République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : EDP Et **Analyse numérique**

Par :

Arba assia et Bouacida Amina

Intitulé

Etude de l'équation de conservation de la masse de l'eau liquide

Dirigé par :
Dr. Belhireche hanane

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. Aissaoui Fatima	MCB	UnivGuelma
RAPPORTEUR	Dr. Belhireche hanane	MCB	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. Menaceur Amor	MCB	Univ-Guelma

Session Juin 2019

Etude de l'équation de conservation de la masse de l'eau liquide

ARBA Assia, BOUACIDA Amina
Mémoire de master en mathématiques
Université de Guelma

30 juin 2019

Remerciements

Nous tennons d'abord à remercier Dieu le tout puissant et miséricordieux, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.
En second lieu, Nou tennons à remercier notre encadreure **Dr.H.Belhireche** pour ses précieux conseils, son aide et sa patience durant toute la prédiode du travail.
Nos vifs remarciements vont également aux membres du jury pour l'intérèt qu'ils ont porté à notre travail en acceptant d'examiner le mémoire.
Enfin, nous tennons également à remercier toutes les personnes qui ont participé de prés ou de loin à la réalisation de ce travail.

Résumé

Dans ce mémoire, on étudie la chute des gouttelettes par la force gravitationnelle, en tentant en cosidération le processus de coagulation entre elles. De point de vue mathématiques, il s'agit d'une équation intégro-différentielle pour une fonction inconnue représentant la densité, par rapport à l'unité de volume, de l'eau liquide contenue dans les gouttelettes. Cette fonction dépendra de la masse de gouttelettes, du temps et de la position.

Pour simplifier l'étude, nous allons nous occupé de la solution stationnaire. En considérant l'équation dans un domaine d'une dimenstion spatiale en absence du mouvement de l'air on montre l'existence et l'unicité de la solution stationnaire, puis on traite l'équation dans un domaine tridimensionnel en présence d'un vent horizontal. Enfin, nous allons étudier l'équation dans le cas générale en présence d'un vent constant dans les trois directions.

الملخص

خلال هذه المذكرة يتم دراسة تساقط قطرات الماء تحت تأثير الجاذبية مع الأخذ بعين الاعتبار احتمال التلاقي فيما بينها. تصاغ من وجهة نظر رياضية على شكل معادلة تفاضلية لدالة مجهولة تمثل كثافة الماء السائل، بالنسبة لوحدة الحجم المحتوى في القطرات. هذه الدالة تكون مرتبطة بكتلة القطرات والزمن والوضعية.

لتبسيط الدراسة نبدأ بدراسة الحالة الثابتة نعتبر المعادلة في مجال أحادي الأبعاد مع غياب حركة الرياح، نبرهن وجود ووحدانية الحل الثابت ثم ندرس المعادلة في مجال ثلاثي الأبعاد تحت شرط وجود رياح أفقية.

في الأخير نقوم بدراسة المعادلة في الحالة العامة تحت شرط وجود رياح ثابتة في الاتجاهات الثلاث.

Table des matières

Introduction

Depuis quelques décennies il y a eu des tentatives de modélisation mathématique de l'atmosphère (voir par exemple[3], [2] etc...) et à cause de la complexité des phénomènes atmosphériques, jusqu'à maintenant la majorité des scientifiques se contentent des modèles partiels où simplifiés. Même si ces tentatives étaient bien appréciables dans leurs aspects mathématiques spécifiques, dans ces modèles la description globale des phénomènes atmosphériques comprenant la formation des nuages et la précipitation était loin d'être satisfaisante. Notre étude concerne la chute due à la force gravitationnelle des gouttelettes réalisant le processus de coagulation (ce processus décrit le mécanisme par lequel les gouttelettes s'unissent pour former une gouttelette plus grande). En effet, comme il est bien connu, à partir des nuages formés dans l'atmosphère, les gouttelettes suffisamment grandes vont tomber comme pluie, ce qui montre le rôle essentiel du processus de coagulation des gouttelettes dans l'apparition de la pluie. L'équation dite équation de Smoluchowski, proposée par Smoluchowski et Müller, décrit le processus de coagulation ; cependant cette équation dans sa version communément considérée ne tient pas compte de l'effet de la chute des gouttelettes. En outre, le problème de l'équation de coagulation (et de fragmentation) des gouttelettes en tenant compte de son déplacement a été étudié par plusieurs mathématiciens Russes comme P. B. Dubovski, V. A. Galkin et W. Stewart ainsi que d'autres (voir par exemple [3]). Dans notre travail nous proposons d'étudier le processus des gouttelettes qui tombent dans l'air et se coagulent entre elles dans les cas respectivement de l'absence de mouvement de l'air, de la présence d'un vent horizontal et puis en présence d'un vent constant dans les trois directions. Il s'agit de l'équation de la conservation de la masse pour la densité noté $\sigma(m)$ de l'eau liquide contenue dans les gouttelettes de masse m, densité par rapport à l'unité de volume de l'air contenant d'éventuelles gouttelettes, où la vitesse des gouttelettes sera déterminée par la force gravitationnelle, la friction entre les gouttelettes et l'air et la vitesse du vent.

Chapitre 1

Solution stationnaire dans le cas d'absence du vent

Dans ce chapitre on va étudier l'équation intégro-différentielle décrivant le procesus de coagulation des gouttelettes se trouvant dans l'air en absence de mouvement de l'air. On montre l'existence et l'unicité de la solution stationnaire, donnée dans [7].

1.1 Position du problème

Désignons par $\sigma(m, x, y, z, t)$ la densité de l'eau liquide contenue dans les gouttelettes de masse m au point $(x, y, z) \in \Omega(\subset \mathbb{R}^3)$ à l'instant $t \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire, la masse de l'eau liquide contenue dans les gouttelettes de masse m qui se trouvent dans l'unité de volume de l'air. Le nombre, au sens purement statistique, des gottelettes de masse m dans l'unité de volume sera alors donné par :

$$\tilde{n}(m, x, y, z, t) = \frac{\sigma(m, x, y, z, t)}{m}.$$

L'équation de smoluchowski est normalement formulée par rapport au nombre $\tilde{n} = \tilde{n}(m,t)$ de gouttlettes de masse m. Mais nous préférons utiliser la densité σ pour la commodité pour la modélisation générale de phénoménes météorologiques. On va considérer également la vitesse des gouttlettes qui se déplacent à cause de la force gravitationnelle et du mouvement de l'air dans lequel elles se trouvent. Comme l'effet de la friction entre les gouttlettes et l'air dépend sensiblement de la masse m, nous admettons que la vitesse $u = u(m)$ d'une gouttlette de masse m est donnée par :

$$u(m) = u(m,x,y,z,t) = v(t,x,y,z) - \frac{1}{\alpha(m)}\nabla\phi \tag{1.1}$$

où $v = (v_1, v_2, v_3)$ est la vitesse de l'aire, g est une constante désigne l'accélération gravitationnelle, $\alpha(m)$ est le coefficient de friction entre les gouttlettes et l'air et la vitesse de l'air et $\nabla\phi = (0,0,g)^T$. Cette relation correspond, dans une bonne approximation, à la vitesse réelle des gouttlettes. La variation de $\sigma(m,x,y,z,t)$ due au déplacement avec la vitesse réelle des gouttlettes et au processus de coagulation est donnée par l'équation suivante

$$\begin{aligned} \partial_t\sigma(m,x,y,z,t) + \nabla_{(x,y,z)}.(\sigma(m,x,y,z,t)u(m)) = \quad (1.2)\\ = \frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m',x,y,z,t)\sigma(m-m',x,y,z,t)dm' + \\ -m\int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m,x,y,z,t)\sigma(m',x,y,z,t)dm', \end{aligned}$$

où $\nabla_{(x,y,z)} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$, tandis que $\beta(m_1, m_2)$ représente la probabilité de rencontre entre une gouttelette de masse m_1 est une gouttelette de masse m_2 (avec la valeur de la probabilité normalisée par rapport à la masse). Si dans l'équation (1.2) on néglige la dépendance de$(x,y,z) \in \Omega$, l'équation sera réduite à l'équation de Smoluchowski (dans une version avec la densité

$\sigma(m,t) = m\tilde{n}(m,t))$. En renvoyant l'étude de l'équation d'évolution (1.2) à des recherches futures, dans le présent travail nous allons nous occuper du cas stationnaire, c'est-à-dire, nous allons considérer l'équation

$$\nabla_{(x,y,z)}.(\sigma(m,x,y,z)u(m)) = \tag{1.3}$$
$$= \frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m',x,y,z)\sigma(m-m',x,y,z)dm' +$$
$$-m\int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m,x,y,z)\sigma(m',x,y,z)dm'$$

complitée avec la condition

$$\sigma(m,x,y,1) = \bar{\sigma}(m,x,y). \tag{1.4}$$

Comme les gouttelettes tombent de $\{z = 1\}$ vers $\{z = 0\}$ avec la vitesse $u = u(m)$, la condition (1.4) est une condition "initiale" (ou condition d'entrée) pour les gouttlettes qui partent de la position $(x,y,1)$.

On rappelle que dans la Nature, à cause de la courbure très élevée de la surface, les gouttellettes très petites s'évaporent immédiatement et que d'autre part les gouttelettes très grandes se fragmentent à cause de la friction avec l'air environnant. Pour cela, nous nous intéressons à la fonction de densité $\sigma(m,x,y,z)$ avec m entre deux extrémités $\bar{m}_a$ et $\bar{m}_A$,

$$0 < \bar{m}_a \leq m \leq \bar{m}_a < \infty.$$

En ce qui concerne la fonction $\alpha(m)$, qui représente l'effet de la friction entre les gouttelettes et l'air, dans le présent travail nous supposons qu'elle est une fonction strictement positive et suffisamment régulière (par exemple $\alpha(m) \in C^1(\mathbb{R}_+)$). Il est utile de rappeler que dans l'état normal de l'atmosphère $\alpha(m)$ est une fonction décroissante et ses valeurs varient sensiblement selon les valeurs de m. Méme si l'effet de la friction (par l'unité de masse) croit rappidement quand m s'approche de 0, compte tenu de l'absence de goutteltes très petites ($m < \bar{m}_a$), pour éviter le raisonnement inutilement compliqué, nous supposons

$$\sup_{m\in\mathbb{R}_+} \alpha(m) < \infty.$$

Pour la fonction $\beta(m_1, m_2)$ nous supposons que

$$\beta(.,.) \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+),\ \beta(m_1, m_2) \geq 0 \quad \forall (m_1, m_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \tag{1.5}$$

$$\beta(m_1, m_2) = \beta(m_2, m_1) \tag{1.6}$$

$$\beta(m_1, m_2) = 0 \ pour\ m_1 + m_2 \geq \bar{m}_A. \tag{1.7}$$

Les conditions (1.5) et (1.6) sont des conditions naturelles de la fonction de probabilité de rencontre de gouttelettes. D'autre part, la condition (1.7) est une approximation motivée par le fait que, comme nous l'avons déja évoqué, dans l'atmosphère les grandes gouttelettes subissent également le processus de fragmentation, qui contrebalance de la croissance de la population de gouttelettes de masse élevée due à la coagulation.

1.2 Cas de l'absence du mouvement de l'air

Dans le cas où $v = 0$, le problème (1.3)-(1.4) se réduit à une famille de problème dans le domaine $0 < z < 1$, paramétrisée par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. en effet, si $v = 0$, $u(m)$ se réduit à

$$u(m) = (0, 0, -\frac{g}{\alpha(m)}),$$

ce qui nous permet d'envisager le problème (1.3)-(1.4) s'éparément pour chaque $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Donc, en posant $\bar{\sigma}(m) = \bar{\sigma}(m, x, y)$ pour chaque $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et en écrivant $\sigma(m, z)$ au lieu de $\sigma(m, x, y, z)$, avec $\alpha(m)$ ne dépend pas de z, nous avons à considérer le problème suivant

$$\partial_z \sigma(m, z) = -\frac{m\alpha(m)}{2g} \int_0^m \beta(m - m', m')\sigma(m', z)\sigma(m - m', z)dm' + \tag{1.8}$$

$$+m\frac{\alpha(m)}{g} \int_0^\infty \beta(m, m')\sigma(m, z)\sigma(m', z)dm'.$$

$$\sigma(m, 1) = \bar{\sigma}(m). \tag{1.9}$$

Avant de nous occuper de la solution du problème (1.8)-(1.9), rappelons une propriété importante de l'opérateur intégral figurant au second membre de (1.8)

Lemme 1.1 *Soit $\beta(.,.)$ la fonction introduite dans le paragraphe précédent. Alors, quelque soit $\sigma(.) \in L^1(\mathbb{R}_+)$, on a*

$$\int_0^\infty \frac{m}{2} \int_0^m \beta(m - m', m')\sigma(m')\sigma(m - m')dm'dm \tag{1.10}$$

$$- \int_0^\infty m \int_0^\infty \beta(m, m')\sigma(m)\sigma(m')dm'dm = 0.$$

Démonstration. En faisant le changement de variables

$$q = m - m', r = m',$$

et on définit

$$\varphi : (m', m) \mapsto (q, r)$$

le déterminant jacobien est égale à 1,

$$|J_\varphi| = \begin{vmatrix} \frac{\partial q}{\partial m} & \frac{\partial q}{\partial m'} \\ \frac{\partial r}{\partial m} & \frac{\partial r}{\partial m'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

On applique ce changement de variables dans le premier intégrale, on obtient

$$\int_0^\infty \frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m')\sigma(m-m')dm'dm = \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{q+r}{2}\beta(q,r)\sigma(q)\sigma(r)drdq.$$

Comme m, m'et q,r sont des variables aléatoires alors

$$\int_0^\infty \frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m')\sigma(m-m')dm'dm$$

$$-\int_0^\infty m\int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m)\sigma(m')dm'dm = 0.$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty (\frac{q+r}{2}-q)\beta(q,r)\sigma(q)\sigma(r)dqdr$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty (\frac{r-q}{2})\beta(q,r)\sigma(q)\sigma(r)dqdr$$

On note

$$I=\int_0^\infty\int_0^\infty (\frac{r-q}{2})\beta(q,r)\sigma(q)\sigma(r)dqdr$$

Compte tenu de la symétrie de la fonction β (c-à-d $\beta(q,r)=\beta(r,q)$), on a

$$I=-\int_0^\infty\int_0^\infty (\frac{q-r}{2})\beta(q,r)\sigma(q)\sigma(r)dqdr$$

Appliquons le théoreme de Fubbini, on obtient

$$I=-\int_0^\infty\int_0^\infty (\frac{q-r}{2})\beta(r,q)\sigma(r)\sigma(q)drdq$$

Par coséquent,

$$I=-I \Rightarrow I=0$$

d'où le résulta. L'égalité (1.10) n'est autre que la loi de conservation de la masse pour l'eau liquide contenue dans les gouttelettes .

Proposition 1.1 *Soit* $\bar{\sigma}(.)\in L^1(\mathbb{R}_+)$ *avec supp*$(\bar{\sigma})\subset[\bar{m}_a,\bar{m}_A]$. *Alors le problème* (1.8)-(1.9) *admet une unique solution* $\sigma\in C([0,1]\,;L^1(\mathbb{R}_+))$.

Démonstration. Pour résoudre le problème (1.8)-(1.9), on considère $\sigma(.,z)$ comme élément de $L^1(\mathbb{R}_+)$, on va réecrire l'équation (1.8) comme E.D.O sur l'espace $L^1(\mathbb{R}_+)$. On définit

$$\begin{array}{rll}\sigma: &]0,1[& \to L^1(\mathbb{R}_+) \\ & z & \mapsto \sigma(z)\end{array}$$

où

$$\begin{array}{rll}\sigma(z): & R_+ & \to L^1(\mathbb{R}_+) \\ & m & \mapsto \sigma(z)(m) = \sigma(m,z).\end{array}$$

Alors, on peut réecrire (1.8) sous la forme

$$\frac{d\sigma(z)}{dz} = F(\sigma)\, sur\, L^1(\mathbb{R}_+) \tag{1.11}$$

où

$$F(\sigma) = F(\sigma(z))(m) = -\frac{m\alpha(m)}{2g}\int_0^\infty \beta(m-m',m')\sigma(m',z)\sigma(m-m',z)dm' +$$

$$+\frac{m\alpha(m)}{g}\int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m,z)\sigma(m',z)dm'.$$

Posons

$$C_\beta = max[\sup_{0<m'<m<\infty}\frac{m\alpha(m)}{2g}\beta(m-m',m'), \sup_{m,m'\in\mathbb{R}_+}\frac{m\alpha(m)}{g}\beta(m,m')], \tag{1.12}$$

alors, on a, pour σ_1, $\sigma_2 \in L^1(\mathbb{R}_+)$,

$$\|F(\sigma_1) - F(\sigma_2)\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} = \int_0^\infty |F(\sigma_1)(m) - F(\sigma_2)(m)|dm \tag{1.13}$$

$$\leq C_\beta \int_0^\infty\int_0^m |\sigma_1(m')(\sigma_1(m-m') - \sigma_2(m-m'))$$

$$+(\sigma_1(m') - \sigma_2(m'))\sigma_2(m-m')|dm'dm + C_\beta \int_0^\infty\int_0^\infty$$

$$|\sigma_1(m)(\sigma_1(m') - \sigma_2(m')) + (\sigma_1(m) - \sigma_2(m))\sigma_2(m')|dm'dm$$

$$\leq C_\beta \|\sigma_1 * |\sigma_1 - \sigma_2|\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} + \||\sigma_1 - \sigma_2| * \sigma_2\|_{L^1(\mathbb{R}_+)}$$
$$+C_\beta \int_0^\infty (|\sigma_1(m)|\|\sigma_1 - \sigma_2\|_{L^1(\mathbb{R}_+)}) + |\sigma_1(m) - \sigma_2(m)|\|\sigma_2\|_{L^1(\mathbb{R}_+)})dm$$
$$\leq 2C_\beta \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{L^1(\mathbb{R}_+)}(\|\sigma_1\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} + \|\sigma_2\|_{L^1(\mathbb{R}_+)})$$

Ce qui montre que $F(.)$ vérifie localement la condition de lipchitz dans la topologie de $L^1(\mathbb{R}_+)$. Par conséquent, l'équation (1.11) avec la condition initiale (1.9) admet une solution $\sigma(., z)$ et une seule dans un intervalle $1 - \delta \leq z \leq 1$ avec un $\delta > 0$ suffisamment petit. D'autre part du lemme 2.1 et de l'équation (1.8) on déduit

$$\int_0^\infty (\sigma(m, z)\frac{g}{\alpha(m)})dm = \int_0^\infty (\sigma(m, 1)\frac{g}{\alpha(m)})dm,$$

pourvu que $\sigma(., z)$ existe. Or, la condition (1.9) et l'hypothèse $supp(\bar{\sigma}) \subset [\bar{m}_a, \bar{m}_A]$ impliquent que $supp(\sigma(., z)) \subset [\bar{m}_a, \bar{m}_A]$. Donc, de la relation

$$0 < c_1 \leq \frac{g}{\alpha(m)} \leq c_2 < \infty, \ \forall m \in [\bar{m}_a, \bar{m}_A]$$

avec deux constantes c_1, c_2 (qui résulte de l'hypothése sur $\alpha(m)$), on déduit que $\|\sigma(., z)\|_{L^1(\mathbb{R}_+)}$ est uniformément bornée en z, ce qui , joint à la condition de lipschitz locale, nous donne la solution $\sigma(., z)$ de l'équation (2.5) dans tout l'intervalle $[0, 1]$. $\square$

Chapitre 2

Solution stationnaire avec un vent horizontal

Dans ce chapitre, on va étudier l'équation (1.3) en présence d'un vent horizontal dans la direction de l'axe x.On montre l'existence et l'unicité de la solution stationnaire donnée dans [7].

Dans le cas d'un vent horizontal, la vitesse des gouttelettes $u = u(m)$ est donnée par

$$u(m) = (\bar{v}, 0, \frac{-g}{\alpha(m)})$$

Où $\bar{v} \in \mathbb{R}$ est une constante et le probleme (1.3)-(1.4) se réduite à une famille de problème dans le domaine

$$\Omega = \mathbb{R} \times \times]0, 1[= \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 / \quad 0 < z < 1\},$$

paramétrisée par $y \in \mathbb{R}$. En pasant, $\bar{\sigma}(m) = \bar{\sigma}(m, x)$ pour chaque $y \in \mathbb{R}$ et en réecrivant $\sigma(m, x, z)$ au lieu de $\sigma(m, x, y, z)$ le problème devient

$$\nabla_{(x,z)}.(\sigma(m, x, z)u(m)) = \tag{2.1}$$

$$\frac{m}{2} \int_0^m \beta(m - m', m')\sigma(m', x, z)\sigma(m - m', x, z)dm' +$$

$$-m\int_0^{\infty}\beta(m,m')\sigma(m',x,z)\sigma(m,x,z)dm'$$

$$\sigma(m,x,1)=\bar{\sigma}(m,x), \tag{2.2}$$

2.1 Transformation de l'équation

Nous allons utiliser l'idée de transformer l'équation (2.1) en une équation différentielle ordinaire. Pour cela, nous introduisons le changement de variables $(m,x,z)\longrightarrow(\tilde{m},\xi,\tilde{z})$ définit par

$$\begin{cases}\tilde{m} &= m,\\ \xi &= x-\bar{v}\frac{\alpha(m)}{g}(1-z),\\ \tilde{z} &= z,\end{cases}$$

et définissons

$$\tilde{\sigma}(\tilde{m},\xi,\tilde{z})=\sigma(m.x.z)=\sigma(\tilde{m},\xi+\bar{v}\frac{\alpha(m)}{g}(1-z),z).$$

Toutefois, pour éviter la notation lourde, on va écrire simplement m et z au lieu de $\tilde{m}$ et $\tilde{z}$ et encore $\sigma(m,\xi,z)$ au lieu de $\tilde{\sigma}(\tilde{m},\xi,\tilde{z})$, ce qui ne cause pas d'équivoque dans le calcul. Comme on peut le constater facilement, dans les coordonnées (m,ξ,z) l'équation (1.3) se transforme en

$$\frac{\partial}{\partial z}\sigma(m,\xi,z)= \tag{2.3}$$

$$-\frac{m\alpha(m)}{2g}\int_0^{m}\beta(m-m',m')\sigma(m',\eta(m,m',\xi,z),z)\sigma(m-m',\eta(m,m-m',\xi,z)dm'+$$

$$+\frac{m\alpha(m)}{g}\int_0^{\infty}\beta(m,m')\sigma(m,\xi,z)\sigma(m',\eta(m,m',\xi,z),z)dm',$$

où

$$\eta(m,m',\xi,z)=\xi+\bar{v}\frac{\alpha(m)-\alpha(m')}{g}(1-z)$$

Pour réformuler l'équation (2.1) en une équation différentielle ordinaire et établir des propriétés utiles de l'opérateur intégral du deuxième membre de cette équation, il nous convient, pour chaque $z \in [0,1]$ fixé, d'introduire la famille de courbes

$$\gamma_\tau = \{(m,\xi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} |\, \xi = \tau - \bar{v}\frac{\alpha(m)}{g}(1-z)\}, \tau \in \mathbb{R} \tag{2.4}$$

et de définir une mesure sur ces courbes.

Désignons par $P_{\mathbb{R}_+}$ la projection de γ_τ sur $\mathbb{R}_+$ c'est-à-dire, pour les sous ensembles A' de γ_τ on a

$$P_{\mathbb{R}_+}A' = \{m \in \mathbb{R}_+ \,|\, \exists\, \xi \; tel\, que \; (m,\xi) \in A'\}.$$

La régularité de la fonction $\xi(m) = \tau - \bar{v}\frac{\alpha(m)}{g}(1-z)$ nous permet de définir les ensembles mesurables de γ_τ et la mesure μ_γ sur γ_τ par les relations suivantes :

i)$A' \subset \gamma_\tau$ est mesurable si et seulement si $P_{\mathbb{R}_+}A'$ est mesurable selon Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$,

ii)$\mu_\gamma(A') = \mu_{L,\mathbb{R}_+}(P_{\mathbb{R}_+}A')$, ou $\mu_{L,\mathbb{R}_+}(.)$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$.

Commme les courbes γ_τ, $\tau \in \mathbb{R}$, sont parallèles (c'est a dire, définies par la translation de γ_0 par τ dans la direction de ξ, on voit immédiatement que la projection $P_{\mathbb{R}_+}$ et la mesure $\mu_\gamma(.)$ étant définie sur les courbes γ_τ, nous allons éclaircir les relations entre $\mu_\gamma(.)$ et la mesure sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Pour ce faire, on pose

$$\tau(m,\xi) = \xi + \bar{v}\frac{\alpha(m)}{g}(1-z)$$

(c'est-à-dire, $\tau(m,\xi)$ est $\tau \in \mathbb{R}$ tel que $(m,\xi) \in \gamma_\tau$) et on considère la famille $\mathfrak{D}$ des ensembles A ayant la forme

$$A = \{(m,\xi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} | \quad m \in [m_1, m_2]\,, \tau(m,\xi) \in [\tau_1, \tau_2[\}$$

avec $0 \leq m_1 \leq m_2 < \infty$, $-\infty < \tau_1 < \tau_2 < \infty$. Si on définit la fonction $\tilde{\mu} : \mathfrak{D} \to \mathbb{R}_+$ par la relation

$$\tilde{\mu}(A) = (m_2 - m_1)(\tau_2 - \tau_1)$$

Pour $A = \{(m, \xi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} | \quad m \in [m_1, m_2[\,, \tau(m, \xi) \in [\tau_1, \tau_2[\}$, on constate que, de la même manière que la construction de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ à partir de la famille des rectangles, le prolongement de $\tilde{\mu}$ définit les ensembles mesurables selon $\tilde{\mu}$ de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ et la mesure sur eux, mesure que nous notons toujours $\tilde{\mu}$, et que $\tilde{\mu}$ coincide avec la mesure de Lebesgue $\mu_{L,\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}}$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$; on a en effet

$$\tilde{\mu}(A) = \mu_{L,\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}}(A)$$

pour$A \in \mathfrak{D}$

2.2 Propriétés de la nouvelle mesure

Pour les mesures μ_γ et $\tilde{\mu}$ ainsi définies et les mesures de lebesgue $\mu_{L,\mathbb{R}_+}$, $\mu_{L,\mathbb{R}}$ et $\mu_{L,\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}}$ respectivement sur $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, on a les relations suivantes.

Lemme 2.1 *Soit A un ensemble mesurable (selon lebesgue) de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. On pose*

$$A_\tau = \{m \in \mathbb{R}_+ | \ \exists \xi \in \mathbb{R} \ tel\ que\ (m, \xi) \in \gamma_\tau \cap A\}$$

$$A_m = \{\tau \in \mathbb{R} | \ \exists \xi \in \mathbb{R} \ tel\ que\ (m, \xi) \in \gamma_\tau \cap A\}.$$

Alors on a

$$\mu_{L,\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}}(A) = \tilde{\mu}(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_\gamma(A_\tau) d\tau =$$

$$= \int_{\gamma_0} \mu_{L,\mathbb{R}}(A_m)\mu_\gamma(dm) = \int_0^\infty \mu_{L,\mathbb{R}}(A_m)dm$$

(ici et dans la suite l'élément d'intégration par rapport à la mesure de Lebesgue s'écrit directement dm, $d\tau$ etc...sans utiliser les notations $\mu_{L,\mathbb{R}_+}(dm)$, $\mu_{L,\mathbb{R}}(d_\tau)$, $\mu_{L,\mathbb{R}}(d\xi)$ etc...).

Lemme 2.2 *Soit $\sigma(m,\xi) \in L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. Alors, pour presque tout $\tau \in \mathbb{R}$ la restriction de $\sigma(m,\xi)$ à γ_τ appartient a $L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)$.*

Lemme 2.3 *Soit $\sigma(m,\xi) \in L^1((\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. Alors on a*

$$\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} \sigma(m,\xi)dmd\xi = \int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} \sigma(m,\xi)d\tilde{\mu} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}(\int_{\gamma_\tau} \sigma(m,\xi)\mu_\gamma(dm))d\tau =$$

$$= \int_{\gamma_0}(\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(m,\xi(m,\tau))d\tau)\mu_\gamma(dm) =$$

$$= \int_0^\infty(\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(m,\xi)d\xi)dm = \int_{-\infty}^{\infty}(\int_0^\infty \sigma(m,\xi)dm)d\xi,$$

où $\xi(m,\tau) = \tau - \bar{v}\frac{\alpha(m)}{g}(1-z)$.

Pour la démonstration des lemmes 2.1, 2.2 et 2.3, il suffit d'effectuer les modifications formelles nécessaires aux démonstrations des théoremes classiques sur le produit des mesures et Fubini (voir [5]), en tenant compte de la définition formulée ci dessus des messures μ_γ et $\tilde{\mu}$. Maintenant on est en mesure de transformer l'équation (2.1) en une equation différentielle ordinaire. Pour cela on pose

$$\tau(m,\xi,z) = \xi + \bar{v}\frac{\alpha(m)}{g}(1-z),$$

$$\gamma_\tau^{[0,m]} = \gamma_\tau \cap [0,m] \times \mathbb{R}.$$

Cela étant, on peut écrire l'équation (2.1) dans la forme

$$\frac{\partial}{\partial z}\sigma(z) = F_z(\sigma(z)), \quad \sigma(z) = \sigma(.,.,z), \tag{2.5}$$

$$F_z(\sigma(z)) = F_z(\sigma(z))(m,\xi) =$$

$$= -\frac{m\alpha(m)}{2g}\int_{\gamma^{[0;m]}_{\tau(m,\xi,z)}} \beta(m-m',m')\sigma(m',\eta',z)\sigma(m-m',\eta'',z)\mu_\gamma(dm') +$$

$$+\frac{m\alpha(m)}{g}\int_{\gamma_{\tau(m,\xi,z)}} \beta(m,m')\sigma(m',\eta',z)\sigma(m,\xi,z)\mu_\gamma(dm'),$$

où η' et η''sont tels que $(m',\eta') \in \gamma_{\tau(m,\xi,z)}$, $\quad (m-m',\eta'') \in \gamma_{\tau(m,\xi,z)}$, L'équation (2.5) doit étre envisagée avec la condition (2.2), c'est-à-dire

$$\sigma(m,\xi,1) = \bar{\sigma}(m,\xi). \tag{2.6}$$

2.3 Existence et unicité de la solution

Pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.5)-(2.6), nous avons besoin de préciser des conditions sur $\bar{\sigma}(m,\xi)$. Nous supposons que

$$\bar{\sigma}(.,.) \in L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}), \tag{2.7}$$

$$\bar{\sigma}(m,\xi) \geq 0 \; p.p. \; dans \; \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \tag{2.8}$$

$$supp(\bar{\sigma}) \subset [\bar{m}_a, \bar{m}_A] \times \mathbb{R} \tag{2.9}$$

$$\|\bar{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} < \frac{1}{M_1(\bar{m}_A - \bar{m}_a)} \tag{2.10}$$

où

$$M_1 = \sup_{2\bar{m}_a \leq m \leq \bar{m}_A, \bar{m}_a \leq m' \leq m-\bar{m}_a} \frac{m\alpha(m)}{2g}\beta(m-m',m') \tag{2.11}$$

Ici $\bar{m}_a$ et $\bar{m}_A (0 < \bar{m}_a < \bar{m}_A < \infty)$ sont les deux nombres que l'on a introduits dans le chapitre 1. On a alors le résultat suivant.

Proposition 2.1 *Si* $\bar{\sigma}(m,\xi)$ *satisfait aux conditions* (2.7)-(2.10)*, alors l'équation* (2.5)*avec la condition* (2.6) *admet une solution* σ *et une seule dans la classe*

$$\sigma \in C([0,1]; L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times [0,1]) \tag{2.12}$$

Pour démontrer la Proposition 2.1, commencons par la propriété de la convolution sur les courbes γ_τ.

Lemme 2.4 *Soient* f *et* g*deux fonctions appertenant a* $L^1(\gamma_\tau, \mu_\gamma)$*.On pose*

$$(f * g)(m) = \int_{\gamma_\tau} f(m - m')g(m')\mu_\gamma(dm').$$

Alors on a

$$f * g \in L^1(\gamma_\tau, \mu_\gamma)$$

et

$$\|f * g\| L^1_{(\gamma_\tau,\mu_\gamma)} \leq \|f\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)} \|g\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)}.$$

Comme la mesure μ_γ *ne dépend pas de* τ*, le Lemme 3.1 est vérifié de la méme manière pour tous* τ*.*

Démonstration. La mesure μ_γ étant bien définie sur γ_τ le lemme se démontre de la méme manière (avec des modifications purement formelles) que dans le cas des fonctions sommables par rapport a la mesure de Lebesgue. A différence du cas $v = 0$, où on à considéré la solution $\sigma(., z)$ comme fonction de z à valeurs dans $L^1(\mathbb{R}_+)$, pour la proposition 2.1 on à besoin de construire la solution $\sigma(.,.,z)$ comme fonction de z a valeur dans $L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. Pour ce faire, il nous convient d'examiner directement l'approximation successive avec laquelle on construit la solution $\sigma(m, \xi, z)$.

Posons

$$\sigma^{[0]}(m,\xi,z) = \bar{\sigma}(m,\xi) \tag{2.13}$$

et définissons $\sigma^{[n]}$, n=1,2,..., par les relations

$$\frac{\partial}{\partial z}\sigma^{[n]} = F_z(\sigma^{[n-1]}),\ \sigma^{[n]}(m,\xi,1) = \bar{\sigma}(m,\xi), \tag{2.14}$$

où $F_z(.)$ est l'opérateur défini dans (2.5).

Lemme 2.5 *Quelque soit $n \in N$, $\sigma^{[n]}$ est bien définie dans la classe*

$$\sigma^{[n]}(.,.,z) \in L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}), \quad 0 \le z \le 1$$

et on a

$$supp(\sigma^{[n]}(.,.,z)) \subset [\bar{m}_a, \bar{m}_A] \times \mathbb{R} \quad \text{ pour } 0 \le z \le 1 \tag{2.15}$$

$$\|\sigma^{[n]}(.,.,z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} \le \frac{\|\bar{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}}{1-(M_1+M_2)(\bar{m}_A-\bar{m}_a)\|\bar{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}(1-z)} \tag{2.16}$$

Pour

$$\frac{(M_1+M_2)(\bar{m}_A-\bar{m}_a)\|\bar{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}-1}{(M_1+M_2)(\bar{m}_A-\bar{m}_a)\|\bar{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}} < z \le 1,$$

où

$$M_2 = \sup_{m,m'\in\mathbb{R}_+} \frac{m\alpha(m)}{g}\beta(m,m') \tag{2.17}$$

Démonstration. Remarquons d'abord que, si $\sigma^{[n]}$ $(n \ge 1)$ est bien définie par les relations (2.14) et si $supp(\sigma^{[n-1]}(.,.,z)) \subset [\bar{m}_a\bar{m}_A]\times\mathbb{R}$ pour $0 \le z \le 1$, alors $\sigma^{[n]}$vérifie la condition (3.12). En effet, la condition (1.6) implique que la première integrale de l'opérateur $F_z(.)$ s'annule pour $m \ge \bar{m}_A$. D'autre part, si $m < \bar{m}_a$, alors sous le signe d'intégration $\sigma^{[n-1]}(m-m',.,z)$ et $\sigma^{[n-1]}(m',.,z)$ s'annule et donc l'integrale s'annule. En outre par hypothése

$\sigma^{[n-1]}$ s'annule pour $m < \bar{m}_a$ et $m > \bar{m}_A$. On en déduit (3.12) pour $\sigma^{[n]}$.
Examinons maintenant l'opérateur F_z appliqué à $\sigma^{[n-1]}(.,.,z)$. En supposant que le support de $\sigma^{[n-1]}(.,.,z)$ est contenu dans $[\bar{m}_a, \bar{m}_A] \times \mathbb{R}$ et en rappelant (2.11) et (3.14), on a (avec la notation η', η'' comme dans (2.5)

$$| \frac{m\alpha(m)}{2g} \int_{\gamma_\tau(m,\xi,z)^{[0,m]}} \beta(m-m',m')\sigma^{[n-1]}(m',\eta',z)\sigma^{[n-1]}(m-m',\eta'',z)\mu_\gamma(dm') | \leq$$

$$\leq M_1(\bar{m}_A - \bar{m}_a)\|\sigma^{[n-1]}(.,.,z)\|^2_{L^\infty(\gamma(m,\xi,z),\mu_\gamma)}$$

$$| \frac{m\alpha(m)}{g} \int_{\gamma_\tau(m,\xi,z)} \beta(m-m',m')\sigma^{[n-1]}(m',\eta',z)\sigma^{[n-1]}(m-m',\xi,z)\mu_\gamma(dm') | \leq$$

$$\leq M_2(\bar{m}_A - \bar{m}_a)\|\sigma^{[n-1]}(.,.,z)\|^2_{L^\infty(\gamma(m,\xi,z),\mu_\gamma)}$$

où M_1 et M_2 sont les constantes définies dans (2.11) et (3.14) respectivement.
On en déduit que, pour σ^n définie par

$$\sigma^{[n]}(m,\xi,z) = \bar{\sigma}(m,\xi) - \int_z^1 F_{z'}(\sigma^{[n-1]}(.,.,z'))(m,\xi)dz',$$

on a

$$\|\sigma^{[n]}(.,.,z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} \leq \tag{2.18}$$

$$\|\bar{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} + (M_1 + M_2)(\bar{m}_A - \bar{m}_a) \int_z^1 \|\sigma^{[n-1]}(.,.,z')\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}dz'$$

En outre, en utilisant le lemme 3.4 et en tenant compte de la condition (1.7), on a

$$\|\frac{m\alpha(m)}{2g} \int_{\gamma_\tau^{[0,m]}} \beta(m-m',m')\sigma^{[n-1]}(m',\eta',z)\sigma^{[n-1]}(m-m',\eta'',z)\mu_\gamma(dm')\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)} +$$

$$\|\frac{m\alpha(m)}{g} \int_{\gamma_\tau} \beta(m,m')\sigma^{[n-1]}(m',\eta',z)\sigma^{[n-1]}(m,\eta,z)\mu_\gamma(dm')\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)} \leq$$

$$\leq C\|\sigma^{[n-1]}(.,.,z)|_{\gamma_\tau}\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)}$$

où C est une constante indépendante de z (et η, η'et η'' sont tels que (m, η), (m', η'), $(m'_m, \eta'') \in \gamma_\tau$ comme dans (2.5)). Comme on a en outre

$$\|\sigma^{[n-1]}(.,.,z)|_{\gamma_\tau}\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)} \leq$$

$$\leq (\bar{m}_A - \bar{m}_a)\|\sigma^{[n-1]}(.,.,z)|\gamma_\tau\|_{L^\infty(\gamma_\tau,\mu_\gamma)} \leq$$

$$\leq (\bar{m}_A - \bar{m}_a)\|\sigma^{[n-1]}(.,.,z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}$$

(pour presque tout $\tau \in \mathbb{R}$), à l'aide du lemme 2.3 on en déduit que

$$\|F_z(\sigma^{[n-1]}(.,.,z))\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} \leq C'\|\sigma^{[n-1]}(.,.,z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}\|\sigma^{[n-1]}(.,.,z))\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} \tag{2.19}$$

avec une constante C' indépendante de z.

Définissons une suite de fonctions $y_n(z)$, $0 \leq z \leq 1$, $n \in N$, par les relations récursives

$$y_0(z) = \|\bar{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} \quad \textit{pour } 0 \leq z \leq 1, \tag{2.20}$$

$$y_n(z) = \|\bar{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} + (M_1 + M_2)(\bar{m}_A - \bar{m}_a)\int_1^z y_{n-1}(z')^2 dz' \tag{2.21}$$

Pour $0 \leq z \leq 1$, n=1,2,.... On va démontrer par l'induction mathématique que, quelque soit $n \in N$, la fonction $\sigma^{[n]}$ est bien définie et vérifie, outre la condition (3.12), les relations

$$\|\sigma^{[n]}(.,.,z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} \leq y_n(z), \tag{2.22}$$

$$\sup_{0\leq z\leq 1}\|\sigma^{[n]}(.,.,z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} < \infty \tag{2.23}$$

En effet, pour n=0, les relations (3.12), (2.22) et (2.23) résultent immédiatement de la définition (2.13) et des hypothèses (2.7) et (2.9). Supposons maintenant que $\sigma^{[n-1]}$ vérifie les relations (3.12), (2.22) et (2.23) (dans lesquelles on substitue naturellement $n-1$ à la place de n). Nous avons déja remarqué que, dans ces hypothèses, $\sigma^{[n]}$ vérifie la condition (3.12). D'autre part, comme on le constate facilement, l'inégalité (2.22) résulte de la définition (2.14) de $\sigma^{[n]}$ et l'hypothése sur $\sigma^{[n-1]}$, implique que $\sigma^{[n]}$ vérifie également (2.23).

On remarque que la suite $\{y_n(z)\}_{n\in N}, 0 \leq z \leq 1$, est une suite croissante et est l'approximation successive de la solution $y(z)$ du problème de Cauchy (pour $z \leq 1$)

$$Y'(z) = -(M_1 + M_2)(\bar{m}_A - \bar{m}_a)Y(z)^2, \quad y(1) = \|\bar{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}.$$

La fonction $Y(z)$ à la forme explicite

$$Y(z) = \frac{\|\sigma\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}}{1-(M_1+M_2)(\bar{m}_A-\bar{m}_a)\|\bar{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}(1-z)}$$

pour $\frac{(M_1+M_2)(\bar{m}_A-\bar{m}_a)\|\bar{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})-1}}{(M_1-M_2)(\bar{m}_A-\bar{m}_a)\|\bar{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}} < z \leq 1$, ce qui nous permet de démontrer que (2.22) implique l'inégalité (3.13). Le lemme est démontré.

Maintenant nous allons démontrer la proposition 3.1.

Démonstration de la proposition 2.1.

Nous allons démontrer avant tout l'existence et l'unicité de la solution dans un intervalle $[1-\delta, 1]$, avec $\delta > 0$ suffisament petit .

Considérons deux fonctions $\sigma_1$et σ_2 appartenant à $L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})$ et la différence $F_z(\sigma_1) - F_z(\sigma_2)$. D'après le lemme 3.3 on à

$$\|F_z(\sigma_1) - F_z(\sigma_2)\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} = \tag{2.24}$$

$$\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} |F_z(\sigma_1) - F_z(\sigma_2)| dm d\xi =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\int_{\gamma_\tau} |F_z(\sigma_1) - F_z(\sigma_2)| \mu_\gamma(dm)) d\tau.$$

Or, on a

$$\int_{\gamma_\tau} |F_z(\sigma_1) - F_z(\sigma_2)| \mu_\gamma(dm) =$$

$$= \int_{\gamma_\tau} \Big| \frac{m\alpha(m)}{2g} \int_{\gamma_\tau^{[0,m]}} \beta(m-m', m') \sigma_1(m', \eta', z) \sigma_1(m-m', \eta'', z) \mu_\gamma(dm')$$

$$- \frac{m\alpha(m)}{g} \int_{\gamma_\tau^{[0,m]}} \beta(m, m') \sigma_1(m', \eta', z) \sigma_1(m, \xi, z) \mu_\gamma(dm')$$

$$- \frac{m\alpha(m)}{2g} \int_{\gamma_\tau^{[0,m]}} \beta(m-m', m') \sigma_2(m', \eta', z) \sigma_2(m-m', \eta'', z) \mu_\gamma(dm')$$

$$+ \frac{m\alpha(m)}{g} \int_{\gamma_\tau^{[0,m]}} \beta(m, m') \sigma_2(m', \eta', z) \sigma_2(m, \xi, z) \mu_\gamma(dm') \Big| \mu_\gamma(dm)$$

$$= \int_{\gamma_\tau} \Big| \frac{m\alpha(m)}{2g} \int_{\gamma_\tau^{[0,m]}} \beta(m-m', m') [\sigma_1(m', \eta', z) \sigma_1(m-m', \eta'', z) -$$

$$- \sigma_2(m', \eta', z) \sigma_2(m-m', \eta'', z)] \mu_\gamma(dm') +$$

$$+ \frac{m\alpha(m)}{g} \int_{\gamma_\tau^{[0,m]}} \beta(m, m') [\sigma_1(m', \eta', z) \sigma_1(m, \xi, z) - \sigma_2(m', \eta', z) \sigma_2(m, \xi, z)] \Big| \mu_\gamma(dm)$$

Donc, en raisonnant de la même manière que dans (1.13), et en appliquant le lemme 2.4, on obtient

$$\int_{\gamma_\tau} |F_z(\sigma_1) - F_z(\sigma_2)| (dm) =$$

$$\leq C_\beta \int_{\gamma_\tau} \int_{\gamma_\tau^{[0,m]}} |\sigma_1(m', \eta', z) \sigma_1(m-m', \eta'', z) - \sigma_2(m', \eta', z) \sigma_2(m-m', \eta'', z)| \mu_\gamma(dm') \mu_\gamma(dm) +$$

$$+ C_\beta \int_{\gamma_\tau} \int_{\gamma_\tau^{[0,m]}} |\sigma_1(m, \eta, z) \sigma_1(m', \eta', z) - \sigma_2(m, \eta, z) \sigma_2(m', \eta', z)| \mu_\gamma(dm') \mu_\gamma(dm)$$

$$\leq C_\beta \int_{\gamma_\tau} \int_{\gamma_\tau^{[0,m]}} |\sigma_1(m', \eta', z) [\sigma_1(m-m', \eta'', z) - \sigma_2(m-m', \eta'', z)] +$$

$$+ \sigma_2(m-m', \eta'', z) [\sigma_1(m', \eta', z) - \sigma_2(m', \eta', z)]| \mu_\gamma(dm') \mu_\gamma(dm) +$$

$$+C_\beta \int_{\gamma_\tau} \int_{\gamma_\tau^{[0,m]}} |\sigma_1(m,\eta,z)[\sigma_1(m',\eta',z) - \sigma_2(m',\eta,z)]+$$
$$+\sigma_2(m',\eta,z)[\sigma_1(m,\eta,z) - \sigma_2(m,\eta,z)]|\mu_\gamma(dm')\mu_\gamma(dm),$$

où

$$\int_{\gamma_\tau} \int_{\gamma_\tau^{[0,m]}} \big(|\sigma_1(m',\eta',z)(\sigma_1(m-m',\eta'',z) - \sigma_2(m-m',\eta'',z))|+$$
$$+|\sigma_2(m-m',\eta'',z)(\sigma_1(m',\eta',z) - \sigma_2(m',\eta',z))\big)|\mu_\gamma(dm')\mu_\gamma(dm) =$$
$$= [\int_{\gamma_\tau} (\sigma_1 * |\sigma_1 - \sigma_2)(m,\xi)\mu_\gamma(dm)+$$
$$+\int_{\gamma_\tau} (\sigma_2 * |\sigma_1 - \sigma_2)(m,\xi)\mu_\gamma(dm)$$
$$= \|\sigma 1 * |\sigma_1 - \sigma_2|\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}]} + \|\sigma_2 * |\sigma_1 - \sigma_2|\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}$$
$$\leq C_\beta \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{L^1(R_+\times\mathbb{R})}(\|\sigma_1\|_{L^1(\gamma_\tau)} + \|\sigma_2\|_{L^1(\gamma_\tau)})$$

De la même manière on obtient

$$\int_{\gamma_\tau} \int_{\gamma_\tau^{[0,m]}} |\sigma_1(m,\eta,z)[\sigma_1(m',\eta',z) - \sigma_2(m',\eta,z)]+$$
$$+\sigma_2(m',\eta,z)[\sigma_1(m,\eta,z) - \sigma_2(m,\eta,z)]|\mu_\gamma(dm')\mu_\gamma(dm)$$
$$\leq \||\sigma_1 - \sigma_2|\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}(\|\sigma_1\|_{L^1(\gamma_\tau)} + \|\sigma_2\|_{L^1(\gamma_\tau)}.$$

Par conséquent

$$\int_{\gamma_\tau} |F_z(\sigma_1) - F_z(\sigma_2)|\mu_\gamma(dm) \leq 2C_\beta \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)}(\|\sigma_1\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)} + \|\sigma_2\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)}) \tag{2.25}$$

où C_β est la constante définie dans (1.12). Encore une fois à l'aide du lemme 3.3, on déduit de (2.24) et (2.25) que

$$\|F_z(\sigma_1) - F_z(\sigma_2)\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} \leq 2C_\beta \; ess\; sup_{\tau\in\mathbb{R}}(\|\sigma_1\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)} + \|\sigma_2\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)})\|\sigma_1 - \sigma_2\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}. \tag{2.26}$$

Maintenant on substitue $\sigma_1 = \sigma^{[n]}$ et $\sigma_2 = \sigma^{[n-1]}$ dans (2.26). Alors en vertu de (3.13)(voir aussi (3.12)) on à

$$\|F_z(\sigma^{[n]}) - F_z(\sigma^{[n-1]})\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} \leq \Lambda_\sigma(z)\|\sigma^{[n]} - \sigma^{[n-1]}\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}, \qquad (2.27)$$

$$\Lambda_\sigma(z) = 4C_\beta(\bar{m}_A - \bar{m}_a)\frac{\|\bar{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}}{1 - (M_1 + M_2)(\bar{m}_A - \bar{m}_a)\|\bar{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})(1-z))}}$$

c'est-à-dire, parmi les fonctions $\sigma^{[n]}$, $n \in N$, l'opérateur $F_z(.)$ satisfait à la condition de Lipschitz dans l'espace $L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})$ avec le coefficient de Lipchitz $\Lambda_\sigma(z)$. Donc, de la méme manière que pour la démonstration de l'existence et de l'unicité de la solution locale d'une équation différentielle ordinaire, on peut démontrer qu'il existe un $\delta > 0$ tel que $\sigma^{[n]}$ converge, quand n tend vers l'infini, vers une fonction σ dans la topologie de

$$C([1-\delta, 1]\,; L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}))$$

et que la limite σ satisfait, dans l'intervalle $[1-\delta, 1]$, à l'équation (2.5) et à la condition (2.6). On voit aisément que l'unicité de la solution σ dans l'intervalle $[1-\delta, 1]$ se démontre d'une manière analogue à la démonstration du théoreme classique. Une fois obtenue la solution locale σ dans l'intervalle $[1-\delta, 1]$, examinons ses propriétés. Avant tout on remarque que (3.12) pour tout $n \in N$ implique que la limite de la suite $\sigma^{[n]}$ jouit de la méme propriété, c'est-à-dire on a

$$supp(\sigma) \subset [\bar{m}_a, \bar{m}_A] \times \mathbb{R} \times [1-\delta, 1]\,. \qquad (2.28)$$

D'autre part, pourvu que $\sigma \geq 0$, la première intégrale de l'opérateur $F_z(.)$ est de la forme

$$\sigma(m,x,z)\frac{m\alpha(m)}{g}\int_{\gamma_\tau}\beta(m,m')\sigma(m',\eta(m,m',\xi,z),z)\mu_\gamma(dm').$$

Donc de manière analogue aux cas des équations différentielles ordinaires, on peut démontrer que

$$\sigma \geq 0 \quad p.p\ dans \quad \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times [1-\delta, 1]\,. \tag{2.29}$$

Les relations (2.28) et (2.29) étant démontrées, on peut refaire l'estimation de $\|\sigma(.,.,z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}$. Pour cela on considère le deuxième membre $F_z(\sigma(z))$ de (2.5). En vertu de (2.29) on a

$$\frac{m\alpha(m)}{g}\int_{\gamma_{\tau(m,\xi,z)}} \beta(m,m')\sigma(m',\eta',z)\sigma(m,\xi,z)\mu_\gamma(dm') \geq 0,$$

ce qui nous permet de déduire de (2.5) que

$$\frac{\partial}{\partial z}\sigma(m,\xi,z) \geq -\frac{m\alpha(m)}{2g}\int_{\gamma_{\tau(m,\xi,z)}{}^{[0,m]}} \beta(m-m',m')\sigma(m',\eta',z)\sigma(m-m',\xi'',z)\mu_\gamma(dm')$$

où

$$\frac{\partial}{\partial z}\sigma(m,\xi,z) \geq -M_1\int_{\gamma_{\tau(m,\xi,z)}{}^{[0,m]}} \sigma(m',\eta',z)\sigma(m-m',\eta'',z)\mu_\gamma(dm'). \tag{2.30}$$

Donc, si on pose

$$\varphi(z) = \|\sigma(.,.;z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})},$$

alors, compte tenu de (2.28), il résulte de (2.30) que

$$\frac{\partial}{\partial z}\sigma(m,\xi,z) \geq -M_1(\bar{m}_A - \bar{m}_a)\varphi(z)^2 \quad p.p \quad dans \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R},$$

où

$$\sigma(m,\xi,z) \leq \bar{\sigma}(m,\xi) + M_1(\bar{m}_A - \bar{m}_a)\int_z^1 \varphi(z')^2 dz'$$

p.p. dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, d'où

$$\varphi(z) \leq \|\bar{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} + M_1(\bar{m}_A - \bar{m}_a)\int_z^1 \varphi(z')^2 dz'.$$

Cette inégalité implique que

$$\|\sigma(.,.;z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} = \varphi(z) \leq \tilde{y}(z) \tag{2.31}$$

pour $z \leq 1$ dans l'intervalle de l'existence de $\sigma(.,.;z)$ et de $\tilde{y}(z)$, où $\tilde{y}(z)$ est la solution de l'équation intégrale

$$\tilde{y}(z) = \|\bar{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} + M_1(\bar{m}_A - \bar{m}_a)\int_z^1 \tilde{y}(z')^2 dz',$$

où, ce qui revient au méme, du probleme de cauchy

$$\frac{d\tilde{y}(z)}{dz} = -M_1(\bar{m}_A - \bar{m}_a)\tilde{y}(z)^2, \quad \tilde{y}(1) = |\bar{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}.$$

On a d'ailleurs

$$\tilde{y}(z) = \frac{\|\bar{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}}{1 - \|\bar{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}M_1(\bar{m}_A - \bar{m}_a)(1-z)}. \tag{2.32}$$

On rappelle que la condition (2.10) implique que le deuxième membre de (2.32) est bien défini pour tout $z \in [0,1]$. Donc l'inégalité (2.31) est valable pour tout $z \in [0,1]$ tel que $\sigma(.,.,z)$ existe. Rappellons que l'on a construit la solution locale $\sigma(.,.;z)$ dans un intervalle $[1-\delta]$ et que l'on peut prolonger la solution $\sigma(.,.,z)$ pour tout l'intervalle ou les conditions pour la construction de la solution locale continuent à étre vérifiées. Or, de (2.26) on déduit que, si $\|\sigma(.,.,z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} < \infty$, alors on peut encore prolonger la solution. Par conséquent, en vertu de (2.31) et (2.32), la solution $\sigma(.,.,z)$ peut étre prolongée dans tout l'intervalle $[0,1]$. L'unicité de la solution résulte de l'unicité de la solution locale, ce qui achève la démonstration de la proposition.

Chapitre 3

Solution stationnaire pour le cas général

Dans ce chapitre, on va étudier l'équation (1.3) dans le cas générale de la présence d'un vent constant dans la direction des axes x, y et z (c-à-d $v = \bar{v} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3) \neq 0$). On montre l'existence et l'unicité de la solution stationnaire.

Considérons donc l'équation (1.3) avec la condition d'entrée (1.4) dans un domaine de dimension 3

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \times]0, 1[= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 < z < 1\}$$

et dont la vitesse $u = u(m)$ est donnée dans (1.1).
Nous supposons que la troixième composante du vecteur vitesse $\bar{v}_3$ vérifie $\bar{v}_3 < \frac{g}{\alpha(m))}$ pour vu qu'il y a entrée et sortie des goutttelettes dans Ω.

3.1 Transformation de l'équation

Pour résoudre le problème, nous allons utiliser les mêmes techniques du Chapitre 2. On introduit donc le changement de variables

$$\begin{cases} \tilde{m} &= m, \\ \xi &= x + v_1 \frac{\alpha(m)}{\alpha(m)v_3 - g}(1-z), \\ \eta &= y + v_2 \frac{\alpha(m)}{\alpha(m)v_3 - g}(1-z), \\ \tilde{z} &= z. \end{cases} \tag{3.1}$$

et définissons

$$\tilde{\sigma}(\tilde{m}, \xi, \eta, \tilde{z}) = \sigma(m, x, y, z) =$$

$$\sigma(\tilde{m}, \xi - v_1 \frac{\alpha(m)}{\alpha(m)v_3 - g}(1-z), \tau - v_2 \frac{\alpha(m)}{\alpha(m)v_3 - g}(1-z), z).$$

Toutefois, pour éviter la notation lourde, on va écrire simplement m et z au lieu de $\tilde{m}$ et $\tilde{z}$ et encore $\sigma(m, \xi, \eta, z)$ au lieu de $\tilde{\sigma}(\tilde{m}, \xi, \eta, \tilde{z})$, ce qui ne cause pas d'équivoque dans le calcul. Comme on peut le constater facilement, dans les nouveaux coordonnées (m, ξ, η, z) l'équation (1.3) se transforme en

$$\frac{\partial}{\partial z}\sigma(m, \xi, \eta, z) = \tag{3.2}$$

$$\frac{m\alpha(m)}{2(\alpha(m)\bar{v}_3 - g)} \int_0^m \beta(m - m', m') \times$$

$$\sigma(m', \tau(m, m', \xi, z), \omega(m, m', \eta, z), z)\sigma(m - m', \tau(m, m - m', \xi, z), \omega(m, m - m', \eta, z), z)dm' +$$

$$-\frac{m\alpha(m)}{\alpha(m)\bar{v}_3 - g} \int_0^\infty \beta(m, m') \times$$

$$\sigma(m, \xi, \eta, z)\sigma(m', \tau(m, m', \xi, z), \omega(m, m', \eta, z), z)dm',$$

où

$$\begin{cases} \tau(m, m', \xi, z) = \xi - v_1 \frac{\alpha(m)}{\alpha(m)v_3 - g}(1-z) \\ \omega(m, m', \eta, z) = \eta - v_2 \frac{\alpha(m)}{\alpha(m)v_3 - g}(1-z) \end{cases}$$

Pour réformuler l'équation (3.2) en une équation différentielle ordinaire et établir des propriétés utiles de l'opérateur intégral du deuxième membre de cette équation, il nous convient, pour chaque $z \in [0,1]$ fixé, d'introduire la famille de courbes

$$\gamma_{\tau,\omega} = \{(m,\xi,\eta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \tag{3.3}$$

$$\xi = \tau + v_1 \frac{\alpha(m)}{\alpha(m)v_3 - g}(1-z), \quad \eta = \omega + v_2 \frac{\alpha(m)}{\alpha(m)v_3 - g}(1-z), (\tau,\omega) \in \mathbb{R}^2\}$$

et de définir une mesure sur ces courbes.

Désignons par $P_{\mathbb{R}_+}$ la projection de $\gamma_{\tau,\omega}$ sur $\mathbb{R}_+$ c'est-à-dire, pour les sous ensembles A' de $\gamma_{(\tau,\omega)}$ on a

$$P_{\mathbb{R}_+}A' = \{m \in \mathbb{R}_+ / \exists \quad (\xi,\eta) \quad telque(m,\xi,\eta) \in A'\}.$$

La régularité des fonctions $\xi(m) = \tau + v_1 \frac{\alpha(m)}{\alpha(m)v_3 - g}(1-z), \eta = \omega + v_1 \frac{\alpha(m)}{\alpha(m)v_3 - g}(1-z)$ nous permet de définir les ensembles mesurables de $\gamma_{\tau,\omega}$ et la mesure μ_γ sur $\gamma_{(\tau,\omega)}$ par les relations suivantes :

i)$A' \subset \gamma_{(\tau,\omega)}$ est mesurable si et seulement si $P_{\mathbb{R}_+}A'$ est mesurable selon Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$,

ii)$\mu_\gamma(A') = \mu_{L,\mathbb{R}_+}(P_{\mathbb{R}_+}A')$, où $\mu_{L,\mathbb{R}_+}(.)$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$. En outre, si on pose

$$\kappa = (\tau,\omega) \quad , \vartheta = (\xi,\eta) \quad , \bar{q}_{\bar{v}} = (\bar{v}_1, \bar{v}_1)^T,$$

alors les courbes définies dans (3.3) penvent s'exrire dans la forme suivante :

$$\gamma_\kappa = \gamma_{\kappa,z} = \tag{3.4}$$

$$\{(m,v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 / \quad v = \kappa + \bar{q}_{\bar{v}} \frac{\alpha(m)}{\alpha(m)\bar{v}_3 - g}(1-z)\}$$

avec

$$\kappa(m,\vartheta,y,z)=\vartheta-\bar{q}_{\bar{v}}\frac{\alpha(m)}{\alpha(m)\bar{v}_3-g}(1-z).$$

La famille des courbes γ_κ est similaire à celle définnit dans (2.4) dans le chapitre 2 et la mesure μ_γ sur les courbes γ_κ est définie de la même manière. Par conséquent, la mesure μ_γ ainsi définie a des propriétés analogues à celles démontrées dans les lemmes 3.1, 3.2, 3.3 et 3.4 cela étant, on peut écrire l'équation (3.2) dans la forme.

Cela étant, on peut écrire l'équation (3.2) dans la forme

$$\frac{\partial}{\partial z}\sigma(z)=F_z(\sigma(z)),\quad \sigma(z)=\sigma(.,.,.,z), \tag{3.5}$$

avec

$$F_z(\sigma(z))=F_z(\sigma(z))(m,\xi,\eta)=$$

$$=+\frac{m\alpha(m)}{2(\bar{v}_3\alpha(m)-g)}\int_{\gamma_\kappa^{[0;m]}}\beta(m-m',m')\sigma(m',\vartheta',z)\sigma(m-m',\vartheta'',z)\mu_\gamma(dm')+$$

$$-\frac{m\alpha(m)}{\bar{v}_3\alpha(m)-g}\int_\gamma\beta(m,m')\sigma(m',\vartheta',z)\sigma(m,\xi,\eta,z)\mu_\gamma(dm'),$$

où ϑ' , ϑ'' sont tels que

$$(m',\vartheta')\in\gamma_\kappa,\quad (m-m',\vartheta'')\in\gamma_\kappa^{[0,m]},$$

$$\gamma_\kappa^{[0,m]}=\gamma_\kappa\cap[0,m]\times\mathbb{R}^2$$

L'équation (3.5) doit être envisagée avec la condition (1.4), c'est-à-dire

$$\sigma(m,\xi,\eta,1)=\bar{\sigma}(m,\xi,\eta). \tag{3.6}$$

3.2 Existence et unicité de la solution

Pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution du probleme (3.5)-(3.6), nous avons besoin de préciser des conditions sur $\bar{\sigma}(m, \xi, \eta)$. Nous supposons que

$$\bar{\sigma}(.,.,.) \in L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2), \tag{3.7}$$

$$\bar{\sigma}(m, \xi, \eta) \geq 0 \; p.p. \; dans \; \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2. \tag{3.8}$$

$$supp(\bar{\sigma}) \subset [\bar{m_a}, \bar{m_A}] \times \mathbb{R}^2, \tag{3.9}$$

$$\|\bar{\sigma}\|_{l^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)} < \frac{1}{M_1(\bar{m}_A - \bar{m}_a})\tag{3.10}$$

où M_1 est une constante définit dans (2.11). On a alors le résultat suivant.

Proposition 3.1 *Si $\bar{\sigma}(m, \xi, \eta)$ satisfait aux conditions (3.7)-(3.10), alors l'équation (3.5)avec la condition (3.6) admet une solution σ et une seule dans la classe*

$$\sigma \in C([0,1]\,, L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times [0,1]). \tag{3.11}$$

Démonstration On a besoin de construire la solution $\sigma(.,.,.,z)$ comme fonction de z à valeur dans $L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$. Il nous convient d'examiner directement l'approximation successive avec laquelle on construit la solution $\sigma(m, \xi, \eta, z)$. Posons

$$\sigma^{[0]}(m, \xi, \eta, z) = \bar{\sigma}(m, \xi, \eta)$$

et définissons $\sigma^{[n]}$, $n = 1, 2, ...,$ par les relations

$$\frac{\partial}{\partial z}\sigma^{[n]} = F_z(\sigma^{[n-1]}, \quad \sigma^{[n]}(m, \xi, \eta, 1) = \bar{\sigma}(m, \xi, \eta)$$

On a le lemme suivant.

Lemme 3.1 *Quelque soit $n \in N$, $\sigma^{[n]}$ est bien définie dans la classe*

$$\sigma^{[n]}(.,.,.,z) \in L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2), \quad 0 \leq z \leq 1$$

et on a

$$supp(\sigma^{[n]}(.,.,.,z)) \subset [\bar{m}_a, \bar{m}_A] \times \mathbb{R}^2 \quad pour\ 0 \leq z \leq 1 \tag{3.12}$$

$$\|\sigma^{[n]}(.,.,.,z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2)} \leq \frac{\|\bar{\sigma}\|_{L^\infty(R_+\times\mathbb{R})}}{1-(M_1+M_2)(\bar{m}_A-\bar{m}_a)\|\bar{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2)}(1-z)} \tag{3.13}$$

Pour

$$\frac{(M_1+M_2)(\bar{m}_A-\bar{m}_a)\|\bar{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2)}-1}{(M_1+M_2)(\bar{m}_A-\bar{m}_a)\|\bar{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2)}} < z \leq 1,$$

où

$$M_2 = \sup_{m,m' \in \mathbb{R}_+} \frac{m\alpha(m)}{g}\beta(m,m') \tag{3.14}$$

Le lemme se démontre d'une manière analogue au lemme 2.5 du chapitre 2.

Suite de la démonstration de la proposition 3.1 La proposition se démontre de manière analogue au proposition 2.1 du chapitre 3 avec les mêmes considérations de la démonstration du lemme 3.1.$\square$

Conclusion

En partant de la modélisation de la variation de la quantité de l'eau contenue dans les gouttelettes décrite par une équation intégro-différentielle et dont la vitesse de gouttelettes est déterminée en fonction de la vitesse du vent et la force gravitationnelle, on s'est interessé à l'étude de cette équation vue que cette modélisation est intérissante pour étudier les phénoménes atmosphériques comme la formation des nuages et la précipitation. En commençant l'étude de l'équation dans le cas de l'absence du mouvement de l'air et puis dans le cas de présence d'un vent horizontal. Cette étude nous a donné des caractérisations intéressantes pour résoudre le problème en présence d'un vent constant dans les trois directions.

Bibliographie

[1] Belhireche, H., Aissaoui, M. Z., Fujita Yashima, H. : Equations mono-dimensionnelles du mouvement de l'air avec la transition de phase de l'eau. Sci. Techn. Univ.Constantine - A, vol. **31** (2011), pp. 9-17

[2] Brezis, H. :Analyse fonctionelle (Théorie et application), Masson 1987.

[3] Dubovski, P. B. : An Iterative Method for Solving of the coagulation Equation with Space-Non homogeneons Velocity Field. computational Mathematics and Mathematical Physics, vol 30(1990), pp. 1755-1757.

[4] Fujita Yashima.H : Modélisation de la physique des fluides, cours de l'université de Guelma, 2010-2011

[5] Kantorovitch, L., Akilov, G. : Analyse fonctionelle, Tome 2 (*traduit de russe.*). Mir, Moscou.

[6] Maikhilov, V. P. : Equations aux dérivées partielles *(*traduit du russe). Mir, 1980.

[7] Merad, M. Belhireche, H. Fujiha Yashima, H. : Solution stationnaire de l'équation de coagulation de gouttelettes en chute avec le vent horizontal. Rend. sem. Mat. Univ. Padova, vol 129 (2013), pp, 255-244.