

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche  
Scientifique  
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
et des Sciences de la Matière  
Département de Mathématiques



## Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

**Master en Mathématiques**

**Option : EDP Et Analyse numérique**

Par :

M<sup>me</sup> . Halima Chabna

## Intitulé

**Traitement numérique des équations intégrales  
non linéaires de Fredholm**

Dirigé par : Dr. Hamza Guebbai

Devant le jury

PRESIDENT  
RAPPORTEUR  
EXAMINATEUR

Dr. Salah Badraoui  
Dr . Hamza Guebbai  
Dr. Assia Frioui

Professeur Univ-Guelma  
MCA Univ-Guelma  
MCA Univ-Guelma

Session Juillet 2019

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>1</b>
<b>Résumé</b>	<b>3</b>
<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>1 Rappels et notions fondamentales</b>	<b>6</b>
1.1 Espaces fonctionnels . . . . .	6
1.2 Notions sur les opérateurs . . . . .	8
1.2.1 Opérateur inverse . . . . .	8
1.2.2 Opérateurs compacts . . . . .	8
1.3 Différents notions de dérivées . . . . .	10
1.4 Formules de Taylor . . . . .	11
1.5 Introduction à la théorie des équations itégrales . . . . .	12
1.5.1 Définition des équations intégrales . . . . .	12
1.5.2 Classification des équations intégrales . . . . .	13
1.6 Notions de l'analyse fonctionnelle . . . . .	15
1.6.1 Théorème d'Arzela-Ascoli . . . . .	15
1.7 Théorème de Neumann . . . . .	17
<b>2 Méthodes pour des équations non linéaires</b>	<b>19</b>
2.1 La méthode de Newton-Kantorovich . . . . .	19
2.2 Méthode de la pente fixe : . . . . .	22
2.3 Dérivabilité de l'opérateur intégral . . . . .	25
2.3.1 Etude dans l'espace $L^p(0, 1)$ . . . . .	25
2.3.2 Etude dans l'espace $C^0[0, 1]$ . . . . .	27
<b>3 Applications</b>	<b>29</b>
3.1 Equation intégral non linéaire . . . . .	29
3.2 La méthode de Nyström : . . . . .	30

---

3.2.1	La méthode de Nyström pour les équations intégrales à noyau continu : . . . . .	31
3.2.2	Propriétés et analyse d'erreur de la méthode de Nyström :	32
<b>4</b>	<b>Exemples numériques</b>	<b>47</b>
	<b>Conclusion</b>	<b>52</b>

# *Remerciements*

*Avant tout, j'adresse mes remerciements en premier lieu, à **Allah** Tout-Puissant pour la volonté, la santé, le courage et la patience qu'il ma donné pour finir ce travail*

*Ensuite, j'adresse ma reconnaissance à mon encadreur **Docteur Hamza GUEBBAI**, son sérieux, sa patience, ses conseils, et surtout sa compétence m'ont été très utiles pour réaliser ce travail.*

*Je remercie le professeur : Salah BADRAOUI, Docteur FRIOUI qui m'ont fait l'honneur d'être membres du jury.*

*Enfin, je remercie toutes les personnes, famille, amies, qui directement ou indirectement ont contribué à la réalisation de ce travail.*

# *Résumé*

Dans ce mémoire, on a étudié les équations intégrales non linéaires de Fredholm.

Le but de ce travail est d'appliquer la généralisation de Kantorovitch de la méthode de Newton classique au cas des opérateurs définis dans des espaces fonctionnelles et on a centré notre recherche sur l'opérateur intégral et sur les espaces de Banach tels que les espaces des fonctions continues et les espaces des fonctions mesurables.

Ensuite, fournir cette étude par des résultats numériques en utilisant la méthode de Newton-Kantorovitch.

**Mots clés :**

Equation intégrale, Equation de Fredholm, Equation non linéaire, Fréchet différentiabilité, Méthode de Nyström.

# *Introduction*

Le travail que nous présentons porte sur l'étude des équations intégrales de Fredholm non linéaires. La théorie des équations intégrales intervient dans divers domaines des mathématiques appliquées et de la physique. Elles offrent un puissant moyen technique pour résoudre certaines problèmes pratiques.

Leurs premières applications remontent au début des années 60. Méthodes des singularités utilisées en aérodynamique, puis en rayonnement acoustique et en élasticité.

La théorie des équations intégrales a commencé avec les travaux célèbres d'Ivar Fredholm, où il a constitué la théorie des équations intégrales de seconde espèce et établi quelques théorèmes fondamentaux (théorème de l'alternative) relatifs à ces équations et résolu enfin les problèmes aux limites de Dirichlet et de Neumann relatifs à l'équation de Laplace.

Dans ce mémoire, on s'intéresse à une fonctionnelle intégrale non linéaire :

$K : O \in \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ ,  $\mathcal{B}$  étant un espace de Banach et  $O$  un ouvert non vide de  $\mathcal{B}$ . La formule de  $K$  est donnée par :

$$K(u)(s) := \int_0^1 k(s, t, u(t)) dt, \forall u \in \mathcal{B}, \forall s \in [0, 1]$$

où le noyau  $k$  est une fonction réelle de trois variables :  
 $(s, t, u) \in [0, 1] \times [0, 1] \times \mathbb{R} \mapsto k(s, t, u) \in \mathbb{R}$ , avec assez de régularité pour que  $K$  soit Fréchet différentiable sur  $O$ . Le problème est le suivant :

$$\text{Trouver } u \in O : F(u) = 0$$

où  $F(u) = u - K(u) - f$ , pour une fonction donnée  $f \in \mathcal{B}$ .

On suppose que  $F$  admet une solution unique sur  $O$ .

La stratégie classique de résolution est de discrétiser le problème par une méthode de Nyström par exemple, puis de résoudre le système non linéaire par une méthode de type Newton en dimension finie. Dans ce cas, nous obtenons une approximation de la solution approchée par discrétisation.

Dans notre travail, nous proposons de commencer par la linéarisation du problème en utilisant la méthode de Newton-Kantorovich, puis on applique la méthode de Nyström à chaque équation linéaire fournie par le processus de Newton qui consiste à approcher la solution  $u$  en approchant la fonctionnelle intégrale  $K$  par  $K_n$  déduit de  $K$  en remplaçant l'intégration par une quadrature numérique ; on mis en évidence une propriété vraiment étonnante de cette stratégie : On construit une suite d'itérées qui, quand elle converge, tend vers la solution exacte  $u$  quand le nombre d'itérées de la méthode de Newton tend vers  $+\infty$  et ceci pour n'importe quel paramètre fixé  $n$ , on peut approcher la solution à la précision voulue.

Ce travail est réparti en quatre chapitres :

Le premier chapitre est consacré d'une part, à quelques définitions de base et il rassemble toutes les notions et résultats que nous utiliserons par la suite.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons les principaux théorèmes utilisés par la suite : théorème de convergence a priori, théorème de convergence de la pente fixe, théorème de Fréchet-différentiabilité.

Le troisième chapitre est consacré essentiellement à présenter l'application théorique analytique de notre travail, l'application de la méthode de Newton-Kantorovich et la méthode de Nyström.

Dans le quatrième chapitre nous exposent des solutions numériques des équations intégrales linéaires et non linéaires de Fredholm.

# Chapitre 1

## Rappels et notions fondamentales

Dans ce chapitre, on présente un rappel sur les notions de l'analyse fonctionnelle, aussi sur quelques théorèmes fondamentaux tel que : Théorème d'Arzela-Ascoli, théorème de Neumann, et on donne quelques notations sur les opérateurs et leurs propriétés, qui seront utilisés tout le long de ce travail.

### 1.1 Espaces fonctionnels

**Définition 1.1.1.** (*Espace vectoriel normé*)

Soit  $E$  un espace vectoriel sur le corp  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , on appelle norme sur  $E$  toute application notée  $\|\cdot\|$  définie sur  $E$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ , vérifiant : pour tout  $x, y$  dans  $E$  et  $\alpha$  dans  $\mathbb{K}$

(i)  $\|x\| = 0$  si et seulement si  $x = 0$ .

(ii)  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ .

(iii)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (*inégalité triangulaire*).

Tout espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé.

**Définition 1.1.2.** (*Espace métrique complet*)

On dit que  $E$  est un espace métrique complet si toute suite de Cauchy de  $E$  converge dans  $E$ .

**Définition 1.1.3.** (*Espace de Banach*)

Tout espace vectoriel normé complet est appelé un espace de Banach.

**Définition 1.1.4.** (*Espace  $\mathcal{C} [a, b]$* )

Des fonctions continues sur  $[a, b]$ , muni de la norme  $\|x\| = \max_{t \in [a, b]} |x(t)|$ .

**Définition 1.1.5.** (Espace  $L^1(\Omega)$ )

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , on désigne par  $L^1(\Omega)$  l'espace des fonctions intégrables sur  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , on pose :

$$\|f\|_1 = \int_{\Omega} |f(x)| dx.$$

**Définition 1.1.6.** (Espace  $L^p(\Omega)$ )

Soit  $1 \leq p \leq \infty$ , on pose :

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ mesurable et } |f(x)|^p \in L^1(\Omega)\}.$$

muni de la norme :

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

si  $p = \infty$ , on a  $L^\infty(\Omega)$  est l'espace des fonctions  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable, vérifiant  $\exists C > 0$  telle que  $|f(x)| \leq C$ , p.p. sur  $\Omega$ .

La norme est notée par :

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^\infty} &= \|f\|_\infty \\ &= \inf \{C > 0, \|f(x)\| \leq C, p.p. \text{ sur } \Omega\} \end{aligned}$$

**Remarque 1.1.1.** si  $f \in L^\infty(\Omega)$ , on a :

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty, \text{ p.p. sur } \Omega.$$

**Définition 1.1.7.** (Ensemble convexe)

une partie  $C$  d'un espace vectoriel réel  $E$  est dite convexe si et seulement si :  $\forall x, y \in C, \forall \alpha \in [0, 1] : \alpha x + (1 - \alpha)y \in C$ .

Notation : Soient  $E$ , et  $F$  des espaces vectoriels normés.

**Définition 1.1.8.** (Espace  $\mathcal{L}(E, F)$ )

Des opérateurs linéaires continus de  $E$  dans  $F$ .

**Définition 1.1.9.** (Espace  $\mathbb{K}(E, F)$ )

Des opérateurs compacts de  $E$  dans  $F$ .

**Définition 1.1.10.** (Espace  $BL(E, F)$ )

Des opérateurs linéaires bornés de  $E$  dans  $F$ .

## 1.2 Notions sur les opérateurs

### 1.2.1 Opérateur inverse

**Définition 1.2.1.** Soit  $A \in (E, F)$  où  $E$  et  $F$  sont deux espaces vectoriels normés.

On dit que  $A$  est inversible s'il existe  $B \in (F, E)$  tel que :  $AB = I_F$  (inversible à droite) et  $BA = I_E$  (inversible à gauche). Un tel opérateur (lorsqu'il existe) est unique. On l'appelle opérateur inverse de  $A$  et on le note  $B = A^{-1}$

### 1.2.2 Opérateurs compacts

**Définition 1.2.2.** (Compacité)

Soit  $U$  un ensemble d'un espace normé  $X$ ,  $U$  est dit compact si de tout recouvrement de  $U$  par les ouverts de  $U$ , on peut extraire un sous-recouvrement fini c-à-d :

$$\forall V_j, j \in J \text{ ouverts tels que } U \subset \bigcup_{j \in J} V_j, \exists V_{j(k)}, j(k) = 1, 2, \dots, n \text{ tel que :}$$

$$U \subset \bigcup_{k=1}^n V_{j(k)}.$$

**Définition 1.2.3.** (Compacité relative)

Soit  $K \subset X$  une partie d'un espace topologique. On dit qu'elle est relativement compact si son adhérence est compact.

**Définition 1.2.4.** (Opérateurs de rang fini)

Soit  $A \in BL(E, F)$  on dit que  $A$  est un opérateur de rang fini si  $Im(A)$  est de dimension fini.

**Définition 1.2.5.** (Opérateur compact)

Soit  $A$  un opérateur linéaire d'un espace normé  $E$  dans un espace normé  $F$ , on dit que  $A$  est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné  $G$  dans  $E$  à un ensemble relativement compact  $A(G)$  dans  $F$ , autrement dit, la fermeture  $\overline{A(G)}$  est compact.

**Théorème 1.2.1.** Un opérateur compact est un opérateur borné, la réciproque est fausse.

**Théorème 1.2.2.** L'opérateur intégral  $A$  de  $C(G)$  dans  $C(G)$  à noyau continu est un opérateur compact.

**Preuve 1.2.1.** Définissons l'opérateur intégral  $A$  par la formule :

$$(Af)(x) = \int_a^b k(x, y) f(y) dy$$

où,  $k(x, y) \in \mathcal{C}([a, b] \times [a, b])$

On montre que l'opérateur intégral  $A$  est compact en utilisant le Théorème d'Arzela-Ascoli, en effet :

Considérons  $F$  un sous ensemble de  $\mathcal{C}([a, b])$  définie par :  $F(x) = \{f(x), f \in F\}$   
Montrons que  $F$  est bornée :

$$\begin{aligned} |Af(x)| &= \left| \int_a^b k(x, y) f(y) dy \right| \\ &\leq \int_a^b |k(x, y)| |f(y)| dy \\ &\leq \sup_{x, y \in [a, b]^2} |k(x, y)| \sup_{y \in [a, b]} |f(y)| \int_a^b dy \\ &\leq \|k(x, y)\|_\infty \|f\|_\infty (b - a). \end{aligned}$$

Montrons l'équicontinuité :

Soient  $f \in F$  et  $x, y \in [a, b]$ . Alors,

$$\begin{aligned} |A(f)(x) - A(f)(y)| &= \left| \int_a^b (k(x, t) - k(y, t)) f(t) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |k(x, t) - k(y, t)| |f(t)| dt \\ &\leq \|f\|_\infty \int_a^b |k(x, t) - k(y, t)| dt \end{aligned}$$

Comme  $k$  est continue sur le compact  $[a, b] \times [a, b]$  donc  $k$  est uniformément continue sur  $[a, b] \times [a, b]$  donc  $k$  est uniformément continue par rapport à  $x$ .

Par suite,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall x, y \in [a, b] |x - y| < \delta \Rightarrow |k(x, t) - k(y, t)| < \epsilon,$$

Alors, on remplace :

$$|A(f)(x) - A(f)(y)| \leq \|f\|_\infty \frac{\epsilon}{\|f\|_\infty} \leq \epsilon.$$

**Théorème 1.2.3.** Soit  $A$  un opérateur borné de  $E$  dans  $F$ , à image  $A(E)$  de dimension finie. Alors  $A$  est compact.

**Démonstration 1.** Soit  $A \in BL(E, F)$  un opérateur de rang fini,  $L'$ opérateur  $A$  est continu donc, pour tout  $x \in B_E : \|Ax\| \leq \|A\|$   
 Alors  $A(B_E)$  est borné dans  $F$  et, par conséquent,  $\overline{A(B_E)}$  aussi :  
 De plus,  $\overline{Im(A)}$  est fermé car c'est un espace vectoriel de dimension finie, donc  $\overline{A(B_E)} \subset \overline{Im(A)} = Im(A)$ .  
 Enfin,  $\overline{A(B_E)}$  est fermé borné de l'espace vectoriel de dimension finie  $Im(A)$ , il est compact de  $Im(A)$ .  
 D'où, il résulte  $A \in \mathbb{K}(E, F)$ .

### 1.3 Différents notions de dérivées

Dans cette section  $X$  et  $Y$  désignent des espaces vectoriels normés,  $f$  désigne une application d'un ouvert  $O \subset X$  à valeurs dans  $Y$ .

**Définition 1.3.1.** Dérivée en un point suivant une direction. soient  $a \in O$ ,  $d \in X$ , la limite

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(a + \lambda d) - f(a)}{\lambda}$$

lorsqu'elle existe, est appelée dérivée de  $f$  au point  $a$  suivant la direction  $d$ . Elle est notée :  $f'(a; d)$ .

**Définition 1.3.2.** Dérivée de Gâteaux :

Soit  $a \in O$ . Supposons que  $f'(a; d)$  existe pour tout  $d \in X$ . S'il existe un opérateur linéaire et continu  $L \in \mathcal{L}(X; Y)$  tel que :  $Ld = f'(a; d)$  pour tout  $d \in X$ , alors l'opérateur  $L$  est appelé Gâteaux-différentielle (ou  $G$ -différentielle) de  $f$  au point  $a$ . Il est souvent noté  $f'(a)$ , et  $f$  est dite Gâteaux-différentiable (ou différentiable au sens de Gâteaux) au point  $a$ .

**Remarque 1.3.1.** L'application  $f$  est  $G$ -différentiable en  $a$  si, et seulement si, il existe un opérateur linéaire et continu  $L \in \mathcal{L}(X; Y)$  tel que :

$$f(a + \lambda d) = f(a) + \lambda Ld + |\lambda| \epsilon(\lambda)$$

, avec

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow 0} \epsilon(\lambda) = 0,$$

où,  $\epsilon$  est une application de  $\mathbb{R}$  dans  $Y$  dépendant de  $d$ .

**Remarque 1.3.2.** L'application  $f$  peut être  $G$ -différentiable en  $a$  sans être continue en ce point.

**Définition 1.3.3.** *Dérivée de Fréchet*

Soit  $a \in O$ . Supposons qu'il existe un opérateur linéaire et continue  $L \in \mathcal{L}(X, Y)$  et une application  $\epsilon$  de  $X$  dans  $Y$ , tels que :

$$f(a + d) = f(a) + Ld + \|d\| \epsilon(d), \text{ avec } \lim_{\|d\| \rightarrow 0} \epsilon(d) = 0$$

L'opérateur  $L$  est appelé différentielle de Fréchet (ou  $F$ -différentielle) de  $f$  au point  $a$ , et  $f$  est dite Fréchet différentiable (ou différentiable au sens de Fréchet) au point  $a$ . La différentielle de  $f$  au point  $a$  est souvent notée  $Df(a)$

**Proposition 1.3.1.** Si l'application  $f$  est  $F$ -différentiable en  $a$  alors l'opérateur  $L$  intervenant dans la définition précédente est unique. Par conséquent, l'application  $\epsilon$  est aussi unique.

**Proposition 1.3.2.** Si l'application  $f$  est  $F$ -différentiable en  $a$  alors elle est continue en ce point.

**Proposition 1.3.3.** (Définition équivalente de la  $F$ -différentiabilité)

L'application  $f$  est  $F$ -différentiable en  $a$  si, et seulement si, il existe un opérateur linéaire et continu  $L \in \mathcal{L}(X; Y)$  tel que :

$$\lim_{\|d\|_X \rightarrow 0} \frac{\|f(a + d) - f(a) - Ld\|_Y}{\|d\|_X}$$

**Proposition 1.3.4.** si  $f$  est  $F$ -différentiable au point  $a$ , alors elle est  $G$ -différentiable en ce point, et la  $F$ -différentielle et la  $G$ -différentielle coïncident. la réciproque est fausse.

**Remarque 1.3.3.** En l'absence de précision, 'f est une application différentiable' est utilisé pour 'f est une application  $F$ -différentiable'

## 1.4 Formules de Taylor

Notations :

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $x_0$  un point intérieur à  $I$ , et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction, on fixe un entier naturel  $n$ .

**Théorème 1.4.1.** (Taylor-Young) : Supposons que  $f$  soit de classe  $C^n$  sur  $I$ . On peut écrire :

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + h^n \epsilon(h)$$

où  $\epsilon(h)$  est une fonction qui tend vers 0 quand  $h$  tend vers 0.

**Théorème 1.4.2.** (Taylor-Lagrange) : Supposons que  $f$  soit de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur  $I$ . Alors, pour tout  $h \in \mathbb{R}$  tel que  $x_0 + h$  appartienne à  $I$ , il existe  $\theta \in ]0, 1[$  tel que l'on ait :

$$f(x_0+h) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta h).$$

**Théorème 1.4.3.** (Taylor avec reste intégral) : supposons que  $f \in \mathcal{C}^{n+1}$  sur  $I$ . Alors, pour tout  $h \in \mathbb{R}$  tel que  $x_0 + h$  appartienne à  $I$ , on a :

$$f(x_0+h) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(x_0+th) dt$$

**Remarque 1.4.1.** le reste intégral admet une autre expression :

$$\frac{h^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(x_0+th) dt = \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{(x_0+h-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

qui découle tout simplement par un changement de variable  $t \mapsto x_0 + th$ .

## 1.5 Introduction à la théorie des équations intégrales

### 1.5.1 Définition des équations intégrales

**Définition 1.5.1.** On appelle équation intégrale une équation fonctionnelle où la fonction inconnue figure sous le signe d'intégration  $\int$ .

C'est en général l'équation par rapport à l'inconnue  $\phi$  de la forme :

$$\int_E k(x, t, \phi(t)) dt = \lambda \phi(x) + f(x), x \in E \quad (1.1)$$

où  $E$  est un espace mesuré,  $f(x)$  une fonction mesurable donnée sur  $E$ ,  $\lambda$  un scalaire donné qui peut être réel ou complexe,  $k(x, t, \phi(t))$  une fonction mesurable sur  $E^3$  appelée noyau de l'équation intégrale.

Avec toutes ces données, notre problème est de rechercher la fonction  $\phi$  qui satisfait l'équation précédente.

## 1.5.2 Classification des équations intégrales

La classification des équations intégrales est centrée sur trois caractéristiques de base de leur structure globale.

1. Le type (espèce) d'une équation se rapporte à la localisation de la fonction inconnue pour les équations de première espèce, la fonction inconnue apparaît uniquement à l'intérieur du signe intégral. Cependant pour les équations de seconde espèce, la fonction inconnue apparaît également à l'extérieur du signe intégral.

2. la description historique Fredholm et Volterra concerne les bornes d'intégration. Dans une équation de Fredholm, les bornes d'intégrations sont fixées, dans l'équation de Volterra les bornes d'intégrations sont indéfinies.

3. L'adjectif singulière est parfois employée d'une part, quand l'intégration est impropre, d'autre part si l'une des bornes d'intégration ou les deux sont infinies ou si l'intégrand est non borné sur l'intervalle donné, évidemment, une équation intégrale peut être singulière.

une équation intégrale peut être classé comme étant soit une équation intégrale linéaire ou bien non linéaire.

Les équations intégrales les plus fréquemment utilisées sont les équations intégrales de Volterra et celles de Fredholm.

### Equations intégrales de Volterra

1. On appelle équation intégrale de Volterra non linéaire de seconde espèce une équation de la forme :

$$\forall x \in [a, b], \phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t, \phi(t)) dt,$$

où,  $\phi(x)$  est une fonction inconnue et  $k$  et  $f$  sont des fonctions connues et  $\lambda$  un paramètre réel.

2. Une équation de la forme :

$$\int_a^x k(x, t, \phi(t)) dt = f(x),$$

est appelée équation intégrale de Volterra non linéaire de première espèce.

3. Une équation de la forme :

$$\phi(x) = \lambda \int_a^x k(x, t) \phi(t) dt + f(x).$$

est appelée équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce.

4. Si  $f(x) = 0$  l'équation :

$$\phi(x) = \lambda \int_a^x k(x, t) \phi(t) dt,$$

est appelée équation intégrale linéaire homogène de Volterra de seconde espèce.

5. L'équation :

$$f(x) = \int_a^x k(x, t) \phi(t) dt$$

est appelée équation intégrale linéaire de Volterra de première espèce.

### Equations intégrales de Fredholm

1. On appelle une équation intégrale de Fredholm non linéaire de seconde espèce une équation de la forme :

$$\phi(x) - \lambda \int_a^b k(x, t, \phi(t)) dt = f(x).$$

où,  $\phi(x)$  est une fonction inconnue et  $k(x, t)$  et  $f(x)$  sont des fonctions connues et  $\lambda$  un paramètre réel.

2. Si  $f(x) = 0$  l'équation s'écrit :

$$\phi(x) = \lambda \int_a^b k(x, t, \phi(t)) dt$$

elle est dite équation intégrale de Fredholm non linéaire de seconde espèce homogène.

3. Si  $f(x) \neq 0$  elle est dite équation intégrale de Fredholm non linéaire de seconde espèce non homogène.
4. On appelle une équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèce une équation de la forme :

$$\phi(x) - \lambda \int_a^b k(x, t) \phi(t) dt = f(x).$$

5. Si  $f(x) = 0$  l'équation

$$\phi(x) = \lambda \int_a^b k(x, t) \phi(t) dt.$$

est dite équation intégrale de Fredholm linéaire de seconde espèce homogène.

6. Si  $f(x) \neq 0$  elle est dite équation intégrale de Fredholm linéaire de seconde espèce non homogène.
7. Une équation de la forme :

$$\int_a^b k(x, t) \phi(t) dt = f(x).$$

est appelée équation intégrale linéaire de Fredholm de première espèce.

## 1.6 Notions de l'analyse fonctionnelle

**Définition 1.6.1.**  $f$  est dite *lipschitzienne* si

$$\exists k > 0, \forall x, y \in B, \|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\|.$$

Si  $k < 1$ , alors  $f$  est contractante.

### 1.6.1 Théorème d'Arzela-Ascoli

**Définition 1.6.2.** (Equicontinuité)

Soit  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  deux espaces métriques :  $F \subset \mathcal{C}(X, Y)$  et  $x_0 \in X$

On dit que  $F$  est équicontinue en  $x_0$ , si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X,$$

$$d(x_0, x) < \delta \Rightarrow \forall f \in F : d_Y(f(x_0), f(x)) < \epsilon$$

On dit que  $F$  est équicontinue sur  $X$ . S'il est équicontinue en tout points de  $X$ .

**Théorème 1.6.1. Théorème d'Arzela-Ascoli**

soit  $(E, d)$  un espace métrique compact,  $(F, \delta)$  un espace métrique complet.

Une partie  $A$  de  $\mathcal{C}(E, F)$  est relativement compacte si et seulement si :

1.  $A$  est équicontinue, c'est-à-dire :

$$\forall x \in E, \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall f \in A, \forall y \in E, \\ (d(x, y) \leq \eta) \Rightarrow (\delta(f(x), f(y)) \leq \epsilon).$$

2. Pour tout  $x \in E$ , l'ensemble  $A(x) = \{f(x), f \in A\}$  est relativement compact.

**Corollaire 1.6.1.** Soit  $K \subset \mathbb{R}^n$  compact, on munissons  $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$  par la norme :

$$\|f\|_\infty = \sup_K |f(x)|$$

Soit  $F$  une partie équicontinue de  $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$  tel que l'ensemble  $\{f(x), f \in F\}$  soit borné  $\forall x \in K$ . Alors  $F$  est relativement compact dans  $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$

**Théorème 1.6.2. Alternative de Fredholm**

soit  $X$  un espace de Banach, et soit  $K : X \rightarrow X$  opérateur compact. Alors l'équation  $(\lambda - K)u = f, \lambda \neq 0$  a une unique solution  $u \in X$  si et seulement si : l'équation homogène  $(\lambda - K)v = 0$  a seulement une solution triviale  $v = 0$ . Dans ce cas,

l'opérateur  $\lambda - K : X \rightarrow X$  a un inverse borné  $(\lambda - K)^{-1}$ .

## 1.7 Théorème de Neumann

**Théorème 1.7.1.** *soient  $E$  un espace de Banach, et  $L : E \rightarrow E$  un opérateur linéaire et continu. Si*

$$\|L\| = \sup_{\|x\|=1} \|Lx\| < 1$$

*alors  $(id_E - L)$  est inversible. Son inverse est donné par la somme de la série absolument convergente :*

$$(id_E - L)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} L^k$$

*De plus*

$$\|(id_E - L)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|L\|}$$

**Preuve 1.7.1.** *La série  $\sum_{k=0}^{\infty} L^k$  est absolument convergente. En effet,*

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} L^k \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|L^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|L\|^k.$$

*Alors cette série est majoré par une série géométrique de raison  $\|L\| < 1$  donc convergente, et sa somme est finie.*

*Maintenant, on va montrer la majoration, on a,*

$$\begin{aligned} (id_E - L) \sum_{k=0}^p L^k &= \sum_{k=0}^p L^k - \sum_{k=0}^{p+1} L^k \\ &= id_E - L^{p+1}. \end{aligned}$$

*lorsque  $p \rightarrow \infty$  on a,  $L^{p+1} \rightarrow 0$  puisque la série converge.*

*On passant à la limite, on obtient :*

$$(id_E - L) \sum_{k=0}^{\infty} L^k = id_E$$

Autrement dit :  $(id_E - L)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} L^k$ .

$$\|(id_E - L)^{-1}\| = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} L^k \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|L^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|L\|^k.$$

Cette dernière série est une série géométrique convergente de raison

$$\|L\| < 1$$

Alors,

$$\|(id_E - L)^{-1}\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|L\|^k = \frac{1}{1 - \|L\|}$$

# Chapitre 2

## Méthodes pour des équations non linéaires

Les méthodes présentées ci-après substituent à l'équation non linéaire une suite d'équations linéaires dont les solutions respectives constituent une suite d'approximations de l'une des solutions du problème non linéaire.

### 2.1 La méthode de Newton-Kantorovich

La motivation géométrique de la méthode de Newton pour trouver une racine simple  $\xi$  d'une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est la suivante : On cherche la racine de l'équation linéarisée par passage à la droite tangente et on itère le processus. Sa généralisation au cas des fonctionnelles définies dans des espaces plus généraux est due à Kantorovich. Soit  $B$  un espace vectoriel dont la norme est notée  $\|\cdot\|$  et soit  $\Omega$  un ouvert dans cet espace. Soit  $F : \Omega \rightarrow \mathcal{B}$  une fonctionnelle différentiable au voisinage d'une solution  $\xi$  du problème.

Trouver  $\xi \in \Omega$  tel que  $F(\xi) = 0$

La méthode de Méthode de **Newton-Kantorovich** s'écrit :

$$\begin{cases} x_0 \text{ choisi au voisinage de } \xi, \\ x_{k+1} = x_k - (F'(x_k))^{-1}F(x_k). \end{cases} \quad (2.1)$$

pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , et pourvu que  $F'(x_k)^{-1}$  existe. On désignera par  $\Omega_r(x)$  la boule ouverte de rayon  $r$  et de centre  $x$ .

**Théorème 2.1.1.** Soit  $\xi \in \Omega$  un zéro de  $F$ . Supposons que :

(H1)  $F'(\xi)$  est inversible et  $\|F'(\xi)^{-1}\| \leq \mu$ .

(H2) il existe  $r > 0$  tel que :  $F'$  est  $l$ -Lipschitzienne sur  $\Omega_r(x)$ .

Alors il existe  $\rho \in [0, r]$  tel que : pour tout  $x_0 \in \Omega_\rho(\xi)$ , la suite de la méthode de  $N - K$  est définie et converge vers  $\xi$ .

De plus, il existe une constante  $C > 0$  tel que :

$$\|x_{k+1} - \xi\| \leq C \|x_k - \xi\|^2$$

**Preuve 2.1.1.** soit  $F : \Omega \rightarrow \mathcal{B}$  un espace vectoriel normé complexe de dimension  $n$ .

Premièrement, on démontre que la suite de la méthode  $N - K$  est définie c-à-d :  $\forall x \in \Omega_r(\xi) : [F'(x)]^{-1}$  existe

$$F'(x) = F'(\xi) + F'(x) - F'(\xi).$$

$$\text{On pose } \rho < \min \left\{ r, \frac{1}{\mu l} \right\}.$$

puis, on montre que  $[I - (F'(\xi))^{-1}(F'(\xi) - F'(x))]^{-1}$  existe.

En utilisant le théorème de Neumann, il suffit de démontrer que :  $\|F'(\xi)^{-1}(F'(\xi) - F'(x))\| < 1$ .

En effet,

$$\begin{aligned} \|F'(\xi)^{-1}(F'(\xi) - F'(x))\| &\leq \|F'(\xi)^{-1}\| \|F'(\xi) - F'(x)\| \\ &\leq \mu.l. \|\xi - x\| \\ &< \mu.l.\rho \\ &< 1. \end{aligned}$$

On conclue que  $F'(x)^{-1}$  existe :

$$F'(x)^{-1} = \left[ I - (F'(\xi))^{-1}(F'(\xi) - F'(x)) \right]^{-1} F'(\xi)^{-1}.$$

En plus, est uniformément borné sur  $\Omega_r(\xi)$ .

$$\|F'(x)^{-1}\| \leq \frac{\mu}{1 - \mu l \rho}.$$

Deuxièmement, on va montrer la convergence de la suite de  $N - K$  : puisque :

$$x_{k+1} - \xi = x_k - \xi - F'(x_k)^{-1} [F(x_k) - F(\xi)].$$

Et on a par développement de Taylor :

$$F(x_k) - F(\xi) = F'(\xi)(x_k - \xi) + O((x_k - \xi)^2)$$

Alors,

$$x_{k+1} - \xi = x_k - \xi - F'(x_k)^{-1} F'(\xi)(x_k - \xi) + O((x_k - \xi)^2).$$

Et puisque,

$$\begin{aligned} F'(x_k)^{-1} F'(\xi) &= F'(x_k)^{-1} [F'(x_k) + F'(\xi) - F'(x_k)] \\ &= I + F'(x_k) [F'(\xi) - F'(x_k)]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{k+1} - \xi &= (x_k - \xi) - [I + F'(x_k)^{-1} (F'(\xi) - F'(x_k))] (x_k - \xi) \\ &\quad - F'(x_k)^{-1} \theta((x_k - \xi)^2). \\ &= (x_k - \xi) - (x_k - \xi) - F'(x_k)^{-1} [F'(\xi) - F'(x_k)] (x_k - \xi) \\ &\quad - F'(x_k)^{-1} \theta((x_k - \xi)^2). \\ &= -F'(x_k)^{-1} [F'(\xi) - F'(x_k)] (x_k - \xi) - F'(x_k)^{-1} \theta((x_k - \xi)^2). \\ &= F'(x_k)^{-1} [F'(x_k) - F'(\xi)] (x_k - \xi) - F'(x_k)^{-1} \theta((x_k - \xi)^2). \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - \xi\| &\leq \|F'(x_k)^{-1}\| \|F'(x_k) - F'(\xi)\| \|x_k - \xi\| + C_1 \|x_k - \xi\|^2. \\ &\leq \frac{\mu}{1 - \mu L \rho} L \|x_k - \xi\|^2 + C_1 \|x_k - \xi\|^2. \\ &\leq \left( \frac{\mu l}{1 - \mu l \rho} + C_1 \right) \|x_k - \xi\|^2. \end{aligned}$$

Donc, il existe  $C_2$  tel que :

$$\|x_{k+1} - \xi\| \leq C_2 \|x_k - \xi\|^2$$

c-à-d : la suite de  $N - K$  converge quadratiquement vers  $\xi$ .

## 2.2 Méthode de la pente fixe :

Le coût de la méthode de Newton-Kantorovich peut s'avérer parfois beaucoup trop élevé. Il se peut que la matrice jacobienne  $F'(x_k)$  soit trop difficile à calculer ou que le système linéaire qui est associé au calcul de

$$\forall k \geq 1, y_k := F'(x_k)^{-1} F(x_k),$$

soit mal conditionné. Dans ce cas, il peut être utile de considérer **la méthode de la pente fixe** qui ne calcule qu'une dérivée et n'implique que des systèmes linéaires dont la matrice des coefficients est la même à toutes les itérations :

$$\begin{cases} x_0 \text{ choisi au voisinage de } \xi, \\ x_{k+1} := x_k - F'(x_0)^{-1} F(x_k). \end{cases} \quad (2.2)$$

pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , et pourvu que  $F'(x_0)^{-1}$  existe.

**Théorème 2.2.1.** *Soit  $\xi \in \Omega$  tel que :  $F(\xi) = 0$ , il existe  $\rho > 0$  tel que :*

(H1)  *$F$  est Fréchet dérivable sur  $\Omega_\rho(\xi) \subset \Omega$ .*

(H2) *il existe  $x_0 \in \Omega_\rho(\xi)$  tel que :  $\sup_{x \in \Omega_\rho(\xi)} \|F'(x_0) - F'(x)\| < \frac{1}{\|F'(x_0)\|}$ .*

(H3)  *$F'(\xi)$  est inversible et  $\|F'(\xi)\| \leq \mu$ .*

Alors, la suite de la méthode de la pente fixe est définie et il existe  $C \in ]0, 1[$  tel que :

$$\|x_{k+1} - \xi\| \leq C \|x_k - \xi\|.$$

**Démonstration 2.** *On a :  $x_{k+1} - \xi = x_k - \xi - F'(x_0)^{-1} [F(x_k) - F(\xi)]$ .*

*On va montrer que  $F'(x_0)^{-1}$  existe et borné.*

*En effet,*

$$\begin{aligned} F'(x_0) &= F'(\xi) + F'(x_0) - F'(\xi) \\ &= F'(\xi) [I - F'(\xi)^{-1} (F'(\xi) - F'(x_0))]. \end{aligned}$$

Il suffit de montrer que :  $\|F'(\xi)^{-1} [F'(\xi) - F'(x_0)]\| < 1$

On a,  $\lim_{x_0 \rightarrow \xi} \|F'(x_0) - F'(\xi)\| = 0$ ,

et comme la fonctionnelle  $F$  est fréchet dérivable, il est continu.

Donc, pour  $x_0$  assez proche de  $\xi$  on a :

$$\|F'(x_0) - F'(\xi)\| < \frac{1}{\mu}$$

D'après le théorème de Neumann,  
 $[I - F'(\xi)^{-1} (F'(\xi) - F'(x_0))]^{-1}$  existe et de plus,

$$\begin{aligned} \left\| [I - F'(\xi)^{-1} (F'(\xi) - F'(x_0))]^{-1} \right\| &\leq \frac{1}{1 - \|F'(\xi)^{-1} (F'(\xi) - F'(x_0))\|} \\ &\leq \frac{1}{1 - \frac{\mu}{\|F'(x_0)\|}} \\ &= \frac{\|F'(x_0)\|}{\|F'(x_0)\| - \mu}. \end{aligned}$$

Alors,  $F'(x_0)^{-1}$  existe et

$$[F'(x_0)]^{-1} = [I - F'(\xi)^{-1} (F'(\xi) - F'(x_0))]^{-1} F'(\xi)^{-1}.$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} \left\| [F'(x_0)]^{-1} \right\| &\leq \left\| [I - F'(\xi)^{-1} (F'(\xi) - F'(x_0))]^{-1} \right\| \times \|F'(\xi)^{-1}\| \\ &\leq \frac{\mu \|F'(x_0)\|}{\|F'(x_0)\| - \mu}. \end{aligned}$$

Ensuite, on va montrer qu'il existe  $C \in ]0, 1[$  tel que :

$$\|x_{k+1} - \xi\| \leq C \|x_k - \xi\|$$

On a :  $x_{k+1} - \xi = x_k - \xi - [F'(x_0)]^{-1} [F(x_k) - F(\xi)]$ .

Et par la formule de Taylor avec reste intégrale, on a,

$$F(x_k) - F(\xi) = \int_0^1 F'((1-t)x_k + t\xi)(x_k - \xi) dt.$$

$$\begin{aligned} x_{k+1} - \xi &= x_k - \xi - [F'(x_0)]^{-1} \int_0^1 F'((1-t)x_k + t\xi)(x_k - \xi) dt. \\ &= \int_0^1 [I - F'(x_0)^{-1} F'((1-t)x_k + t\xi)](x_k - \xi) dt. \\ &= \int_0^1 [I - F'(x_0)^{-1} [F'(x_0) + F'((1-t)x_k + t\xi) - F'(x_0)]](x_k - \xi) dt. \\ &= \int_0^1 F'(x_0)^{-1} [F'(x_0) + F'((1-t)x_k + t\xi)](x_k - \xi) dt. \end{aligned}$$

Puisque  $\Omega_\rho(\xi)$  est convexe, pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $(1-t)x_k + t\xi \in \Omega_\rho(\xi)$ .  
alors :

$$\|x_{k+1} - \xi\| \leq \|F'(x_0)^{-1}\| \|x_k - \xi\| \int_0^1 \|F'(x_0) + F'((1-t)x_k + t\xi)\| dt$$

D'après la condition (H2) on peut mettre :

$$\tau := \|F'(x_0)^{-1}\| \sup_{x \in \Omega_\rho(\xi)} \|F'(x_0) + F'(x)\| < 1$$

Donc, on obtient,

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - \xi\| &\leq \|F'(x_0)^{-1}\| \sup_{x \in \Omega_\rho(\xi)} \|F'(x_0) + F'(x)\| \|x_k - \xi\|. \\ &\leq \tau \|x_k - \xi\|. \end{aligned}$$

## 2.3 Dérivabilité de l'opérateur intégral

Dans cette section on va étudier la dérivabilité de l'opérateur intégral et calculer sa dérivée pour l'utiliser dans notre travail.

### 2.3.1 Etude dans l'espace $L^p(0, 1)$

Considérons l'opérateur intégral  $F$  :

$$F[x](s) = \int_0^1 k(s, t, x(t)) dt \quad (2.3)$$

$$F : L^p(0, 1) \rightarrow L^q(0, 1).$$

Prouvons que  $F$  est dérivable et calculons  $F'$ .

**Théorème 2.3.1.** *supposons que la fonction  $k(s, t, u)$  est continue et bicontinuellement dérivable par rapport à  $s, t$  et  $u$  pour  $0 \leq s, t \leq 1, -\infty < u < +\infty$ , et que pour ces valeurs de  $s, t, u$  :*

$$\left| \frac{\partial^2 k}{\partial u^2}(s, t, u) \right| \leq M |u|^{p-2} + N. \quad (2.4)$$

*Si  $p \geq 2$ , alors (1) est un opérateur différentiable de  $L^p(0, 1)$  dans  $L^q(0, 1)$ , ( $1 \leq q \leq +\infty$ ).*

*Ceci étant ;  $F'(x_0) = U$  où  $U$  est définie par la formule :*

$$z = U(x), \quad z(s) = \int_0^1 \frac{\partial k}{\partial u}(s, t, x_0(t)) x(t) dt.$$

**Preuve 2.3.1.** *Assurons-nous tout d'abord que (2.3) est un opérateur de  $L^p(0, 1)$  dans  $L^q(0, 1)$ , ( $q < \infty$ ).*

*On observera à cet effet que la fonction  $k(s, t, x(t))$  est mesurable, puisque  $k(s, t, x(t))$  est continue. La formule de Taylor nous donne*

$$k(s, t, x(t)) = k(s, t, 0) + \frac{\partial k}{\partial u}(s, t, 0) x(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 k}{\partial u^2}(s, t, \theta x(t)) x^2(t),$$

$0 < \theta < 1$

*Evaluons l'intégrale de chaque terme du second membre :*

$$\left| \int_0^1 k(s, t, 0) dt \right| \leq \max_{s,t} |k(s, t, 0)| = A_1.$$

$$\left| \int_0^1 \frac{\partial k}{\partial u}(s, t, 0) x(t) dt \right| \leq \max_{s,t} \left| \frac{\partial k}{\partial u}(s, t, 0) \right| \int_0^1 |x(t)| dt \leq A_2 \|x\|_{L^p}.$$

Servons nous de (2.4) pour majorer le troisième terme :

$$\left| \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\partial^2 k}{\partial u^2}(s, t, \theta x(t)) x^2(t) dt \right| \leq \frac{1}{2} \int_0^1 [M |x(t)|^{p-2} + N] |x(t)|^2 dt$$

$$\leq A_3 \|x\|_{L^p}^p$$

Il s'ensuit que  $F(x)$  a un sens et en outre :

$$|F[x](s)| \leq A_1 + A_2 \|x\|_{L^p} + A_3 \|x\|_{L^p}^p. \quad (s \in [0, 1])$$

de sorte que  $F(x) \in L^\infty(0, 1)$ .

Prouvons maintenant que  $F$  est dérivable et que  $F'(x_0) = U$ ,  
supposons que :

$$z = U(x) \text{ et que : } z_\tau = \frac{F(x_0 + \tau x) - F(x_0)}{\tau}, \text{ on a :}$$

$$|z_\tau(s) - z(s)| = \left| \int_0^1 \left[ \frac{k(s, t, x_0(t) + \tau x(t)) - k(s, t, x_0(t))}{\tau} - \frac{\partial k}{\partial u}(s, t, x_0(t)) x(t) \right] dt \right|. \quad (2.5)$$

Comme, d'après la formule de Taylor :

$$k(s, t, x_0(t) + \tau x(t)) = k(s, t, x_0(t)) + \tau \frac{\partial k}{\partial u}(s, t, x_0(t)) x(t)$$

$$+ \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 k}{\partial u^2}(s, t, x_0(t) + \theta x(t)) x^2(t); \quad (0 < \theta < 1).$$

On peut mettre (2.5) sous la forme :

$$\begin{aligned}
|z_\tau(s) - z(s)| &= \frac{|\tau|}{2} \left| \int_0^1 \frac{\partial^2 k}{\partial u^2}(s, t, x_0(t) + \theta\tau x(t)) dt \right|. \\
&\leq \frac{1}{2} \max_{s,t} \left| \frac{\partial^2 k}{\partial u^2}(s, t, x_0(t) + \theta\tau x(t)) \right| |\tau|. \\
&\leq A_4 |\tau|, (0 \leq s \leq 1).
\end{aligned}$$

Donc :

$z_\tau$  converge uniformément vers  $z$  quand  $\tau \rightarrow 0$  en  $x$ .  $\|x\| = 1$ .

### 2.3.2 Etude dans l'espace $C^0[0, 1]$

Considérons l'opérateur (2.3)

$F : C^0([0, 1]) \rightarrow C^0([0, 1])$  soit  $x_0 \in C^0[0, 1]$  un élément fixe.

Désignons par  $\Omega$  la boule dans  $C^0([0, 1])$  de centre  $x_0$  et de rayon  $r$ , et par  $G$  l'ensemble des points  $(s, t, u)$  de l'espace à trois dimensions, défini par les inégalités  $0 \leq s, t \leq 1, |u - x_0(t)| \leq r$ .

**Théorème 2.3.2.** *Supposons que les fonctions  $k(s, t, u)$ ,  $\frac{\partial k}{\partial u}(s, t, u)$  et  $\frac{\partial^2 k}{\partial u^2}(s, t, u)$  sont définies et continues dans  $G$ .*

*Alors, l'opérateur  $P$  défini par (2.3) envoie l'ensemble  $\Omega$  dans  $C^0([0, 1])$  soit 2 fois dérivable en chaque point intérieur  $\bar{x} \in \Omega$ ,*

*et  $P'(\bar{x}) = U$  est définie par :*

$$z = U(x); z(s) = \int_0^1 \frac{\partial k}{\partial u}(s, t, \bar{x}(t)) x(t) dt.$$

**Démonstration 3.** *Prenons un  $x$  de  $\Omega$ .*

*La continuité de la fonction  $F(x)$  définie par (2.3), résulte directement de propriétés élémentaires de la théorie des intégrales dépendant d'un paramètre. Donc,  $F \in C^0[0, 1]$ .*

*Prouvons maintenant que  $F$  est dérivable sur  $\Omega$  et  $F'(\bar{x}) = U$ .*

*Supposons que  $\bar{x} \in \Omega$  et  $x \in C^0[0, 1]$ .*

Considérons l'élément  $z_\tau = \frac{P(\bar{x} + \tau x) - P(\bar{x})}{\tau} - U(x)$ .

L'intégrant tend vers zéro avec  $\tau$  et est uniformément borné en  $x$  ( $\|x\| = 1$ ) et en  $s \in [0, 1]$  (on établit ce fait à l'aide de la formule des accroissements finis).

Donc,

$z_\tau \rightarrow 0$  uniformément en  $x \in \mathcal{C}^0[0, 1]$ ,  $\|x\| = 1$ .

ceci prouve la dérivabilité de  $F$  en  $\bar{x}$  et de plus :  
 $F'(\bar{x}) = U$ .

# Chapitre 3

## Applications

### 3.1 Equation intégral non linéaire

On considère l'équation intégrale non linéaire de Fredholm suivante :

$$\lambda u(t) = \int_0^1 k(t, s, u(s)) ds + f(t)$$

et de plus l'espace  $X = \mathcal{C}^0([0, 1])$ .  
Soit  $k \in \mathcal{C}^0([0, 1]^2 \times \mathbb{R})$  est différentiable par rapport à la troisième variable.  
Introduisons l'opérateur  $F : X \rightarrow X$  à travers la formule :

$$F(u)(t) = \lambda u(t) - \int_0^1 k(t, s, u(s)) ds - f(t), t \in [0, 1]. \quad (3.1)$$

cet équation intégrale peut s'écrire sous la forme :  $F(u) = 0$ .  
La méthode de Newton pour ce problème est :

$$u_{k+1} = u_k - [F'(u_k)]^{-1} F(u_k).$$

qui est équivalent à :  $F'(u_k)(u_{k+1} - u_k) = -F(u_k)$ .

Calculons la dérivée de  $F$  :

$$\begin{aligned}
 F'(u)(v)(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [F(u + hv)(t) - F(u)(t)], \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[ \lambda(u + hv)(t) - \int_0^1 k(t, s, u(s) + hv(s)) ds - \lambda u(t) \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^1 k(t, s, u(s)) ds \right], \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[ \lambda hv(t) - \int_0^1 [k(t, s, u(s) + hv(s)) - k(t, s, u(s))] ds \right]. \\
 &= \lambda v(t) - \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{k(t, s, u(s) + hv(s)) - k(t, s, u(s))}{h} ds, \\
 &= \lambda v(t) - \int_0^1 \frac{\partial k}{\partial u}(t, s, u(s)) v(s) ds.
 \end{aligned}$$

On a,

$$u_{k+1} = u_k - [F'(u_k)]^{-1} F(u_k) = u_k - y_k,$$

où,  $y_k$  est une approximation de  $[F'(u_k)]^{-1} F(u_k)$ .

Alors :  $F'(u_k) y_k = F(u_k)$ .

Ce qui équivaut à :

$$\lambda y_k(t) - \int_0^1 \frac{\partial k}{\partial u}(t, s, u(s)) y_k(s) ds = \lambda u_k(t) - \int_0^1 k(t, s, u(s)) ds - f(t).$$

Cette dernière équation on peut la voir comme une équation de Fredholm linéaire de deuxième espèce non homogène.

### 3.2 La méthode de Nyström :

La méthode de Nyström a été introduite pour traiter les approximations basé sur l'intégration numérique de l'opérateur intégrale dans l'équation :

$$\lambda v(t) - \int_0^1 h(t, s) v(s) ds = g(t), t \in [0, 1] \quad (3.2)$$

La solution résultante se trouve d'abord au niveau de l'ensemble des points nodaux en quadrature, et puis elle est étendue à tous les points de l'intervalle  $[0, 1]$  par le biais d'une formule d'interpolation spéciale et généralement assez précise.

La méthode numérique est beaucoup plus simple à mettre en oeuvre sur un ordinateur. Mais l'analyse des erreurs est plus compliquée que pour les méthodes de projection.

### 3.2.1 La méthode de Nyström pour les équations intégrales à noyau continu :

Soit le schéma d'intégration numérique suivant :

$$\int_0^1 g(y) dy \approx \sum_{j=1}^n w_j g(x_j), g \in \mathcal{C}^0([0, 1]). \quad (3.3)$$

où, les poids  $w_j$  sont positifs, et  $\{x_j\}_0^n$  sont les noeuds tel que :

$h = \frac{1}{n}$ ,  $x_j = 0 : h : 1$  qui doivent vérifier :

$$\forall g \in \mathcal{C}^0([a, b]), \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_0^1 g(y) dy - \sum_{j=1}^n w_j g(x_j) \right| = 0.$$

Nous supposons que pour tout  $g \in \mathcal{C}([0, 1])$  les intégrales numériques convergent vers la véritable intégrale quand  $n \rightarrow +\infty$ . Cela implique :

$$C_I \equiv \sup_{n \geq 1} \sum_{j=1}^n |w_{n,j}| < \infty. \quad (3.4)$$

Soit  $h(t, s)$  continu pour tout  $t, s \in [0, 1]$  où  $[0, 1]$  est un ensemble fermé et borné dans  $\mathbb{R}$ . Habituellement, nous voulons que  $h(t, s)$  soit plusieurs fois continuellement différentiable.

Utilisons le schéma de quadrature ci-dessus pour approximer l'intégrale (3.2), nous obtenons une nouvelle équation :

$$\lambda v_n(t) - \sum_{j=1}^n w_j h(t, t_j) v_n(t_j) = g(t), t \in [0, 1]. \quad (3.5)$$

Ensuite, nous écrivons ceci comme une équation exacte avec une nouvelle fonction inconnue  $v_n(t)$ .

Pour trouver la solution aux noeuds, on laisse  $t$  parcourir la quadrature (les points de noeud  $t_i$ ).

$$\lambda v_n(t_i) - \sum_{j=1}^n w_j h(t_i, t_j) v_n(t_j) = g(t_i), i = 1, \dots, n, \quad (3.6)$$

qui est un système linéaire d'ordre  $n$ . L'inconnu est un vecteur  $v_n \equiv [v_n(t_1), \dots, v_n(t_n)]^T$ .

Chaque solution  $v_n(t)$  de (3.5) fournit une solution à (3.6) simplement on évaluant  $v_n(t)$  aux points nodaux et l'inverse est également vrai. Pour chaque solution  $z \equiv [z_1, \dots, z_n]^T$  de (3.6), il existe une solution unique de (3.5) qui correspond au  $z$  aux points nodaux. Si on résout (3.5) alors  $v_n(t)$  est déterminé par ses valeurs aux points nodaux  $\{t_j\}$ .

Par conséquent, la solution  $z$  de (3.6) est donnée par :

$$z(t) = \frac{1}{\lambda} \left[ g(t) + \sum_{j=1}^n w_j h(t, t_j) z_j \right], t \in [0, 1]. \quad (3.7)$$

Voici la formule d'interpolation. En fait :

$$z(t_i) = \frac{1}{\lambda} \left[ g(t_i) + \sum_{j=1}^n w_j h(t_i, t_j) z_j \right] = z_i, \text{ pour } i = 1, \dots, n.$$

La dernière étape découle de  $z$  étant une solution de (3.6). En utilisant ce résultat d'interpolation de (3.7), nous avons que  $z(t)$  résout (3.5). L'unicité de la relation entre  $z$  et  $z(t)$  de la solution  $v_n(t)$  de (3.5) étant complètement déterminé par leurs valeurs aux noeuds  $\{t_i\}$ . La formule (3.7) s'appelle la formule d'interpolation de Nyström.

### 3.2.2 Propriétés et analyse d'erreur de la méthode de Nyström :

La méthode de Nyström est mise en oeuvre avec le système linéaire de dimension fini : (l'équation (3.6)) ; mais l'analyse de l'erreur est effectuée à

l'aide de l'équation fonctionnelle (3.5).

On écrit l'équation intégrale (3.2) sous la forme abstraite

$$(\lambda - K)v = g$$

et on écrit l'équation intégrale numérique (3.5) comme suit :

$$(\lambda - K_n)v_n = g$$

.

Nous considérons l'espace de Banach  $X = \mathcal{C}^0([0, 1])$  pour notre analyse d'erreur,

$$K_n v(t) = \sum_{j=1}^n w_j h(t, t_j) v(t_j), t \in [0, 1], v \in \mathcal{C}^0[0, 1],$$

qui est un opérateur linéaire borné définie de  $\mathcal{C}^0([0, 1])$  dans  $\mathcal{C}^0([0, 1])$  avec :

$$\|K_n\| = \max_{t \in [0, 1]} \sum_{j=1}^n |w_j h(t, t_j)| \quad (3.8)$$

L'analyse d'erreur des méthodes de projection dépend de la démonstration de  $\|K - K_n\|$  converge vers zéro pour  $n$  assez grand avec  $K_n = \pi_n K$  est l'approximation de l'opérateur intégrale  $K$ .

**Lemme 3.2.1.** *Soit  $D$  un ensemble fermé borné dans  $\mathbb{R}^d$ , et soit  $h(x, y)$  continue pour tout  $x, y \in D$ . Le schéma de quadrature (3.3) converge pour toute fonction continue sur  $D$ . On définit :*

$$e_n(x, y) = \int_D h(x, v) h(v, y) dv - \sum_{j=1}^n w_j h(x, x_j) h(x_j, y); x, y \in D, n \geq 1. \quad (3.9)$$

*L'erreur d'intégration numérique pour l'intégrant  $h(x, \cdot) h(\cdot, y)$ , puis pour  $z \in \mathcal{C}^0(D)$*

$$(K - K_n) Kz(x) = \int_D e_n(x, y) z(y) dy \quad (3.10)$$

$$(K - K_n) K_n z(x) = \sum_{j=1}^n w_j e_n(x, x_j) z(x_j) \quad (3.11)$$

En outre,

$$\|(K - K_n) K\| = \max_{x \in D} \int_D |e_n(x, y)| dy \quad (3.12)$$

$$\|(K - K_n) K_n\| = \max_{x \in D} \sum_{j=1}^n |w_j e_n(x, x_j)| \quad (3.13)$$

Finalement, l'erreur d'intégration numérique  $e_n$  converge vers zéro uniformément sur  $D$ .

$$C_E = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x, y \in D} |e_n(x, y)| = 0 \quad (3.14)$$

Et ainsi :

$$\|(K - K_n) K\|, \|(K - K_n) K_n\| \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0. \quad (3.15)$$

**Preuve 3.2.1.** La preuve de (3.10) où,

$$Kz(x) = \int_0^1 h(x, s) z(s) ds; \quad x \in [0, 1], \quad z \in C^0([0, 1]).$$

$$K_n z(x) = \sum_{j=1}^n w_j h(x, x_j) z(x_j); \quad x \in [0, 1], \quad z \in C^0[0, 1].$$

On a :

$$\begin{aligned}
(K - K_n)Kz(x) &= KK[z(x)] - K_nK[z(x)]. \\
&= \int_0^1 h(x, s) K[z(s)] ds - \sum_{j=1}^n w_j h(x, x_j) K[z(x_j)]. \\
&= \int_0^1 h(x, s) \int_0^1 h(s, y) z(y) dy ds \\
&\quad - \sum_{j=1}^n w_j h(x, x_j) \int_0^1 h(x_j, s) z(s) ds. \\
&= \int_0^1 h(x, s) \int_0^1 h(s, y) z(y) ds dy \\
&\quad - \sum_0^1 w_j h(x, x_j) \int_0^1 h(x_j, y) z(y) dy. \\
&= \int_0^1 \left[ \int_0^1 h(x, s) h(s, y) ds \right. \\
&\quad \left. - \sum_{j=1}^n w_j h(x, x_j) h(x_j, y) \right] z(y) dy. \\
&= \int_0^1 e_n(x, y) z(y) dy.
\end{aligned}$$

La preuve de (3.11) :

$$\begin{aligned}
(K - K_n) K_n z(x) &= K K_n z(x) - K_n K_n z(x) . \\
&= \int_0^1 h(x, s) K_n z(s) ds \\
&\quad - \sum_{j=1}^n w_j h(x, x_j) K_n z(x_j) . \\
&= \int_0^1 h(x, s) \sum_{j=1}^n w_j h(s, x_j) z(x_j) ds \\
&\quad - \sum_{j=1}^n w_j h(x, x_j) \sum_{j=1}^n w_j h(x_j, x_j) z(x_j) . \\
&= \sum_{j=1}^n w_j \left[ \int_0^1 h(x, s) h(s, x_j) ds \right. \\
&\quad \left. - \sum_{j=1}^n w_j h(x, x_j) h(x_j, x_j) \right] z(x_j) . \\
&= \sum_{j=1}^n w_j e_n(x, x_j) z(x_j) .
\end{aligned}$$

On a montré que  $:(K - K_n) K z(x) = \int_0^1 e_n(x, y) z(y) dy,$

et comme  $(K - K_n) K$  est un opérateur sur  $C^0([0, 1])$ . Alors :

$$\|(K - K_n) K\| = \max_{x \in [0, 1]} \left| \int_0^1 e_n(x, y) dy \right| = \max_{x \in [0, 1]} \int_0^1 |e_n(x, y)| dy. \quad (3.16)$$

De même on a,

$$(K - K_n) K_n z(x) = \sum_{j=1}^n w_j e_n(x, x_j) z(x_j)$$

Alors,

$$\begin{aligned} \|(K - K_n) K_n\| &= \max_{x \in [0,1]} \left| \sum_{j=1}^n w_j e_n(x, x_j) \right| \\ &= \max_{x \in [0,1]} \sum_{j=1}^n |w_j e_n(x, x_j)|. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Pour prouver la formule (3-14), on utilise le Théorème d'Arzela-Ascoli.

Commençons par montrer que la famille  $\{e_n(x, y); n \geq 1\}$  est une famille uniformément bornée et équicontinue convergente vers Zéro sur l'ensemble borné fermé  $D$ ; puis  $e_n(x, y) \rightarrow 0$  uniformément sur  $D$ .

En supposant que la formule de quadrature (3-3) converge pour toutes les fonctions continues  $g$  sur  $D$ , nous avons pour tout  $x, y \in D$   $e_n(x, y) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ . En effet :

$$\begin{aligned} |e_n(x, y)| &= \left| \int_D h(x, v) h(v, y) dv - \sum_{j=1}^n w_j h(x, x_j) h(x_j, y) \right| \\ &\leq (C_D + C_I) C_K^2 \end{aligned}$$

Où,  $C_D = \int_D dy$ ,  $C_K = \max_{x, y \in D} |h(x, y)|$  et  $C_I \equiv \sup_{n \geq 1} \sum_{j=1}^n |w_{n,j}|$

**Pour l'équicontinuité :**

$$|e_n(x, y) - e_n(\xi, n)| \leq |e_n(x, y) - e_n(\xi, y)| + |e_n(\xi, y) - e_n(\xi, n)|.$$

On a :

$$|e_n(x, y) - e_n(\xi, y)| \leq C_K (C_D + C_I) \max_{y \in [0,1]} |h(x, y) - h(\xi, y)|.$$

$$|e_n(\xi, y) - e_n(\xi, n)| \leq C_K (C_D + C_I) \max_{x \in [0,1]} |h(x, y) - h(x, n)|.$$

Et par la continuité uniforme de  $h(x, y)$  sur l'intervalle fermé et borné  $[0, 1]$  cela montre l'équicontinuité de la famille  $\{e_n(x, y)\}$  ceci complète également la preuve de (3.14).

Pour la preuve de (3.15) ; nous remarquons que :

$$\|(K - K_n) K\| \leq C_D \max_{x,y \in [0,1]} |e_n(x, y)|.$$

$$\|(K - K_n) k_n\| \leq C_I \max_{x,y \in [0,1]} |e_n(x, y)|.$$

Et on a par (3.14) que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |e_n(x, y)| = 0$ ,

et par (3.12) et (3.13), on obtient :

$$\|(K - K_n) K\| \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0.$$

$$\|(K - K_n) K_n\| \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Pour réaliser une analyse d'erreur de la méthode de Nyström, nous avons besoin du théorème de perturbation suivant :

**Théorème 3.2.1.** Soient  $X$  un espace de Banach,  $S, T$  des opérateurs bornés définis de  $X$  dans  $X$ , et soit  $S$  compact. Pour  $\lambda \neq 0$  supposons que  $\lambda - T : X \rightarrow X$   $(\lambda - T)^{-1}$  existe et borné de  $X$  dans  $X$ .

Enfin, supposons que :

$$\|(T - S) S\| < \frac{|\lambda|}{\|(\lambda - T)^{-1}\|} \quad (3.18)$$

puis,  $(\lambda - S)^{-1}$  existe et borné de  $X$  dans  $X$ , avec

$$\|(\lambda - S)^{-1}\| \leq \frac{1 + \|(\lambda - T)^{-1}\| \|S\|}{|\lambda| - \|(\lambda - T)^{-1}\| \|(T - S) S\|} \quad (3.19)$$

Si  $(\lambda - T) u = f$  et  $(\lambda - S) z = f$ , alors,

$$\|u - z\| \leq \|(\lambda - S)^{-1}\| \|Tu - Su\|. \quad (3.20)$$

**Preuve 3.2.2.** *Considérons que  $(\lambda - S)^{-1}$  existe, et satisfait l'identité suivante :*

$$(\lambda - S)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \{I + (\lambda - S)^{-1} S\}. \quad (3.21)$$

*Sans aucune motivation à ce stade, considérons l'approximation :*

$$(\lambda - S)^{-1} \approx \frac{1}{\lambda} \{I + (\lambda - T)^{-1} S\} \quad (3.22)$$

*Pour vérifier cette approximation, calculons :*

$$\frac{1}{\lambda} \{I + (\lambda - T)^{-1} S\} (\lambda - S) = \left\{ I + \frac{1}{\lambda} (\lambda - T)^{-1} (T - S) S \right\}. \quad (3.23)$$

*Le coté droit est inversible par le théorème des séries géométriques (théorème de Neumann) car (3.18) implique :*

$$\frac{1}{\lambda} \|(\lambda - T)^{-1}\| \|(T - S) S\| < 1$$

*De plus, ce théorème implique :*

$$\left\| [\lambda + (\lambda - T)^{-1} (T - S) S]^{-1} \right\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|(\lambda - T)^{-1}\| \|(T - S) S\|} \quad (3.24)$$

*Puisque le coté droit de (3.23) est inversible, le coté gauche est également inversible.*

*Puisque  $S$  est compact, le théorème Alternative de Fredholm implique que  $(\lambda - S)^{-1}$  existe et borné :*

*En particulier,*

$$(\lambda - S)^{-1} = [\lambda + (\lambda - T)^{-1} (T - S) S]^{-1} \{I + (\lambda - T)^{-1} S\} \quad (3.25)$$

*alors la formule (3 - 19) de majoration de  $\|(\lambda - S)^{-1}\|$  se découle directement par la formule (3 - 24).*

Pour prouver la formule (3.20) de l'erreur, on réécrit  $(\lambda - T)u = f$  comme  $(\lambda - S)u = f + (T - S)u$ . On soustrait  $(\lambda - S)z = f$  pour obtenir :

$$(\lambda - S)(u - z) = (T - S)u. \quad (3.26)$$

$$u - z = (\lambda - S)^{-1}(T - S)u. \quad (3.27)$$

Alors :  $\|u - z\| \leq \|(\lambda - S)^{-1}\| \|(T - S)u\|$   
ce qui prouve (3.20)

En utilisant ce théorème, nous pouvons donner une analyse complète de convergence pour la méthode de Nyström.

**Théorème 3.2.2.** soit  $h(x, y)$  une fonction continue pour tout  $x, y \in [0, 1]$ . supposons que le schéma de quadrature (3.3) converge pour toute fonction continue sur  $[0, 1]$ . De plus, supposons que l'équation intégrale ne peut être résolue que pour  $f \in C^0[0, 1]$ , avec  $\lambda \neq 0$ .

Alors pour tout  $n$  suffisamment grand  $n \geq N$ , l'approximation de l'inverse  $(\lambda - K_n)^{-1}$  existe et uniformément bornée.

$$\|(\lambda - K_n)^{-1}\| \leq \frac{1 + \|(\lambda - K)^{-1}\| \|K_n\|}{|\lambda| - \|(\lambda - K)^{-1}\| \|(K - K_n)K_n\|} \leq C_y, n \geq N. \quad (3.28)$$

avec une constante appropriée  $C_y < \infty$

Pour les équations  $(\lambda - K)u = f$  et  $(\lambda - K_n)u_n = f$ , nous avons :

$$\|u - u_n\|_\infty \leq \|(\lambda - K_n)^{-1}\| \|(K - K_n)u\|_\infty \leq C_y \|(K - K_n)u\|_\infty, n \geq N. \quad (3.29)$$

**Preuve 3.2.3.** la preuve est une application simple du théorème précédent, avec  $S = K_n$ ,  $T = K$ . D'après le lemme précédent nous avons  $\|(K - K_n)K_n\| \rightarrow 0$  et donc (3.18) est satisfaite pour  $n$  suffisamment grand,  $n \geq N$ .

d'après ce qu'ils précèdent :  $\|K_n\| = \max_{t \in [0, 1]} \sum_{j=1}^n |w_j h(t, t_j)|$  et

$$C_I \equiv \sup_{n \geq 1} |w_{n,j}| < \infty$$

on a : la limitation de  $h(x, y)$  sur  $[0, 1]$ ,  $\|K_n\| \leq C_I C_K$ ,  $n \geq 1$ .

Alors :

$$C_y \equiv \sup_{n \geq N} \frac{1 + \|(\lambda - k)^{-1}\| \times \|K_n\|}{|\lambda| - \|(\lambda - k)^{-1}\| \times \|(K - K_n) K_n\|} < \infty. \quad (3.30)$$

Ce qui complète la preuve.

Ce dernier théorème fournit des informations complètes pour l'analyse de la convergence de la méthode de Nyström.

Le terme  $\|(K - K_n) K_n\|$  peut être analysé à partir de (3.12) en analysant l'erreur d'intégration numérique  $e_n(x, y)$  de (3.8).

A partir de  $\|u - u_n\|_\infty \leq C_y \|(K - K_n) u\|_\infty$  la vitesse avec laquelle  $\|u - u_n\|_\infty$  converge vers zéro est borné par celui de l'erreur d'intégration numérique

$$\|(K - K_n) u\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} \left| \int_0^1 h(x, y) u(y) dy - \sum_{j=1}^n w_j h(x, x_j) u(x_j) \right|. \quad (3.31)$$

En fait, l'erreur  $\|u - u_n\|_\infty$  converge vers zéro avec exactement cette vitesse.

On va appliquer (3.26), on obtient :

$$(\lambda - K_n)(u - u_n) = (K - K_n)u. \quad (3.32)$$

$$\|(K - K_n)u\|_\infty \leq \|\lambda - K_n\| \times \|u - u_n\|_\infty$$

Combiné avec (3.29), cela montre l'affirmation que  $\|u - u_n\|_\infty$  et  $\|(K - K_n)u\|_\infty$  convergent vers zéro avec la même vitesse.

**Erreur de consistance** : est défini par la formule suivante :

$$\delta_n(u) = \left| \int_0^1 h(t, s, u(s)) ds - \sum_{j=1}^n w_j h(t, t_j, u(t_j)) \right|.$$

On suppose que la méthode d'intégration de Nyström est consistante, c.à.d :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n(u) = 0$ .

**Lemme 3.2.2.** Soit la suite  $(a_k)_{k \geq 0}$  défini par la formule de récurrence suivante :

$$\begin{cases} a_0 > 0; \text{ tel que } : x_2 \leq a_0 < x_1. \\ a_{k+1} = f_n(a_k); k \geq 0. \end{cases}$$

où :  $f_n(x) = x^2 + C_2 \delta_n$  et

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4C_2 \delta_n}}{2}, \\ x_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4C_2 \delta_n}}{2}. \end{cases}$$

Alors ; pour  $n$  assez grand :  $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k(n) = x_2(n)$ .

**Preuve 3.2.4.** On a :

$$f_n(x) = x^2 + C_2 \delta(n),$$

Alors :  $f'_n(x) = 2x$

$f'_n$  a même signe de  $x$ . Ce qui implique que  $f_n$  est croissante sur  $[0, +\infty[$ . Et comme  $a_{k+1} = f_n(a_k)$  alors  $(a_k)$  est à variation constante ; donc il suffit de comparer les deux premiers termes afin de déterminer sa variation.

On étudie le signe de  $a_1 - a_0$ .

$a_1 - a_0 = a_0^2 + C_2 \times \delta_n - a_0$  ce qui revient à étudier le signe de  $x^2 + C_2 \times \delta_n - x$  pour  $n$  assez grand  $\Delta = 1 - 4C_2 \times \delta_n > 0$  ce qui donne :

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4C_2 \delta_n}}{2}; x_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4C_2 \delta_n}}{2}$$

comme  $x_2 < a_0 < x_1$ . alors :

$$f_n(a_0) - a_0 < 0 \Rightarrow a_1 < a_0.$$

Ce qui implique que la suite  $(a_k)_{k \geq 0}$  est décroissante.

Calcul de limite :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{k+1}(n) = \lim_{k \rightarrow +\infty} a_k(n) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f_n(a_k(n)).$$

Ce qui équivaut à résoudre l'équation :  $x = f_n(x) \Leftrightarrow x^2 - x + C_2 \times \delta_n = 0$   
 $\Delta = 1 - 4C_2 \times \delta_n$ , Alors l'équation admet deux solutions différentes, et comme la suite  $(a_k)_{k \geq 0}$  est décroissante et  $a_0 < x_1$ .

On conclue que :  $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k(n) = x_2(n)$ .

**Théorème 3.2.3.** soit  $u \in \Omega$  un zéro de  $F$ . supposons qu'il existe  $r > 0$  tel que :  $F'_n$  est  $l_n$ -Lipschitzienne sur  $\Omega_r(u)$ .

Alors la suite définie par :

$$\begin{cases} u_n^0 \text{ choisi au voisinage de } u. \\ u_n^{k+1} = u_n^k - [F'_n(u_n^k)]^{-1} F_n(u_n^k). \end{cases}$$

Converge :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u - u_n^k\| = 0$ .

**Preuve 3.2.5.** En utilisant le théorème précédent, il est clair que  $[F'_n(u_n^k)]^{-1}$  existe et  $\| [F'_n(u_n^k)]^{-1} \| \leq C_y$ , avec  $C_y < \infty$  une constante appropriée.

$$\begin{aligned} \text{On pose : } F(u)(t) &= u(t) - \int_0^1 h(t, s, u(s)) ds - f(t). \\ F_n(u_n^k)(t) &= u(t) - \sum_{j=1}^n w_j h(t, t_j, u(t_j)) - f(t). \end{aligned}$$

$$\text{alors : } F'_n(u_n^k) h(t) = h(t) - \sum_{j=1}^n w_j \frac{\partial h}{\partial u}(t, t_j, u_n^k(t_j)) h(t_j).$$

On veut montrer que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty, k \rightarrow +\infty} \|u - u_n^k\| = 0$ .

sachant que  $F(u) = 0$ , on a :

$$\begin{aligned} u_n^{k+1} - u &= u_n^k - u - [F'_n(u_n^k)]^{-1} [F_n(u_n^k) - F_n(u) + F_n(u) - F(u)]. \\ &= u_n^k - u - [F'_n(u_n^k)]^{-1} [F_n(u_n^k) - F_n(u)] \\ &\quad - [F'_n(u_n^k)]^{-1} [F_n(u) - F(u)]. \end{aligned}$$

En utilisant le développement de Taylor :

$$\begin{aligned} F_n(u_n^k) - F_n(u) &= F_n'(u)(u_n^k - u) + \theta((u_n^k - u)^2) \\ [F_n'(u_n^k)]^{-1} [F_n'(u)(u_n^k - u) + \theta((u_n^k - u)^2)] \\ &= [F_n'(u_n^k)]^{-1} F_n'(u)(u_n^k - u) + [F_n'(u_n^k)]^{-1} \theta((u_n^k - u)^2) \end{aligned}$$

et comme :

$$\begin{aligned} [F_n'(u_n^k)]^{-1} F_n'(u) &= [F_n'(u_n^k)]^{-1} [F_n'(u_n^k) + F_n'(u) - F_n'(u_n^k)] \\ &= I + [F_n'(u_n^k)]^{-1} [F_n'(u) - F_n'(u_n^k)]. \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} [F_n'(u_n^k)]^{-1} F_n'(u)(u_n^k - u) + [F_n'(u_n^k)]^{-1} \theta((u_n^k - u)^2) \\ &= [I + [F_n'(u_n^k)]^{-1} [F_n'(u) - F_n'(u_n^k)]] (u_n^k - u) \\ &\quad + [F_n'(u_n^k)]^{-1} \theta((u_n^k - u)^2). \\ &= (u_n^k - u) + [F_n'(u_n^k)]^{-1} [F_n'(u) - F_n'(u_n^k)] (u_n^k - u) \\ &\quad + [F_n'(u_n^k)]^{-1} \theta((u_n^k - u)^2) \end{aligned}$$

On substituant, on obtient :

$$\begin{aligned} u_n^{k+1} - u &= - [F_n'(u_n^k)]^{-1} [F_n'(u) - F_n'(u_n^k)] (u_n^k - u) \\ &\quad - [F_n'(u_n^k)]^{-1} \theta((u_n^k - u)^2) - [F_n'(u_n^k)]^{-1} [F_n(u) - F(u)]. \\ &= [F_n'(u_n^k)]^{-1} [F_n'(u_n^k) - F_n'(u)] (u_n^k - u) \\ &\quad - [F_n'(u_n^k)]^{-1} \theta((u_n^k - u)^2) - [F_n'(u_n^k)]^{-1} [F_n(u) - F(u)]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|u_n^{k+1} - u\| &\leq \left\| F'_n(u_n^k)^{-1} \right\| \times l \times \|u_n^k - u\|^2 + C_1 \left\| F'_n(u_n^k)^{-1} \right\| \|u_n^k - u\|^2 \\
&\quad + \left\| F'_n(u_n^k)^{-1} \right\| \|F_n(u) - F(u)\|. \\
&\leq C_y \times (l + C_1) \times \|u_n^k - u\|^2 + C_y \|F_n(u) - F(u)\|. \\
&\leq C_2 \|u_n^k - u\|^2 + \delta_n(u).
\end{aligned}$$

avec  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n(u) = 0$ .

En multipliant cette dernière inégalité par  $C_2$  une constante positive, on obtient :

$$C_2 \|u_n^{k+1} - u\| \leq C_2^2 \|u_n^k - u\|^2 + C_2 \delta_n(u). \text{ avec } \lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n(u) = 0.$$

Il est clair que :  $C_2 \|u_n^{k+1} - u\| \leq a_{k+1}(n)$ .

où la suite de fonction  $(a_{k+1}(n))_{k \geq 0}$  est définie dans le lemme précédent.

Et comme :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k(n) = x_2(n) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4C_2\delta_n}}{2}$$

avec  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n = 0$ .

$$\text{pour simplification, on a : } x_2(n) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4C_2\delta_n}}{2} = \frac{4C_2\delta_n}{2(1 + \sqrt{1 - 4C_2\delta_n})}.$$

$$\begin{aligned}
1 &\leq 1 + \sqrt{1 - 4C_2\delta_n} \leq 2. \\
\Rightarrow \frac{1}{2} &\leq \frac{1}{1 + \sqrt{1 - 4C_2\delta_n}} \leq 1.
\end{aligned}$$

Alors :  $x_2(n) \leq 2C_2\delta_n$ . avec  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n = 0$ .

En substituant, on obtient :

$$0 \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} C_2 \|u_n^{k+1} - u\| \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{k+1}(n)$$

$$0 \leq \lim_{k \rightarrow +\infty, n \rightarrow +\infty} C_2 \|u_n^{k+1} - u\| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} 2C_2\delta_n.$$

*D'après le théorème d'encadrement, on conclut que la suite  $(u_n^k)_{n \geq 0}$  converge :*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty, n \rightarrow +\infty} \|u_n^k - u\| = 0.$$

# Chapitre 4

## Exemples numériques

**Exemple 4.0.1.** On considère l'équation intégrale linéaire de Fredholm suivante :

$$u(t) = \frac{1}{5} \int_0^1 \frac{u(s)}{1+t^2+s^2} ds + 10 \times t + \log\left(\frac{1+t^2}{2+t^2}\right), 0 \leq t, s \leq 1.$$

à fin de résoudre cet équation, on va utiliser une approximation de l'intégrale par la méthode de Nyström plus précisément la méthode de trapèze. Donc notre équation devient :

$$u_n(t) = \sum_{j=1}^n w_j k(t, t_j) x_j + f(t).$$

$$\text{où : } k(t, t_j) = \frac{u(t_j)}{1+t^2+t^2(j)},$$

$$f(t) = 10 \times t + \log\left(\frac{1+t^2}{2+t^2}\right)$$

et  $x_j$  : est une approximation de la solution exacte.

ce qui revient à résoudre :  $(I - A)x = b$ .

où  $I$  :  $\text{eye}(n+1)$ .

$A_{ij}$  :  $w_j k(t_i, t_j)$ .

n	Erreur
5	0.0076
10	0.0019
100	1.9003e-005
1000	1.9003e-007

TABLE 4.1 – table de l'erreur de problème linéaire

$b_i : f(t_i)$ .

la méthode de trapèze :  $w_1 = w_n = \frac{h}{2}$ .

$w_j = h, 2 \leq j \leq n - 1$ .

$h = \frac{b-a}{n}, t_j = a : h : b$ .

La solution exacte est donnée par :  $u(t) = 10 \times t$

La solution approchée  $u_n(t)$  de  $u(t)$  est obtenu par la méthode de trapèze.

Le tableau (4.1) présente l'erreur  $E_n$  on prenant différents subdivisions  $n$ .  
où :

$$E_n = \max_{0 \leq j \leq n} \|u(t_j) - u_n(t_j)\|_{\infty}$$

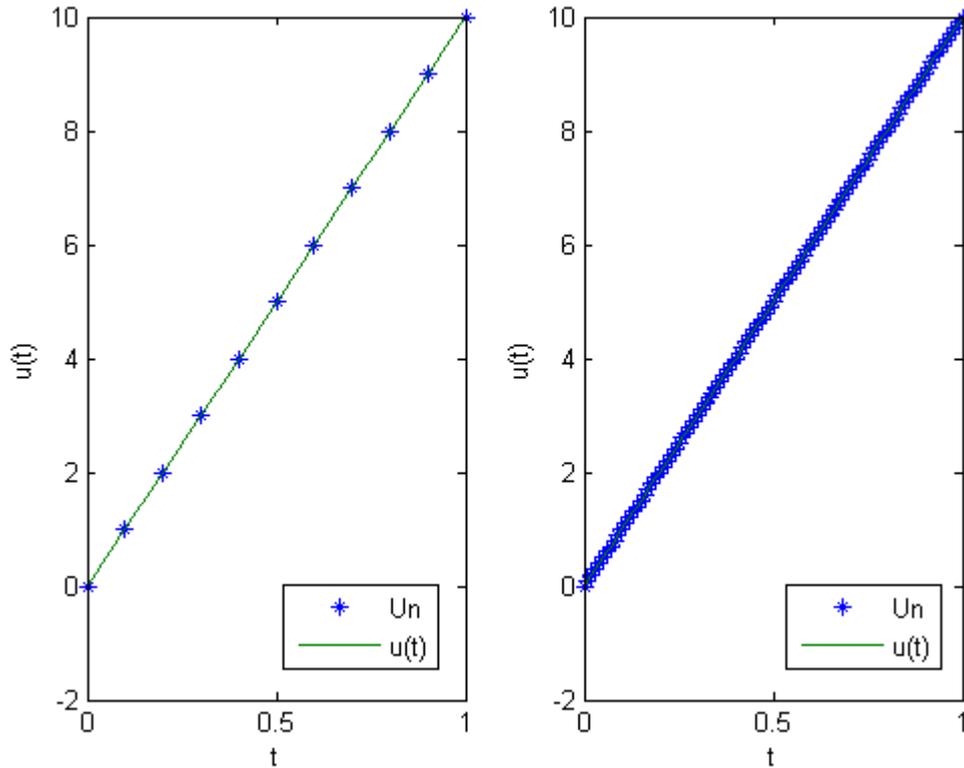


FIGURE 4.1 – le cas linéaire

**Exemple 4.0.2.** On considère l'équation intégrale non linéaire de Fredholm suivante :

$$u(t) = \int_0^1 \frac{2s}{1+t^2+u^2(s)} ds + t + \log\left(\frac{1+t^2}{2+t^2}\right), 0 \leq t, s \leq 1.$$

Pour résoudre cet équation, on va utiliser la méthode de Newton Kantorovich :

$$\begin{cases} u^0 \text{ bien choisie} \\ u_n^{k+1} = u_n^k - y_n^k \end{cases}$$

où  $y_n^k$  est une solution de l'équation :

$$F'(u_n^k) y_n^k = F(u_n^k).$$

$$F(u_n^k)(t) = u_n^k(t) - \sum_{j=0}^n w_j \times \frac{2 \times t_j}{1+t^2+(u_n^k(t_j))^2} - \left(t + \log\left(\frac{1+t^2}{2+t^2}\right)\right).$$

k/n	5	10	100	1000
1	0.0050	0.0012	1.8915e-005	6.7654e-006
2	0.0049	0.0012	1.8915e-005	1.2270e-007
3	0.0049	0.0012	1.2270e-005	1.2270e-007
4	0.0049	0.0012	1.2270e-005	1.2270e-007
5	0.0049	0.0012	1.2270e-005	1.2270e-007

TABLE 4.2 – table de l'erreur de problème non linéaire

$$F'(u_n^k)(h)(t) = (I - K_n)(h)(t) . \text{ calculé en chapitre 3}$$

où :

$$K_n h(t) = \sum_{j=0}^n w_j \times \frac{-4t_j \times u_n^k(t_j)}{\left(1 + t^2 + (u_n^k(t_j))^2\right)^2} h(t)$$

la solution exacte est :  $u(t) = t$ .

la solution approchée  $u_n^k(t)$  de  $u(t)$  est obtenue par la méthode de Newton Kantorovich.

Le tableau suivant présente l'erreur  $E_n$  dans différents itérations  $k$  et différents subdivisions  $n$ .

où :

$$E_n = \max_{0 \leq j \leq n} \|u(t) - u_n^k(t)\|_{\infty}$$

Nous remarquons que l'erreur entre la solution exacte et la solution approximative de cet exemple converge vers zéro lorsque  $n$  tend vers l'infini. Cela montre la convergence et l'efficacité de la méthode de Newton-Kantorovich.

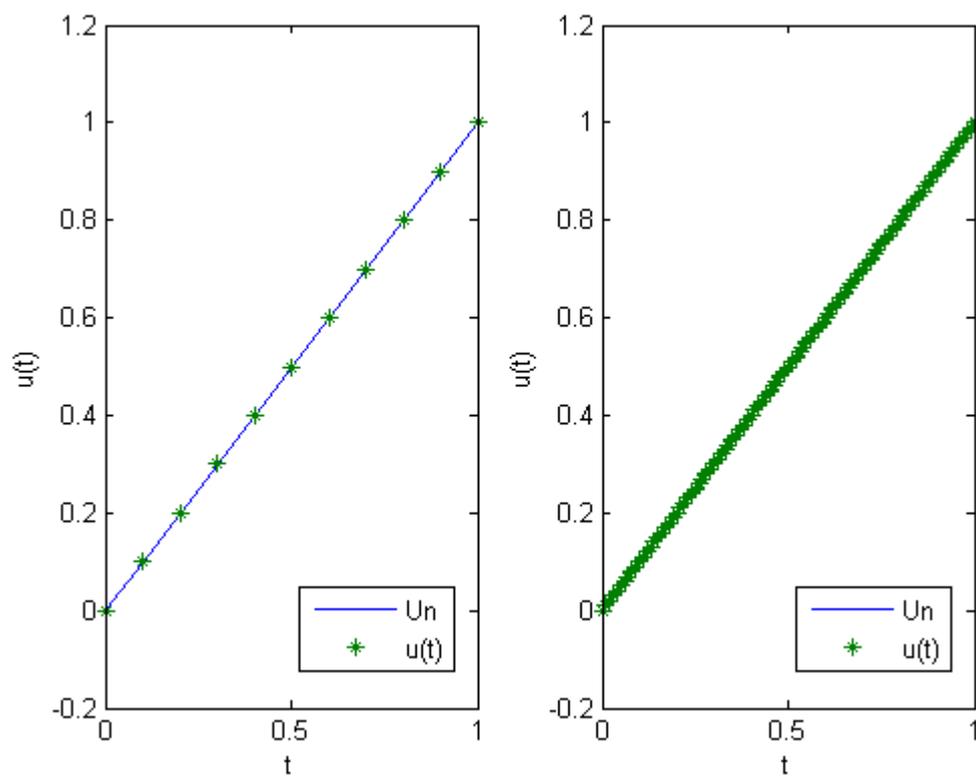


FIGURE 4.2 – le cas Non linéaire

# *Conclusion*

Dans notre travail, on a étudié les équations intégrales non linéaires de Fredholm.

La stratégie classique de résolution de cet équation est de discrétiser l'équation par une méthode de Nyström par exemple puis de résoudre le système non linéaire par une méthode de Newton- Kantorovitch par exemple. Dans ce cas, nous obtenons une approximation de la solution approchée.

Notre objectif est d'appliquer une nouvelle stratégie pour la résolution des équations intégrales non linéaires on commençant par linéarisation par la méthode de Newton-Kantorovitch puis on discrétise la solution par la méthode de Nyström.

Au biais de cette stratégie on a construit une suite d'itérées qui, quand elle converge, tend vers la solution exacte  $u$  quand le nombre d'itérées de la méthode de Newton tend vers  $+\infty$  et ceci pour n'importe quel paramètre fixé  $n$

A partir les résultats numériques, on peut conclure que la suite définie par la méthode de Newton-Kantorovitch un très puissant outil pour approcher la solution exacte.

# Bibliographie

- [1] H.BRÉZIS, "Analyse fonctionnelle théorie et applications", Masson, Paris, 1987.
- [2] M.GUESBA, "Sur quelques équations intégrales non linéaires", Mémoire de Magister université de Msila, 2012.
- [3] A.KHIRANI, "Etude des équations intégrales non linéaires de Volterra dans les espaces fonctionnelles", Thèse de Doctorat université de Msila, 2016.
- [4] LAURENCE GRAMMONT, MARIO AHUES AND FILOMENA D.D'ALMEIDA, "For Nonlinear Infinite Dimensional Equations, Which To Begin With : Linearization or Discretization?", Journal of Integral Equations and Applications, Volume 26, Number 3, Fall 2014.
- [5] F.BACHIRI, "Théorèmes du point fixe et Applications aux Equations intégrales", Mémoire de master, université de Msila, 2016.
- [6] L.KANTOROVITCH, G.AKILOV, " Analyse fonctionnelle : Equations fonctionnelles", Tome 2, Editions Mir. Moscou, 1981.
- [7] ATKINSON KENDALL, WEIMIN HAN, "Theoretical Numerical Analysis : A Functional Analysis Framework".Springer,2005.
- [8] SOUMIA SAIDI, "Cours sur la Théorie Spectrale des Opérateurs",2016-2017.
- [9] A.CHAOUI, "Cours de l'Analyse Fonctionnelle", 2017-2018.
- [10] JEAN-PIERRE RAYMOND, Université Paul Sabatier, Toulouse.