] + g[(1-t)\int_{\Omega} |\nabla v|\, dx] \\ &\leq t[g\int_{\Omega} |\nabla u|\, dx] + (1-t)[g\int_{\Omega} |\nabla v|\, dx] \\ &\leq tj(u) + (1-t)j(v). \end{aligned}$$

- **j(.) est propre :**

$$\begin{aligned} j(v) &> -\infty,\ \forall v \in V, \\ j(v) &\neq +\infty,\ \forall v \in V. \end{aligned}$$

- Semi continuité inférieure de j(.) :

En fait $j(.)$ est une semi-norme sur V. Donc en utilisant l'inégalité de Cauchy Schwartz dans $L^2(\Gamma)$, nous avons

$$\begin{aligned}
|j(u) - j(v)| &= \left| g\int\limits_{\Omega} |\nabla u|\, dx - g\int\limits_{\Omega} |\nabla v|\, dx \right| \qquad (2.6)\\
&= g\left| \int\limits_{\Omega} (|\nabla u| - |\nabla v|) dx \right| \\
&\leq g\int\limits_{\Omega} |\nabla u - \nabla v|\, dx \\
&\leq g|\Omega|^{\frac{1}{2}} \left\|\nabla(u-v)\right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq g|\Omega|^{\frac{1}{2}} \left\|u-v\right\|_{V}.
\end{aligned}$$

Donc

$$|j(u) - j(v)| \leq C \left\|u-v\right\|_V , \tag{2.7}$$

avec C est une constante.

Donc $j(.)$ est Lipschitzienne continue sur V, par conséquent $j(.)$ est s.c.i sur V, ainsi toutes les conditions du théorème 1.1 sont vérifiées. Donc il existe une et une seule solution $u \in V$ du problème (2.5).

Proposition 2.1. $a(.,.)$ *est symétrique, la solution* u *de (2.5) est caractérisée comme l'unique solution de problème de minimisation*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{Trouver} \quad u \in V \;\; \textit{tel que} \\ J(u) = \min\limits_{v\in V} J(v), \end{array} \right. \tag{2.8}$$

Où

$$J(v) = \frac{\mu}{2} a(v,v) + gj(v) - L(v).$$

Preuve.

$$\forall v, u \epsilon V, \text{ on a } J(v) - J(u) = \frac{\mu}{2}[a(v,v) - a(u,u)] + gj(v) - gj(u) - L(v-u). \tag{2.9}$$

Et

$$a(v,v) = a(u+v-u, u+v-u) = a(u,u) + 2a(u,v-u) + a(v-u,v-u),$$

ce qui donne

$$a(v,v) - a(u,u) = 2a(u,v-u) + a(v-u,v-u),$$

donc

$$\frac{\mu}{2}[\ a(v,v) - a(u,u)] = \mu a(u,v-u) + \frac{\mu}{2}a(v-u,v-u),$$

en substituant cette dernière expression dans (2.9), il vient

$$J(v) - J(u) = \mu a(u,v-u) + gj(v) - gj(u) - L(v-u) + \frac{\mu}{2}a(v-u,v-u).$$

Alors

$$J(v) - J(u) \geq 0. \tag{2.10}$$

D'où

$$J(u) \leq J(v), \forall v \in V \tag{2.11}$$

Proposition 2.2. *Si $g = 0$, alors la solution du problème variationnel se réduit à*

$$\begin{cases} -\mu\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur } \ \Gamma. \end{cases} \tag{2.12}$$

Preuve.

$g = 0$, alors

$$\mu a(u,v-u) \geq L(v-u), \tag{2.13}$$

en posant $v = 0 \in V$, on a

$$\mu a(u,-u) \geq L(-u) \ ,$$

donc

$$\mu a(u,u) \leq L(u). \tag{2.14}$$

De plus en posant $v = 2u \in V$, on obtient

$$\mu a(u,u) \geq L(u). \tag{2.15}$$

De (2.14) et (2,15), on obtient

$$\mu a(u,u) = L(u). \tag{2.16}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \mu \int_\Omega \nabla u \nabla u dx &= \int_\Omega f u dx, \\ -\mu \int_\Omega \nabla^2 u.u dx &= \int_\Omega f u dx, \\ \int_\Omega (-\mu \Delta u - f) u dx &= 0. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{cases} -\mu \Delta u = f \quad \text{dans } \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma. \end{cases} \tag{2.17}$$

2.2 Motivation physique

Si $L(v) = c \int_\Omega v dx$ (par exemple, c > 0), l'inéquation (2.5) modélise l'écoulement stationnaire laminaire d'un fluide de bingham dans un tuyau cylindrique de section Ω (voir G.Duvaut, J.L.Lions [6,chapitre 6], et [8]). Un fluide rigide visco-plastique est un milieu continu qui obéit aux lois générales de conservation et à des lois de comportement particulières. Si $g = 0$ l'équation (2.12) réprésente la loi de comportement d'un fluide visqueux incompressible classique (fluide newtonien). On peut donc considérer que le fluide de Bingham est, pour g petit, un modèle voisin du fluide visqueux classique. Ce type de comportement s'observe dans le cas de certaines huiles ou de certaines boues, utilisées dans la technique des forages pétroliers, ainsi que dans le béton. Si g est strictement positif, on observe des zones rigides au sein de l'écoulement. Si g croît, ces zones rigides augmentent et sont alors susceptibles de bloquer complètement l'écoulement pour g assez grand. Nous considérons le domaine Ω de R^2 représenté par une section droite de ce cylindre. L'écoulement est étudié entre les sections $x_3 = 0$ et $x_3 = L$ (L : longueur donnée) sur lesquelles nous imposons les valeurs de la pression, soit

$$p(x_3)_{|x_3=0} = 0, \; p(x_3)_{|x_3=L} = -c.$$

Le scalaire positif c est la chute (décroissance) de la pression. $u(x)$ étant la vitesse de l'écoulement à $x \in \Omega$, la constante c est la décroissance linéaire de la pression et μ, g sont respectivement la viscosité et le seuil de plasticité du fluide. Le milieu ci-dessus se comporte comme un fluide visqueux (de viscosité μ) dans

$$\Omega^+ = \{x \in \Omega, |\nabla u(x) > 0\},$$

et comme un milieu rigide dans

$$\Omega^0 = \{x \in \Omega, \nabla u(x) = 0\}.$$

Nous observons que (2.5) apparait également comme un problème de frontiére libre.

2.3 Régularité de la solution

Théorème 2.2. *(H.Brezis[2]). Soit* Ω *un domaine borné convexe de* R^2 *à frontière* Γ *suffisamment régulière si* $L(v) = \int_\Omega fv \; dx$, $f \in L^2(\Omega)$, *alors la solution* u *de problème (2.5) est dans* $H^2(\Omega)$.

Preuve. Démontrons par pénalisation :

D'aprés le théorème (2.1) le problème (2.5) admet une unique solution $u \in V$. Soit $\varepsilon > 0$ considérons le problème de Dirichlet suivant.

$$\varepsilon\mu A u_\varepsilon + u_\varepsilon = u \text{ dans } \Omega. \tag{2.18}$$

Où

$$\begin{aligned} Au &= -\Delta u \ \text{ tel que} \\ (Au, v) &= a(u, v), \end{aligned}$$

le problème (2.18) a une seule solution

$$u_\varepsilon \in H^1(\Omega),$$

et par la régularité de Γ, nous avons

$$u_\varepsilon \in H^2(\Omega).$$

L'inéquation (2.5) s'écrit aussi

$$(\mu Au - f, v - u) + gj(v) + gj(u) \geq 0, \forall v \in V, \tag{2.5bis}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} (\mu Av - f, v - u) + gj(v) - gj(u) &= (\mu A(v-u) - f, v - u) + (\mu A(u) - f, v - u) + gj(v) - gj(u) \\ &\geq (\mu Au - f, v - u) + gj(v) - gj(u) \geq 0, \forall v \in V, \end{aligned}$$

donc

$$(\mu Av - f, v - u) + gj(v) - gj(u) \geq 0, \forall v \in V. \tag{2.19}$$

Et réciproquement (2.19) implique (2.5bis) : En effet en posant $v = u_\varepsilon \in V$ dans (2.19), il vient

$$(\mu Au_\varepsilon - f, u_\varepsilon - u) + gj(u_\varepsilon) - gj(u) \geq 0,$$

comme

$$u_\varepsilon - u = -\varepsilon \mu Au_\varepsilon,$$

alors

$$-\varepsilon(\mu Au_\varepsilon - f, \mu Au_\varepsilon) + gj(u_\varepsilon) - gj(u) \geq 0,$$

ce qui donne

$$-\varepsilon(\mu Au_\varepsilon - f, \mu Au_\varepsilon) + g\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon - \nabla u|\, dx \geq 0,$$

$$-\varepsilon(\mu Au_\varepsilon - f, \mu Au_\varepsilon) + g\int_\Omega |\nabla (u_\varepsilon - u)|\, dx \geq 0,$$

$$-\varepsilon(\mu Au_\varepsilon - f, \mu Au_\varepsilon) + \varepsilon g\int_\Omega |\nabla (\mu Au_\varepsilon)|\, dx \geq 0,$$

et par conséquent

$$\mu^2 \|Au_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq \mu \|Au_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \|f\|_{L^2(\Omega)} + \mu g\, |\Omega|^{\frac{1}{2}}\, \|\nabla(Au_\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)},$$

d'où

$$\|Au_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C.$$

En passant à la limite quand $\varepsilon \to 0$, on obtient

$$\|Au\|_{l^2(\Omega)} \leq C.$$

2.4 Quelques propriétés

Soit

$$\alpha = \inf_{v\in H^1(\Omega), v\neq 0} \frac{j(v)}{\|v\|_{L^1(\Omega)}}.$$

Proposition 2.3. *Soit u solution de (2.5) et $f \in L^\infty(\Omega)$. Si*

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} \leq g\alpha,$$

alors

$$u = 0.$$

Preuve.

En posant $v = 0 \in V$ dans (2.5), on aura

$$\mu a(u, -u) + gj(0) - gj(u) \geq L(-u),$$

ce qui implique

$$\mu a(u, -u) - gj(u) \geq L(-u),$$

donc

$$\mu a(u, u) + gj(u) \leq L(u). \tag{2.20}$$

En posant $v = 2u \in V$ dans (2.5), on obtient

$$\mu a(u, u) + gj(u) \geq L(u) \tag{2.21}$$

de (2.20) et (2.21), on obtient

$$\mu a(u, u) + gj(u) = L(u). \tag{2.22}$$

D'aprés la propriété de Cauchy Schwartz

$$\int_\Omega f u dx \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^1(\Omega)},$$

ce qui donne

$$\mu a(u, u) + gj(u) - \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^1(\Omega)} \leq 0,$$

par conséquent

$$\mu a(u, u) + (g\alpha - \|f\|_{L^\infty(\Omega)}) \|u\|_{L^1(\Omega)} \leq 0,$$

comme

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} \leq g\alpha$$

alors

$$u = 0.$$

Proposition 2.4. *Soit u la solution de (2.5) et $f \in L^p(\Omega)$, $p > 1$. Si*

$$f \geq 0,$$

alors

$$u \geq 0$$

Preuve.

On pose $v = u^+$ dans (2.5)

$$\mu a(u, u^-) + gj(u^+) - gj(u) \geq (f, u^-),$$

mais

$$a(u, u^-) = -a(u^-, u^-) \text{ et } j(u) = j(u^+) + j(u^-),$$

on en déduit

$$\mu a(u^-, u^-) + gj(u^-) + (f, u^-) \leq 0. \tag{2.23}$$

Comme $f \geq 0$, on a $(f, u^-) \geq 0$, et donc (2.23) implique

$$a(u^-, u^-) = 0,$$

et donc

$$u^- = 0.$$

D'où

$$u \geq 0.$$

Proposition 2.5. *Soit u la solution de (2.5) et $f = c$, c constant. Alors*

$$\begin{aligned} u &= 0 \ \textit{ si et seulement si } \ c \leq g\alpha \\ \textit{et } u &\neq 0 \ \textit{si et seulement si } c > g\alpha \end{aligned}$$

Preuve.

On a

$$\mu a(u, v-u) + gj(v) - gj(u) \geq c \int_{\Omega} (v-u),$$

on pose $u = 0$, il vient

$$gj(v) \geq c \int_{\Omega} v.$$

On en déduit

$$g \inf_{v \in H^1(\Omega), v \neq 0} \frac{j(v)}{\|v\|_{L^1(\Omega)}} \geq c,$$

donc

$$g\alpha \geq c.$$

Proposition 2.6. *Soit u la solution de (2.5) et $f \in L^2(\Omega)$. Si*

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} \leq g\beta$$

alors

$$u = 0$$

avec

$$\beta = \inf_{v \neq 0} \inf_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{j(v)}{\|v\|_{L^2(\Omega)}}.$$

Preuve.

En appliquant la propriété de Cauchy Schwartz à l'expression (2.22) dans l'espace $L^2(\Omega)$,il vient

$$\mu a(u, u) + gj(u) - \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq 0,$$

par conséquent

$$\mu a(u, u) + (g\beta - \|f\|_{L^2(\Omega)}) \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq 0,$$

comme

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} \leq g\beta,$$

donc

$$u = 0.$$

2.5 Résultat de dualité

Proposition 2.7. *Soit*

$$L(v) = \int_\Omega fv\ dx, \qquad f \in V^*.$$

La solution u du problème (2.5) *est caractérisée par*

$$\begin{cases} -\mu\Delta u = f & \textit{dans}\ \ \Omega \\ \mu|\nabla u| \leq g & \textit{sur}\ \Gamma \\ u \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

avec $g > 0$.

Preuve.

On a

$$\mu \int_\Omega \nabla u \nabla(v-u)dx + g\int_\Omega |\nabla v|\, dx - g\int_\Omega |\nabla u|\, dx \geq \int_\Omega f(u-v)dx, \forall v \in V.$$

Soit $w \in V$ tel que $v = u + w \in V$, alors

$$\mu \int_\Omega \nabla u \nabla w dx + g\int_\Omega |\nabla u + \nabla w|\, dx - g\int_\Omega |\nabla u|\, dx \geq \int_\Omega fw dx, \forall w \in V,$$

ce qui donne

$$\mu \int_\Omega \nabla u \nabla w dx + g\int_\Omega |\nabla w|\, dx \geq \int_\Omega fw dx, \forall w \in V,$$

donc

$$\mu a(u,w) + gj(w) \geq L(w), \forall w \in V. \tag{2.24}$$

Soit $v \in D(\Omega)$, $u \in H^2(\Omega)$, il vient

$$\begin{aligned}\mu a(u,v) + gj(v) &= \mu \int_\Omega \nabla u \nabla v dx + g \int_\Omega |\nabla v|\, dx \\ &= -\mu \int_\Omega \Delta u v\ dx.\end{aligned}$$

Donc (2.24) devient

$$-\mu \int_\Omega \Delta u v dx \geq \int_\Omega f v dx. \tag{2.25}$$

Remplaçons v par $(-v)$ dans (2.25)

$$\mu \int_\Omega \Delta u v dx \geq -\int_\Omega f v dx,\ \forall v \in D(\Omega)$$

donc

$$-\mu \int_\Omega \Delta u v\ dx \leq \int_\Omega f v\ dx,\ \forall v \in D(\Omega). \tag{2.26}$$

De (2.25) et (2.26) on en déduit

$$-\mu \int_\Omega \Delta u v\ dx = \int_\Omega f v\ dx,$$

ce qui donne

$$\int_\Omega (-\mu \Delta u - f) v\ dx = 0\ , \forall v \in D(\Omega).$$

D'où l'équation différentielle

$$-\mu \Delta u = f \quad \text{dans } \Omega. \tag{2.27}$$

2.5.1 La solution exacte en dimension un

Soit $\Omega =]0,1[$ et $f = c$, une constante positive dans ce cas on a

$$u = 0 \ \text{ si } \frac{c}{2} \leq g.$$

Et

$$u(x) \neq 0 \text{ si } \frac{c}{2} > g,$$

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{2\mu}x(1-x) - \dfrac{gx}{\mu} \text{ si } \quad 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2} - \dfrac{g}{c} \\ \dfrac{c}{2\mu}(\dfrac{1}{2} - \dfrac{g}{c})^2 \text{ si } \quad \dfrac{1}{2} - \dfrac{g}{c} \leq x \leq \dfrac{1}{2} + \dfrac{g}{c} \\ \dfrac{c}{2\mu}x(1-x) - \dfrac{g}{\mu}(1-x) \text{ si } \quad \dfrac{1}{2} + \dfrac{g}{c} \leq x \leq 2 \ . \end{cases}$$

2.6 Approximation par éléments finis

Dans cette section, nous considérons l'approximation de (2.5) par éléments finis linéaires par morçeaux. Nous prouvons un théorème de convergence et un théorème d'estimation d'erreur.

2.6.1 Approximation du domaine Ω

Supposons que Ω est un domaine polygonal borné de R^2. Considérons une famille de triangulation classique τ_h de Ω, i.e τ_h est un ensemble fini de triangles T tel que

$$T \subset \overline{\Omega}, \forall T \in \tau_h, \ \cup_{T \in \tau_h} = \overline{\Omega},$$

$$\overset{0}{T_1} \cap \overset{0}{T_2} = \emptyset, \forall T_1, T_2 \in \tau_h \ \text{ et } T_1 \neq T_2.$$

De plus $\forall \ T_1, T_2 \in \tau_h$ et $T_1 \neq T_2$ l'une des condition suivantes doit être vraie

(1) $T_1 \cap T_2 = \emptyset$,

(2) T_1 et T_2 ont au moins un seul sommet en commun,

(3) T_1 et T_2 ont une seule arrête en commun.

h désigne la longueur de la plus grande arrête de ces triangles, h est destiné à tendre vers zéro.

Pour le moment nous considérons l'approximation par éléments finis linéaires.

2.6.2 Approximation de l'espace V

L'espace $V = H_0^1(\Omega)$ peut être approché par les espaces V_h, où

$$V_h = \left\{ v_h \in C^0(\overline{\Omega}), v_h = 0 \text{ sur } \Gamma, v_{h|_T} \in P_1, \forall\ T \in \tau_h \right\},$$

où P_1 est l'ensemble des polynômes de Lagrange de degré inférieur ou égal à 1.

2.6.3 Le problème discret

L'analogue discret du problème (2.5) est

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ \mu a(u_h, v_h - u_h) + gj(v_h) - gj(u_h) \geq L(v_h - u_h), \forall v_h \in V_h, \end{cases} \tag{2.28}$$

On peut facilement prouver ce théorème.

Théorème 2.3. *Le problème (2.28) admet une solution unique $u_h \in V_h$.*

Preuve.

Même démonstration du théorème 2.1 en remplaçant V par V_h.

Remarque 2.1. *Puisque $a(.,.)$ est symétrique le problème (2.28) est équivalent à un problème de minimisation.*

$$\begin{cases} \textit{Trouver } u_h \in V_h \textit{ tel que} \\ J(u_h) = \min\limits_{v_h \in V_h} J(v_h), \end{cases}$$

où

$$J(v_h) = \frac{\mu}{2} a(v_h, v_h) + gj(v_h) - L(v_h)$$

2.6.4 Résultat de convergence

Théorème 2.4. [4, 5] *Supposons que les angles de tous les triangles de τ_h sont bornés inférieurement par $\theta > 0$ quand $h \to 0$ (i.e τ_h est une famille de triangulation régulière).*

Alors il existe une constante c indépendant de h telle que $\forall v \in V \cap H^2(\Omega)$, *on a l'estimation suivante*

$$\begin{aligned} ||r_h v - v||_V &\leq ch||v||_{H^2(\Omega)}, \\ ||r_h v - v||_{L^2(\Omega)} &\leq ch^2||v||_{H^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Où r_h est un opérateur d'interpolation linéaire de Lagrange.

Théorème 2.5. *Supposons que les angles de tous les triangles de* τ_h *sont bornés inférieurement par* $\theta > 0$ *quand* $h \to 0$ *(i.e* τ_h *est une famille de triangulation régulière). Alors*

$$\lim_{h\to 0}||u_h - u||_V = 0. \tag{2.30}$$

Où u *et* u_h *sont respectivement les solutions de (2.5) et (2.28).*

Preuve.

Pour prouver ce théorème nous suivrons la même démarche appliquée dans la démonstration du théorème 1.3 du chapitre 1. Ceci implique qu'on doit vérifier les trois propriétés suivantes :

(i) $\exists U \subset V, \overline{U} = V$ et une application $r_h : U \to V_h$ tel que $\lim_{h\to 0} r_h v = v$ fortement dans $V, \forall v \in U$.

(ii) Si $v_h \longrightarrow v$ faiblement dans V , alors $\lim_{h\to 0}\inf j(v_h) \geq j(v)$.

(iii) $\lim_{h\to 0} j(r_h v) = j(v), \forall v \in U$.

Vérification de (i) :

Posons $U = D(\Omega)$, il résulte que $\overline{U} = V$. Définissons ensuite

$$r_h : H_0^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \longrightarrow V_h,$$

avec

$$r_h v \in V_h, \forall v \in H_0^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}),\ r_h v(M) = v(M), \forall \text{ noeud } M.$$

Alors $r_h v$ est l'interpolation linéaire de v sur τ_h. D'aprés les estimations du théorème 2.5, on a

$$||r_h v - v||_V \leq ch||v||_{H^2(\Omega)}, \forall v \in D(\Omega),$$

où c est une constante indépendante de h et v, cela implique

$$\lim_{h \to 0} ||r_h v - v||_V = 0, \forall v \in U,$$

et par densité il vient

$$\lim_{h \to 0} ||r_h v - v||_V = 0, \forall v \in V.$$

D'où (i) est vérifiée.

La vérification de (ii) est triviale puisque $j(.)$ est semi continue inférieurement.

Vérification de (iii) : $\forall v \in U$, on a

$$\begin{aligned}
|j(r_h v) - j(v)| &= |\int_\Omega |\nabla r_h v| dx - \int_\Omega |\nabla v| dx| \\
&\leq \int_\Omega |\nabla (r_h v - v)| dx \\
&\leq |\Omega|^{\frac{1}{2}} ||r_h v - v||_V, \forall v \in U,
\end{aligned}$$

qui tend vers zéro quand $h \to 0$.

En appliquant le théorème 1.3 on en déduit que u_h converge fortement vers u dans V.

2.6.5 Estimation d'erreur

Théorème 2.6. *Supposons que les angles de tous les triangles de τ_h sont bornés inférieurement par $\theta > 0$ quand $h \to 0$($i.e.$ τ_h est une famille de triangulation régulière). Alors il existe une constante c indépendante de h telle que*

$$||u_h - u|| \leq ch^{\frac{1}{2}}. \tag{2.31}$$

Preuve.

Posons $v = u_h$, dans (2.5) il vient

$$\mu a(u, u_h - u) + gj(u_h) - gj(u) \geq (f, u_h - u). \tag{2.32}$$

En additionnant (2.28) et (2.32) on trouve

$$\mu a(u_h, v_h - u_h) + \mu a(u, u_h - u) + gj(v_h) - gj(u) \geq (f, v_h - u).$$

Qu'on peut l'écrire aussi en plusieurs étapes

$$\mu a(u_h - u + u, v_h - u_h) + \mu a(u - u_h + u_h, u_h - u) + gj(v_h) - gj(u) \geq (f, v_h - u),$$

$$\mu a(u_h - u, u_h - u) \leq \mu a(u_h - u, v_h - u_h) + gj(v_h) - gj(u) + \mu a(u, v_h - u_h) + \mu a(u_h, u_h - u) - (f, v_h - u),$$

$$\mu a(u_h - u, u_h - u) \leq \mu a(u_h - u, v_h - u + u - u_h) + gj(v_h) - gj(u) + \mu a(u, v_h - u_h) + \mu a(u_h, u_h - u) - (f, v_h - u),$$

$$\begin{aligned}\mu a(u_h - u, u_h - u) \;\leq\; & \mu a(u_h - u, v_h - u) + gj(v_h) - gj(u) + \mu a(u, v_h - u_h) + \\ & \{\mu a(u_h - u, u - u_h) + \mu a(u_h, u_h - u)\} - (f, v_h - u),\end{aligned}$$

$$\mu a(u_h - u, u_h - u) \leq \mu a(u_h - u, v_h - u) + gj(v_h) - gj(u) + \{\mu a(u, v_h - u_h) + \mu a(u, u_h - u)\} - (f, v_h - u),$$

par conséquent

$$\mu a(u_h - u, u_h - u) \leq \mu a(u_h - u, v_h - u) + gj(v_h) - gj(u) + \mu a(u, v_h - u) - (f, v_h - u), \ \forall v_h \in V_h.$$

Ce qui implique

$$\mu ||u_h - u||_V^2 \leq \mu ||u_h - u||_V ||v_h - u||_V + gj(v_h - u) + \mu a(u, v_h - u) - (f, v_h - u), \ \forall v_h \in V_h.$$

Donc

$$\frac{\mu}{2} ||u_h - u||_V^2 \leq \frac{\mu}{2} ||v_h - u||_V^2 + gj(v_h - u) + \mu a(u, v_h - u) - (f, v_h - u), \ \forall v_h \in V_h.$$

Pour $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, il vient

$$a(u, v) = -\int_{\Omega} \Delta u . v dx, \forall v \in V,$$

Par conséquent

$$\frac{\mu}{2}||u_h - u||_V^2 \leq \frac{\mu}{2}||v_h - u||_V^2 + gj(v_h - u) + \int_\Omega (-\mu\Delta u - f)(v_h - u)dx, \ \forall v_h \in V_h,$$

$$\frac{\mu}{2}||u_h - u||_V^2 \leq \frac{\mu}{2}||v_h - u||_V^2 + gj(v_h - u) + (\mu||\Delta u||_{L^2(\Omega)} + ||f||_{L^2(\Omega)})||v_h - u||_{L^2(\Omega)}, \forall v_h \in V_h.$$

De (2.7) et théorème 2.2 on obtient

$$\frac{\mu}{2}||u_h - u||_V^2 \leq \frac{\mu}{2}||v_h - u||_V^2 + g\sqrt{|\Omega|}||v_h - u||_V + (c(\mu) + 1)||f||_{L^2(\Omega)}||v_h - u||_{L^2(\Omega)}, \forall v_h \in V_h.$$

Appliquons le théorème 2.5 en posant $v_h = r_h u$, il vient

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{2}||u_h - u||_V^2 &\leq \frac{\mu}{2}ch^2||u||_{H^2(\Omega)}^2 + g\sqrt{|\Omega|}ch||u||_{H^2(\Omega)} + (c(\mu) + 1)||f||_{L^2(\Omega)}ch^2||u||_{H^2(\Omega)}, \\ &\leq c_1 h^2 + c_2 h + c_3 h^2. \end{aligned}$$

On en déduit pour h assez petit l'estimation suivante

$$||u_h - u||_V \leq c_4\sqrt{h}.$$

Où c_4 est une constante indépendante de h et qui dépend de u, f, g, μ, Ω.

Conclusion

Dans ce mémoire, on a prouvé la convergence de la solution discrète de l'inéquation variationnelle elliptique du second genre, et on a montré que l'erreur de la convergence par éléments finis de degré un est d'ordre $O(h^{\frac{1}{2}})$. En perspective nous souhaitons approximer ce problème par les éléments finis quadratiques.

Bibliographie

[1] K.Atkinson, W.Han, Theoretical Numerical Analysis (A Functional Analysis Framework), Springer-Verlag, 2001.

[2] H.Brezis, G.Stampacchia, Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques. Bull. Soc. Math. Fr.96, 159-180 (1968).

[3] Boukhdena Ibtissem, Analyse Numérique par Eléments Finis du Problème variationnel de Friction, mémoire de Master2 mathématiques appliquées, Université 08 Mai 1945 Guelma (2018).

[4] J.Céa, Optimization Theory and Algorithms. Lecture Notes, vol.53 (Tata Institute of Fundamental Research,Bombay,1978).

[5] P.G.Ciarlet, The Finite Element Method for Elliptic Problems (North-Holand Amesterdam 1978).

[6] G.Duvant and J.L.Lions, Les inéquations en mécanique et en physique (Dunod,Paris 1972).

[7] G.Fichera, Problemi elastostatici con vincoli unilaterali : ilproblema di signorini con ambigue condizioni al contorno, Mem. Accad. Naz. Lincei Ser., VIII(7), 91-140 (1964).

[8] R.Glowinsky, J.L.Lions , R.Trémolières : Numerical Analysis of Variational Inequalities, studies in mathematics and its applications, volume 8,(North-holand, Amsterdam, 1981).

[9] R.Glowinsky : Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems (springer,1984).

[10] D. Kinderlehrer, G. Stampacchia, An introduction to Variational Inequalities an their Applications, Academic Press, New York, 1980.

[11] J. L. Lions, G. Stampacchia, Variational inequalities, Comm. Pure Appl. Math., XX, 1967.

[12] H. Brézis, Problèmes unilatéraux, J. Math. Pures Appl., 51, 1,1-168, 1972.

[13] J. L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod, Paris, 1969.

[14] A. Mehri, Polycopié du cours, Inéquations Variationnelles Elliptiques et leurs Approximations, Cours et Exercices, Niveau : Master2 Mathématiques Appliquées, Université 08 Mai 1945 Guelma (2016-2017).

[15] U. Mosco, An introduction to the approximate solution of variational inequalities, Constructive aspects of functional analysis, Erice 1971, 497-684, Ed. Cremonese, 1973.

[16] U. Mosco, Implicit variational problems and quasi-variational inequalities, Lect. Notes in Math., 543, 83-156, 1975.

[17] Mrabti Wafa, Analyse Numérique par Eléments Finis du Problème variationnel de Signorini, mémoire de Master2 mathématiques appliquées, Université 08 Mai 1945 Guelma (2017).

[18] Oumeddour Azzeddine, Analyse Numérique par Eléments Finis du Problème variationnel de la Torsion Elasto-Plastique, mémoire de Master2 mathématiques appliquées, Université 08 Mai 1945 Guelma (2016).

[19] A. Signorini, Sopra alcune questioni di elastostatica, Atti Societa Italiana per il Progresso della Scienze, 1933.

[20] G. Stampacchia, Formes bilinéaires coercives sur les ensembles convexes, C. R. Acad. Sci. Paris, 258, 1964.

[21] G. Stampacchia, Variational inequalities, Theory and application of monotone operators, Proceedings of a Nato Advanced Study Institute, Venice, Italy, 1968.